UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Pedro Manoel Sardinha Bico Soares

Decoerência e recoerência na dinâmica de estados quânticos: influência da injeção de ruído estocástico

São Carlos

2014

Pedro Manoel Sardinha Bico Soares

Decoerência e recoerência da dinâmica de estados quânticos: influência da injeção de ruído estocástico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares-Pinto

Versão Original

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Soares, Pedro Manoel Sardinha Bico
Decoerência e recoerência na dinâmica de estados quânticos: influência da injeção de ruído estocástico / Pedro Manoel Sardinha Bico Soares; orientadora Diogo de Oliveira Soares-Pinto -- São Carlos, 2014.
56 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Decoerência. 2. Recoerência. 3. Ruído estocástico. 4. Informação quântica. I. Soares-Pinto, Diogo de Oliveira, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Pedro Manoel Sardinha Bico Soares

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 17/02/2014

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Diogo de Oliveira Soares Pinto

Instituição: IFSC/USP

Prof(a). Dr(a). Celso Jorge Villas Bôas

Instituição: UFSCar/São Carlos

Prof(a). Dr(a). Felipe Fernandes Fanchini

Instituição: UNESP/Bauru

AGRADECIMENTOS

Prestes a atingir mais um objetivo em minha vida, é com muito carinho que escrevo estes agradecimentos. Neste momento me lembro das dificuldades que enfrentei para que este trabalho se tornasse realidade e de todos que estiveram presentes neste período. Antecipadamente, peço desculpas àqueles que porventura eu esquecer de citar. Antes de qualquer pessoa, agradeço à Deus pelas alegrias e pelo conforto nas situações desfavoráveis, pois sei que a todo momento esteve presente ao meu lado. De todas as pessoas à agradecer, três delas são por demais especiais para mim: minha mãe Shirlei, meu tio Armando e minha tia Maria, que me deram todo o suporte familiar para que eu chegasse onde estou hoje.

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador: Prof. Diogo O. Soares-Pinto, pelos conselhos, por acreditar sempre na minha capacidade e me ensinar a dar os primeiros passos como pesquisador. Ainda na esfera profissional, agradeço ao Prof. Miled H. Y. Moussa pelas dicas e contribuições à este trabalho. Também agradeço a disponibilidade do Prof. Adrían Budini, de Gerardo Adesso e de Mickel A. Ponte. Mais recentemente, sou grato à André del Bianco pela ajuda com os gráficos da dissertação.

Dentre os meus amigos mais próximos, agradeço à Guilherme Sestito, Luís Gustavo Iemma e sua esposa Daniela, Tiago César Santos, Victor Teizen, Rafael Furlan, Aline Marciano e Jaqueline Souza pelas conversas descontraídas e palavras de apoio. Não poderia me esquecer da galera do Edifício Princesa Isabel: Silvano Pião, Sandro Preto, Leandro Bergamo, Taiane Ramos, Roberto Rocco e sua mãe Gertrudes Rocco, Marcela Argentin, Adriel Carecho, Carlos Kruk, Nayara Pimentel e o popular "seu Marcos".

Todos que me conhecem sabem do meu gosto por parar para uma conversa e fazer novos amigos. Esta característica me fez acumular amizades no ambiente de trabalho. Tenho muito a agradecer ao Prof. Eduardo R. de Azevedo, Prof. Euclydes Marega, Emerson Barbano, Rodrigo S. Veiga, Felipe Penha, Guilherme Prata, Marcos Felipe Sampaio, Vitor Serrão, Julio Chinelato, Gladiane Volpi, Adrielle Débora, Victor Santos, e obviamente, aos meus colegas de sala: Marcio Cobo, Jaciara Cássia, Isabela Almeida, Oigres Bernardinelli, Wesley Bezerra, Fabiana Diuk e Giovana Ferreira. O tempo passa e cada um segue o seu caminho, mas saibam que sempre estarei disposto à um café para colocarmos o papo em

dia.

Me sinto na obrigação de agradecer à todos os funcionários do Instito de Física de São Carlos, e aos docentes que me moldaram como físico durantes meus anos de graduação. Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Este trabalho foi financiado pela
CAPES

"Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá."

AYRTON SENNA (1960-1994)

Resumo

SOARES, P. M. S. B. *Decoerência e recoerência da dinâmica de estados quânticos:* influência da injeção de ruído estocástico. 2014. 56 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

A aplicação da Mecânica Quântica para o processamento de informação chamou a atenção para o problema da perda de características quânticas e, conseqüentemente, estimulou os estudos de tal fenômeno. Desde então, uma das maiores dificuldades neste campo é responder a pergunta: Como entender a interação entre sistema e ambiente? Em sistemas quânticos abertos tal interação é responsável pelo fenômeno da decoerência, que transforma um estado quântico inicialmente puro em uma mistura estatística de estados possíveis. Banhos térmicos são comumente utilizados para modelar a influência inevitável do ambiente e descrever matematicamente seus efeitos. Muitos estudos têm sido realizados no sentido de construir mecanismos que evitam a perda de informação para o ambiente, recuperando-se a potencialidade oferecida pelo mundo quântico. Assim, seria possível a utilização de um ruído estocástico para anular os efeitos do ruído térmico? Em outras palavras, queremos construir um ambiente artificial onde a ação do banho térmico é minimizada devido à presença de um campo estocástico. O objetivo deste trabalho é investigar a influência da injeção de um ruído estocástico colorido na dinâmica de um oscilador harmônico em contato com um banho térmico, quando o sistema de interesse é preparado em um estado coerente. Nós faremos isso através de uma equação mestra quântica, abordando-a com o auxílio da representação P de Glauber-Sudarshan. Será sugerido que a recoerência causada pelo ruído estocástico colorido é uma assinatura da não-Markovianidade.

Palavras-chave: Decoerência. Recoerência. Ruído estocástico. Informação quântica.

Abstract

SOARES, P. M. S. B. *Decoherence and recoherence in quantum states dynamics:* influence of the injection of a stochastic noise. 2014. 56 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

The application of Quantum Mechanics to information processing called attention to the problem of losing quantum characteristics and, consequently, stimulated the studies of such phenomenon. Since then, one of the biggest difficulties in this field is to answer the question: How can the interaction between system and environment be understood? In open quantum systems such interaction is responsible for the decoherence phenomenon, which turns a quantum pure initial states into a statistical mixture of possible states. Thermal environments are commonly used to model the unavoidable influence of the environment and to mathematically describe its effects. Many studies have been done in order to build a mechanism that avoids the loss of information to the environment, recovering the potentiality offered by the quantum world. Thus, would be possible to use a stochastic noise to cancel the thermal noise effects? In other words, we want to build an artificial environment where the action of the thermal bath is minimized due to the presence of a stochastic field. The purpose of this work is to investigate the influence of the injection of a colored stochastic noise in the dynamics of a harmonic oscillator in contact with a thermal bath, when the system of interest is initially prepared in a coherent state. We are going to do this through a Glauber-Sudarshan P-representation approach to a quantum master equation. It will be suggested that the recoherence caused by the colored stochastic noise is a signature of non-Markovianity.

Keywords: Decoherence. Recoherence. Stochastic noise. Quantum information.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Padrão oscilatorio induzido no sistema de interesse (OH) pelo bombeio estocástico para o função de correlação escolhida (4.4). Parâmetros utilizados: $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$. 41

Figura 4.2 – Número médio de excitações do sistema de interesse (OH). A linha contínua mostra o padrão oscilatório da energia num cenário de ação conjunta do bombeio estocástico com o banho, enquanto a linha tracejada mostra o sistema de interesse atingindo o valor médio de excitações do banho na ausência do bombeio externo. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$. . 46

Figura 4.3 – Comportamento dos elementos não-diagonais $\langle 0|\rho_S^{(I)}|1\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_S^{(I)}|2\rangle(t)$ ou coerências. A linha contínua mostra o fenômeno da recoerência devido à influência do bombeio estocástico sobre o banho, enquanto a linha tracejada mostra apenas sua ação dissipativa. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$. 48

Figura 4.4 – Comportamento dos elementos diagonais $\langle 0|\rho_S^{(I)}|0\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_S^{(I)}|1\rangle(t)$ ou populações. A linha contínua mostra a redefinição do estado de equilíbrio devido à influência do bombeio estocástico sobre o banho, enquanto a linha tracejada mostra o sistema de interesse atingindo a distribuição térmica na ausência do bombeio externo. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$. 49

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS 21

2.1 O formalismo do operador densidade 21

2.2 Oscilador Harmônico 23

2.3 Estados coerentes do oscilador harmônico 25

2.4 A representação P de Glauber-Sudarshan 27

3 SISTEMA QUÂNTICO SOB A AÇÃO DE UM BANHO TÉRMICO E O PAPEL DA INJEÇÃO DE RUÍDO ESTOCÁSTICO 29

3.1 O oscilador harmônico dissipativo 29

3.1.1 A hipótese de acoplamento fraco entre o sistema de interesse e o banho térmico 30

3.1.2 A aproximação de Born-Markov e a equação mestra quântica na forma de Lindblad 32

3.2 O oscilador harmônico sob a ação de um bombeio estocástico 34

3.2.1 A dinâmica do operador densidade estocástico: Teorema de Novikov 35

3.2.2 Cálculo da função resposta e a equação mestra quântica na forma de Lindblad 36

4 INFLUÊNCIA DA INJEÇÃO DE RUÍDO ESTOCÁSTICO SOB A AÇÃO DO BANHO TÉRMICO 39

4.1 O modelo para a competição entre banho térmico e bombeio estocástico . 39
4.2 Cálculo da função P de Glauber-Sudarshan para o sistema inicialmente em um estado coerente 42
4.3 Análise do valor médio do operador número e a definição de um novo estado de equilíbrio 45

5 OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS 51

REFERÊNCIAS 52

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sistemas quânticos abertos e suas características dinâmicas têm atraído bastante atenção atualmente. Isso se dá porque o praticamente inevitável acoplamento entre o sistema quântico de interesse e o ambiente no seu em torno leva a uma destruição da coerência e do caráter quântico.[1] Características essas que são fundamentais para o aumento da capacidade e/ou da eficiência das possíveis aplicações tecnológicas no processamento da informação.[2,3] Em outras palavras, se a informação codificada no sistema quântico for perdida para o ambiente, sua aplicabilidade deixa de ser superior a que qualquer sistema clássico pode nos dar. Assim, o entendimento acerca da interação sistema-ambiente e seus efeitos tal como a decoerência[4,5] e a dissipação, pode levar ao desenvolvimento de técnicas ou dispositivos capazes de manter essas tão desejadas características quânticas e, consequentemente, a uma maior eficiência dos processos.[6]

Contudo, em alguns casos, a informação perdida pode ser recuperada, ao menos parcialmente.[7,8] Cabe notar que a dinâmica de um sistema quântico aberto é tipicamente descrita a partir da aproximação de Born-Markov o que leva a uma equação mestra na forma de Lindblad.[1] Essa aproximação deixa de fora possíveis efeitos de memória, tal como a recoerência, não permitindo uma correta descrição da dinâmica do sistema. Sistemas que apresentam esse efeito de recoerência têm sido chamados de sistemas quânticos abertos não-Markovianos[9,10] e suas aplicabilidades no processamento da informação quântica têm sido amplamente especuladas nos dias de hoje. Esse efeito de memória pode surgir tanto naturalmente quanto pode ser induzido. Desenvolver métodos de indução do mesmo tem grande valia, pois transformam dinâmicas de sistemas que a priori não teriam utilidade devido à decoerência em dinâmicas que preservam as características quânticas originais

e, portanto são úteis para as tecnologias quânticas.

A proposta dessa dissertação é estudar a dinâmica de um sistema aberto, nomeadamente um oscilador harmônico acoplado a um conjunto de outros osciladores harmônicos que descrevem matematicamente um ambiente em que é permitida a troca de energia, e um método de promover a recoerência do estado quântico original. Essa recoerência será induzida pelo bombeio de um ruído estocástico colorido no sistema o que, de certa forma, é contra intuitivo. Discutiremos os aspectos não-Markovianos dessa nova dinâmica e indicaremos assinaturas do mesmo. As consequências deste bombeio também serão mostradas.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, faremos uma apresentação dos conceitos fundamentais, ou seja, do ferramental matemático para o entendimento da dinâmica do sistema. No Capítulo 3, apresentaremos o sistema aberto de interesse e encontraremos a equação mestra que rege sua dinâmica. No Capítulo 4, apresentaremos o ruído estocástico colorido e encontraremos também a equação mestra que descreve a dinâmica causada pelo mesmo. Por fim, ainda neste capítulo, vamos comparar a ação das duas dinâmicas no estado inicial do oscilador harmônico e mostraremos que em determinadas circunstâncias podemos induzir o efeito de recoerência.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 O formalismo do operador densidade

A teoria quântica é capaz de prever os resultados de uma medida e valores médios de observáveis a partir do conhecimento do estado em que o sistema de interesse se encontra. De maneira conveniente, escrevemos $|\psi\rangle$ utilizando a base de auto-estados comum aos observáveis que particularmente estamos interessados:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\Phi_k\rangle \ . \qquad \langle\Phi_j|\Phi_k\rangle = \delta_{j,k} \tag{2.1}$$

Uma vez que possamos repetidas vezes preparar o sistema de interesse em qualquer superposição coerente de tais auto-estados, obteremos os respectivos auto-valores com probabilidade de ocorrência $|c_k|^2$. Tais características constituem a máxima informação possível acerca de um sistema quântico, o que faz com que estados como (2.1) sejam conhecidos como puros e possuam dinâmica governada pela equação de Schrödinger:

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\psi(t)\rangle \ , \tag{2.2}$$

onde $\mathcal{H}$ é o Hamiltoniano do problema.[11]

Em sistemas quânticos abertos não há garantia de que as variáveis envolvidas durante a preparação do vetor de estado comutam entre si, o que consequentemente provoca incerteza sobre a medida dos observáveis de interesse.[12,13] Para caracterizar esta informação

incompleta, associamos probabilidades p_n à estados puros $|\psi_n\rangle$, que são normalizados mas não necessariamente ortogonais, constituindo assim um ensemble de estados quânticos. Caso deseja-se calcular o valor esperado de um certo observável $\mathcal{O}$, é necessário ponderar a contribuição de cada um dos estados do ensemble:

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \sum_n p_n \langle\psi_n|\mathcal{O}|\psi_n\rangle \ . \qquad\qquad \sum_n p_n = 1 \tag{2.3}$$

Quando um sistema físico não pode ser descrito através de um único $|\psi\rangle$, dizemos que o mesmo se encontra em uma mistura estatística de estados quânticos.[14]

Para uma descrição completa e coerente com a condição estatística de alguns sistemas quânticos, utilizamos o operador densidade:[15]

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \tag{2.4}$$

Note que o estado puro é um caso particular, onde apenas um micro-estado possui probabilidade não nula. A escolha arbitrária de uma base nos permite dar ao operador densidade uma representação matricial em $\{|\Phi_k\rangle\}$:

$$\langle\Phi_i|\rho|\Phi_j\rangle = \sum_n p_n c_i^{(n)} c_j^{*(n)} \ , \tag{2.5}$$

onde os elementos diagonais ($i = j$) são positivos definidos e recebem o nome de populações. Esses elementos são interpretados como a probabilidade do sistema ser encontrado em um dos auto-estados do conjunto de observáveis que define a base. A assinatura quântica da superposição de estados se apresenta por meio dos elementos não-diagonais ($i \neq j$), ou coerências.[16] De (2.5) percebe-se claramente que ρ é hermitiano e que a pobablidade é conservada, ou seja $\mathrm{Tr}\rho = 1$. Esta nova ferramenta traz consigo toda a informação sobre o ensemble de estados puros, facilitando o cálculo do valor esperado do observável $\mathcal{O}$:

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \mathrm{Tr}\{\mathcal{O}\rho\} \ . \tag{2.6}$$

Uma mistura estatística é diferente de uma superposição de estados, que por si só gera um estado puro. A medida de pureza mais utilizada para distinguir entre estas duas situações é definida através de $\mathrm{Tr}\rho^2$:

$$\frac{1}{d} \leq \mathrm{Tr}\rho^2 \leq 1 \ , \tag{2.7}$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert do sistema de interesse. Estados puros possuirão naturalmente $\mathrm{Tr}\rho^2 = 1$.

Se cada estado do ensemble evolui temporalmente segundo (2.2), então teremos a seguinte equação dinâmica para o operador densidade:

$$\imath\hbar\frac{d\rho(t)}{dt} = [\mathcal{H}, \rho(t)] \ . \tag{2.8}$$

Em especial para Hamiltonianos independentes do tempo, a equação de Liouville-von Neumann (2.8) é solucionada por:

$$\rho(t) = U(t, t_o)\rho(t_o)U^\dagger(t, t_o) \ , \qquad U(t, t_o) = e^{-\imath\mathcal{H}(t-t_o)/\hbar} \tag{2.9}$$

onde $U(t, t_o)$ é o operador de evolução temporal e o instante arbitrário t_o determina a condição inicial: $U(t_o, t_o) = I$. Visto que a probabilidade deve ser conservada em qualquer instante de tempo, chega-se à conclusão de que o sistema possui neste caso dinâmica unitária: $U^\dagger(t, t_o)U(t, t_o) = I$.[1]

2.2 Oscilador Harmônico

Sob o ponto de vista da formulação clássica do problema, trata-se da solução aproximada para a dinâmica de uma partícula de massa m suficientemente próxima ao ponto de equilíbrio estável de um potencial unidimensional $V(X)$ o qual está está submetida. Fixadas as suas condições iniciais de posição e momento, executará movimento harmônico simples em torno do equilíbrio, limitando-se aos pontos de retorno permitidos. O oscilador harmônico (OH) é frequentemente utilizado para modelar sistemas físicos que sob certas condições podem ser descritos por um Hamiltoniano da forma:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_o^2 X^2}{2} \ , \tag{2.10}$$

onde ω_o é a frequência natural de oscilação.

No contexto da Mecânica Quântica, costuma-se tratar o Hamiltoniano acima utilizando operadores não-hermitianos definidos em termos dos observáveis posição e momento.[11]

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega_o}{\hbar}}X + \frac{\imath}{\sqrt{m\hbar\omega_o}}P\right] \text{ e} \tag{2.11a}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega_o}{\hbar}}X - \frac{\imath}{\sqrt{m\hbar\omega_o}}P\right] . \tag{2.11b}$$

Lembrando que tais observáveis obedecem a regra de comutação $[X, P] = \imath\hbar$, reescrevemos (2.10) de acordo com as definições acima de a e $a^\dagger$:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_o\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) . \qquad [a, a^\dagger] = 1 \tag{2.12}$$

Os estados que formam a base diagonal à $\mathcal{H}$ são chamados de estados de número:

$$\{|n\rangle\} , \qquad \langle m|\, n\rangle = \delta_{m,n} \qquad m, n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

cujo nome provém da interpretação física do espectro de auto-valores de $N = a^\dagger a$ como sendo o número de excitações no sistema.[17] Logo, N também é conhecido como operador número. É possível mostrar que formam uma base completa:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I \tag{2.14}$$

e que $a\,|n\rangle$ e $a^\dagger\,|n\rangle$ também são auto-estados de N com seus respectivos auto-valores diminuido e aumentado. Tal resultado implica em

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \text{ e} \tag{2.15a}$$

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle , \tag{2.15b}$$

logo a e $a^\dagger$ recebem os nomes de operador de destruição e criação.[18,19]

2.3 Estados coerentes do oscilador harmônico

Uma partícula clássica tem seu estado completamente especificado num espaço de fases. Em contrapartida, encontra-se limitações na descrição quântica da mesma. Posição e momento formam um par de observáveis que não comutam entre si, não sendo possível obter informação simultânea sobre as duas grandezas físicas:[12,13]

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \,, \tag{2.16}$$

onde ΔX e ΔP são as variâncias associadas às mesmas. Conhecer uma delas implica em ter incerteza sobre a outra.

É notável a busca por estados quânticos capazes de reproduzir o comportamento clássico. Estados quase-clássicos ou coerentes, como também são conhecidos, promovem a correspondência entre os valores médios dos principais observáveis e seus respectivos resultados clássicos. Define-se o estado coerente de um oscilador harmônico como sendo o auto-estado do operador destruição[18,19] (2.11a):

$$a\,|\alpha_o\rangle = \alpha_o\,|\alpha_o\rangle \;, \qquad\qquad \alpha_o \in \mathbb{C} \tag{2.17}$$

onde o autovalor α_o está relacionado às condições iniciais de posição e momento de um OH clássico, sendo utilizado para parametrizar o mesmo no espaço de fases.

Como previsto, os valores médios dos observáveis posição, momento e energia de um OH que se encontra inicialmente em $|\alpha_o\rangle$ são idênticos aos clássicos. A única ressalva é o desconto da energia do vácuo em $\langle\mathcal{H}\rangle$ para que assim tenhamos a equivalência desejada. Além disso, o estado coerente (2.17) corresponde à um pacote de onda gaussiano de incerteza mímina e independente do tempo: $\Delta X \Delta P = \hbar/2$. Logo, o pacote de onda mantém a sua forma inicial e para $|\alpha_o| \gg 1$ descreve um OH macroscópico.[12,19]

As propriedades do estado coerente $|\alpha_o\rangle$ são melhor entendidas expandindo-o numa base de estados ortonormais. A base formada pelos auto-estados de $\mathcal{H}$ (2.13) é a escolha mais apropriada:

$$|\alpha_o\rangle = e^{-|\alpha_o|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha_o)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ . \tag{2.18}$$

De (2.18) obtemos a evolução temporal: $|\alpha_o(t)\rangle = |\alpha_o e^{-\iota\omega_o t}\rangle$, onde mais uma vez ocorre analogia com a dinâmica do OH clássico no espaço de fases.[12] O módulo quadrado dos coeficientes da expansão mostra que $|\alpha_o\rangle$ segue uma distribuição de probabilidades poissoniana:[20]

$$\mathcal{P}(n) = e^{-|\alpha_o|^2} \frac{|\alpha_o|^{2n}}{n!} \ , \tag{2.19}$$

onde $|\alpha_o|^2$ define o número médio de excitações neste estado. Por outro lado, pode-se gerar um estado coerente a partir do estado de vácuo:

$$|\alpha_o\rangle = D[\alpha_o]|0\rangle \ , \qquad D[\alpha_o] = \exp(\alpha_o a^\dagger - \alpha_o^* a) \tag{2.20}$$

onde $D[\alpha_o]$ é o operador deslocamento.[18,19] Talvez a propriedade mais interessante dos estados coerentes provenha do fato deles serem normalizados, porém não-ortogonais entre si. Isto fica evidente ao calcularmos o produto escalar:

$$\langle\alpha_o|\beta_o\rangle = e^{-|\alpha_o-\beta_o|^2/2} \ . \qquad \alpha_o, \beta_o \in \mathbb{C} \tag{2.21}$$

Com o auxílio da não-ortogonalidade (2.21) e da relação de completeza para os estados coerentes:

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = I \ , \qquad d^2\alpha = d\mathrm{Re}\{\alpha\}d\mathrm{Im}\{\alpha\} \tag{2.22}$$

qualquer estado $|\alpha_o\rangle$ pode ser expandido em termos de outros estados do contínuo, um indicativo de que a base é supercompleta.

2.4 A representação P de Glauber-Sudarshan

Mesmo descrevendo aspectos inerentes da Mecânica Quântica, apresentados na forma das coerências, o operador densidade possui características estatísticas que tornam inevitável a sua comparação com uma distribuição clássica de probabilidades. Esta interface entre o clássico e o quântico requer uma nova abordagem que estabeleça uma correspondência entre operadores e funções ordinárias, de forma que valores médios de observáveis podem ser calculados através de métodos estatísticos clássicos.

Para a construção da representação P de Glauber-Sudarshan, consideremos a base de auto-estados do operador destruição. Conforme comentado na seção (2.3), os estados coerentes do oscilador harmônico não são ortogonais e constituem uma base supercompleta.[18,19] Portanto, é possível escrever o operador densidade como uma soma diagonal de estados coerentes:

$$\rho = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha, \alpha^*) \ . \qquad d^2\alpha = d\mathrm{Re}\{\alpha\} d\mathrm{Im}\{\alpha\} \tag{2.23}$$

A expansão (2.23) não necessariamente exclui os elementos não-diagonais do operador densidade. Para isso, deveríamos escreve-lo utilizando a sua base de auto-estados.

Ao impormos a condição de normalização para o operador densidade, $\mathrm{Tr}\rho = 1$, nota-se que a função $P(\alpha, \alpha^*)$ faz o papel análogo ao de uma distribuição clássica de probalidades:

$$\int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) = 1 \ , \qquad d^2\alpha = d\mathrm{Re}\{\alpha\} d\mathrm{Im}\{\alpha\} \tag{2.24}$$

podendo ser utilizada para o cálculo de valores médios de observáveis, desde que estejam normalmente ordenados:[22]

$$\mathcal{O}_N(a, a^\dagger) = \sum_{j,k} C_{j,k} (a^\dagger)^j a^k \ , \tag{2.25}$$

ou seja, os operadores de criação à esquerda e os de destruição à direita. Distribuições de quase-probabilidade como a função $P(\alpha, \alpha^*)$ recebem tal nome por violarem alguns axiomas de Kolmorogov da teoria de probabilidades.[21] Possuem regiões no espaço de fases onde assumem valores negativos, e outras que não representam estados mutualmente exclusivos,

contradizendo respectivamente o primeiro e o terceiro axioma.

Continuando a busca por analogias com distribuições probabilidades clássicas, nos voltamos para o conceito de função característica.[20] Sua existência muitas vezes facilita o cálculo dos momentos da distribuição, e por definição, pode ser obtida através da transformada de Fourier da mesma. Na representação de Glauber-Sudarshan, a função caracteristica normalmente ordenada[23]

$$\chi_N(z, z^*) = \mathrm{Tr}\{\rho e^{za^\dagger} e^{-z^* a}\} \tag{2.26}$$

é a maneira alternativa de encontrarmos a distribuição de quase-probabilidade:

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z \; e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \chi_N(z, z^*) \qquad\qquad d^2z = d\mathrm{Re}\{z\} d\mathrm{Im}\{z\} \; . \tag{2.27}$$

Caso exista, a transformada de Fourier bi-dimensional de $\chi_N(z, z^*)$ (2.27) define univocamente a relação entre $P(\alpha, \alpha^*)$ e o operador densidade. Por meio de (2.4) calcula-se também os valores médios de todas as possíveis combinações normalmente ordenadas de a e $a^\dagger$:

$$\langle (a^\dagger)^j a^k \rangle = (-1)^k \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial (z^*)^k} \chi_N(z, z^*) \bigg|_{z=z^*=0} \; , \tag{2.28}$$

onde uma delas nos é mais interessante por se tratar do valor médio do operador número.

CAPÍTULO 3

SISTEMA QUÂNTICO SOB A AÇÃO DE UM BANHO TÉRMICO E O PAPEL DA INJEÇÃO DE RUÍDO ESTOCÁSTICO

3.1 O oscilador harmônico dissipativo

No estudo de fenômenos quânticos que envolvem a troca de energia entre sistema de interesse e o ambiente, um banho térmico composto por infinitos osciladores harmônicos desacoplados é o modelo mais utilizado. Logo, o Hamiltoniano do banho é descrito por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \ , \qquad\qquad [b_j, b_k^\dagger] = \delta_{j,k} \tag{3.1}$$

onde os operadores b_k e $b_k^\dagger$ são responsáveis respectivamente por destruir e criar uma excitação com energia $\hbar\omega_k$, enquanto o operador $b_k^\dagger b_k$ conta o número de excitações com a mesma energia. Apesar de abstrato, tal modelo fornece resultados coerentes com o que é observado na natureza.[1,6]

Um oscilador harmônico quântico (OH), discutido com detalhes na seção (2.2), interage com os infinitos modos de um banho térmico da seguinte forma: a cada excitação destruída no sistema de interesse, outra é criada em cada modo do banho, e vice-versa. Portanto, o Hamiltoniano a ser estudado é

$$\mathcal{H} = \underbrace{\hbar\omega_o a^\dagger a + \hbar\sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k}_{\mathcal{H}_o\text{: evolução livre}} + \underbrace{\hbar\sum_k g_k\left(a b_k^\dagger + a^\dagger b_k\right)}_{\text{V: interação entre o OH e o banho}} , \tag{3.2}$$

onde g_k é a constante de acoplamento entre o OH e o k-ésimo modo do banho.[18,23]

É conveniente tratar Hamiltonianos similares à Eq.(3.2) utilizando a representação de interação.[17] Para isso, primeiramente definimos o operador unitário

$$U_o(t,0) = e^{-\iota\mathcal{H}_o t/\hbar} . \qquad U_o^\dagger(t,0)U_o(t,0) = I \tag{3.3}$$

A mudança de representação faz com que nos preocupemos somente com a interação entre o OH e o banho, além de preservar a equação dinâmica para o operador densidade:

$$\frac{d\rho^{(I)}(t)}{dt} = -\frac{\iota}{\hbar}[\mathcal{H}^{(I)}(t), \rho^{(I)}(t)] , \tag{3.4}$$

onde $\rho^{(I)}(t) = U_o^\dagger(t,0)\rho(t)U_o(t,0)$ e $\mathcal{H}^{(I)}(t) = U_o^\dagger(t,0)VU_o(t,0)$ são respectivamente o operador densidade e o Hamiltoniano escritos na nova representação. Com o auxílio do teorema de Baker-Hausdorff-Campbell encontramos $\mathcal{H}^{(I)}(t)$ para o nosso problema:

$$\mathcal{H}^{(I)}(t) = \hbar\left[a\Gamma^\dagger(t) + a^\dagger\Gamma(t)\right] . \qquad \Gamma(t) = \sum_k g_k b_k e^{\iota(\omega_o-\omega_k)t} \tag{3.5}$$

3.1.1 A hipótese de acoplamento fraco entre o sistema de interesse e o banho térmico

As dimensões do banho são supostamente muito maiores em comparação com o sistema de interesse (OH), haja vista que o primeiro possui infinitos graus de liberdade. Assim, é natural imaginarmos que a informação sobre o banho contida em $\rho^{(I)}(t)$ permaneça inalterada durante a evolução dinâmica do conjunto (OH + banho):

$$\rho^{(I)}(t) \approx \rho_{\mathcal{S}}^{(I)}(t) \otimes \rho_{\mathcal{B}} . \qquad \rho_{\mathcal{B}} = \frac{e^{-\mathcal{H}_{\mathcal{B}}/k_B T}}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\left\{e^{-\mathcal{H}_{\mathcal{B}}/k_B T}\right\}} \tag{3.6}$$

Esta aproximação é também conhecida como: hipótese de acoplamento fraco sistema-banho.[1]

Antes de prosseguirmos, lembremos que buscamos por uma equação dinâmica para o operador densidade reduzido, obtido facilmente através de $\rho_S^{(I)}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\{\rho^{(I)}(t)\}$.[15] A operação de traço parcial sobre os graus de liberdade do banho contabiliza os efeitos do mesmo sobre o sistema de interesse (OH), porém o Hamiltoniano que nos interessa (3.5) não contribui em primeira ordem para a dinâmica reduzida: $\langle \mathcal{H}^{(I)}(t)\rangle_{\mathcal{B}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\{\mathcal{H}^{(I)}(t)\rho_{\mathcal{B}}\} = 0$. Este aparente entrave é resolvido expandindo interativamente (3.4) até a segunda ordem:

$$\frac{d\rho^{(I)}(t)}{dt} = -\frac{\imath}{\hbar}[\mathcal{H}^{(I)}(t), \rho^{(I)}(0)] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1[\mathcal{H}^{(I)}(t), [\mathcal{H}^{(I)}(t_1), \rho^{(I)}(t_1)]] \,. \tag{3.7}$$

Como já esperado, haverá somente contribuição do segundo termo do lado direito:

$$\frac{d\rho_S^{(I)}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1 \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\left\{[\mathcal{H}^{(I)}(t), [\mathcal{H}^{(I)}(t_1), \rho_S^{(I)}(t_1)\otimes\rho_{\mathcal{B}}]]\right\} \,. \tag{3.8}$$

Ao se calcular o traço parcial sobre duplo comutador no integrando de (3.7), nota-se o surgimento das correlações $\langle\Gamma(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$, $\langle\Gamma(t)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$, $\langle\Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$, $\langle\Gamma^\dagger(t)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$ e seus respectivos complexos conjugados. Como exemplo, vamos aqui mostrar que $\langle b_j b_k\rangle_{\mathcal{B}}$ e obviamente $\langle b_j^\dagger b_k^\dagger\rangle_{\mathcal{B}}$ são identicamente nulos:

$$\begin{aligned}
\langle b_j b_k\rangle_{\mathcal{B}} &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\{b_j b_k \rho_{\mathcal{B}}\} \\
&= \sum_{\{n\}} \langle n_1, ..., n_j, n_k, ...|b_j b_k \rho_1 \otimes ... \otimes \rho_j \otimes \rho_k \otimes ...|n_1, ..., n_j, n_k, ...\rangle \\
&= \sum_{n_j, n_k} \rho(n_j)\rho(n_k)\langle n_j, n_k|b_j b_k|n_j, n_k\rangle \\
&= 0 \qquad\qquad \forall(i,j) \,,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

o que nos leva à: $\langle\Gamma(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle\Gamma^\dagger(t)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} = 0$. Deixamos à cargo do leitor a demonstração de $\langle b_j^\dagger b_k\rangle_{\mathcal{B}} = \bar{n}_k\delta_{j,k}$, onde é o número médio de excitações do k-ésimo modo do banho, descrito pela distribuição de Bose-Einstein.[18,23] Portanto:

$$\langle\Gamma(t)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} = \sum_k g_k^2 e^{\imath(\omega_o-\omega_k)(t-t_1)}\,(\bar{n}_k + 1) \text{ e} \tag{3.10a}$$

$$\langle \Gamma^{\dagger}(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} = \sum_k g_k^2 e^{-\iota(\omega_o-\omega_k)(t-t_1)}\bar{n}_k \ . \tag{3.10b}$$

3.1.2 A aproximação de Born-Markov e a equação mestra quântica na forma de Lindblad

Os processos chamados markovianos são caracterizados pela total ausência de memória.[20] Classicamente, apenas é necessário o conhecimento da distribuição inicial de probabilidades para que possamos prevê-la em tempos futuros. Em analogia com a equação de Fokker-Planck, desejamos que a equação mestra quântica para o sistema de interesse (OH) possua as mesmas características markovianas. Para que a Eq.(3.8) se transforme em uma equação somente diferencial, faremos a seguinte hipótese: $\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}(t_1)$ não sofre mudança significativa durante o intervalo de tempo em que as funções de correlação do banho contribuem para o integrando. Neste caso, podemos fazer a mudança:

$$\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}(t_1) \longrightarrow \rho_{\mathcal{S}}^{(I)}(t) \ , \tag{3.11}$$

conhecida como aproximação de Born-Markov.[1]

Por se tratar de um modelo microscópico, é impossível ter acesso à informações como: os valores das constantes de acoplamento g_k ou a frequência ω_k de cada modo do banho. Apesar disso, podemos fazer algumas considerações sobre a distribuição do espectro. Admitindo que as frequências do banho sejam muito próximas umas das outras, tomamos o limite para o contínuo:

$$\sum_k \{...\} \longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\sigma(\omega)\{...\} \ , \tag{3.12}$$

onde $\sigma(\omega)$ é a densidade espectral do banho. Geralmente, a literatura apresenta banhos térmicos de densidade espectral constante. Tal escolha torna a ação do banho uniforme para qualquer faixa de frequências, o que significa dizer que o mesmo injeta ruído térmico branco sobre o sistema de interesse (OH).

A passagem para o contínuo na Eq.(3.12) tem como consequência imediata a solução analítica das integrais relacionadas às funções de correlação do banho dadas nas Eqs. (3.10a) e (3.10b). Particularmente para $\langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$ temos:

$$\int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sigma(\omega)g^2(\omega)e^{-\iota(\omega_o-\omega)(t-t_1)}\bar{n}(\omega) \ . \tag{3.13}$$

A presença da exponencial oscilante no integrando faz com que a contribuição das funções de ω seja somente relevante para $\omega \sim \omega_0$. Podemos então fatorar $\sigma(\omega_0)g^2(\omega_0)\bar{n}(\omega_o)$ e estender o limite inferior de integração em ω ao infinito negativo, encontrando um resultado aproximado para a Eq.(3.13):

$$\int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1)\rangle_{\mathcal{B}} \approx \frac{\sigma(\omega_0)g^2(\omega_0)\bar{n}(\omega_o)}{2} \ . \tag{3.14}$$

O procedimento para $\langle \Gamma(t)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle_{\mathcal{B}}$ é análogo ao apresentado.

Retornando para a representação de Schrödinger,[17] obtém-se finalmente a equação mestra quântica na forma de Lindblad[1] para o sistema de interesse (OH):

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{\mathcal{S}}(t)}{dt} &= -\iota\omega_o[a^\dagger a, \rho_{\mathcal{S}}(t)] \\ &+\frac{\gamma[\overline{n}(\omega_0)+1]}{2}[2a\rho_{\mathcal{S}}(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho_{\mathcal{S}}(t) - \rho_{\mathcal{S}}(t)a^\dagger a] \\ &+\frac{\gamma\overline{n}(\omega_0)}{2}[2a^\dagger\rho_{\mathcal{S}}(t)a - aa^\dagger\rho_{\mathcal{S}}(t) - \rho_{\mathcal{S}}(t)aa^\dagger] \ ,\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\gamma = \sigma(\omega_0)g^2(\omega_0)$ é a taxa de atenuação devido às interações microscópicas com o banho e evidentemente:

$$\overline{n}(\omega_0) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1} \ . \tag{3.16}$$

O segundo e o terceiro termo do lado direito da Eq.(3.15) estão respectivamente relacionados aos fenômenos de emissão (estimulada e espontânea) e absorção, já que mesmo da ausência de excitações térmicas ($T = 0$), o sistema de interesse (OH) continua sofrendo a ação do banho.[18]

3.2 O oscilador harmônico sob a ação de um bombeio estocástico

Como em todo sistema quântico aberto, o Hamiltoniano do problema é formado pelo Hamiltoniano livre $\mathcal{H}_o$ e pela parte referente à interação com os graus de liberdade externos, no caso a interação estocástica $\Xi(t)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \lambda\Xi(t) \ , \tag{3.17}$$

onde λ é apenas um parâmetro adimensional e pode ser escolhido igual à unidade sem comprometer o resultado.[27] Consideremos um OH sujeito à um campo estocástico de amplitude complexa $u(t)$, que bombeia o sistema de interesse com frequência externa ω, destruindo e criando excitações aleatoriamente.[28] Tal sistema é descrito pelo Hamiltoniano abaixo:

$$\mathcal{H}(t) = \hbar\omega_o a^\dagger a + \underbrace{\imath\hbar[e^{-\imath\omega t}u(t)a^\dagger - e^{\imath\omega t}u^*(t)a]}_{\text{bombeio estocástico}} \ , \tag{3.18}$$

onde $u(t)$ e $u^*(t)$ são ruídos estocásticos gaussianos de média nula.[21]

Mais uma vez, é útil trabalharmos na representação de interação:[17]

$$\mathcal{H}^{(I)}(t) = \imath\hbar[e^{-\imath\Delta t}u(t)a^\dagger - e^{\imath\Delta t}u^*(t)a] \ , \tag{3.19}$$

onde $\Delta = \omega - \omega_o$ é a dessintonia entre a frequência externa do bombeio e a frequência natural do oscilador. A mudança de representação nos leva a definir uma nova amplitude estocástica:

$$\xi(t) = e^{-\imath\Delta t}u(t) \ , \tag{3.20}$$

obviamente com as mesmas características estocásticas da anterior.

3.2.1 A dinâmica do operador densidade estocástico: Teorema de Novikov

Características estocásticas são refletidas na evolução dinâmica do estado quântico no qual o OH foi inicialmente preparado. Convenientemente define-se um operador densidade estocástico $\rho_\xi(t)$, que satisfaz todas as propriedades conhecidas,[15] e basta somente que efetuemos a média sobre o processo estocástico $\langle ... \rangle_\xi$, para recuperarmos o operador densidade tradicional:

$$\rho_S(t) = \langle \rho_\xi(t) \rangle_\xi \ . \tag{3.21}$$

Utilizando a definição (3.20), substituimos $\mathcal{H}^{(I)}(t)$ no comutador da equação de Liouville-von Neumann:

$$\frac{d\rho_\xi^{(I)}(t)}{dt} = \left[\xi(t) a^\dagger - \xi^*(t) a, \rho_\xi^{(I)}(t) \right] \ , \tag{3.22}$$

para o operador densidade estocástico já na representação de interação.[17] Em seguida, ao efetuarmos a média sobre o processo estocástico, nos deparamos com termos multiplicativos da forma $\langle \xi(t) \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi$ e $\langle \xi^*(t) \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi$ no lado direito da equação abaixo.

$$\frac{d}{dt} \langle \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi = [a^\dagger, \langle \xi(t) \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi] - [a, \langle \xi^*(t) \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi] \tag{3.23}$$

Termos assim são problemáticos, pois não se pode ignorar a estocastidade contida em $\rho_\xi^{(I)}(t)$. Afim de encontrarmos a equação dinâmica para $\langle \rho_\xi^{(I)}(t) \rangle_\xi$, recorremos ao Teorema de Novikov, que nos permite o cálculo exato do valor médio do produto de um ruído estocástico gaussiano $\xi(t)$ com qualquer funcional $\mathcal{M}[\xi]$ do mesmo ruído[29]

$$\langle \xi(t) \mathcal{M}[\xi] \rangle_\xi = \langle \xi(t) \rangle_\xi \langle \mathcal{M}[\xi] \rangle_\xi + \int_0^t dt_1 \, \mathcal{C}_2(t, t_1) \left\langle \frac{\delta \mathcal{M}[\xi]}{\delta \xi} \right\rangle_\xi \ , \tag{3.24}$$

onde $\mathcal{C}_2(t, t_1)$ é o cumulante de segunda ordem do ruído $\xi(t)$.[20]

É importante que prestemos atenção ao fato de que $\rho_\xi^{(I)}(t)$ é funcional de $\xi(t)$ e de seu complexo conjugado. Apesar de um ser simplesmente o complexo conjugado do outro, podemos estender a definição (3.24) e sem nenhum problema tratar $\rho_\xi^{(I)}(t)$ como funcional

de dois ruídos distintos. No caso do termo $\langle \xi(t)\rho_\xi^{(I)}(t)\rangle_\xi$ obtém-se como resultado:

$$\langle \xi(t)\rho_\xi^{(I)}(t)\rangle_\xi = \int_0^t dt_1 \langle \xi(t)\xi(t_1)\rangle_\xi \left\langle \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi(t_1)} \right\rangle_\xi + \int_0^t dt_1 \langle \xi(t)\xi^*(t_1)\rangle_\xi \left\langle \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} \right\rangle_\xi . \quad (3.25)$$

Como não possui interpretação física, escolhemos $\langle \xi(t)\xi(t_1)\rangle_\xi = 0$ sem perda de generalidade. Já $\langle \xi(t)\xi^*(t_1)\rangle_\xi$ se relaciona à função de correlação.[21] Com base em (3.25) e nas últimas considerações, reescrevemos (3.23):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \rho_\xi^{(I)}(t)\rangle_\xi &= \int_0^t dt_1 \, \langle \xi(t)\xi^*(t_1)\rangle_\xi \left[a^\dagger, \left\langle \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} \right\rangle_\xi \right] \\ &\quad - \int_0^t dt_1 \, \langle \xi^*(t)\xi(t_1)\rangle_\xi \left[a, \left\langle \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi(t_1)} \right\rangle_\xi \right] . \end{aligned} \quad (3.26)$$

obtendo assim uma nova equação dinâmica para $\langle \rho_\xi^{(I)}(t)\rangle_\xi$.

3.2.2 Cálculo da função resposta e a equação mestra quântica na forma de Lindblad

Assumindo que os ruídos estão inicialmente descorrelacionados, prosseguimos com o cálculo para encontrar função resposta[27,28] $\delta\rho_\xi^{(I)}(t)/\delta\xi^*(t_1)$, que surge no comutador do primeiro termo do lado direito da equação acima. Escrevemos a forma integral da equação dinâmica para $\rho_\xi^{(I)}(t)$:

$$\rho_\xi^{(I)}(t) = \rho_\xi^{(I)}(0) + \int_0^t d\tau [\xi(\tau)a^\dagger - \xi^*(\tau)a, \rho_\xi^{(I)}(\tau)] , \quad (3.27)$$

e tomamos a derivada funcional com respeito a $\xi^*(t_1)$ $(0 < t_1 < t)$, obtendo:

$$\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} = -[a, \rho_\xi^{(I)}(t_1)] + \int_{t_1}^t d\tau \left[\xi(\tau)a^\dagger - \xi^*(\tau)a, \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(\tau)}{\delta\xi^*(t_1)} \right] , \quad (3.28)$$

pois pela definição da derivada funcional, $\delta\xi^*(\tau)/\delta\xi^*(t_1) = \delta(\tau - t_1)$. Diferenciando ambos os lados com respeito à t, encontramos a equação diferencial para $\delta\rho_\xi^{(I)}(t)/\delta\xi^*(t_1)$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} = \left[\xi(t)a^\dagger - \xi^*(t)a, \frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)}\right] \qquad (0 < t_1 < t)\ , \tag{3.29}$$

cuja condição inicial é definida pelo primeiro termo do lado direito de (3.28).

Tanto a equação acima quanto (3.22) possuem a mesma estrutura, e portanto admitem o mesmo formato de solução. Afim de contruirmos uma dinâmica unitária, procuremos por uma solução da forma:

$$\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} = \mathcal{G}_\xi(t, t_1)\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t_1)}{\delta\xi^*(t_1)}\mathcal{G}_\xi^\dagger(t, t_1) \qquad \mathcal{G}_\xi^\dagger(t, t_1) = \mathcal{G}_\xi^{-1}(t, t_1) \tag{3.30}$$

em analogia com (2.9). É importante frisar que a construção de um operador de evolução temporal para sistemas físicos com Hamiltonianos dependentes do tempo não é trivial.[17] Substituindo a proposta de solução em (3.29) encontramos a equação diferencial que o propagador estocástico deve satisfazer:

$$\frac{d\mathcal{G}_\xi(t, t_1)}{dt} = [\xi(t)a^\dagger - \xi^*(t)a]\mathcal{G}_\xi(t, t_1)\ , \qquad \mathcal{G}_\xi(t_1, t_1) = I \tag{3.31}$$

solucionada através da hipótese de ordenamento temporal,[13] já que $\mathcal{H}^{(I)}(t)$ (3.19) não comuta em tempos distintos. Para o OH forçado em questão temos:

$$\mathcal{G}_\xi(t, t_1) = \exp\left[\imath\theta(t, t_1)\right] D[\upsilon(t, t_1)]\ , \tag{3.32}$$

onde $D[\upsilon(t, t_1)] = \exp(\upsilon a^\dagger - \upsilon^* a)$ é o operador deslocamento,[18,19] $\theta(t, t_1)$ é um fator de fase irrelevante e

$$\upsilon(t, t_1) = \int_{t_1}^{t} d\tau\xi(\tau)\ , \tag{3.33}$$

é responsável pelo caráter estocástico do propagador. De acordo com a informação sobre $\delta\rho_\xi^{(I)}(t_1)/\delta\xi^*(t_1)$ contida em (3.28), escrevemos:

$$\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} = -D[\upsilon(t, t_1)][a, \rho_\xi^{(I)}(t_1)]D^\dagger[\upsilon(t, t_1)]\ . \tag{3.34}$$

O resultado parcial para a função resposta (3.34) nos leva à uma equação dinâmica

integro-diferencial para $\langle \rho_\xi^{(I)}(t)\rangle_\xi$. Recorremos então à reversibilidade dinâmica prevista pelo propagador estocástico para expressar o operador densidade no instante intermediário:

$$\rho_\xi^{(I)}(t_1) = D^\dagger[\upsilon(t,t_1)]\rho_\xi^{(I)}(t)D[\upsilon(t,t_1)]\,. \tag{3.35}$$

Basta substituir o resultado anterior em (3.34) e utilizar a propriedade $D[\upsilon]aD^\dagger[\upsilon] = a - \upsilon$, para encontrar:

$$\frac{\delta\rho_\xi^{(I)}(t)}{\delta\xi^*(t_1)} = [a, \rho_\xi^{(I)}(t)]\,. \tag{3.36}$$

A ausência de termos multiplicativos em (3.36) possibilita que efetuemos a média sobre o processo estocástico (3.21) sem maiores problemas. Retornemos à representação de Schrödinger[17] para finalmente obter a equação mestra quântica novamente na forma de Lindblad:[1]

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_S(t)}{dt} &= -\iota\omega_o[a^\dagger a, \rho_S(t)] \\ &\quad + \frac{\eta(t)}{2}[2a\rho_S(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho_S(t) - \rho_S(t)a^\dagger a] \\ &\quad + \frac{\eta(t)}{2}[2a^\dagger\rho_S(t)a - aa^\dagger\rho_S(t) - \rho_S(t)aa^\dagger]\,,\end{aligned} \tag{3.37}$$

desta vez para o sistema de interesse (OH) sujeito à injeção de ruído estocástico gaussiano de média nula e de correlação $\mathcal{S}(t,t_1) = \langle u(t)u^*(t_1)\rangle$. O coeficiente $\eta(t)$ que acompanha os termos de emissão e absorção no lado direito de (3.37) está relacionado à escolha da função de correlação $\mathcal{S}(t,t_1)$,[21] e é definido como

$$\eta(t) = 2\int_0^t dt_1\mathcal{S}(t,t_1)\cos[\Delta(t-t_1)]\,, \tag{3.38}$$

onde por razões físicas temos $\mathcal{S}(t,t_1) = \mathcal{S}^*(t,t_1)$.

CAPÍTULO 4

INFLUÊNCIA DA INJEÇÃO DE RUÍDO ESTOCÁSTICO SOB A AÇÃO DO BANHO TÉRMICO

4.1 O modelo para a competição entre banho térmico e bombeio estocástico

A motivação para esta nova abordagem conjunta surge da possibilidade de atenuação do efeito dissipativo do banho térmico devido à escolha apropriada das características estocásticas do bombeio. A priori, teríamos que encontrar a equação mestra quântica para o sistema de interesse (OH) neste novo cenário (banho + bombeio). Uma alternativa à este cálculo trabalhoso é tratar os dois fenômenos como independentes:

$$\frac{d\rho_{\mathcal{S}}(t)}{dt} = -\imath\omega_o[a^\dagger a, \rho_{\mathcal{S}}(t)] + \mathcal{L}_{\text{banho}}\{\rho_{\mathcal{S}}(t)\} + \mathcal{L}_{\text{bombeio}}\{\rho_{\mathcal{S}}(t)\} \ . \tag{4.1}$$

Basta sobrepor os resultados (3.15) e (3.37) previamente obtidos, e encontrar a nova equação mestra quântica[30,31] já na representação de interação:[17]

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_S^{(I)}(t)}{dt} &= \frac{\gamma[\Theta(t)+1]}{2}[2a\rho_S^{(I)}(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho_S^{(I)}(t) - \rho_S^{(I)}(t)a^\dagger a] \\ &+\frac{\gamma\Theta(t)}{2}[2a^\dagger\rho_S^{(I)}(t)a - aa^\dagger\rho_S^{(I)}(t) - \rho_S^{(I)}(t)aa^\dagger]\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\Theta(t)$ é o número efetivo de excitações, definido como:

$$\gamma\Theta(t) = \gamma\overline{n}(\omega_0) + \eta(t)\ . \tag{4.3}$$

De acordo com (3.38), a escolha da função de correlação $\mathcal{S}(t, t_1)$ define a dependência temporal de $\eta(t)$, e consequentemente de $\Theta(t)$. Por uma questão de simplicidade, escolhemos um ruído colorido de correlação

$$\mathcal{S}(t, t_1) = \frac{\Omega}{2\tau_c}\exp\left(-\frac{|t-t_1|}{\tau_c}\right)\ , \tag{4.4}$$

onde τ_c é o tempo de correlação.[24,25] Ao executarmos o limite para $\tau_c \longrightarrow 0$ na expressão acima, recuperamos o ruído branco markoviano: $\mathcal{S}(t, t_1) = \frac{\Omega}{2}\delta(t - t_1)$. Para um bombeio com tal característica estocástica (4.4) temos:

$$\eta(t) = \frac{\Omega}{1+(\Delta\tau_c)^2}\left\{1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\left[\cos(\Delta t) - \Delta\tau_c\sin(\Delta t)\right]\right\}\ . \tag{4.5}$$

A função $\Theta(t)$ contém toda a informação sobre a influência do bombeio externo sobre a ação do banho. Para instantes de tempo tais que

$$\Delta t^{(p)} = \pi(p + 1/2)\ , \qquad p \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

$\eta(t)$ assume valores de máximo (p par) e mínimo (p ímpar). Podemos substituir (4.6) em (4.5) e encontrar explicitamente os valores extremos de $\eta(t)$:

$$\eta^{(p)} = \frac{\Omega}{1+(\Delta\tau_c)^2}\left\{1 + (-1)^p\Delta\tau_c\exp\left[-\frac{\pi(p+1/2)}{\Delta\tau_c}\right]\right\}\ . \tag{4.7}$$

Estamos particularmente interessados nos valores ímpares de p, já que para qualquer p par, $\eta^{(p)}$ é positivo definido, o que gera apenas mais dissipação. Para a existência do desejado cenário de competição entre banho térmico e bombeio externo, devemos impor $\eta^{(p)} < 0$ (p ímpar), obtendo como condição necessária:

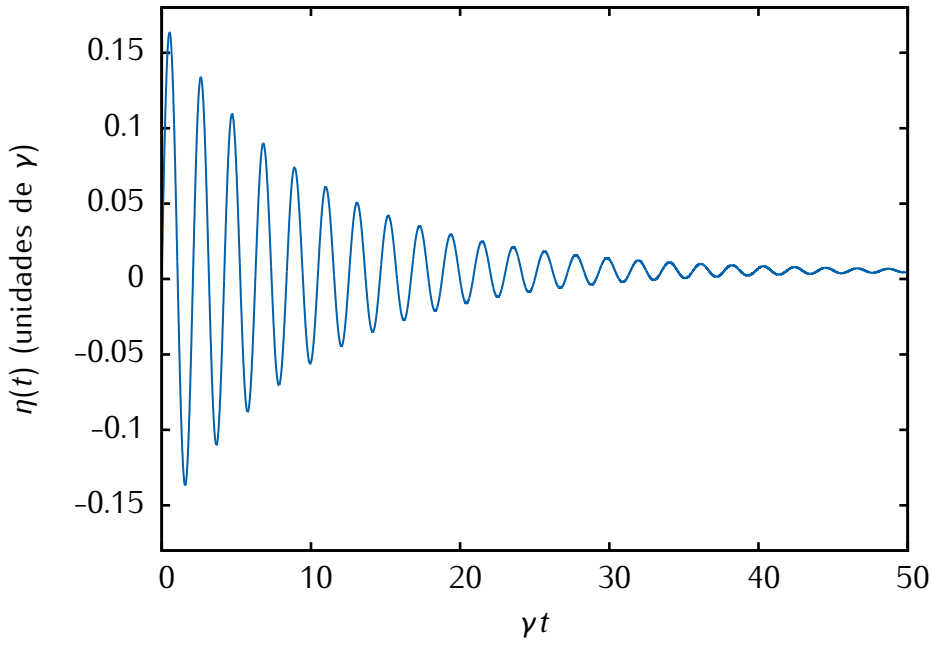

Figura 4.1 – Padrão oscilatorio induzido no sistema de interesse (OH) pelo bombeio estocástico para o função de correlação escolhida (4.4). Parâmetros utilizados: $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$.
Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\Delta\tau_c \exp\left[-\frac{\pi(p+1/2)}{\Delta\tau_c}\right] > 1 \ . \qquad\qquad p \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

Também é importante estudarmos o comportamento de $\Theta(t)$ para tempos curtos e longos. No limite de tempos curtos ($\gamma t \ll 1$), obtém-se:

$$\Theta(t) \simeq \overline{n}(\omega_0) + \frac{\Omega t}{\gamma\tau_c} \ , \tag{4.9}$$

uma reta de coeficiente angular sempre positivo. Tal resultado mostra a não-eficiência do modelo para tempos curtos.[26] A presença do bombeio estocástico além de não atenuar o efeito do banho térmico, prejudica ainda mais o sistema. Já no regime de tempos longos ($t \gg \tau_c$), temos o seguinte resultado assintótico:

$$\Theta(t \longrightarrow \infty) = \overline{n}(\omega_0) + \frac{\Omega}{\gamma[1+(\Delta\tau_c)^2]} \ , \tag{4.10}$$

que nos leva a desconfiar que a presença do bombeio estocástico faz com que o sistema de interesse termalize a uma temperatura maior que a do banho. No entanto, isto ainda é

apenas uma suspeita.

4.2 Cálculo da função P de Glauber-Sudarshan para o sistema inicialmente em um estado coerente

Desejamos descrever o mesmo problema de forma analítica, ou seja, sem lançar mão de métodos numéricos ou técnicas de aproximação. Para tanto, utilizaremos as distribuições de quase-probabilidade. Primeiramente, escrevemos o operador densidade do sistema de interesse (OH) na representação de estados coerentes:[19,23]

$$\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}(t) = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha, \alpha^*; t) \ , \qquad d^2\alpha = d\mathrm{Re}\{\alpha\} d\mathrm{Im}\{\alpha\} \tag{4.11}$$

e substituimos em (4.2). Lembrando que

$$a^\dagger |\alpha\rangle = (\frac{\partial}{\partial\alpha} + \alpha^*) \ , \tag{4.12}$$

obtemos a equação diferencial para a função P de Glauber-Sudarshan.[23]

$$\frac{dP_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha, \alpha^*; t)}{dt} = \gamma \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^* \right) + \Theta(t) \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \right] P_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha, \alpha^*; t) \ . \tag{4.13}$$

Ao invés de resolver (4.13), relacionamos a função de quase-probabilidade $P_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha, \alpha^*; t)$ com sua função característica:

$$P_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha, \alpha^*; t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z \ e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \chi_{\mathcal{S},N}^{(I)}(z, z^*; t) \ , \qquad d^2z = d\mathrm{Re}\{z\} d\mathrm{Im}\{z\} \tag{4.14}$$

que nos leva à uma equação diferencial aparentemente mais simples para a função característica normalmente ordenada:

$$\frac{d\chi^{(l)}_{S,N}(z,z^*;t)}{dt} = -\gamma\left[\frac{1}{2}\left(z\frac{\partial}{\partial z} + z^*\frac{\partial}{\partial z^*}\right) + \Theta(t)|z|^2\right]\chi^{(l)}_{S,N}(z,z^*;t)\ , \tag{4.15}$$

onde $\chi^{(l)}_{S,N}(z,z^*;t) = \mathrm{Tr}_S\{\rho^{(l)}_S(t)e^{za^\dagger}e^{-z^*a}\}$.

Como solução de (4.15), propomos o produto de duas funções:

$$\chi^{(l)}_{S,N}(z,z^*;t) = \Phi(z,z^*;t)\varphi(z,z^*;t)\ , \tag{4.16}$$

de forma que $\Phi(z,z^*;t)$ seja uma gaussiana com coeficientes dependendentes do tempo $\beta_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ a serem determinados:

$$\Phi(z,z^*;t) = \exp\left[-\beta_1(t)z^2 - \beta_2(t)(z^*)^2 - \beta_3(t)|z|^2\right]\ . \tag{4.17}$$

A escolha deste tipo de solução pode parecer pouco intuitiva, mas basta substituir (4.16) em (4.15) utilizando a definição de $\Phi(z,z^*;t)$ acima:

$$\left\{\left[\frac{d\beta_1(t)}{dt} + \gamma\beta_1(t)\right]z^2 + \left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} + \gamma\beta_2(t)\right](z^*)^2 + \left[\frac{d\beta_3(t)}{dt} + \gamma\beta_3(t) + \gamma\Theta(t)\right]|z|^2\right\}\varphi(z,z^*;t)$$

$$+\frac{d\varphi(z,z^*;t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\left[z\frac{\partial\varphi(z,z^*;t)}{\partial z} + z^*\frac{\partial\varphi(z,z^*;t)}{\partial z^*}\right]\ , \tag{4.18}$$

e notar que a escolha apropriada dos coeficientes soluciona parte da dinâmica. Impondo que os termos que multiplicam z^2, $(z^*)^2$ e $|z|^2$ sejam nulos, encontramos as equações diferenciais

$$\frac{d\beta_j(t)}{dt} + \gamma\beta_j(t) = 0 \ \text{ e} \qquad (j = 1,2) \tag{4.19a}$$

$$\frac{d\beta_3(t)}{dt} + \gamma\beta_3(t) = -\gamma\Theta(t)\ , \tag{4.19b}$$

que admitem como solução:

$$\beta_j(t) = \beta_j(0)e^{-\gamma t} \ \text{ e} \qquad (j = 1,2) \tag{4.20a}$$

$$\beta_3(t) = \beta_3(0)e^{-\gamma t} - \gamma \int_0^t dt_1 e^{-\gamma(t-t_1)}\Theta(t_1) \tag{4.20b}$$

respectivamente. Sem perda de generalidade, escolhemos $\beta_j(0) = 1$ ($j = 1, 2, 3$). Nos resta agora resolver a equação diferencial para $\varphi(z, z^*; t)$:

$$\frac{d\varphi(z, z^*; t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\left[z\frac{\partial\varphi(z, z^*; t)}{\partial z} + z^*\frac{\partial\varphi(z, z^*; t)}{\partial z^*}\right] . \tag{4.21}$$

Uma boa proposta de solução é $\varphi(z, z^*; t) = \varphi[z(t), z^*(t)]$, de forma que a dependência temporal está implícita em z. Ao impormos que esta seja a solução de (4.21), encontramos a equação diferencial que $z(t)$ deve satisfazer:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}z(t) , \tag{4.22}$$

que é facilmente solucionada por $z(t) = ze^{-\frac{\gamma t}{2}}$. Portanto:

$$\varphi(z, z^*; t) = \varphi(z, z^*; 0) \mid_{z\longrightarrow z(t)} . \tag{4.23}$$

Até o momento, nada afirmamos sobre a condição inicial para (4.15). O valor de $\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0)$ é determinado pelo conhecimento de $\rho^{(l)}_{\mathcal{S}}(0)$. Logo para que sejamos coerentes, devemos impor como condição inicial para $\varphi(z, z^*; t)$:

$$\varphi(z, z^*; 0) = \frac{\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0)}{\Phi(z, z^*; 0)} , \tag{4.24}$$

sendo que basta fazer $z \longrightarrow z(t)$ para determinar completamente a dinâmica de $\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; t)$:

$$\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; t) = \Phi(z, z^*; t)\left.\frac{\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0)}{\Phi(z, z^*; 0)}\right|_{z\longrightarrow z(t)} , \tag{4.25}$$

ou de forma simplificada:

$$\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; t) = e^{-\mathcal{D}(t)|z|^2}\chi^{(l)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0) \mid_{z\longrightarrow z(t)} , \tag{4.26}$$

onde a função $\mathcal{D}(t)$ é definida como:

$$\mathcal{D}(t) = \gamma \int_0^t dt_1 e^{-\gamma(t-t_1)}\Theta(t_1) , \tag{4.27}$$

respeitando sempre: $\mathcal{D}(t) \geq 0$. Consideremos que o OH esteja inicialmente em um estado coerente:

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_o\rangle \ . \qquad \alpha_o \in \mathbb{C} \tag{4.28}$$

Estabelecido o estado inicial, podemos efetuar o cálculo de $\chi^{(I)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0)$, obtendo:

$$\chi^{(I)}_{\mathcal{S},N}(z, z^*; 0) = e^{z\alpha_o^* - z^*\alpha_o} \ . \tag{4.29}$$

Com base no último resultado, em (4.26) e na definição (4.14), temos assim a função P de Glauber-Sudarshan para o sistema de interesse (OH) preparado no estado inicial (4.28):

$$P^{(I)}_{\mathcal{S}}(\alpha, \alpha^*; t) = \frac{1}{\pi\mathcal{D}(t)} \exp\left(-\frac{|\alpha - \alpha_o e^{-\frac{\gamma t}{2}}|^2}{\mathcal{D}(t)}\right) \ , \tag{4.30}$$

que mostra uma gaussiana inicialmente centrada em α_o, com largura definida por (4.27), caracterizando um processo difusivo.[20]

4.3 Análise do valor médio do operador número e a definição de um novo estado de equilíbrio

Por de tratar de um modelo para a troca de energia entre sistema de interesse (OH) e ambiente,[1,6] nada mais razoável que um estudo acerca do valor médio de $\mathcal{H}$ (2.12). Conhecida a evolução temporal da função característica (4.26), torna-se fácil econtrar $\langle a^\dagger a\rangle_{\mathcal{S}}(t)$ a partir de (2.28). Para o OH inicialmente preparado em (4.28) temos:

$$\langle a^\dagger a\rangle_{\mathcal{S}}(t) = \langle a^\dagger a\rangle_{\mathcal{S}}(0)e^{-\gamma t} + \mathcal{D}(t) \ . \qquad \langle a^\dagger a\rangle_{\mathcal{S}}(0) = |\alpha_o|^2 \tag{4.31}$$

A interação com o banho provoca a dissipação da energia inicial e no regime de tempos longos ($\gamma t \gg 1$) fará com que o OH se encontre em equilíbrio térmico, possuindo o mesmo número de excitações do banho.[18]

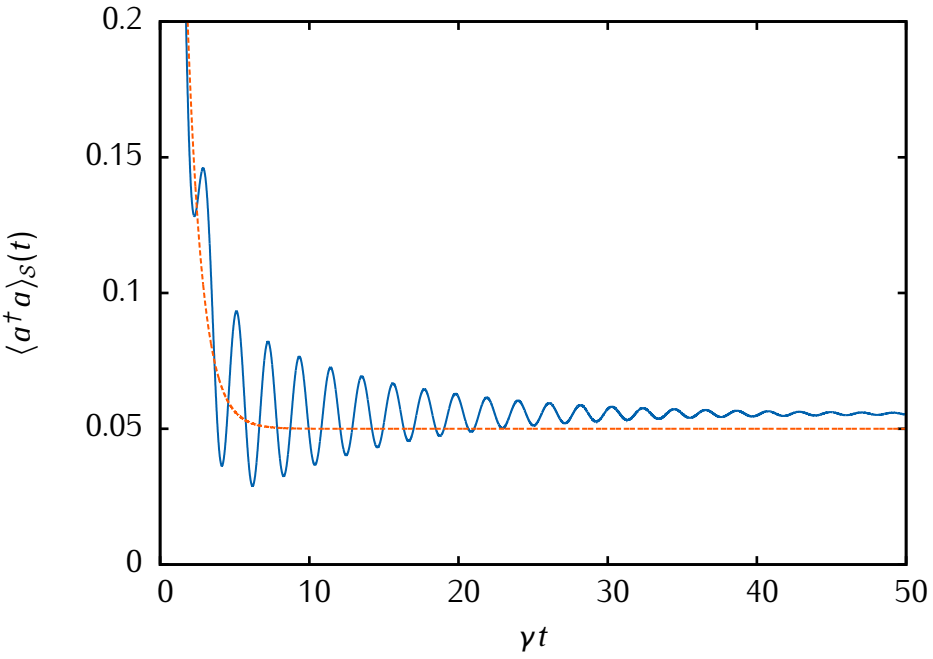

Figura 4.2 – Número médio de excitações do sistema de interesse (OH). A linha contínua mostra o padrão oscilatório da energia num cenário de ação conjunta do bombeio estocástico com o banho, enquanto a linha tracejada mostra o sistema de interesse atingindo o valor médio de excitações do banho na ausência do bombeio externo. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao introduzirmos o bombeio estocástico, o comportamento oscilatório de $\Theta(t)$ é refletido na energia, como mostra a Fig.4.2. No entanto, caso o sistema de interesse (OH) se encontre em ressonância com o bombeio externo ($\Delta = 0$), tais oscilações não são observadas. Mesmo desempenhando seu papel dissipativo, o banho não é capaz de absorver a energia externa injetada pelo bombeio:

$$\langle a^\dagger a\rangle_S(t \longrightarrow \infty) = \overline{n}(\omega_0) + \frac{\Omega}{\gamma[1 + (\Delta\tau_c)^2]}\,, \tag{4.32}$$

como mostra o resultado assintótico acima na Eq(4.32). Efetivamente, temos o OH termalizando em uma temperatura maior que a do banho.

Como suspeitávamos, a presença do bombeio estocástico sobre o OH altera o seu estado de equilíbrio. Para que tenhamos a confirmação, é preciso analisar a dinâmica dos elementos da matriz densidade, transformando (4.2) em uma equação diferencial para $\langle m|\rho_S^{(l)}|n\rangle(t)$. A escolha da base de número para a representação matricial de $\rho_S^{(l)}(t)$ nos fornece um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas, que envolvem elementos

não diagonais.[18] Em geral, resolve-las iterativamente não é uma tarefa fácil, o que torna o resultado obtido na seção (4.2) oportuno. Basta substituir a expansão de um estado coerente na base de número (2.18) em (4.11) para obter:

$$\langle m|\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}|n\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{m!n!}}\int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2}\alpha^m(\alpha^*)^n P_{\mathcal{S}}^{(I)}(\alpha,\alpha^*;t)\ . \qquad d^2\alpha = d\mathrm{Re}\{\alpha\}d\mathrm{Im}\{\alpha\} \tag{4.33}$$

Já não é surpresa a decorência causada pelo acoplamento com o banho. Note na Fig.4.3 o desaparecimento dos elementos fora da diagonal $\langle 0|\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}|1\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}|2\rangle(t)$ para tempos longos ($\gamma t \gg 1$). A ação do bombeio não é capaz de evitar a perda das características quânticas,[4] apesar de recuperarmos instantaneamente informação num fenômeno que podemos chamar de recoerência. Por sua vez, as populações são responsáveis pela definição do estado de equilíbrio:

$$\rho_{eq} = \sum_n p_n(\overline{n};\Omega,\Delta\tau_c)|n\rangle\langle n|\ , \tag{4.34}$$

que é semelhante ao estado canônico de Gibbs,[14] o esperado na ausência do bombeio. Antes de o OH atingir o estado estacionário, novamente observamos o mesmo padrão oscilatório nos elementos diagonais $\langle 0|\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}|0\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_{\mathcal{S}}^{(I)}|1\rangle(t)$ (ver Fig.4.4). Através de (4.33) determinamos toda a distribuição de probabilidades para mistura estatística (4.34):

$$p_n(\overline{n};\Omega,\Delta\tau_c) = \frac{\left\{\overline{n}(\omega_0) + \frac{\Omega}{\gamma\left[1+(\Delta\tau_c)^2\right]}\right\}^n}{\left\{\overline{n}(\omega_0) + \frac{\Omega}{\gamma\left[1+(\Delta\tau_c)^2\right]} + 1\right\}^{n+1}}\ , \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.35}$$

o que confirma a suspeita sobre o estado térmico efetivo.

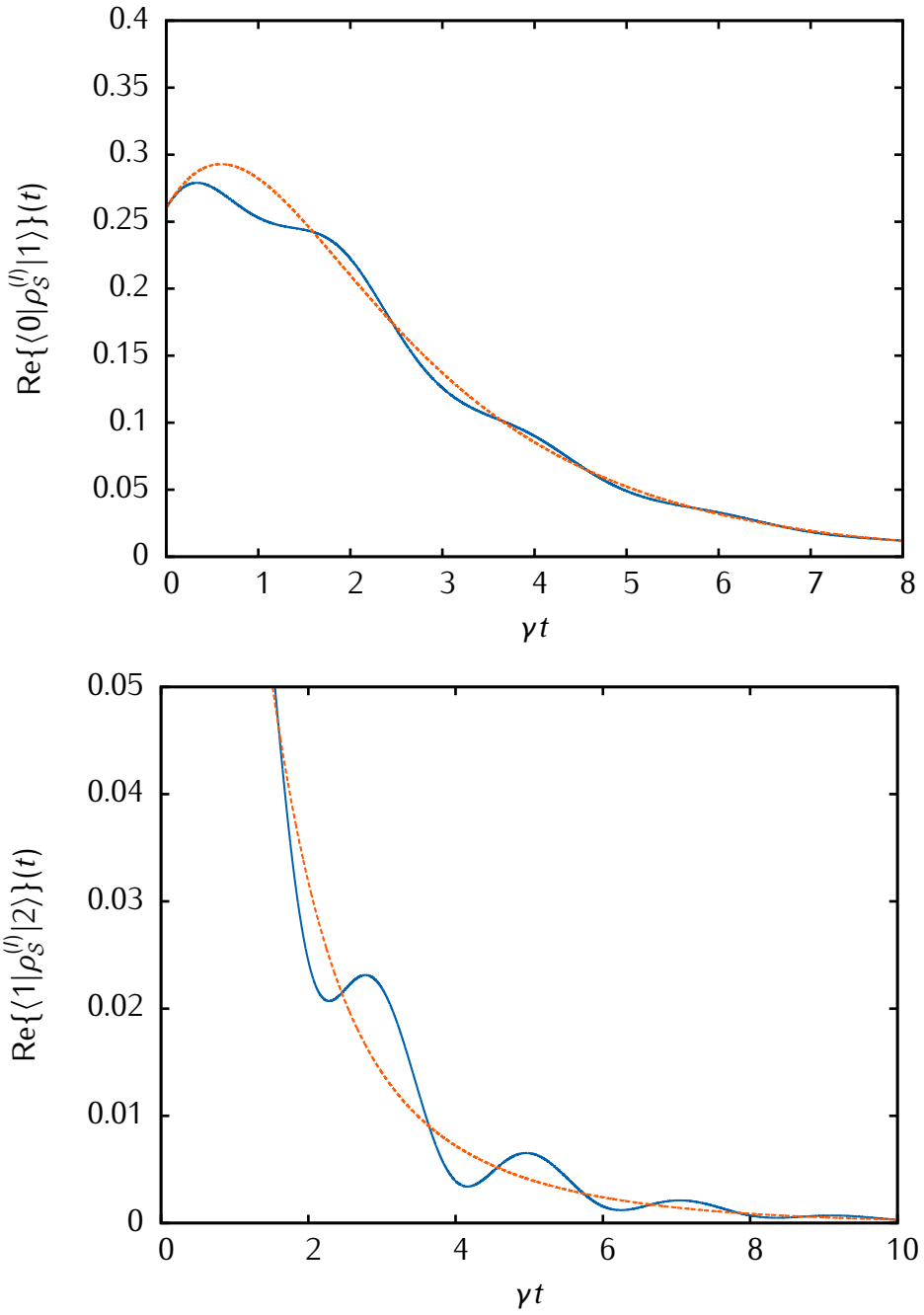

Figura 4.3 – Comportamento dos elementos não-diagonais $\langle 0|\rho_S^{(I)}|1\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_S^{(I)}|2\rangle(t)$ ou coerências. A linha contínua mostra o fenômeno da recoerência devido à influência do bombeio estocástico sobre o banho, enquanto a linha tracejada mostra apenas sua ação dissipativa. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

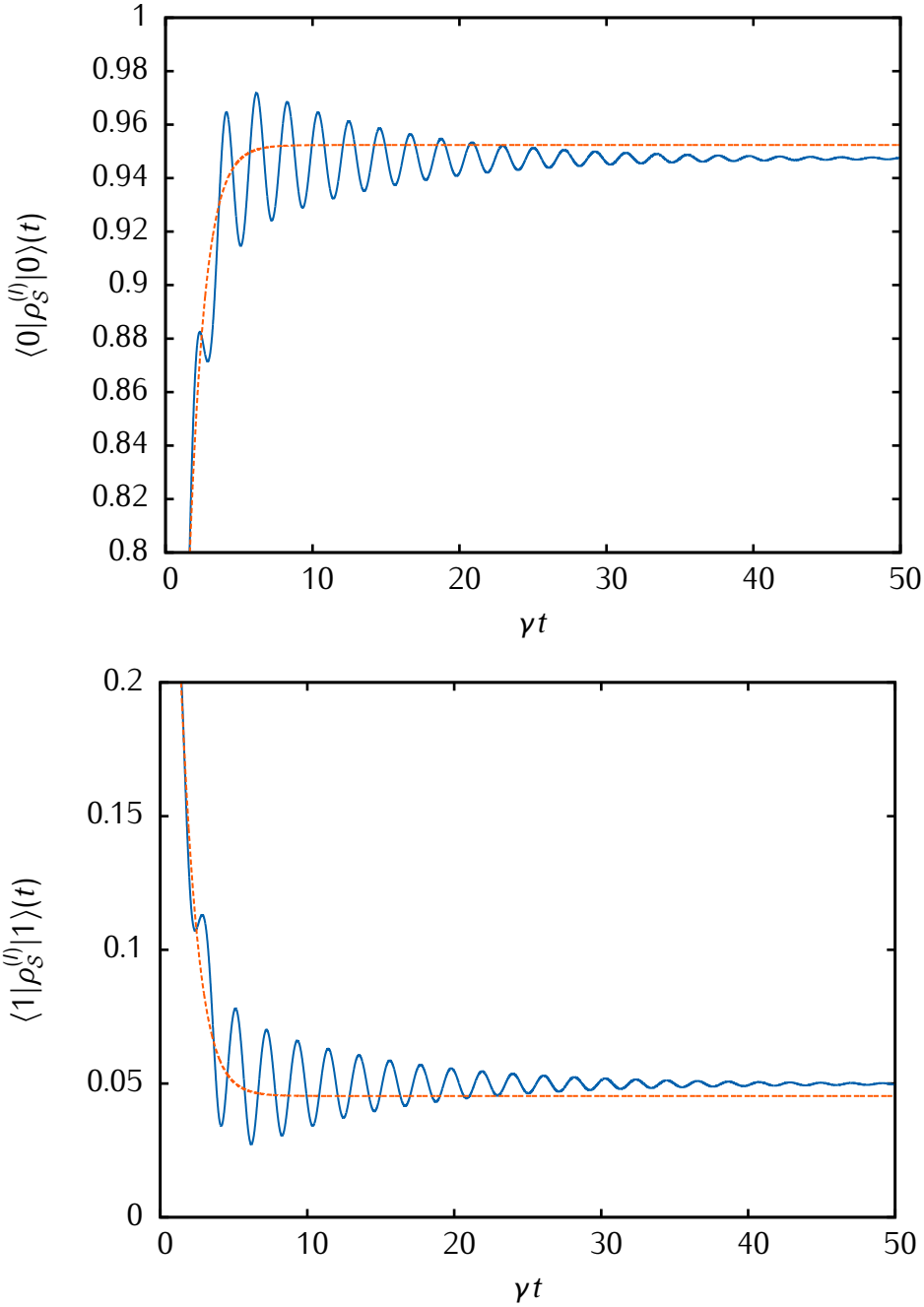

Figura 4.4 – Comportamento dos elementos diagonais $\langle 0|\rho_S^{(I)}|0\rangle(t)$ e $\langle 1|\rho_S^{(I)}|1\rangle(t)$ ou populações. A linha contínua mostra a redefinição do estado de equilíbrio devido à influência do bombeio estocástico sobre o banho, enquanto a linha tracejada mostra o sistema de interesse atingindo a distribuição térmica na ausência do bombeio externo. Parâmetros utilizados: $\overline{n}(\omega_0) = 0,05$, $\Omega = 5\gamma$, $\Delta = 3\gamma$, $\tau_c = 10\gamma^{-1}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

CAPÍTULO 5

OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Vimos nesse trabalho que a partir da injeção de um ruído estocástico colorido podemos induzir a recoerência em um sistema quântico, recuperando assim boa parte das características quânticas do estado inicial. Para tanto, nós encontramos uma região de parâmetros que caracterizam o ruído de tal forma que esses se acoplam com os parâmetros que caracterizam o sistema e assim surja o efeito desejado. Curiosamente, temos que a injeção de mais ruído no sistema pode levar a uma condição em que a decoerência cesse!

O próximo passo será estudar quantificadores de não-Markovianidade encontrados na literatura[8,32] e utilizá-los para testar a existência dessa característica no nosso sistema. Com base nas assinaturas que vimos ao longo da dissertação, acreditamos que não só o encontraremos, mas também conseguiremos quantifica-lo. Num segundo momento, tentaremos aplicar o método desenvolvido aqui em um ciclo de resfriamento termodinâmico quântico em que a injeção de uma radiação externa desempenha um papel fundamental.[33]

Por fim, acreditamos que o método desenvolvido nesse trabalho tem um grande potencial de aplicação e que será possível estudar outras situações e protocolos de processamento da informação quântica em que o mesmo desempenhe um papel fundamental no aumento a eficácia na implementação destes.

REFERÊNCIAS

1 BREUER, H. P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

2 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information:* 10th anniversary edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

3 BYLICKA, B.; CHRUŚCIŃSKI, D.; MANISCALCO, S. *Non-Markovianity as a resource for quantum technologies.* 2013. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1301.2585v1.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2014.

4 ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today*, v. 44, n. 10, p. 36-44, 1991.

5 MOUSSA, M. H. Y.; MIZRAHI, S. S.; CALDEIRA, M. O. Quantum coherence in a dissipative-driven system and the optical Stern-Gerlach experiment. *Physical Review A*, v. 221, n. 3-4, p. 145-152, 1996.

6 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. *Open quantum systems:* an introduction. 2012. Disponível em: < http://arxiv.org/pdf/1104.5242v2.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2014.

7 PONTE, M. A.; CACHEFFO, A.; VILLAS-BOAS, C. J.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Spontaneous recoherence of quantum states after decoherence. *European Physical Journal D*, v. 59, n. 3, p. 487-496, 2010.

8 BENATTI, A.; FLOREANINI, R.; SCHOLES, G. Loss of coherence and memory effects

in quantum dynamics. *Journal of Physics B*-atomic molecular and optical physics, v. 45, n. 15, p. 1-3, 2012.

9 BENEDETTI, C.; PARIS, M. G. A.; MANISCALCO, S. *Non-Markovianity of colored noisy channels.* 2013. Dispónível em: <http://arxiv-web3.library.cornell.edu/pdf/1309.5270v2.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2014.

10 CHRUŚCIŃSKI, D.; MANISCALCO, S. *On the degree of non-Markovianity of quantum evolution.* 2013. Disponível em: http://arxiv.org/pdf/1311.4213v1.pdf. Acesso em: 17 jan. 2014.

11 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. San Francisco: Addison-Wesley Publishing Company, 2010.

12 COHEN-TANNOUJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1977.

13 MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. New York: John Wiley Sons, 1998.

14 BALIAN, R. *From microphysics to macrophysics*: methods and applications of statistical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

15 BLUM, K. *Density matrix theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2012.

16 OLIVEIRA, I.; SARTHOUR, R.; BONAGAMBA, T.; AZEVEDO, E.; FREITAS, J. C. C. *NMR quantum information processing*. Amsterdam: Elsevier Science Technology Books, 2007.

17 LOUISELL, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. New York: John Wiley Sons, 1990.

18 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

19 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, S. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

20 REICHL, *A modern course in statistical physics*. New York: Wiley, 2009.

21 VAN KAMPEN, N. G. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Amsterdam: Elsevier Science Technology Books, 2007.

22 SCHLEICH, W. P. *Quantum optics in phase space*. Berlin: Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, 2001.

23 CARMICHAEL, H. *Statistical methods in quantum optics 1:* master equations and Fokker-Planck equations. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1999.

24 SOARES-PINTO, D. O.; MORGADO, W. A. M. Brownian dynamics, time-averaging and colored noise. *Physica A-statistical mechanics and its applications*, v. 365, n. 2, p. 289-299, 2006.

25 JAMES, D. V. F. Theory of heating of the quantum ground state of trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 2, p. 317-320, 1998.

26 KIM, J. I.; NEMES, M. C.; PIZA, A. F. R. D.; BORGES, H. E. Perturbative expansion for coherence loss. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 2, p. 207-210, 1996.

27 BUDINI, A. A. Non-Markovian Gaussian dissipative stochastic wave vector. *Physical Review A*, v. 63, n. 1, p. 012106-1-012106-11, 2001.

28 BUDINI, A. A. Quantum systems subject to the action of classical stochastic fields. *Physical Review A*, v. 64, n. 5, p. 052110-1-052110-12, 2001.

29 NOVIKOV, E. A. Functionals and the ramdom-force method in turbulence theory. *Soviet Physics JETP*, v. 20, n. 5, p. 1290-1294, 1965.

30 BUDINI, A. A. Lindblad rate equations. *Physical Review A*, v. 74, n. 5, p. 053815-1-053815-12, 2006.

31 MAZOLA, L.; LAINE, E. M.; BREUER, H. P.; MANISCALCO, S.; PIILO, J. Phenomenological memory-kernel master equations and time-dependent Markovian processes.

Physical Review A, v. 81, n. 6, p. 062120-1-062120-5, 2010.

32 VASILE, R.; MANISCALCO, S.; PARIS, M. G. A.; BREUER, H. P. Quantifying non-Markovianity of continuous-variable Gaussian dynamical maps. *Physical Review A*, v. 84, n. 5, p. 052118-1-052118-9, 2011.

33 PALAO, J. P.; KOSLOFF, R.; GORDON, J. M. Quantum thermodynamic cooling cycle. *Physical Review E*, v. 64, n. 5, p. 056130-1-056130-8, 2001.