

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Alberto Jônatas Bezerra Rosal

Limites quânticos de velocidade: universalidade, tightness e
Markovianidade

São Carlos

2024

Alberto Jônatas Bezerra Rosal

Limites quânticos de velocidade: universalidade, tightness e Markovianidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto

Versão original

**São Carlos
2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA
TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA
FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Rosal, Alberto Jônatas Bezerra
Limites quânticos de velocidade: universalidade,
tightness e Markovianidade / Alberto Jônatas Bezerra
Rosal; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto -- São
Carlos, 2024.
177 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São
Carlos, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Limites quânticos de velocidade. 2. Sistemas
quânticos abertos. 3. Fundamentos de mecânica quântica. 4.
Informação quântica. 5. Markovianidade quântica. I. Pinto,
Diogo de Oliveira Soares, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Alberto Jônatas Bezerra Rosal

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Teórica e Experimental.

Aprovado (a) em: 22/05/2024

Comissão Julgadora

Dr(a).: Diogo Oliveira Soares Pinto

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a).: Gabriel Teixeira Landi

Instituição: (University of Rochester/EUA)

Dr(a).: Barbara Lopes Amaral

Instituição: (IF/USP)

*Este trabalho é dedicado a todas as minorias que são continuamente excluídas da sociedade, tendo seus direitos negligenciados e suas vozes silenciadas, vivendo em um mundo onde poucos têm tanto enquanto muitos têm tão pouco.
Para todos aqueles que não puderam ter acesso a direitos básicos.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é consequência de todo o amor e carinho que recebi de amigos e familiares durante toda a vida. Diferentemente do que prega o discurso meritocrata, eu tenho plena consciência de que os frutos deste trabalho (ou de outros) não são devidos ao meu esforço, mas sim pelo apoio que recebi durante toda a minha história. Sob essa ótica, esta seção toma um importante lugar não só nesta dissertação, mas também na minha jornada profissional e pessoal.

Ao longo desta caminhada, tive a sorte de desenvolver relações que extrapolam a noção convencional de amizade. Gostaria de agradecer ao Victor Chabu, meu primeiro orientador e grande amigo. Eu precisaria de várias dissertações para poder expressar o quão sou grato pela nossa amizade, pelas orientações acadêmicas e pessoais, pelas conversas sobre física, política, por pintar meu apartamento e por me ajudar nas aplicações para o exterior. Agradeço também ao Rodrigo Ramos pela companhia, pelas discussões e pela forte amizade que nós desenvolvemos como consequência da física e que certamente foram muito importantes nessa jornada. Também sou grato ao Rodrigo Pereira e o Saulo Santil por todo o apoio com as aulas de inglês, que foram fundamentais no meu desenvolvimento acadêmico. Obrigado também aos amigos de graduação, nomeadamente a “panelinha” do *ReSolvay Conference*, por todas as gargalhadas, ao apoio e amizade que desenvolvemos ao longo desses anos.

Também sou grato por ter tido a oportunidade de trabalhar com excelentes orientadores. Em especial, gostaria de agradecer ao Diogo O. Soares-Pinto, meu orientador, por me livrar diversas vezes dos “planos do cebolinha¹”, pelas conversas sobre política, física e tudo mais. Você me ensinou a ser um profissional e uma pessoa melhor, além de me dar novas esperanças em ver uma comunidade constituída de pessoas mais humanas dentro do ambiente acadêmico. Obrigado por todo seu esforço e contribuições no meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Não posso esquecer de agradecer ao trabalho do Ricardo Vital² e Silvio César Athayde dentro da secretaria de pós-graduação do IFSC, que por diversas vezes me ajudaram a desenrolar os problemas burocráticos que inevitavelmente surgiram durante a pós-graduação.

Por fim, gostaria de destacar o importante papel da minha família na minha vida pessoal e profissional, e este trabalho só foi realizado graças a eles. Agradeço ao meu pai, Alberto Joaquim, que por falta de oportunidade só estudou até a quarta série, mas me

¹ Um “plano do cebolinha” é aquele onde você pensa que vai se dar bem, mas no final você toma uma coelhada.

² Também conhecido como *Ricardeus* entre os alunos.

ensinou como ninguém a importância dos estudos, sempre me incentivando e me motivando a ir cada vez mais adiante. Agradeço a minha mãe, Silvia Helena, por ter me educado para a vida e por ter me dado muito amor. Sou grato a minha irmã, Rafaella, e por meu cunhado, Daniel, por todo o apoio durante essa longa jornada. Agradeço a minha vó, Maria de Lourdes, por sempre me incentivar e me motivar, por todas as gargalhadas e por todo o amor. Sou imensamente grato a minha esposa, Ana Paula, por toda a força, carinho e amor, por sempre enfrentar as lutas da vida comigo, por estar do meu lado durante todas as noites acordado enquanto desenvolvia e escrevia esta dissertação, e pela linda relação que desenvolvemos ao longo desses anos. Vocês me forneceram as condições para me desenvolver como pessoa e como profissional. Eu apenas fiz o trabalho mais fácil. Sou muito grato a todos vocês e esse trabalho é fruto de muito amor e carinho que nós cultivamos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“Trilhei, na infância querida,
Composta de mil primores,
A estrada de minha vida,
Ornamentada de flores.
E que linda aquela estrada!
Sempre havia ao lado dela
Encanto, paz e beleza;
Desde a terra ao grande espaço,
Em tudo eu notava um traço
Do pincel da Natureza(...)”*
Patativa do Assaré

RESUMO

ROSAL, A. J. B. **Limites quânticos de velocidade:** universalidade, tightness e Markovianidade. 2024. 177 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Um limite de velocidade quântica (em inglês Quantum Speed Limit, ou abreviadamente QSL) é um limite inferior no tempo de evolução entre dois estados quânticos. Neste trabalho, nós desenvolvemos duas novas famílias de QSLs: uma utilizando a abordagem geométrica e outra inspirada na desigualdade de Holder. Ambas as abordagens envolvem o uso das α -normas Schatten. Notavelmente, para um estado de um q-bit, demonstramos que o QSL geométrico permanece independente da norma Schatten escolhida, revelando uma forma de universalidade entre esses quantificadores. Além disso, realizamos uma comparação entre os QSLs desenvolvidos neste trabalho e os QSLs paradigmáticos existentes na literatura. Demonstramos também que os limites quânticos de velocidade preexistentes podem ser vistos como casos particulares de QSLs baseados nas normas Schatten. Adicionalmente, analisamos condições necessárias e suficientes para uma dinâmica ótima, ou seja, quando o tempo de evolução entre dois estados quânticos é igual ao QSL. Por fim, comparamos os dois QSLs desenvolvidos, apresentando uma desigualdade entre eles de clara significância geométrica. Em especial, nós mostramos que o limite quântico de velocidade geométrico induzido por uma norma Schatten pode ser visto como um QSL universal, onde este se mostrou como o quantificador mais tight para uma dinâmica geral de um q-bit preparado inicialmente em um estado puro. Finalmente, nós investigamos os efeitos de uma dinâmica Markoviana e não-Markoviana no QSL universal, e ilustramos situações onde os regimes Markovianos ou não-Markovianos implicam em uma dinâmica ótima. Em complemento, nós também mostramos como melhorar a dinâmica de um sistema, e exemplificamos um caso onde uma dinâmica não-Markoviana se mostrou mais tight que o caso Markoviano.

Palavras-chave: Limites quânticos de velocidade. Sistemas quânticos abertos. Fundamentos de mecânica quântica. Informação quântica. Markovianidade quântica.

ABSTRACT

ROSAL, A. J. B. **Quantum speed limits: universality, tightness and Markovianity.** 2024. 177 p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

A quantum speed limit (QSL) is a lower bound on the evolution time between two quantum states. In this work, we developed two new families of QSLs: one using the geometric approach and the other inspired by Holder's inequality. Both approaches involve the use of the α -Schatten norms. Notably, for a single qubit state, we demonstrate that the geometric QSL remains independent of the chosen Schatten norm, revealing a form of universality between these quantifiers. Furthermore, we carried out a comparison between the QSLs developed in this work and the paradigmatic QSLs existing in the literature. We also demonstrate that preexisting quantum speed limits can be seen as particular cases of QSLs based on Schatten norms. Additionally, we analyze necessary and sufficient conditions for optimal dynamics, that is, when the evolution time between two quantum states is equal to the QSL. Finally, we compared the two developed QSLs, presenting an inequality between them with a clear geometric significance. In particular, we show that the geometric quantum speed limit induced by a Schatten norm can be seen as a universal QSL, where this proved to be the tightest quantifier for the general dynamics of a qubit initially prepared in a pure state. In the end, we investigate the effects of Markovian and non-Markovian dynamics on universal QSL, and illustrate situations where Markov or non-Markov regimes imply optimal dynamics. In addition, we also show how to improve the dynamics of a system, and exemplify a case where a non-Markovian dynamic proved to be tighter than the Markov case.

Keywords: Quantum speed limits. Open quantum systems. Quantum foundations. Quantum information. Quantum Markovianity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução dinâmica no espaço de estados.	79
Figura 2 – Gráfico da taxa de decaimento referente ao sistema composto pelos dois q-bits.	127
Figura 3 – Gráfico da distância traço em função do tempo. O q-bit auxiliar é preparado inicialmente no estado puro $ \Omega^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$, enquanto que o q-bit principal é preparado também no estado $ \Omega^+\rangle$ ou no estado $ \Omega^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle)$. Temos então a distância traço entre os estados que evoluem a partir de $ \Omega^\pm\rangle$ inicialmente preparados no q-bit principal.	128
Figura 4 – Interpretação geométrica do Teorema 4. A curva azul representa o caminho <i>tight</i> , que é a reta que conecta o estado inicial ao estado final no espaço de Bloch, tal como será demonstrado a seguir, e a distância Euclideana entre o estado inicial e final corresponde ao comprimento desta curva. A curva dinâmica é representada pelo caminho em vermelho. Logo, a razão τ_{QSL}^α/τ é proporcional a razão dos comprimentos da curva ótima (azul) e da curva dinâmica (vermelha).	136
Figura 5 – Interpretação geométrica do Lema 18.	150
Figura 6 – Evolução dinâmica do q-bit principal no espaço de Bloch.	161
Figura 7 – α -QSL em função de τ para pequenos valores do tempo de evolução. O q-bit principal é preparado inicialmente em um dos auto-estados de σ_x , nomeadamente $(0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$	163
Figura 8 – Taxa de decaimento em função do tempo de evolução τ do q-bit principal. O q-bit principal é preparado inicialmente no estado puro $(0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$	164
Figura 9 – Distância traço em função do tempo. Os dois estados iniciais avaliados para calcular a distância traço correspondem aos dois auto-estados de σ_x , nomeadamente $(0\rangle \pm 1\rangle)/\sqrt{2}$	165
Figura 10 – τ_{QSL}^α/τ em função do tempo de evolução. O q-bit principal é preparado inicialmente no estado $(0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$	166
Figura 11 – $ 1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau $ em função do tempo de evolução. O estado inicial do q-bit principal corresponde a um dos auto-estados de σ_x , nomeadamente $(0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$	167

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QSL	Quantum speed limit
OQS	Open quantum system
POVM	Positive Operator-Valued Measure
CPTP	Completely positive and trace-preserving

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	TEORIA QUÂNTICA RUIDOSA	27
2.1	Estados Quânticos Ruidosos	27
2.1.1	Ensemble de Estados e Operador Densidade	27
2.1.2	Propriedades básicas do operador densidade $\rho_{\mathcal{E}}$	30
2.1.3	Operador densidade como um estado quântico	32
2.1.4	Representação de Bloch	34
2.2	Medições na Teoria quântica ruidosa	37
2.2.1	Medições Quânticas Gerais	37
2.2.2	Medições descritas por um POVM	38
2.3	Sistemas Quânticos Compostos	39
2.3.1	Estado de um Sistema Quântico Composto	39
2.3.2	Estados Separáveis e Emaranhamento	40
2.3.3	Traço Parcial	43
2.4	Evoluções Quânticas	45
2.4.1	Abordagem Axiomática	45
2.4.2	Evolução Ruidosa Como Consequência da Perda de um Resultado de uma Medição.	49
2.4.3	Evolução Ruidosa de Sistemas Quânticos Abertos	50
2.4.4	Canais Unitais	53
2.4.5	Amortecimento de Amplitude	56
3	MEDIDAS DE DISTINGUIBILIDADE	57
3.1	Normas	58
3.2	Uma breve menção a teoria de espaços métricos	61
3.3	Exemplos de medidas de distinguibilidade	62
3.3.1	Norma operador (espectral)	62
3.3.2	Norma traço (L_1) e distância traço	64
3.3.3	Norma de Hilbert-Schmidt (L_2)	73
4	LIMITES QUÂNTICOS DE VELOCIDADE	77
4.1	Definições e Noções Gerais	77
4.2	Mandelstam-Tamm (MT) e Evoluções Unitárias	80
4.3	Deffner-Lutz (DL) e Evoluções não-Unitárias	83
4.3.1	DL QSL para dinâmicas unitárias	84

4.3.2	DL QSL para dinâmicas gerais	85
4.4	Mais exemplos e propriedades dos limites quânticos de velocidade	88
5	MARKOVIANIDADE QUÂNTICA	91
5.1	Markovianidade em processos estocásticos clássicos	92
5.1.1	Definições e propriedades	93
5.1.2	Matrizes de transição	95
5.1.3	Contratividade	99
5.2	Markovianidade em processos quânticos através do mapa dinâmico	101
5.2.1	Estendendo as definições clássicas para o domínio quântico	101
5.2.2	RHP-Markovianidade: definições	102
5.2.3	RHP-Markovianidade: ausência de memória	106
5.2.4	Semigrupos e Markovianidade	110
5.2.5	BLP-Markovianidade	112
5.3	Medidas e Testemunhas de não-Markovianidade	113
5.3.1	Medida RHP	114
5.3.2	Medida definida através das taxas de decaimento	116
5.3.3	Testemunha de não-Markovianidade e medida BLP	116
5.4	Controlando a não-Markovianidade	118
5.4.1	Dinâmica global	118
5.4.2	Dinâmica de um único q-bit	120
5.4.3	Controlando a Markovianidade da dinâmica de um q-bit	122
5.4.4	Exemplos	126
6	RESULTADOS	131
6.1	Limites quânticos de velocidade baseados em normas Schatten: universalidade e tightness	131
6.1.1	QSL geométrico em um espaço de estados normado	132
6.1.1.1	α -QSL para um q-bit	134
6.1.1.2	Comparando α -QSL com outros quantificadores	137
6.1.1.3	Condições de Tightness para o α -QSL	138
6.1.2	QSL baseado na desigualdade de Holder	142
6.1.2.1	(α, β) -QSL para um q-bit	144
6.1.2.2	Comparando (α, β) -QSL com outros quantificadores	144
6.1.2.3	Condições de Tightness para o (α, β) -QSL	146
6.1.3	Comparando o α -QSL com o (α, β) -QSL	148
6.2	Markovianidade Quântica e Tightness	151
6.2.1	Contextos onde Markovianidade ou não-Markovianidade implicam em uma dinâmica tight	153

6.2.1.1	Dinâmica onde Markovianidade implica em tightness: modelo de Jaynes–Cummings	154
6.2.1.2	Dinâmica onde não–Markovianidade implica em tightness	156
6.2.2	Contexto onde não há uma relação bem definida entre Markovianidade e tightness para o α -QSL	158
6.2.2.1	Dois q–bits interagentes e acoplados com banho bosônico	158
6.2.2.2	Condição onde dinâmicas Markovianas e não–Markovianas são tight	163
7	CONCLUSÕES	169
	REFERÊNCIAS	173

1 INTRODUÇÃO

Entender o tempo como entidade física é uma tarefa que remonta aos trabalhos de Galileu, Newton e Einstein. Sobretudo, o papel do tempo na teoria quântica foi fonte de diversas discussões. Existem tentativas de atribuir um operador tempo que atua em um espaço de Hilbert (1,2) e, portanto, o tempo poderia ser visto como um observável. Entretanto, esta abordagem gera diversos conflitos teóricos e conceituais que não serão abordados no escopo deste trabalho. Por outro lado, para escalas de energias na qual os efeitos relativísticos são desprezíveis, podemos tratar o tempo como um parâmetro que descreve a evolução de um sistema em um dado referencial inercial. Para um sistema quântico, o tempo será um parâmetro na equação de Schrödinger ou, mais geralmente, será um parâmetro em uma equação mestra que descreve a evolução do sistema.

Podemos agora introduzir a seguinte questão: suponha um sistema físico em uma dada configuração inicial e considere uma dada configuração final de interesse. Qual é o menor tempo possível na qual o sistema evolui do seu estado inicial para o estado final? Em outras palavras, a teoria quântica limita a “velocidade” de evolução de um sistema? Esta questão introduz os limites quânticos de velocidade, que serão precisamente estudados neste trabalho. Um *limite quântico de velocidade*¹ corresponde ao tempo mínimo de evolução de um estado inicial para um estado final de um sistema quântico. Existem diversos exemplos de quantificadores de QSL na literatura (35,43,44), entretanto a relação entre esses quantificadores ainda não é completamente clara. Portanto, um dos principais problemas que buscaremos abordar é de como esses diferentes QSLs se relacionam uns com os outros. Em especial, motivamos a seguinte pergunta: é possível que haja um quantificador *universal*? Isto é, existe um QSL que generaliza todos os demais preexistentes na literatura?

Além dos limites quânticos de velocidade, propomos também um estudo da Markovianidade quântica. Como será visto, um sistema não-Markoviano é tal que manifesta efeitos de memória em sua evolução. Vamos explorar algumas formas de definir tais efeitos em sistemas quânticos. Em complemento, trabalhos desenvolvidos por Deffener e Lutz (35) assim como J. Teittinen *et al* (52) sugerem que dinâmicas não-Markovianas podem modificar um limite quântico de velocidade. Portanto, outra questão que iremos abordar será de verificar as relações entre os regimes de evoluções Markovianas e não-Markovianas com os quantificadores de QSL que serão estudados.

Neste trabalho, nós iremos utilizar as estruturas geométricas que estão presentes no espaço de estados de um sistema quântico. Em especial utilizaremos as noções de um *espaço métrico* e discutiremos como que tais estruturas se relacionam com as *medidas de distinguibilidade de estados quânticos*. Em particular, vamos tratar o espaço de estados

¹ Ou em inglês, *quantum speed limits* (QSL).

como um espaço métrico Euclideano, definindo uma métrica capaz de medir as distâncias entre os estados acessíveis para um sistema quântico. Tais métricas serão induzidas pelas *normas Schatten* definidas no espaço de operadores do sistema e mostraremos como que novos quantificadores de QSL podem emergir destas estruturas.

Portanto, nós buscamos obter um QSL universal, que poderá ser visto como uma generalização dos demais quantificadores existentes. Além disso, iremos investigar quais são as condições necessárias e suficientes para obter uma dinâmica com o menor tempo de evolução possível, introduzindo assim a noção de *tightness*² e que será precisamente discutida no que segue. Nós iremos mostrar que tais condições possuem interpretações geométricas muito simples e iremos adotar a abordagem geométrica em nossas análises. Por fim, nós iremos analisar a relação entre limites quânticos de velocidade e a Markovianidade quântica, verificando se os regimes Markovianos ou não-Markovianos alteram os valores destes quantificadores.

Esta dissertação compreende resultados relativos a investigação minuciosa acerca dos limites quânticos de velocidade e dinâmicas não-Markovianas, estando organizada como segue: no Capítulo 2 nós iremos introduzir o formalismo da teoria quântica ruidosa que será o cenário básico para todo o restante das nossas análises. Nós iremos introduzir a noção de *estado quântico* através do operador densidade, assim como ilustrar outras representações que serão úteis em nossos estudos, tal como a *representação de Bloch*. Dessa forma, nós definimos a noção de um estado quântico ruidoso. Em seguida, nós também introduzimos as medições em tais sistemas ruidosos e iremos definir a noção de um *POVM*. Tais noções serão aplicadas nos estudos de medidas de distinguibilidade e em definições de Markovianidade quântica. Por fim, iremos definir também as evoluções quânticas gerais, que podem ser aplicadas em contextos de dinâmicas ruidosas. Nós iremos discutir o conceito de um *canal quântico*, que é central na teoria de sistemas quânticos abertos e informação quântica.

No Capítulo 3 nós iremos ilustrar formas de quantificar as diferenças de estados quânticos, ou seja, iremos definir as chamadas *medidas de distinguibilidade*. Começaremos introduzindo as noções gerais de espaços normados e espaços métricos, que forneceram as ferramentas fundamentais para a abordagem geométrica que iremos empregar para o espaço de estados. Em especial, nós iremos introduzir as α -normas Schatten e mostraremos que o espaço de estados pode ser interpretado como um espaço métrico Euclideano através dessas α -normas. Iremos também fornecer exemplos onde estas normas podem ser utilizadas e

² Como será discutido no decorrer do texto, uma vez que um limite quântico de velocidade representa um limite inferior no tempo de evolução, uma dinâmica será *tight* quando o tempo de evolução for igual ao seu valor mínimo que é dado pelo QSL. Em complemento, o termo *tightness* deve ser interpretado como a capacidade de uma dinâmica ser *tight*. Traduzida de forma literal, a palavra *tight* significa “justo”, “apertado” ou “preciso”. Como não possuímos uma palavra em português que expresse corretamente a mesma ideia, nós adotaremos nesta dissertação o mesmo termo utilizado na literatura especializada, isto é, o termo *tight*.

discutiremos suas principais propriedades.

Em seguida, tendo em mente todo o formalismo das medidas de distinguibilidade, nós iremos introduzir no Capítulo 4 a teoria geral dos *limites quânticos de velocidade* (QSL), tal como os conceitos centrais e as principais formas de definir um quantificador de QSL. Além disso, nós iremos fornecer exemplos para dinâmicas unitárias e não-unitárias, na tentativa de tornar o leitor mais familiar com as ideias centrais deste campo. No Capítulo 5 nós iremos introduzir as principais definições de Markovianidade para evoluções de sistemas quânticos sob a ótica da teoria da informação quântica, isto é, iremos caracterizar a dinâmica Markoviana em termos das propriedades do mapa dinâmico da evolução, que será definido em breve. Por fim, iremos fornecer um interessante exemplo de sistema onde é possível controlar seus efeitos não-Markovianos, na qual iremos trabalhar com dois q-bits interagentes e acoplados com um ambiente bosônico (50).

Finalmente, tendo definido a teoria geral dos limites quânticos de velocidade e também as principais noções de Markovianidade quântica, nós ilustramos os principais resultados desta pesquisa no Capítulo 6. Nós desenvolvemos dois novos quantificadores de QSL, ambos induzidos pelas α -normas Schatten, onde um foi desenvolvido através da abordagem geométrica enquanto que o outro foi obtido da desigualdade de Holder. Comparamos estes dois novos limites quânticos de velocidade com os demais QSLs presentes na literatura e mostramos que os quantificadores preexistentes podem ser vistos como casos particulares dos QSLs induzidos pelas normas Schatten. Em especial, o QSL geométrico mostrou ser um quantificador universal para o caso de uma dinâmica geral de um q-bit que evolui a partir de um estado inicial puro. Em complemento, nós também estudamos as condições necessárias e suficientes para obter um tempo de evolução mínimo de acordo com estes limites quânticos de velocidade, e obtemos requisitos com claras interpretações geométricas em termos dos caminhos dinâmicos no espaço de estados. Por fim, avaliamos o comportamento do quantificador universal, nomeadamente o QSL geométrico, com respeito à dinâmicas Markovianas e não-Markovianas, estendendo assim os resultados obtidos por Deffner e Lutz (35) e por J. Teittinen *et al* (52). Mostramos exemplos onde tanto a Markovianidade quanto a não-Markovianidade podem implicar em dinâmicas ótimas, isto é, quando o tempo de evolução é igual ao QSL geométrico. Nós também mostramos um exemplo onde ambos os regimes Markoviano e não-Markoviano não constituíam dinâmicas ótimas, mas mostramos como é possível melhorar a dinâmica do sistema manipulando os efeitos não-Markovianos. No Capítulo 7, nós discutimos as principais conclusões e mencionamos algumas possíveis continuidades deste trabalho.

Os principais resultados relativos ao desenvolvimento dos dois novos limites quânticos de velocidade podem ser consultados diretamente no trabalho (56), *Quantum Speed Limits Based on Schatten Norms: Universality and Tightness*³, fruto de uma colaboração

³ arXiv:2312.00533

entre pesquisadores do Instituto de Física de São Carlos (Alberto J. B. Rosal e Diogo O. Soares-Pinto) e Departamento de Física da Universidade Federal do Maranhão (Diego Paiva Pires).

2 TEORIA QUÂNTICA RUIDOSA

Na teoria quântica não ruidosa, nós supomos possuir total conhecimento sobre o estado que descreve o sistema quântico, sendo este um elemento de um dado espaço de Hilbert cuja evolução dinâmica é descrita pela equação de Schrödinger. Além disso, as medições seriam descritas por operadores de projeção que atuam no espaço de Hilbert do sistema. Entretanto, tal cenário ideal despreza o ruído que pode ser induzido no sistema devido a interações com seu ambiente.

Neste capítulo, vamos discutir os aspectos da teoria quântica ruidosa, descrevendo o papel do ruído nos estados quânticos do sistema, introduzindo o operador densidade, assim como detalhar a evolução dinâmica em um cenário geral, dado pelo formalismo de canais quânticos. Além disso, vamos introduzir o formalismo das medições quânticas no contexto da teoria quântica ruidosa. Neste trabalho, o termo “ruído” significará o conjunto de efeitos nas quais nós não possuímos controle experimental e veremos que estes efeitos podem ter origens clássicas e quânticas.

2.1 Estados Quânticos Ruidosos

Vamos inicialmente introduzir o papel do ruído nos estados quânticos. Na teoria quântica não ruidosa, um sistema quântico é representado por um espaço de Hilbert \mathcal{H} e seu estado é descrito por um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Tal cenário ideal consiste na hipótese de total conhecimento no estado quântico preparado experimentalmente. A seguir, nós buscaremos explorar um cenário mais geral e realista, onde o experimentalista não possui total controle no estado quântico preparado. Para tal, vamos introduzir um ruído clássico no aparato experimental responsável por preparar o estado do sistema quântico e utilizaremos o formalismo da teoria de probabilidades.

2.1.1 Ensemble de Estados e Operador Densidade

Suponha que o experimentalista possui um aparato experimental que prepara um sistema em um certo estado quântico $|\psi_x\rangle$ com probabilidade $p_\chi(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$, sendo \mathcal{X} um conjunto de índices¹. Vamos modelar tal aparato experimental pela variável aleatória clássica χ , que pode resultar nos estados $|\psi_x\rangle$ com distribuição de probabilidades $p_\chi(x)$ com $x \in \mathcal{X}$. Nesse caso, qual será o estado que representa o sistema quântico? A resposta será: o estado do sistema será descrito pelo *operador densidade*, que iremos introduzir abaixo.

¹ Por simplicidade, vamos supor um conjunto de índices enumerável, mas um tratamento análogo poderia ser feito utilizando um conjunto contínuo.

Inicialmente, vamos definir a noção de mistura estatística e ensemble de estados quânticos, assim como a classe de operadores chamados de *operadores densidade*.

Definição 1 (Ensemble de Estados Quânticos). *Seja $p_\chi(x)$ uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória clássica χ com espaço de estados \mathcal{X} , e considere um conjunto de estados quânticos $\{|\psi_x\rangle\}_{x \in \mathcal{X}}$ pertencentes a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_S . Então a família $\mathcal{E} \equiv \{p_\chi(x), |\psi_x\rangle\}_{x \in \mathcal{X}}$ é chamada de ensemble de estados quânticos.*

No contexto descrito acima, uma vez que o experimentalista prepara um estado quântico $|\psi_x\rangle$ com probabilidade $p_\chi(x)$, o sistema quântico é descrito pelo ensemble \mathcal{E} dado pela Definição 1. Além disso, vamos introduzir uma importante classe de operadores que atuam em espaços de Hilbert.

Definição 2 (Operador densidade). *Um operador linear $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que atua em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é chamado Operador Densidade se este é positivo semi-definido² e hermitiano, ou seja*

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad (2.1)$$

$$\rho^\dagger = \rho. \quad (2.2)$$

A seguir, veremos que todo ensemble de estados quânticos é associado a um operador densidade, cujo mapeamento é dado pela próxima definição.

Definição 3 (Operador Densidade Associado a um Ensemble). *Dado um ensemble de estados quânticos \mathcal{E} , o operador densidade associado é definido por*

$$\rho_{\mathcal{E}} \equiv \sum_{x \in \mathcal{X}} p_\chi(x) |\psi_x\rangle \langle \psi_x|. \quad (2.3)$$

Vamos agora ilustrar algumas propriedades centrais relativas ao operador densidade associado a um ensemble. A primeira é a propriedade de normalização, onde vemos facilmente que $\text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}}\} = 1$. Além disso, por se tratar de uma combinação linear convexa de projetores, temos que o operador densidade associado a um ensemble é positivo semi-definido e hermitiano, ou seja

$$\langle \phi | \rho_{\mathcal{E}} | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_S, \quad (2.4)$$

$$\rho_{\mathcal{E}}^\dagger = \rho_{\mathcal{E}}, \quad (2.5)$$

² Muitas vezes é comum denotar um operador A positivo semi-definido pelo símbolo $A \geq 0$.

onde \mathcal{H}_S é o espaço de Hilbert que descreve o sistema quântico de interesse. Portanto, como descrito na Definição 2, temos que o operador densidade associado a um ensemble é um operador densidade legítimo.

Note que, pela Definição 3, o operador densidade associado ao ensemble \mathcal{E} pode ser interpretado como a média dos projetores que representam os possíveis estados puros preparados pelo experimentalista. Até agora, o operador densidade $\rho_{\mathcal{E}}$ foi definido como um objeto matemático associado a um dado ensemble de estados \mathcal{E} , também chamado de *mistura estatística de estados*. A seguir, nós iremos mostrar que tal operador representa o estado de um sistema quântico.

Lembre-se que um estado de um sistema é um objeto tal que fornece toda a informação relativa aos seus observáveis. Em outras palavras, o estado descreve a estatística de observáveis. Vamos agora verificar algumas propriedades relativas ao operador densidade. A primeira propriedade que iremos investigar é a relação entre o operador densidade e a distribuição de probabilidades (antes da medição) de um dado observável de um sistema quântico.

Lema 1 (Estatística pré-medição). *Seja A um observável de um sistema quântico descrito por um ensemble $\mathcal{E} = \{p_{\chi}(x), |\psi_x\rangle\}_{x \in \mathcal{X}}$, cuja decomposição espectral é dada por $A = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|$. Então a probabilidade de obter o resultado a_{α} em uma medição é dada por*

$$p_A(a_{\alpha}) = \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\} , \quad (2.6)$$

onde $\rho_{\mathcal{E}}$ é o operador densidade associado com o ensemble \mathcal{E} .

Demonstração. Dado que o sistema é descrito pelo ensemble $\mathcal{E} = \{p_{\chi}(x), |\psi_x\rangle\}_{x \in \mathcal{X}}$, pela lei da probabilidade total nós temos

$$p_A(a_{\alpha}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{\chi}(x) p(a_{\alpha} | \psi_x) , \quad (2.7)$$

onde $p(a_{\alpha} | \psi_x)$ é a probabilidade de obter o resultado a_{α} dado que o sistema encontra-se no estado ψ_x . Pela teoria quântica não ruidosa, uma vez que o sistema encontra-se no estado ψ_x , a probabilidade de obter o resultado a_{α} é dada por $p(a_{\alpha} | \psi_x) = |\langle \Phi_{\alpha} | \psi_x \rangle|^2$. Logo, nós temos que

$$p_A(a_{\alpha}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{\chi}(x) \langle \Phi_{\alpha} | \psi_x \rangle \langle \psi_x | \Phi_{\alpha} \rangle , \quad (2.8)$$

$$= \langle \Phi_{\alpha} | \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} p_{\chi}(x) |\psi_x\rangle \langle \psi_x| \right) | \Phi_{\alpha} \rangle , \quad (2.9)$$

$$= \langle \Phi_{\alpha} | \rho_{\mathcal{E}} | \Phi_{\alpha} \rangle , \quad (2.10)$$

$$= \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\} . \quad (2.11)$$

Portanto, a probabilidade de obter o resultado a_α em uma medição do observável A é dada por $p_A(a_\alpha) = \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} |\Phi_\alpha\rangle \langle \Phi_\alpha|\}$. \square

Veja que, devido ao Lema 1, o operador densidade pode ser visto como uma generalização quântica de uma função de densidade de probabilidade. Além disso, como consequência do Lema 1, nós podemos calcular o valor esperado de um observável A de um dado sistema quântico. Sob as condições de tal Lema, veja que

$$\langle A \rangle \equiv \sum_{\alpha} a_{\alpha} p_A(a_{\alpha}) , \quad (2.12)$$

$$= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\} , \quad (2.13)$$

$$= \text{Tr} \left\{ \rho_{\mathcal{E}} \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\right) \right\} , \quad (2.14)$$

$$= \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} A\} , \quad (2.15)$$

onde usamos a decomposição espectral $A = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\$ e também que $p_A(a_{\alpha}) = \text{Tr}\{\rho_{\mathcal{E}} |\Phi_{\alpha}\rangle \langle \Phi_{\alpha}|\}$.

2.1.2 Propriedades básicas do operador densidade $\rho_{\mathcal{E}}$

Note que, pela Definição 1, podemos concluir que todo ensemble de estados quânticos é representado por um único operador densidade, definido na Definição 3. Entretanto, o oposto não é verdade: um operador densidade pode ser gerado por mais de um ensemble. Como exemplo, considere os ensembles $\mathcal{E}_1 = \{|1/2, |0\rangle\rangle, |1/2, |1\rangle\rangle\}$ e $\mathcal{E}_2 = \{|1/2, |+ \rangle\rangle, |1/2, |- \rangle\rangle\}$, onde temos

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}} , \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

sendo $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ortogonais e normalizados. Neste caso, é fácil ver que

$$\rho \equiv \rho_{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| = \frac{1}{2} |+ \rangle \langle +| + \frac{1}{2} |- \rangle \langle -| = \rho_{\mathcal{E}_2} . \quad (2.18)$$

Temos dois ensembles distintos, nomeadamente \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , que geram o mesmo operador densidade ρ . Portanto, uma vez que dois ou mais ensembles distintos podem gerar o mesmo operador densidade, devido ao Lema 1 nós podemos também concluir que dois ou mais ensembles distintos podem fornecer a mesma distribuição de probabilidades para um observável de um sistema quântico.

Veja que, pela Definição 3, um ensemble de estados quânticos sempre é associado a um operador densidade (um operador linear positivo semi-definido cujo traço é unitário).

Entretanto, podemos perguntar: para um dado operador densidade, temos um ensemble associado a este? Neste caso, temos que a resposta é *sim*, como iremos explicar abaixo. Primeiramente, precisamos do seguinte resultado:

Lema 2 (Operadores positivos semi-definidos são hermitianos). *Se $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear positivo semi-definido, então A é hermitiano.*

Demonstração. Podemos escrever $A = B + iC$, com $B = \frac{A+A^\dagger}{2}$, $C = \frac{A-A^\dagger}{2i}$ e $i = \sqrt{-1}$. Logo B e C são operadores hermitianos. É fácil ver que $[B, C] = BC - CB = 0$, portanto como B e C são dois operadores hermitianos que comutam, nós podemos obter uma base comum de auto-estados $|\psi_i\rangle$ que simultaneamente diagonaliza os operadores B e C , ou seja

$$B = \sum_j b_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| , \quad (2.19)$$

$$C = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . \quad (2.20)$$

Por absurdo, suponha que $C \neq 0$. Neste caso, temos que existe um índice h tal que $C |\psi_h\rangle = c_h |\psi_h\rangle$ com $c_h \neq 0$. Para este auto-valor não nulo do operador C , nós temos que $\langle \psi_h | A | \psi_h \rangle = b_h + ic_h$ é um número complexo. Absurdo, pois supomos que A é um operador positivo semi-definido. Portanto, necessariamente temos que $C = 0$, e uma vez que B é hermitiano, podemos concluir que $A = B$ com $A^\dagger = A$. Portanto, um operador linear A positivo semi-definido é também hermitiano. \square

Retornando a nossa pergunta anterior, seja ρ um operador densidade atuando em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Logo, ρ é um operador linear positivo semi-definido com $\text{Tr}\{\rho\} = 1$. Do Lema 2, temos que ρ é também um operador hermitiano. De acordo com o teorema espectral, ρ assume uma decomposição dada por

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| , \quad (2.21)$$

onde λ_i é o auto-valor associado ao auto-vetor $|\phi_i\rangle$, e o conjunto de auto-vetores³ $\{|\phi_i\rangle\}_i$ representa uma base ortonormal para o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Veja que o conjunto de auto-valores $\{\lambda_i\}_i$ define uma legítima distribuição de probabilidades, pois $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ implica que $\sum_i \lambda_i = 1$, assim como o fato de que ρ é positivo semi-definido implica que $\lambda_i \geq 0$ para todo índice $i = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{H})$. Logo, tais auto-valores descrevem uma distribuição de probabilidades. Dessa forma, podemos definir o ensemble canônico de um dado operador densidade.

³ Estamos utilizando a notação $\{\xi_i\}_i$ para denotar um conjunto de elementos indexados por um índice i . Também iremos utilizar $\{\xi_i\}_{i \in I}$ para explicitar que os índices são elementos de um conjunto I .

Definição 4 (Ensemble Canônico). *Dado um operador densidade ρ com uma decomposição espectral*

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| , \quad (2.22)$$

o seu Ensemble Canônico é definido pela família $\mathcal{E}_\rho \equiv \{\lambda_i, |\phi_i\rangle\}_i$.

Portanto, dado um operador densidade, nós sempre podemos associar um ensemble de estados quânticos (o Ensemble Canônico) para tal operador utilizando sua decomposição espectral. Observe que o ensemble canônico não é único, pois se existir $\lambda_x = \lambda_y$ com $x \neq y$ (no caso de degenerescência do espectro), então a escolha dos auto-vetores correspondentes para estes auto-valores não é única, podendo gerar mais de uma possibilidade de Ensemble Canônico.

2.1.3 Operador densidade como um estado quântico

Como mencionado anteriormente, um estado de um sistema físico indexa a distribuição de probabilidade de todo observável do sistema. Portanto, dado o Lema 1 e a Definição 4, todo operador densidade pode ser visto como a representação de um estado quântico, ou seja, um operador densidade caracteriza toda a informação necessária para descrever o sistema. Além disso, nós podemos descrever um sistema quântico utilizando o operador densidade ao invés de trabalhar com ensemble de estados quânticos (Definição 1), proporcionando uma facilidade nos cálculos matemáticos.

O formalismo do operador densidade generaliza a noção de estado puro, introduzindo a noção de ruído clássico na preparação de um estado quântico. De fato, veja que podemos construir o mapeamento $|\psi\rangle \rightarrow \pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ de todo estado puro $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço de Hilbert \mathcal{H} em projeções π_ψ que atuam neste mesmo espaço de Hilbert. Note que $\text{Tr}\{\pi_\psi\} = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ e também $\langle\phi|\pi_\psi|\phi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \geq 0$ para todo $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, logo π_ψ é um operador densidade. Portanto, todo estado puro pode ser representado por um operador densidade. Entretanto, a inversa não é verdadeira, ou seja, não é possível descrever uma mistura estatística de estados por um estado puro pertencente a um espaço de Hilbert. Logo, sob essa ótica, torna-se mais geral definir estados quânticos com operadores densidade do que com estados puros. Dado a discussão prévia, vamos agora formalizar a noção de estado quântico através da seguinte definição.

Definição 5 (Estado Quântico). *O estado de um sistema quântico é definido em termos de um operador densidade ρ que atua em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , em outras palavras, um operador linear positivo semi-definido e com traço unitário.*

Um estado é dito ser puro quando o operador densidade é um projetor, ou seja, possui um auto-valor igual para 1 e todos os demais auto-valores são nulos. Caso contrário, o estado é dito ser misto, ou uma mistura. Além disso, o conjunto de operadores densidade

de um dado sistema quântico desempenha o espaço de estados acessíveis para uma dada dinâmica e irá representar um papel de extrema importância nesse trabalho.

Definição 6 (Espaço de Estados). *Dado um sistema quântico com espaço de Hilbert \mathcal{H} , o conjunto de todos os operadores densidade ρ atuando em tal espaço de Hilbert será denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ e será chamado de Espaço de Estados de tal sistema quântico.*

Como um exemplo, vamos introduzir o estado de máxima mistura, denotado por π . Com efeito, seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão $d = \dim(\mathcal{H})$ com base ortonormal $\{|i\rangle\}_i$. O estado de máxima mistura é definido por

$$\pi \equiv \frac{1}{d} \sum_i |i\rangle \langle i| = \frac{1}{d} \mathbb{1}, \quad (2.23)$$

onde $\mathbb{1}$ representa o operador identidade que atua em \mathcal{H} . O estado π possui uma clara interpretação física: suponha que o experimentalista prepara o sistema quântico em qualquer estado $|i\rangle$, com $i = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{H})$, todos com a mesma probabilidade. A distribuição de probabilidades de preparação do estado do sistema é uma distribuição uniforme, com $p_i = 1/d$ para todos os valores de i . Logo, o ensemble que representa o sistema será dado por $\mathcal{E}_U = \{1/d, |i\rangle\}_{i=1}^d$ e o estado quântico associado será o estado de máxima mistura π dado pela Eq.(2.23).

Além disso, o estado de máxima mistura é o único que maximiza a entropia de Shannon. Relembre que a entropia de um estado ρ é definida por

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}\{\rho \log \rho\}. \quad (2.24)$$

É possível mostrar que, para o caso de um espaço de Hilbert de dimensão finita $d = \dim(\mathcal{H})$, a entropia de Shannon (Eq.(2.24)) possui um valor máximo igual a $\log d$ (3). Além disso, também é possível mostrar que tal valor é atingido se, e somente se, o estado do sistema é o estado de máxima mistura π (Eq.(2.23)). Portanto, tal estado é também o único estado que maximiza a entropia de Shannon (estado de máxima entropia).

O espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ de um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} possui diversas propriedades geométricas interessantes (4). Uma delas é dada pelo seguinte Lema.

Lema 3 (Convexidade do espaço de estados). *O espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ de um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} é um conjunto convexo, ou seja, se $\lambda \in [0, 1]$, e $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, então $\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Definimos $\xi = \lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma$. Uma vez que ρ e σ possuem traço unitário e são operadores positivos semi-definidos, é fácil ver que $\text{Tr}\{\xi\} = 1$ e também que $\forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$, temos $\langle \phi | \xi | \phi \rangle \geq 0$. Logo $\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma = \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. \square

Uma importante propriedade dos estados quânticos é denominada *pureza*. Tal propriedade distingue os estados puros das misturas estatísticas e desempenha uma fundamental importância nos fundamentos da teoria quântica.

Definição 7 (Pureza). *Dado um estado quântico ρ , sua pureza $\mathcal{P}(\rho)$ é definida por*

$$\mathcal{P}(\rho) \equiv \text{Tr}\{\rho^\dagger \rho\} = \text{Tr}\{\rho^2\} , \quad (2.25)$$

onde a segunda igualdade segue do Lema 2.

Como mencionado anteriormente, é possível distinguir estados puros de misturas estatísticas através da pureza dada pela Definição 7, como descrito pelo seguinte teorema.

Teorema 1 (Pureza de estados puros e mistos). *A pureza de um estado ρ é igual a 1 se, e somente se, ρ é um estado puro. Além disso, a pureza de um estado misto é estritamente menor que 1.*

Demonstração. Primeiramente vamos provar a primeira afirmação. O caso onde ρ é uma projeção implica trivialmente que $\mathcal{P}(\rho) = 1$. Suponha agora que $\mathcal{P}(\rho) = 1$ e tome uma decomposição espectral $\rho = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$. Calculando a pureza pela Definição 7, temos que $\mathcal{P}(\rho) = \text{Tr}\{\rho^2\} = \sum_i \lambda_i^2$. Uma vez que estamos assumindo $\mathcal{P}(\rho) = 1$, necessariamente temos que ter $\lambda_h = 1$ com $h \in \{1, 2, \dots, \dim(\mathcal{H})\}$ e $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq h$. Portanto, ρ é um projetor. Assim, provamos que a pureza de um estado quântico é igual a 1 se, e somente se, o estado é puro, ou seja, representado por um projetor.

A segunda afirmação segue da Definição 7. Seguindo a decomposição espectral mencionada acima, temos que $\mathcal{P}(\rho) = \sum_i \lambda_i^2$. Assumindo que o estado ρ é misto, temos que $0 \leq \lambda_i < 1$ e que $\text{Tr}\{\rho\} = \sum_i \lambda_i = 1$. Portanto, temos que $\sum_i \lambda_i^2 \leq 1$, e podemos concluir que $\mathcal{P}(\rho) < 1$ para todo estado misto ρ . \square

2.1.4 Representação de Bloch

É possível escrever o operador densidade em função dos geradores da álgebra do grupo $SU(n)$. Tal representação é chamada de *Representação de Bloch* e ela proporciona interpretações geométricas dos estados quânticos. Vamos iniciar explorando o caso de um espaço de Hilbert \mathcal{H} bidimensional, caracterizando a dinâmica de um *q-bit*.

No caso de um q-bit, nós utilizaremos os geradores da álgebra do grupo $SU(2)$, nomeadamente as *matrizes de Pauli* juntamente com a identidade 2×2 , definidas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

e são escritas na base⁴ ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, onde $\sigma_z |l\rangle = (-1)^l |l\rangle$, com $l \in \{0, 1\}$. Nesse caso, temos que o conjunto $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ representa uma base para os operadores lineares hermitianos que atuam no espaço \mathcal{H} . Portanto, todo estado $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ com $\dim(\mathcal{H}) = 2$ pode ser escrito da forma

$$\rho(t) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{n}(t) \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.28)$$

onde

$$\vec{n}(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.29)$$

e $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é um operador vetorial cujas componentes são as matrizes de Pauli e a Eq.(2.28) define a *representação de Bloch para um q-bit*⁵. Na base computacional, nós temos a seguinte representação matricial de um estado quântico em termos das componentes do vetor de Bloch

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z(t) & n_x(t) - in_y(t) \\ n_x(t) + in_y(t) & 1 - n_z(t) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

e os auto-valores de $\rho(t)$ são dados por

$$\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} (1 \pm \|\vec{n}(t)\|), \quad (2.31)$$

onde $\|\vec{n}(t)\| = \sqrt{n_x^2(t) + n_y^2(t) + n_z^2(t)}$ é a norma Euclideana do vetor de Bloch $\vec{n}(t)$.

Uma vez que $\rho(t)$ é um operador positivo semi-definido, temos que $\|\vec{n}(t)\| \leq 1$ para satisfazer $\lambda_{\pm} \geq 0$. Note que $\rho(t)$ é um estado puro se, e somente se, $\|\vec{n}_t\| = 1$. Podemos concluir que o vetor de Bloch $\vec{n}(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t)) \in \mathbb{R}^3$ é tal que satisfaz uma simetria esférica⁶ e que $\|\vec{n}(t)\|^2 = n_x^2(t) + n_y^2(t) + n_z^2(t) = 1$ se, e somente se, o estado é puro. Portanto, o *espaço de Bloch*, que consiste no conjunto de vetores de Bloch permitidos para o estado escrito na representação de Bloch, é equivalente a esfera unitária tridimensional no espaço Euclideano \mathbb{R}^3 . Utilizando as relações de ortogonalidade entre as matrizes de Pauli, podemos facilmente ver que $n_i = \text{Tr}\{\rho\sigma_i\}$ com $i = x, y, z$. Finalmente, a pureza do estado $\rho(t)$, em termos do vetor de Bloch, é dada por

⁴ Muitas vezes, a base de auto-estados de σ_z é chamada de *base computacional*.

⁵ Neste caso, estamos explicitando uma dependência temporal pois, como veremos a seguir, o estado do sistema pode variar no tempo devido a evolução dinâmica.

⁶ Em outras palavras, nós temos que $\vec{n}(t)$ pode assumir qualquer direção, mas $\|\vec{n}(t)\| \leq 1$.

$$\mathcal{P}(t) := \text{Tr}(\rho^2(t)) = \frac{1}{2}(1 + \|\vec{n}(t)\|^2). \quad (2.32)$$

Também, nós podemos escrever as populações e coerências do estado ρ em termos do vetor de Bloch \vec{n} , e vice-versa. Escrevendo o estado ρ na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, nós obtemos que

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} p & q \\ q^* & 1-p \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

onde $p(t) = \langle 0|\rho(t)|0\rangle \in [0, 1]$ é a população do estado $|0\rangle$ e $q(t) = \langle 0|\rho(t)|1\rangle$ é a coerência entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Claramente temos

$$p = \frac{1}{2}(1 + n_z), \quad (2.34)$$

$$q = \frac{1}{2}(n_x - in_y), \quad (2.35)$$

e inversamente, usando que $n_i = \text{Tr}\{\rho\sigma_i\}$ com $i = x, y, z$, nós temos

$$n_z = 2p - 1, \quad (2.36)$$

$$n_x = 2\text{Re}(q), \quad (2.37)$$

$$n_y = -2\text{Im}(q), \quad (2.38)$$

onde q^* é o complexo conjugado da coerência q , $\text{Re}(q)$ e $\text{Im}(q)$ são as partes real e imaginária, respectivamente.

No caso bidimensional, nós vimos que o espaço de Bloch possui uma geometria muito simples, sendo equivalente a esfera unitária tridimensional. Para espaços de dimensão maiores ou iguais a três, a geometria do espaço de estados torna-se muito mais complicada. Vamos agora esboçar o caso geral de um sistema d -dimensional, nomeadamente um q -*dit*.

Com efeito, vamos considerar um espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão finita d , e vamos supor que o conjunto $\{F_\alpha\}_{\alpha=0}^{d^2-1}$ seja uma base ortonormal de operadores hermitianos com o traço nulo para o espaço dos operadores lineares que atuam em \mathcal{H} , ou seja $\text{Tr}(F_\alpha F_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, juntamente com $F_0 = \mathbb{1}/\sqrt{d}$ e $F_\alpha^\dagger = F_\alpha$, assim como $\text{Tr}(F_\alpha) = 0$ para todo $\alpha = 1, 2, \dots, d^2-1$. Desta forma, todo estado quântico ρ do espaço de Hilbert \mathcal{H} pode ser representado por

$$\rho(t) = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \vec{x}(t) \cdot \vec{F} \right) \quad (2.39)$$

onde

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{d^2-1}(t)) \in \mathbb{R}^{d^2-1}, \quad (2.40)$$

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_{d^2-1}), \quad (2.41)$$

e nós temos a notação usual de produto interno dada por $\vec{x}(t) \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^{d^2-1} x_i F_i$. Obviamente, nós temos que

$$x_j(t) = \text{Tr}(F_j \rho(t)) . \quad (2.42)$$

Portanto, todo operador densidade ρ pode ser representado por um vetor \vec{x} pertencendo a um subconjunto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{d^2-1} . Tal subconjunto de \mathbb{R}^{d^2-1} de todos os estados acessíveis é chamado de Espaço de Bloch de um q-dit. De fato, veja que os operadores F_α são os geradores da Algebra de Lie do grupo $SU(d)$.

2.2 Medições na Teoria quântica ruidosa

A seguir, nós iremos explorar o formalismo matemático de medições gerais aplicadas em sistemas quânticos. Primeiramente, iremos introduzir os operadores de medição, que podem ser vistos como uma generalização das medições projetivas para sistemas quânticos gerais, e em seguida iremos definir os operadores de medida de valor positivo (em inglês *positive operator-valued measure*, ou abreviadamente *POVM*).

2.2.1 Medições Quânticas Gerais

Uma medição em um sistema quântico é descrita por um conjunto de operadores denominados *operadores de Kraus*, que irão descrever as transformações dos estados devido a interferência causada pelo processo de medição no sistema quântico.

Definição 8 (Medições Quânticas Gerais). *Um processo de medição em um sistema quântico é descrito por um conjunto de operadores $\{M_j\}_j$ que satisfaz a seguinte condição de completude*

$$\sum_j M_j^\dagger M_j = \mathbb{1} , \quad (2.43)$$

onde cada resultado j de um observável \hat{J} é relacionado com um operador de medição M_j . O conjunto $\{M_j\}_j$ também é denominado de operadores de Kraus associados a medição do observável \hat{J} .

Vamos primeiro tratar o caso de um sistema quântico com espaço de Hilbert \mathcal{H} descrito por um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Dado um observável \hat{J} deste sistema, cujo conjunto $\{M_j\}_j$ corresponde aos seus operadores de medição, a probabilidade de obter o resultado j em uma medição é dada por

$$p_J(j) = \langle \psi | M_j^\dagger M_j | \psi \rangle . \quad (2.44)$$

Dado que o resultado da medição do observável \hat{J} foi j , o estado do sistema imediatamente após o processo será

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_j\rangle = \frac{M_j |\psi\rangle}{\sqrt{p_J(j)}} . \quad (2.45)$$

A Eq.(2.44) pode ser vista como a generalização da Regra de Born para a probabilidade de observáveis antes de um processo geral de medição, enquanto que a Eq.(2.45) é a generalização do colapso da função de onda devido a interferência da medição descrita pelo conjunto $\{M_j\}_j$ no sistema quântico. Utilizando estas equações juntamente com a Definição 3, podemos facilmente generalizar para o caso de um estado quântico descrito por um operador densidade.

Considere um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} cujo estado é dado em termos de um operador densidade $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Novamente considerando um observável \hat{J} com os operadores de medição $\{M_j\}_j$, a probabilidade de obter o resultado j em uma medição no estado ρ é dada por

$$p_J(j) = \text{Tr}\{M_j^\dagger M_j \rho\} . \quad (2.46)$$

Supondo que o resultado da medição de \hat{J} foi j , o estado imediatamente após o processo será

$$\rho \rightarrow \rho_j = \frac{M_j \rho M_j^\dagger}{p_J(j)} . \quad (2.47)$$

Com a Eq.(2.46) e Eq.(2.47), nós podemos descrever uma medição geral de um observável \hat{J} de um sistema quântico com estado representado por um operador densidade ρ .

2.2.2 Medições descritas por um POVM

Em muitos experimentos de interesse, nós não precisamos nos preocupar com o estado do sistema após a medição de um observável. Ao contrário, é suficiente ter o conhecimento da distribuição de probabilidades dos seus possíveis resultados. Nesses contextos, nós podemos descrever o processo de medição usando o formalismo POVM⁷, que será definido a seguir.

Definição 9 (Operador de Medida com Valor Positivo - POVM). *Um POVM é um conjunto $\{\Lambda_j\}_j$ de operadores que descrevem um processo de medição de um observável \hat{J} e que satisfazem*

1. *não-negatividade:*

$$\forall j : \Lambda_j \geq 0 , \quad (2.48)$$

2. *Completude:*

$$\sum_j \Lambda_j = \mathbb{1} , \quad (2.49)$$

3. *Se o estado do sistema é descrito por um operador densidade ρ , então a probabilidade de obter o resultado j do observável \hat{J} é dada por*

$$p_J(j) = \text{Tr}\{\Lambda_j \rho\} . \quad (2.50)$$

⁷ Em inglês, Positive Operator-Valued Measure (POVM)

Ainda neste capítulo, nós iremos introduzir o formalismo dos canais quânticos, que (de forma sucinta) descreve qualquer transformação aplicada em um sistema quântico. Neste contexto, nós veremos que as medições quânticas descritas nesta seção podem ser vistas como um caso particular da estrutura dos canais quânticos.

2.3 Sistemas Quânticos Compostos

Nesta seção, iremos abordar a composição de sistemas quânticos. Em especial, vamos definir o estado de um sistema quântico composto em termos dos estados dos subsistemas que constituem o sistema total. Além disso, iremos introduzir uma importante correlação quântica, denominada emaranhamento, que possui um papel fundamental na dinâmica de sistemas quânticos compostos. Por fim, iremos introduzir a operação chamada *traço parcial*, que nos fornecerá os estados de subsistemas através do estado do sistema total.

2.3.1 Estado de um Sistema Quântico Composto

Vamos então obter o estado total de um sistema quântico composto em termos dos estados dos respectivos subsistemas. Tal estado é fornecido com o auxílio do próximo Lema.

Lema 4 (Estado de Sistema Composto). *Seja A e B dois sistemas quânticos independentes (descorrelacionados) que juntos constituem um sistema composto AB , e que são descritos pelos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Se A possui um estado ρ e B um estado σ , então o estado do sistema composto AB é dado pelo produto tensorial $\rho \otimes \sigma$ e atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.*

Demonstração. Tomemos os ensembles $\mathcal{E}_A = \{p_X(x), |\psi_x\rangle\}_x$ e $\mathcal{E}_B = \{p_Y(y), |\phi_y\rangle\}_y$ que descrevem os sistemas A e B , respectivamente. Logo, nós temos que

$$\rho = \sum_x p_X(x) |\psi_x\rangle \langle \psi_x| , \quad (2.51)$$

$$\sigma = \sum_y p_Y(y) |\phi_y\rangle \langle \phi_y| . \quad (2.52)$$

Nós denotamos $p_{XY}(x, y)$ como sendo uma probabilidade conjunta onde o sistema A é preparado no estado $|\psi_x\rangle$ e, simultaneamente, o sistema B é preparado no estado $|\phi_y\rangle$. Logo, $p_{XY}(x, y)$ representa a probabilidade do sistema composto AB ser preparado no estado $|\psi_x\rangle \otimes |\phi_y\rangle$. Utilizando a Definição 3 para o ensemble $\mathcal{E}_{AB} = \{p_{XY}(x, y), |\psi_x\rangle \otimes |\phi_y\rangle\}_{x,y}$, nós temos que o operador densidade total é dado por

$$\rho_{AB} = \sum_{x,y} p_{XY}(x, y) |\psi\rangle_x \otimes |\phi\rangle_y \langle \psi|_x \otimes \langle \phi|_y \quad (2.53)$$

$$= \sum_{x,y} p_{XY}(x, y) |\psi_x\rangle \langle \psi_x| \otimes |\phi_x\rangle \langle \phi_x| . \quad (2.54)$$

Por fim, utilizando a hipótese de que os dois sistemas são independentes, nós temos que

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) , \quad (2.55)$$

e uma álgebra trivial mostra que $\rho_{AB} = \rho \otimes \sigma$. \square

Por indução, se temos um conjunto finito de sistemas quânticos A_1, A_2, \dots, A_n estatisticamente independentes entre si, onde o sistema A_j possui um espaço de Hilbert \mathcal{H}_j e é descrito pelo estado ρ_j , nós temos que o sistema composto $A = \cup_{i=1}^n A_i$ é representado pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ e é descrito pelo estado $\rho = \otimes_{i=1}^n \rho_i$. Um operador densidade que é escrito em termos do produto tensorial de dois ou mais operadores densidades é chamado de estado produto.

Nesta subseção, nós discutimos o caso de dois ensembles descorrelacionados, ou seja, o sistema A e B são estatisticamente independentes. Na próxima subseção, vamos adicionar o problema de dois sistemas classicamente correlacionados.

2.3.2 Estados Separáveis e Emaranhamento

Vamos agora considerar dois ensembles de estados puros classicamente correlacionados. Em outras palavras, seja A e B dois sistemas quânticos representados por espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Vamos considerar que estes dois sistemas são preparados em estados classicamente correlacionados, ou seja, com uma probabilidade $p_X(x)$ o sistema A é preparado no estado $|\psi_x\rangle \in \mathcal{H}_A$ e, simultaneamente, o sistema B é preparado no estado $|\phi_x\rangle \in \mathcal{H}_B$. Neste caso, temos que o sistema composto AB é preparado no estado $|\psi_x\rangle \otimes |\phi_x\rangle$ com probabilidade $p_X(x)$.

Neste caso, o sistema composto AB é descrito pelo ensemble $\mathcal{E}_{cc} = \{p_X(x), |\psi_x\rangle \otimes |\phi_x\rangle\}_x$, e o operador densidade correspondente é dado por

$$\rho_{AB}^{cc} = \sum_x p_X(x) |\psi_x\rangle \langle \psi_x| \otimes |\phi_x\rangle \langle \phi_x| . \quad (2.56)$$

Fisicamente, o estado classicamente correlacionado (Eq.(2.56)) é preparado da seguinte forma: o experimentalista prepara o sistema A no estado $|\psi_x\rangle$ e, simultaneamente, o sistema B é preparado no estado $|\phi_x\rangle$. Consequentemente, o sistema composto AB , descrito pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é preparado em um estado produto $|\psi_x\rangle \otimes |\phi_x\rangle$. Porém, devido ao ruído clássico do aparato experimental, tal estado torna-se um estado aleatório com distribuição de probabilidades $p_X(x)$.

O raciocínio anterior foi feito levando em consideração um ensemble de estados puros classicamente correlacionados. Entretanto, podemos realizar um raciocínio análogo levando em consideração um ensemble de estados mistos classicamente correlacionados. Em outras palavras, suponha que, com probabilidade $p_X(x)$, o sistema A seja preparado no estado ρ_x

e, simultaneamente, o sistema B é preparado no estado σ_x , ambos operadores densidade (que não são necessariamente estados puros). Logo, de acordo com o Lema 4, o sistema composto AB é preparado no estado $\rho_x \otimes \sigma_x$ com probabilidade $p_X(x)$. Portanto, o ensemble que descreve o sistema total corresponde a um *ensemble de ensembles*, nomeadamente descrito por $\{p_X(x), \rho_x \otimes \sigma_x\}_x$, e o operador densidade do sistema composto é dado por

$$\rho_{AB} = \sum_x p_X(x) \rho_x \otimes \sigma_x . \quad (2.57)$$

Note que, no caso correspondente a um ensemble de estados puros classicamente correlacionados (Eq.(2.56)) nós obtemos que o operador densidade total corresponde a uma combinação linear convexa do produto tensorial de dois projetores. No segundo caso, na qual corresponde a um ensemble de operadores densidade classicamente correlacionados (Eq.(2.57)), nós obtemos um estado total dado pela combinação linear convexa do produto de operadores densidade. O próximo teorema relaciona estes dois casos e será útil na introdução do conceito de estados emaranhados.

Teorema 2. *Nós sempre podemos escrever um estado da forma $\rho = \sum_z p_Z(z) \rho_z \otimes \sigma_z$ como uma combinação linear convexa do produto de estados puros, nomeadamente*

$$\rho = \sum_{\omega} p_W(\omega) |\psi_{\omega}\rangle \langle \psi_{\omega}| \otimes |\phi_{\omega}\rangle \langle \phi_{\omega}| . \quad (2.58)$$

Demonstração. Seja Z uma variável aleatória que assume valores em \mathcal{Z} e cuja distribuição de probabilidades é $p_Z(z)$. Suponha que ρ_z e σ_z são operadores densidade $\forall z \in \mathcal{Z}$, e considere o estado dado por

$$\rho = \sum_z p_Z(z) \rho_z \otimes \sigma_z . \quad (2.59)$$

Agora, vamos escrever os estados ρ_z e σ_z em termos dos seus respectivos ensembles, ou seja

$$\rho_z = \sum_x p(x|z) |\psi_{x,z}\rangle \langle \psi_{x,z}| , \quad (2.60)$$

$$\sigma_z = \sum_y P(y|z) |\phi_{y,z}\rangle \langle \phi_{y,z}| , \quad (2.61)$$

onde $\{p(x|z), |\psi_{x,z}\rangle\}_x$ é o ensemble para o estado ρ_z e $\{P(y|z), |\phi_{y,z}\rangle\}_y$ é o ensemble do estado σ_z para todo $z \in \mathcal{Z}$.

Agora, aplicando tal decomposição dos estados ρ_z e σ_z no estado ρ , nós temos

$$\rho = \sum_{x,y,z} p_Z(z) p(x|z) P(y|z) |\psi_{x,z}\rangle \langle \psi_{x,z}| \otimes |\phi_{y,z}\rangle \langle \phi_{y,z}| , \quad (2.62)$$

e reescrevendo $|\psi_{x,z}\rangle = |\psi_{x,y,z}\rangle \forall y$, $|\phi_{y,z}\rangle = |\phi_{x,y,z}\rangle \forall x$ e $p_Z(z)p(x|z)P(y|z) \equiv p(x, y, z)$, nós obtemos

$$\rho = \sum_{x,y,z} p(x, y, z) |\psi_{x,y,z}\rangle \langle \psi_{x,y,z}| \otimes |\phi_{x,y,z}\rangle \langle \phi_{x,y,z}| . \quad (2.63)$$

Por fim, basta redefinir os índices da somatória, tomando $\omega \equiv (x, y, z)$ e definimos uma nova variável aleatória W cujos valores são representados por ω com a distribuição de probabilidades $p_W(\omega) \equiv p(x, y, z)$, e nós podemos concluir que

$$\rho = \sum_{\omega} p_W(\omega) |\psi_{\omega}\rangle \langle \psi_{\omega}| \otimes |\phi_{\omega}\rangle \langle \phi_{\omega}| . \quad (2.64)$$

□

Logo, o último teorema mostra que todo ensemble de operadores densidade classicamente correlacionados pode ser escrito em termos de um ensemble de estados puros classicamente correlacionados. Dessa forma, nós podemos introduzir a seguinte definição de *estados separáveis* para um operador densidade ρ geral que representa um sistema composto de dois outros subsistemas, nomeadamente um sistema bipartido.

Definição 10 (Estados Separáveis). *Seja A e B dois sistemas quânticos representados por espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, que juntos compõem o sistema composto AB com espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Um operador densidade $\sigma_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$ é dito um estado separável se este pode ser escrito da seguinte forma*

$$\sigma_{AB} = \sum_x p_X(x) |\psi_x\rangle \langle \psi_x|_A \otimes |\phi_x\rangle \langle \phi_x|_B , \quad (2.65)$$

onde $p_X(x)$ é uma distribuição de probabilidades, $\{|\psi_x\rangle_A\}_x$ é um conjunto de estados puros de \mathcal{H}_A e $\{|\phi_x\rangle_B\}_x$ é um conjunto de estados puros de \mathcal{H}_B .

Ou seja, um estado que representa um sistema composto é separável se as correlações entre os estados dos subsistemas são correlações puramente clássicas. Entretanto, nem todo estado bipartido pertence a classe dos estados separáveis, como descrito na Definição 10, e esta segunda classe de estados possui uma profunda importância na teoria quântica, como veremos a seguir.

Definição 11 (Estados Emaranhados). *Um operador densidade bipartido ρ_{AB} é dito emaranhado se este não é um estado separável. Ou seja, ρ_{AB} é emaranhado se não for possível representá-lo como uma combinação linear convexa do produto tensorial de projetores dos dois subsistemas que compõem o sistema total.*

Veja portanto que, como consequência de tais definições, o emaranhamento é uma correlação entre dois subsistemas de natureza puramente quântica. Além disso, o termo “separável” implica que não há emaranhamento no estado, ou seja, existe um procedimento

completamente clássico capaz de preparar um estado separável. Por fim, o conjunto de estados separáveis possui uma série de propriedades geométricas interessantes, e em particular tal conjunto é dito *convexo*. Podemos facilmente mostrar que dado dois estados separáveis ρ_{AB} e σ_{AB} associados a um sistema composto AB , para todo número $\lambda \in [0, 1]$, o estado $\lambda\rho_{AB} + (1 - \lambda)\sigma_{AB}$ é também um estado separável. A seguir, iremos introduzir uma importante ferramenta na análise de sistemas quânticos compostos, chamada de *traço parcial* e que é responsável por fornecer o estado de subsistemas a partir do estado total do sistema composto.

2.3.3 Traço Parcial

Nesta subseção, gostaríamos de obter os estados locais que dão a distribuição de probabilidade de resultados relacionados a observáveis dos subsistemas. Tal operação é fornecida através do traço parcial, que será definida a seguir.

Definição 12 (Traço Parcial). *Seja χ_{AB} um operador quadrado⁸ atuando no espaço de Hilbert dado pelo produto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, e considere a base ortonormal $\{|l\rangle_B\}_l$ de \mathcal{H}_B . Portanto, o traço parcial de χ_{AB} sob o espaço \mathcal{H}_B é dado por*

$$\mathrm{Tr}_B\{\chi_{AB}\} \equiv \sum_l (\mathbb{1}_A \otimes \langle l|_B) \chi_{AB} (\mathbb{1}_A \otimes |l\rangle_B), \quad (2.66)$$

e tal operação define um novo operador⁹ $\mathrm{Tr}_B\{\chi_{AB}\}$ que atua no espaço de Hilbert \mathcal{H}_A .

O traço parcial é uma operação que possui uma série de propriedades interessantes. Por exemplo, o traço parcial é invariante por mudanças na base $\{|l\rangle_B\}_l$ escolhida para o espaço \mathcal{H}_B . Além disso, o traço parcial possui a propriedade de ser uma transformação linear que atua sob um espaço de operadores. Por fim, podemos utilizar o traço parcial para obter o estado de subsistemas de um sistema composto, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 3 (Estados Locais). *Seja um sistema bipartido AB composto pelos subsistemas A e B . Se ρ_{AB} é o estado do sistema total AB , então o correspondente estado ρ_A do sistema A e ρ_B do sistema B são dados por*

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\{\rho_{AB}\}, \quad (2.67)$$

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A\{\rho_{AB}\}. \quad (2.68)$$

⁸ Por “operador quadrado” nós estamos considerando um operador que quando escrito em forma matricial, possui o número de linhas igual ao número de colunas.

⁹ Muitas vezes nós iremos omitir os operadores identidade, escrevendo simplesmente $\mathrm{Tr}_B\{\chi_{AB}\} \equiv \sum_l \langle l|_B \chi_{AB} |l\rangle_B$.

Demonstração. Seja \hat{J} um observável relativo ao subsistema A , e as medições de \hat{J} são descritas localmente por um POVM $\{\Lambda_A^j\}_j$. Logo, o respectivo POVM atua no sistema total AB através do conjunto $\{\Lambda_A^j \otimes \mathbb{1}_B\}_j$ e a probabilidade de obter o resultado j através de uma medição local no sistema A será dada por

$$p_J(j) = \text{Tr}\{\Lambda_A^j \otimes \mathbb{1}_B \rho_{AB}\} , \quad (2.69)$$

onde $\text{Tr}\{\}$ representa o traço no espaço $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Agora, vamos fixar as bases $\{|k\rangle_A\}_k$ para \mathcal{H}_A e $\{|l\rangle_B\}_l$ para \mathcal{H}_B , logo nós temos que $\{|k\rangle_A \otimes |l\rangle_B\}_{k,l}$ será a base para o espaço composto $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Portanto, calculando o traço nessa base, nós temos que

$$p_J(j) = \sum_{k,l} \langle k|_A \otimes \langle l|_B (\Lambda_A^j \otimes \mathbb{1}_B) \rho_{AB} |k\rangle_A \otimes |l\rangle_B , \quad (2.70)$$

e desenvolvendo o somatório, nós obtemos

$$p_J(j) = \sum_k (\langle k|_A \Lambda_A^j \otimes \mathbb{1}_B) \left\{ \sum_l (\mathbb{1}_A \otimes \langle l|_B) \rho_{AB} (\mathbb{1}_A \otimes |l\rangle_B) \right\} (|k\rangle_A \otimes \mathbb{1}_B) . \quad (2.71)$$

Observe na última equação que é possível reconhecer a Definição 12 aplicada no estado ρ_{AB} , e no somatório externo nós temos o traço aplicado no espaço \mathcal{H}_B , ou seja

$$p_J(j) = \text{Tr}\{\Lambda_A^j \text{Tr}_B\{\rho_{AB}\}\} . \quad (2.72)$$

Portanto, uma vez que o operador $\text{Tr}_B\{\rho_{AB}\}$ fornece a distribuição de probabilidades de qualquer observável \hat{J} do subsistema A , nós temos que tal operador representa o estado quântico deste subsistema. Logo

$$\rho_A = \text{Tr}_B\{\rho_{AB}\} , \quad (2.73)$$

e analogamente podemos também concluir que $\rho_B = \text{Tr}_A\{\rho_{AB}\}$. \square

Neste ponto, vale a pena fazer uma conexão entre o resultado anterior e a teoria de probabilidades clássica. Relembre que o operador densidade pode ser interpretado como uma generalização de uma densidade de probabilidades de uma variável aleatória clássica, tal como mencionamos anteriormente. Além disso, relembre que para uma densidade de probabilidade conjunta, digamos $p_{X,Y}(x,y)$ de duas variáveis aleatórias X e Y , é possível obter a distribuição de cada variável aleatória através do processo de *marginalização*, nomeadamente $p_X(x) = \int_{\Omega_Y} p_{X,Y}(x,y) dy$ e $p_Y(y) = \int_{\Omega_X} p_{X,Y}(x,y) dx$ onde Ω_X e Ω_Y são os espaços de estados de X e Y , respectivamente. Logo, o traço parcial pode ser visto como a generalização do processo de marginalização no caso quântico: o estado total ρ_{AB} representa a densidade de probabilidade composta, enquanto que o traço parcial

representa a integração sob os graus de liberdade do sistema na qual pretende-se excluir da distribuição de probabilidade.

Dessa forma, veja também que o traço parcial é uma operação irreversível: podemos obter os estados locais a partir do estado global, mas nem sempre é possível obter o estado global a partir dos estados locais. Isso ocorre pois, tal como no processo de marginalização de variáveis aleatórias clássicas, nós perdemos informação do sistema global ao retirar os graus de liberdade dos outros subsistemas.

Por fim, é fácil ver que o traço parcial de um operador densidade fornece um autêntico operador densidade, isto é, um operador positivo semi-definido com o traço unitário. A demonstração desse fato segue diretamente da Definição 12.

A seguir, vamos introduzir o formalismo dos canais quânticos, que é responsável pela descrição de transformações em sistemas quânticos, tais como evoluções dinâmicas, medições de observáveis dentre outros exemplos que serão explorados abaixo.

2.4 Evoluções Quânticas

Nesta seção, buscaremos obter a estrutura matemática capaz de representar transformações de sistemas quânticos, que serão denominados *canais quânticos*. Estes requerimentos irão possuir motivação física e serão adotados como axiomas, com o objetivo de obter as propriedades fundamentais que toda transformação necessita satisfazer. Além disso, vamos explorar a decomposição de Kraus para canais quânticos, assim como abordar exemplos nas quais tais decomposições surgem de forma natural e que ajudarão na interpretação destas estruturas matemáticas. Observe que, no caso de sistemas quânticos fechados¹⁰, a evolução é dada por um operador unitário. Entretanto, isto se aplica quando podemos isolar o sistema quântico do seu ambiente externo e, em geral, as interações entre o sistema e o ambiente nem sempre podem ser desconsideradas. Nesses casos, a evolução do sistema não é mais unitária, nos motivando assim a buscar uma estrutura matemática que engloba também as evoluções não unitárias que caracterizam os *sistemas quânticos abertos*.

2.4.1 Abordagem Axiomática

Vamos iniciar a nossa análise pensando sobre os requisitos físicos que toda evolução de um dado sistema quântico deve satisfazer. Estes requisitos fornecerão os axiomas que irão gerar as restrições matemáticas necessárias para evoluções quânticas gerais. Primeiramente, como discutido anteriormente, todo sistema quântico pode ser descrito por um operador densidade que atua em um certo espaço de Hilbert. Logo, dado um estado inicial ρ_0 ,

¹⁰ Neste trabalho, um sistema quântico é considerado *fechado* se ele satisfaz a equação de Schrödinger, isto é, a evolução dinâmica é dada por um operador unitário que é gerado pelo mapeamento exponencial da Hamiltoniana do sistema.

esperamos que o estado final ρ após a evolução¹¹ ainda seja um operador linear positivo semi-definido e de traço unitário, isto é, tal evolução deverá transformar um operador densidade em outro operador densidade.

Neste ponto, é importante definir uma notação que será útil a seguir. Lembre que, para um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} , o conjunto de todos os operadores densidade (estados acessíveis) associados a \mathcal{H} é denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Além disso, o espaço de todos os operadores lineares quadrados que atuam em \mathcal{H} será denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Por fim, o conjunto de todos os operadores lineares com domínio no espaço de Hilbert \mathcal{H}_A e imagem em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_B será denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$. Portanto, buscamos um mapeamento $\mathcal{N} : \mathcal{D}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ que leve operadores densidade de \mathcal{H}_A em operadores densidade de \mathcal{H}_B .

Antes de enunciar e interpretar os axiomas de um canal quântico (evolução quântica), precisamos de algumas definições formais que serão úteis no que se segue.

Definição 13 (Mapa positivo). *Um mapeamento linear $M : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é um mapa positivo se $M(\chi_A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é positivo semi-definido para todo $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ positivo semi-definido. Em outras palavras, um mapeamento positivo preserva a positividade semi-definida.*

Definição 14 (Mapa completamente positivo). *Um mapa linear $M : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é dito completamente positivo se $id_R \otimes M$ é um mapa positivo para um sistema de referência R de tamanho arbitrário, onde id_R é o superoperador identidade que atua no sistema R .*

O mapas positivos e completamente positivos definidos acima possuem um papel fundamental na teoria dos canais quânticos, como veremos a seguir. Finalmente, temos todas as ferramentas necessárias para enunciar a definição formal de um *canal quântico*.

Definição 15 (Canal Quântico). *Um canal quântico é um mapeamento linear, completamente positivo e que preserva o traço, correspondendo assim a uma evolução de um sistema quântico.*

Para ser mais preciso, um canal quântico satisfaz os seguintes axiomas:

1. Linearidade: Um canal quântico $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é um mapeamento linear, ou seja,

$$\mathcal{N}(\alpha X_A + \beta Y_A) = \alpha \mathcal{N}(X_A) + \beta \mathcal{N}(Y_A), \quad (2.74)$$

¹¹ Observe que não estamos falando especificamente de uma evolução dinâmica, mas sim de uma transformação geral no estado de um sistema quântico. Tal transformação pode ser devida a uma evolução dinâmica ou uma medição de um observável do sistema, por exemplo.

para todo par de números complexos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e para quaisquer operadores lineares X_A e Y_A .

2. Completa positividade: um canal quântico é um mapeamento completamente positivo, tal como descrito na Definição 14.
3. Preservação do traço: para todo operador linear $X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, temos

$$\text{Tr}\{X_A\} = \text{Tr}\{\mathcal{N}(X_A)\} . \quad (2.75)$$

Estes três axiomas constituem o conjunto de propriedades que toda transformação quântica necessita satisfazer, e por conta disso os canais quânticos são muitas vezes chamados¹² de mapas CPTP. Vamos entender o papel que cada propriedade possui na evolução de sistemas quânticos gerais. A linearidade reflete o princípio de superposição, que é verificado experimentalmente. Além disso, em um primeiro momento, o leitor poderia ser levado a pensar que seria suficiente requerir unicamente que o canal quântico constituísse um mapa positivo, com o objetivo de preservar a positividade semi-definida dos operadores densidade. De fato, a completa positividade é indispensável, e buscaremos justificá-la em detalhe.

Para entender a necessidade da completa positividade, deixe-nos imaginar o seguinte cenário. Nós sabemos que uma evolução quântica necessariamente deve mapear operadores densidade em operadores densidade (estados físicos), logo é necessário que tal mapa preserve a positividade semi-definida. Portanto, tomando esse fato juntamente com a linearidade, temos que um canal quântico necessita ser um mapeamento positivo, como descrito na Definição 13. Ou seja, tomando um canal quântico $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, tal mapeamento leva operadores positivos semi-definidos do sistema A em operadores positivos semi-definidos do sistema B .

Entretanto, observe que nunca podemos descartar a existência de um sistema extra R não interagente com o sistema de interesse e, portanto, fora de nosso controle. Considere então que R seja um sistema de referência de dimensões arbitrárias e espaço de Hilbert \mathcal{H}_R , e um sistema quântico A com espaço de Hilbert \mathcal{H}_A . Logo, o estado do sistema composto RA será $\rho_{RA} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A)$. Como R é o nosso sistema “oculto”, ele não interage¹³ com o sistema de interesse A . Dessa forma, a evolução do sistema composto RA consiste no superoperador identidade $id_R : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_R$ atuando no espaço \mathcal{H}_R e o canal quântico $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ atuando no espaço \mathcal{H}_A , e o resultado necessita ser um operador densidade do sistema composto RB . Em outras palavras, a evolução total será descrita pelo mapa $\mathcal{N}_{AB}^R = id_R \otimes \mathcal{N}$ e este mapeamento deve levar operadores

¹² CPTP é uma abreviação para completely positive and trace-preserving maps, ou seja, mapas completamente positivos e que preservam o traço.

¹³ Caso contrário, seria possível detectar o sistema R através de observações feitas no sistema A .

densidade do sistema composto RA em operadores densidade do sistema composto RB . Consequentemente, tal como descrito no parágrafo anterior, o mapa $\mathcal{N}_{AB}^R = id_R \otimes \mathcal{N}$ precisa preservar a positividade semi-definida dos operadores densidade e $id_R \otimes \mathcal{N}$ necessita ser um mapeamento positivo, o que implica que \mathcal{N} precisa ser um mapa completamente positivo. Dessa forma, a possibilidade da existência de tais sistemas de referência nos leva a requerir que os canais quânticos sejam mais que mapas positivos, mas sim mapas completamente positivos.

Por fim, a preservação do traço possui uma origem probabilística. O fato do traço do operador densidade ser unitário reflete a normalização das distribuições de probabilidades, tal como mencionamos que o operador densidade pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade generalizada. Neste caso, estamos interessados em evoluções que conservam a normalização das probabilidades, logo precisamos requerir que o traço dos operadores seja preservado por tais transformações. Portanto, a preservação do traço é sinônimo da conservação das probabilidades mediante a evolução quântica. Além disso, é possível mostrar que o requerimento da preservação do traço dos operadores densidade por parte dos canais quânticos implica na preservação do traço de qualquer operador linear através de tais mapeamentos. Dessa forma, podemos sempre considerar que um canal quântico preserva o traço de qualquer operador linear.

Em geral, não trabalhamos com as evoluções quânticas em termos de mapeamentos de operadores densidade. Claramente, tal construção se mostra útil sob o ponto de vista conceitual, mas matematicamente nem sempre é fácil verificar que um mapeamento é completamente positivo. Há diversas formas de verificar tal propriedade (5) em termos de outras grandezas matemáticas, tal como o *Operador de Choi*, mas nós iremos omitir estes resultados. Entretanto, uma forma muito útil de representar os canais quânticos é através da *representação de Choi-Kraus*, que será enunciada sem demonstração a seguir.

Teorema 4 (Choi-Kraus). *Sejam \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B dois espaços de Hilbert. Um mapeamento $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é um canal quântico (linear, completamente positivo e que preserva o traço) se, e somente se, tal mapa admite uma representação de Choi-Kraus, definida por*

$$\mathcal{N}(X_A) = \sum_{l=1}^d V_l X_A V_l^\dagger, \quad (2.76)$$

onde $X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, $V_l \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ para todo $l = 1, 2, \dots, d$, $\sum_{l=1}^d V_l^\dagger V_l = \mathbf{1}_A$ e $d \leq \dim(\mathcal{H}_A)\dim(\mathcal{H}_B)$.

A representação de Choi-Kraus fornece uma ferramenta matemática valiosa no tratamento e descrição de canais quânticos. Os operadores do conjunto $\{V_l\}_l$ satisfazendo as condições do Teorema 4 são denominados *operadores de Kraus*. Em geral, buscamos definir os operadores de Kraus de um canal quântico com o objetivo de obter a sua decomposição de Choi-Kraus. Dessa forma, o Teorema 4 garante que o mapeamento descrito por tal

decomposição é completamente positivo, linear e que preserva o traço, sendo portanto um canal quântico legítimo. Além disso, note que tal resultado é uma condição necessária e suficiente, logo todo operador com uma decomposição de Kraus será um canal quântico, assim como todo canal quântico possui uma decomposição de Kraus. Há diversos detalhes envolvendo tal representação, como por exemplo o problema da unicidade da decomposição de Kraus. Porém, vamos omitir mais detalhes e seguir agora com algumas interpretações dos canais quânticos, assim como fornecer alguns contextos nos quais tais mapeamentos surgem de forma natural.

2.4.2 Evolução Ruidosa Como Consequência da Perda de um Resultado de uma Medição.

Seja A um sistema quântico com espaço de Hilbert \mathcal{H}_A , cujo estado é representado pelo operador densidade $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Seja \hat{J} um observável deste sistema, cujas medições são descritas pelo conjunto de operadores $\{M_k\}_k$, onde $\sum_k M_k^\dagger M_k = \mathbb{1}$. Logo, a probabilidade de obter um resultado j através da medição do observável \hat{J} é dada por

$$p_J(j) = \text{Tr}\{M_j^\dagger M_j \rho\} , \quad (2.77)$$

e se a medição de \hat{J} resultar no valor j , o estado imediatamente após a medição é dado por

$$\rho \rightarrow \rho_j = \frac{M_j \rho M_j^\dagger}{p_J(j)} . \quad (2.78)$$

Agora, suponha que um experimentalista realiza uma medição de \hat{J} mas, devido algum processo ruidoso, ele perde o valor do resultado de tal observável obtido através da medição. Podemos então fazer a seguinte pergunta: qual será o estado do sistema A após tal processo? Neste caso, o estado pós-medição será descrito pelo ensemble $\mathcal{E} = \{p_J(j), \frac{M_j \rho M_j^\dagger}{p_J(j)}\}$, e portanto o operador densidade $\rho_{\mathcal{E}}$ que representa o estado do sistema após tal processo será dado por

$$\rho_{\mathcal{E}} = \sum_j p_J(j) \frac{M_j \rho M_j^\dagger}{p_J(j)} = \sum_j M_j \rho M_j^\dagger . \quad (2.79)$$

Portanto, observamos que tal processo resultou na evolução $\rho \rightarrow \rho_{\mathcal{E}} = \mathcal{N}(\rho)$, onde

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_j M_j \rho M_j^\dagger \quad (2.80)$$

admite uma representação de Kraus e, devido ao Teorema 4, tal mapeamento representa um canal quântico. Finalmente, podemos então interpretar o ruído que ocorre durante um processo de medição sob a ótica de um canal quântico.

2.4.3 Evolução Ruidosa de Sistemas Quânticos Abertos

Nesta subseção, nós iremos lidar com um *sistema quântico aberto* geral. Como já foi mencionado anteriormente, um sistema quântico é dito *fechado* (ou isolado) quando o estado quântico satisfaz a equação de Schrödinger, que ocorre tipicamente quando é possível isolar o sistema quântico de interações externas. Logo, um sistema quântico fechado possui uma evolução descrita por operadores unitários definidos pelo mapa exponencial da Hamiltoniana do sistema. Entretanto, nem sempre é possível isolar o sistema quântico dos efeitos do seu ambiente, e nesse caso a evolução não é mais unitária e precisa ser descrita por um canal quântico. Este contexto descreve o que iremos chamar de sistema quântico aberto.

Vamos agora descrever o cenário geral de um sistema quântico aberto. Temos então um sistema quântico S com o espaço de Hilbert \mathcal{H}_S juntamente com seu ambiente E , descrito pelo espaço de Hilbert \mathcal{H}_E . Supomos que o sistema composto SE é preparado inicialmente no estado produto $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$. O leitor pode ser levado inicialmente a pensar que não faz sentido imaginar que o experimentalista seria capaz de preparar o ambiente em um dado estado quântico, pois a princípio nós não temos controle experimental sob o ambiente. Entretanto, é possível mostrar (6) que se o estado do sistema é puro, então o estado total é um estado produto. Portanto, o controle experimental sob o sistema é suficiente para termos um estado inicial produto, nos levando a concluir que tal hipótese é bastante razoável.

Vamos também supor que ρ_B é um estado estacionário do ambiente, ou seja, que a evolução dinâmica não altera o estado inicial de E . Por exemplo, podemos considerar que ρ_B é um estado térmico de equilíbrio. Esta hipótese também possui motivações físicas, pois em geral o ambiente possui um número de graus de liberdade muito maior que o número de graus de liberdade do sistema. Consequentemente, a interação sistema-ambiente não afeta significativamente o estado inicial do ambiente. Pense nisso como jogar uma pedra de gelo em uma piscina: o estado térmico da piscina não é significativamente alterado, mas o estado da pedra de gelo irá evoluir devido as interações térmicas.

O espaço de Hilbert do sistema composto SE é portanto descrito pelo espaço produto $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, e a dinâmica do sistema total é modelada pela Hamiltoniana

$$H(t) = H_S(t) + H_E(t) + H_I(t) , \quad (2.81)$$

onde H_S é a Hamiltoniana livre do sistema (ou seja, a Hamiltoniana do sistema desconsiderando o ambiente e suas interações), H_E é a Hamiltoniana livre do ambiente e H_I descreve a interação entre o sistema e o ambiente, e tais Hamiltonianas podem possuir uma dependência explícita no tempo. Logo, veja que o sistema composto SE constitui um sistema quântico fechado, e a evolução é mediada pelo operador unitário

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left\{ e^{-i\hbar \int_{t_0}^t H(s) ds} \right\} , \quad (2.82)$$

onde \mathcal{T} denota o operador de ordenamento temporal. O estado total $\rho(t)$ do sistema composto SE portanto evolui unitariamente através da equação de von Neumann, ou seja, temos a seguinte evolução unitária

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) , \quad (2.83)$$

onde estamos considerando (sem perda de generalidade) que $t_0 = 0$. Portanto, a evolução do estado dinâmico do sistema S pode ser obtido através do traço parcial

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E \left\{ U(t, 0)\rho_S(0) \otimes \rho_B U^\dagger(t, 0) \right\} , \quad (2.84)$$

onde Tr_E denota o traço parcial sob os graus de liberdade do ambiente. Portanto, veja que o estado total ρ do sistema composto SE sofre a evolução de um sistema quântico fechado (Eq.(2.83)), isto é, uma evolução mediada por um operador unitário que é obtido pelo mapeamento exponencial (Eq.(2.82)) da Hamiltoniana que descreve a dinâmica do sistema (Eq.(2.81)). Entretanto, o mesmo não é verdade para o estado do sistema, ou seja, em geral não é possível obter um operador unitário que irá descrever a evolução do estado $\rho_S(t)$. Dessa forma, vamos mostrar que tal evolução pode, de fato, ser descrita com o auxílio do formalismo dos canais quânticos.

Note que, para todo instante de tempo $t \geq 0$, a evolução dinâmica de $\rho_S(t)$ descrita pela Eq.(2.84) descreve um mapeamento $\rho_S(0) \rightarrow \rho_S(t) \equiv \mathcal{V}(t)(\rho_S(0))$. Para todo $t \geq 0$ fixado, a transformação $\rho_S(t) = \mathcal{V}(t)(\rho_S(0))$ é um mapeamento de operadores densidade do espaço $\mathcal{D}(\mathcal{H}_S)$ (espaço dos operadores densidade do sistema S) em si mesmo, ou seja, $\mathcal{V}(t) : \mathcal{D}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_S)$. Tal mapeamento $\mathcal{V}(t)$ que descreve a evolução dinâmica dos estados de um sistema quântico para todo instante de tempo $t \geq 0$ é chamado de *mapa dinâmico*. O próximo resultado demonstra que o mapeamento $\mathcal{V}(t)$ é, para todo instante de tempo $t \geq 0$ fixado, um canal quântico.

Lema 5 (Mapas Dinâmicos são Canais Quânticos). *Um mapa dinâmico satisfaz os requerimentos de um canal quântico. Em especial, nós podemos obter uma decomposição de Choi-Kraus como se segue*

$$\rho_S(t) = \mathcal{V}(t)(\rho_S(0)) = \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha, \beta}(t) \rho_S(0) W_{\alpha, \beta}^\dagger(t) , \quad (2.85)$$

onde $\sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha, \beta}^\dagger W_{\alpha, \beta} = \mathbf{1}_S$ e $W_{\alpha, \beta} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$.

Demonstração. Uma vez que ρ_B é um operador densidade, este é hermitiano. Logo, vamos tomar a seguinte decomposição espectral

$$\rho_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| , \quad (2.86)$$

onde $\{|\phi_{\alpha}\rangle\}_{\alpha}$ é uma base ortonormal para \mathcal{H}_E e $\lambda_{\alpha} \geq 0$ para todo α , assim como $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \text{Tr}\{\rho_B\} = 1$.

Aplicando a decomposição espectral de ρ_B no estado dinâmico $\rho_S(t)$ (Eq.(2.84)), temos

$$\mathcal{V}(t)(\rho_S(0)) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \text{Tr}_E \left\{ U(t,0) \rho_S(0) \otimes |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) \right\} , \quad (2.87)$$

e calculando o traço parcial sob o ambiente na base $\{|\phi_{\alpha}\rangle\}_{\alpha}$ que diagonaliza ρ_B , nós temos

$$\mathcal{V}(t)(\rho_S(0)) = \sum_{\alpha} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \sum_{\beta} \langle \phi_{\beta}| U(t,0) \rho_S(0) \otimes |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) |\phi_{\beta}\rangle . \quad (2.88)$$

Rearranjando os termos, podemos escrever

$$\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \sqrt{\lambda_{\alpha}} \langle \phi_{\beta}| U(t,0) |\phi_{\alpha}\rangle \right\} \rho_S(0) \otimes \mathbf{1}_E \left\{ \sqrt{\lambda_{\alpha}} \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) |\phi_{\beta}\rangle \right\} . \quad (2.89)$$

onde $\rho_S(t) = \mathcal{V}(t)(\rho_S(0))$. Nós podemos definir

$$W_{\alpha,\beta}(t) \equiv \sqrt{\lambda_{\alpha}} \langle \phi_{\beta}| U(t,0) |\phi_{\alpha}\rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) , \quad (2.90)$$

portanto concluímos que

$$\rho_S(t) = \mathcal{V}(t)(\rho_S(0)) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha,\beta}(t) \rho_S(0) W_{\alpha,\beta}^{\dagger}(t) . \quad (2.91)$$

Finalmente, veja que

$$\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha,\beta}^{\dagger}(t) W_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{\alpha,\beta} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) |\phi_{\beta}\rangle \sqrt{\lambda_{\alpha}} \langle \phi_{\beta}| U(t,0) |\phi_{\alpha}\rangle \quad (2.92)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha} \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) |\phi_{\beta}\rangle \langle \phi_{\beta}| U(t,0) |\phi_{\alpha}\rangle \quad (2.93)$$

$$= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle \phi_{\alpha}| U^{\dagger}(t,0) \left(\sum_{\beta} |\phi_{\beta}\rangle \langle \phi_{\beta}| \right) U(t,0) |\phi_{\alpha}\rangle , \quad (2.94)$$

e uma vez que $\{|\phi_{\beta}\rangle\}_{\beta}$ é uma base ortonormal, temos $\sum_{\beta} |\phi_{\beta}\rangle \langle \phi_{\beta}| = \mathbf{1}_E$. Também, como $U(t,0)$ é um operador unitário, temos $U^{\dagger}(t,0)U(t,0) = \mathbf{1}_{SE}$. Portanto, temos que

$$\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha,\beta}^{\dagger}(t) W_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle \phi_{\alpha}| \phi_{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \text{Tr}\{\rho_B\} = 1 . \quad (2.95)$$

Então, a decomposição $\mathcal{V}(t)(\rho_S(0)) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha,\beta}(t) \rho_S(0) W_{\alpha,\beta}^{\dagger}(t)$ é uma autêntica decomposição de Choi-Kraus, com o conjunto de operadores de Kraus dado por $\{W_{\alpha,\beta}(t)\}_{\alpha,\beta}$ definidos na Eq.(2.90). Logo, devido ao Teorema 4, nós podemos concluir que tal mapa dinâmico $\mathcal{V}(t)$ é um canal quântico (Definição 15). \square

Dessa forma, vemos que toda evolução dinâmica de um sistema quântico, seja ele um sistema aberto ou um sistema fechado, pode ser vista como um canal quântico que atua em um dado estado inicial do sistema. Temos que tal formalismo surge de forma natural nas evoluções dinâmicas. Além disso, devido ao Teorema 4, nós podemos concluir que toda evolução dinâmica é constituída por um mapeamento completamente positivo, linear e que preserva o traço, e podemos obter tal conclusão simplesmente calculando a decomposição de Choi-Kraus de tais mapas dinâmicos. Dessa forma, nós iremos adotar a seguinte definição para evoluções dinâmicas.

Definição 16 (Mapas Dinâmicos). *Toda evolução dinâmica de um sistema quântico com espaço de Hilbert \mathcal{H} é descrita em termos de uma família de canais quânticos $\{\Lambda_{t,t_0}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ que satisfazem $\Lambda_{t_0, t_0} = id_{\mathcal{H}}$, sendo $id_{\mathcal{H}}$ o super-operador identidade de \mathcal{H} , mapeando estados iniciais $\rho(t_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ em estados dinâmicos $\rho(t) = \Lambda_{t,t_0}(\rho(t_0)) \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$.*

Portanto, o formalismo dos canais quânticos nos permite generalizar as evoluções unitárias, assim como obter uma série de propriedades matemáticas importantes que caracterizam tais mapeamentos. Vamos agora introduzir a noção de mapas unitais e definir a chamada *representação de Heisenberg* neste contexto de canais quânticos.

2.4.4 Canais Unitais

Uma vez que um produto interno é definido em um espaço vetorial, nós sempre podemos definir a adjunta de uma transformação linear que atua neste espaço. Por exemplo, suponha que V é um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ e $G : V \rightarrow V$ é um operador linear. Então, o *operador adjunto* G^\dagger é definido de forma que

$$\langle y, G(x) \rangle = \langle G^\dagger(y), x \rangle ; \forall x, y \in V . \quad (2.96)$$

Podemos agora generalizar esta ideia para o contexto dos canais quânticos e definir um *canal adjunto*. Para isso, podemos introduzir o *produto interno de Hilbert-Schmidt*:

Definição 17 (Produto interno de Hilbert-Schmidt). *Para todo par de operadores lineares $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que atuam em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , o produto interno de Hilbert-Schmidt $\langle A, B \rangle_{hs}$ é dado por*

$$\langle A, B \rangle_{hs} \equiv \text{Tr}\{A^\dagger B\} . \quad (2.97)$$

Com o produto interno de Hilbert-Schmidt definido no espaço de operadores, nós podemos agora definir a noção de um *Super-operador*¹⁴ *Adjunto*.

Definição 18 (Mapa Adjunto). *Seja $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ uma transformação linear que mapeia os operadores lineares definidos em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A em operadores*

¹⁴ Um super-operador é uma transformação que atua em um espaço de operadores.

lineares definidos em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_B . A transformação adjunta \mathcal{N}^\dagger é tal que satisfaz a equação¹⁵

$$\langle Y, \mathcal{N}(X) \rangle_{hs} = \langle \mathcal{N}^\dagger(Y), X \rangle_{hs} ; \forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) , \forall Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) . \quad (2.98)$$

Nós podemos agora definir o conceito de um *mapa unital*, que será útil a seguir.

Definição 19 (Mapa Unital). *Considere $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B$ como sendo os operadores identidade dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$, respectivamente, e $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é um mapeamento linear. Então, \mathcal{N} é dito um mapa unital se*

$$\mathcal{N}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B . \quad (2.99)$$

Em outras palavras, um mapa unital preserva o operador identidade.

Vamos agora interpretar o papel dos mapas unitais nos canais quânticos. A primeira relação é descrita em termos do próximo teorema.

Teorema 5 (Canal Quântico Adjunto). *Se um canal quântico $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ possui o conjunto $\{V_l\}_l$ de operadores de Kraus, então:*

- *O mapeamento adjunto \mathcal{N}^\dagger , definido pela Eq.(2.98), é um mapa completamente positivo (Definição 14) e unital (Definição 19).*
- *O conjunto de operadores de Kraus do mapa adjunto é $\{V_l^\dagger\}_l$. Em outras palavras, nós temos*

$$\mathcal{N}^\dagger(Y) = \sum_l V_l^\dagger Y V_l ; \forall Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) . \quad (2.100)$$

Demonstração. Nós temos que $\mathcal{N}(X) = \sum_l V_l X V_l^\dagger$ onde $\sum_l V_l^\dagger V_l = \mathbb{1}_B$. Utilizando a Definição 18 e a propriedade cíclica do traço, nós podemos facilmente mostrar que $\mathcal{N}^\dagger(Y) = \sum_l V_l^\dagger Y V_l$ para todo operador $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. Utilizando esta decomposição, é fácil ver que o mapeamento \mathcal{N}^\dagger é unital. Por fim, é possível mostrar que o operador de Choi (5) associado ao mapa adjunto \mathcal{N}^\dagger é positivo semi-definido, logo o Teorema de Choi afirma que \mathcal{N}^\dagger é um mapeamento completamente positivo. \square

O canal quântico adjunto \mathcal{N}^\dagger fornece a ponte para a *representação de Heisenberg*. Note que o canal quântico \mathcal{N} representa a evolução de um sistema quântico através dos estados representados pelos operadores densidade. Em outras palavras, a evolução é feita através da transformação dos estados. Tal representação é denominada *representação de Schrodinger*. Por outro lado, a *representação de Heisenberg* é tal que a evolução é obtida

¹⁵ É possível provar (5) que tal transformação adjunta satisfazendo esta equação existe e é única.

através da transformação dos operadores, deixando os estados estáticos. Iremos mostrar que o canal adjunto faz a conexão entre estas duas representações.

Suponha um sistema quântico A descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A cujo estado inicial é $\rho_A \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$. Este sistema sofre uma evolução descrita pelo canal quântico $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ e considere um observável J do sistema após a evolução, cujas medidas são descritas por um POVM $\{\Lambda_B^j\}_j$ [veja a Definição 9]. Temos que a probabilidade de obter um resultado j através da medida do observável J após a evolução é dada por

$$p_J(j) = \text{Tr}\{\Lambda_B^j \mathcal{N}(\rho_A)\} = \text{Tr}\{(\Lambda_B^j)^\dagger \mathcal{N}(\rho_A)\} = \langle \Lambda_B^j, \mathcal{N}(\rho_A) \rangle_{hs} , \quad (2.101)$$

onde utilizamos que $\Lambda_B^j \geq 0$, logo [devido ao Lema 2] ele também é um operador hermitiano. Utilizando agora a definição do canal adjunto, nós temos que

$$p_J(j) = \langle \mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j), \rho_A \rangle_{hs} = \text{Tr}\{\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j) \rho_A\} , \quad (2.102)$$

onde usamos que $\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j)$ é um operador hermitiano, pois $\Lambda_B^j \geq 0$ e \mathcal{N}^\dagger é um mapa completamente positivo (Teorema 5), logo $\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j) \geq 0$ e a afirmação segue do Lema 2. Dessa forma, podemos concluir que

$$p_J(j) = \text{Tr}\{\Lambda_B^j \mathcal{N}(\rho_A)\} = \text{Tr}\{\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j) \rho_A\} . \quad (2.103)$$

Além disso, note que

$$\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j) \geq 0 , \quad (2.104)$$

$$\sum_j \mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j) = \mathcal{N}^\dagger\left(\sum_j \Lambda_B^j\right) = \mathcal{N}^\dagger(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B , \quad (2.105)$$

onde utilizamos o Teorema 5. Portanto, o conjunto $\{\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j)\}_j$ constitui um autêntico POVM.

Vamos agora interpretar o desenvolvimento feito no parágrafo acima. Veja que na representação de Schrodinger, a evolução é descrita em termos de transformações de um estado inicial ρ_A através do canal quântico \mathcal{N} , $\rho_A \rightarrow \mathcal{N}(\rho_A)$, enquanto que os operadores de medida ficam estáticos e a estatística de um dado observável é descrita em termos da distribuição de probabilidades dada na Eq.(2.103). Por outro lado, na representação de Heisenberg os operadores de medida que evoluem de acordo com o canal adjunto \mathcal{N}^\dagger , enquanto que o estado inicial permanece estático. Em outras palavras, o operador ρ_A é fixado e o POVM evolui de Λ_B^j para $\mathcal{N}^\dagger(\Lambda_B^j)$. Veja então que a estatística do sistema não pode depender da representação escolhida, tal como é descrito na Eq. (2.103), demonstrando que ambas as representações descrevem o mesmo sistema de forma equivalente.

A seguir, vamos ilustrar um importante exemplo de canal quântico que é comumente utilizado na descrição de sistemas quânticos abertos.

2.4.5 Amortecimento de Amplitude

Para finalizar este capítulo, vamos fornecer um breve exemplo de modelo muito comum em sistemas físicos dissipativos. Tal canal é chamado de *Amortecimento de Amplitude*, ou *Amplitude Damping*, em inglês. Em geral, podemos utilizar este modelo em emissões espontâneas. Suponha que nosso sistema consiste de um átomo de dois níveis, onde $|0\rangle$ constitui o estado fundamental e $|1\rangle$ representa o estado excitado. Podemos utilizar tal consideração em átomos mais gerais, uma vez que transições para outros níveis são negligenciadas. Uma emissão espontânea constitui a transição $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, até mesmo se o átomo encontra-se inicialmente em uma superposição destes estados.

Neste cenário, γ denotará a probabilidade de transição (decaimento), e o operador de decaimento será dado por $A_0 \equiv \sqrt{\gamma} |0\rangle \langle 1|$, pois obtemos

$$A_0 |0\rangle \langle 0| A_0^\dagger = 0, \quad (2.106)$$

$$A_0 |1\rangle \langle 1| A_0^\dagger = |0\rangle \langle 0|, \quad (2.107)$$

ou seja, o operador A_0 mapeia o estado excitado no estado fundamental, modelando assim o decaimento do átomo. Para que tal transformação seja representada por um canal quântico, precisamos de mais um operador para satisfazer a condição de completude $\sum_l V_l^\dagger V_l = \mathbb{1}$ para um conjunto $\{V_l\}_l$ de operadores de Kraus. Nesse caso, precisamos definir

$$A_1 = |0\rangle \langle 0| + \sqrt{1 - \gamma} |1\rangle \langle 1|, \quad (2.108)$$

e temos então que

$$A_1^\dagger A_1 + A_0^\dagger A_0 = |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = \mathbb{1}_2. \quad (2.109)$$

Portanto, o processo de emissão espontânea de um átomo de dois níveis pode ser descrito com o formalismo dos canais quânticos, utilizando os operadores de Kraus $\{A_0, A_1\}$ definidos acima. Note que o canal de amortecimento de amplitude descreve um sistema que converge assintoticamente para o estado fundamental $|0\rangle$. Em outras palavras, este tipo de canal atua diretamente nas populações dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Entretanto, há outros tipos de canais onde o efeito se dá especialmente nas coerências do operador densidade, como por exemplo o canal de *defasagem transversa* e *defasagem paralela* (64,65) que são descritos por canais unitais.

Nesta seção, nós mostramos como que o formalismo dos canais quânticos surge naturalmente em processos de medições ruidosos, assim como na evolução dinâmica de sistemas quânticos abertos e também no decaimento de um sistema de dois níveis. Há uma série de outros exemplos de aplicações de canais quânticos que podem ser encontrados na literatura (3,5–7), e outras aplicações serão desenvolvidas nos próximos capítulos.

3 MEDIDAS DE DISTINGUIBILIDADE

Neste capítulo, nós iremos discutir a distinguibilidade de estados quânticos, nomeadamente os operadores densidade. Uma vez que um operador densidade fornece toda a estatística relativa a medidas de um observável, buscamos obter formas para distinguir ou comparar diferentes estados de um sistema, constituindo um problema fundamental.

Além disso, podemos usar tais medidas de distinguibilidade de estados quânticos para tentar quantificar a presença de ruído em uma dada evolução. Por exemplo, muitos protocolos de comunicação quântica são definidos usando a estrutura da teoria quântica não ruidosa, tais como a codificação super-densa, teleportação quântica entre outros. Entretanto, na prática, temos o efeito de ruído em tais implementações, e podemos verificar o quanto que uma dada execução se aproxima da execução ideal calculando a “distância” entre o estado esperado (dado pelo protocolo executado em um cenário ideal) e o estado obtido (que representa a execução do protocolo em um cenário ruidoso). Portanto, as medidas de distância que serão introduzidas neste capítulo são particularmente importantes em diversas aplicações de problemas relacionados à informação quântica.

Por fim, cabe destacar que tais medidas irão desempenhar um papel central neste trabalho, onde elas irão ser aplicadas tanto no contexto dos limites quânticos de velocidade (em inglês quantum speed limits, ou abreviadamente QSL), onde nós iremos definir novos quantificadores de QSL utilizando diferentes medidas de distinguibilidade, assim como serão utilizadas na definição de dinâmicas não Markovianas. Iremos abordar estes tópicos em detalhe nos próximos capítulos.

Vamos então iniciar discutindo diferentes normas que podem ser definidas em um espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ associado a um espaço de Hilbert \mathcal{H} , em especial nós daremos destaque as normas Schatten. Vamos investigar algumas propriedades desta família de normas e iremos desenvolver alguns casos particulares que são importantes em diversas aplicações de informação quântica, como a norma traço (L_1), a norma espectral (também chamada de norma operador) e a norma de Hilbert-Schmidt (L_2).

Nosso intuito aqui é introduzir as principais medidas de distinguibilidade utilizadas em diversos problemas de informação quântica e ressaltar suas principais propriedades. Logo, iremos omitir a demonstração de alguns resultados, sempre indicando as referências para o leitor.

3.1 Normas

Vamos iniciar definindo os axiomas de uma norma em um espaço de Hilbert¹.

Definição 20 (Norma). *Uma norma em um espaço de Hilbert \mathcal{H} (mais geralmente um espaço vetorial) é uma função $\|\bullet\| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Não negatividade:* $\|\psi\rangle\| \geq 0$ para todo estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, e $\|\psi\rangle\| = 0$ se, e somente se nós temos $|\psi\rangle = 0$.
- *Escala:* Para todo número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ e todo estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, nós temos $\|\alpha|\psi\rangle\| = |\alpha| \|\psi\rangle\|$.
- *Desigualdade triangular:* Para todo par de estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$, nós temos $\| |\psi\rangle + |\phi\rangle \| \leq \|\psi\rangle\| + \|\phi\rangle\|$.

Usando a desigualdade triangular e a propriedade de escala, nós podemos mostrar que toda norma é convexa, ou seja

$$\|\lambda|\psi\rangle + (1 - \lambda)|\phi\rangle\| \leq \lambda\|\psi\rangle\| + (1 - \lambda)\|\phi\rangle\| , \quad (3.1)$$

para todo número real $\lambda \in [0, 1]$ e para todo par de estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$.

No decorrer desta subseção, nós iremos direcionar nosso foco em definir uma norma no espaço de Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dos operadores lineares definidos em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Uma importante família de normas, que será intensivamente utilizada neste trabalho, é denominada *normas Schatten*.

Definição 21 (Normas Schatten). *Para todo operador linear $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ atuando em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , sua α -norma Schatten é definida por*

$$\|X\|_\alpha \equiv (\text{Tr} \{|X|^\alpha\})^{\frac{1}{\alpha}} , \quad (3.2)$$

para todo $\alpha \in [1, \infty)$, onde $|X| \equiv \sqrt{X^\dagger X}$. Nós também definimos

$$\|X\|_\infty \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|X\|_\alpha , \quad (3.3)$$

e portanto as α -normas ficam bem definidas para todo $\alpha \in [1, \infty]$.

Vale mencionar que é possível estender a Definição 21 para considerar os casos onde α pertence ao intervalo $(0, 1)$ (utilizando a mesma Eq.(3.2)), porém tal função deixa

¹ Embora consideremos um espaço de Hilbert, tal definição é válida para espaços vetoriais gerais.

de ser uma norma pois viola a desigualdade triangular para estes valores de α . Além disso, podemos facilmente mostrar que as funções dadas pela Definição 21 são legítimas normas definidas em um espaço de operadores lineares, ou seja, elas satisfazem a não negatividade, a desigualdade triangular e também a propriedade de escala.

Normas são tipicamente utilizadas em problemas de matemática pura para medir comprimentos de vetores e/ou operadores, e diferentes normas podem fornecer diferentes comprimentos. Isto é, nem sempre existe uma relação bem definida entre diferentes normas. Em informação quântica, nós usamos normas para medir a informação contida em estados quânticos e canais quânticos. Neste trabalho, nós também utilizamos as normas Schatten para definir novos limites quânticos de velocidade, como será explorado nos próximos capítulos.

As normas Schatten podem ser calculadas em termos de outras propriedades espectrais relativas a um dado operador. Primeiramente, considere um operador linear $X : V \rightarrow W$ genérico definido entre dois espaços vetoriais V e W . Relembre que seus valores singulares correspondem aos auto-valores² do operador $\sqrt{X^\dagger X}$. Além disso, o rank de um dado operador linear X é definido como sendo a dimensão da imagem de X , ou seja, $\text{rank}(X) = \dim(\text{Im}(X))$, e nesse caso temos $\text{Im}(X) = W$. Também é possível mostrar³ que o número de valores singulares de um dado operador linear X é igual ao seu rank, isto é, $\#\{s_\alpha\}_\alpha = \text{rank}(X)$, onde $\{s_\alpha\}_\alpha$ é o conjunto de valores singulares de X e $\#A$ denota o número de elementos em um conjunto A . Podemos então enunciar o seguinte resultado.

Lema 6 (Normas Schatten e Valores Singulares). *Seja X um operador linear, e considere o conjunto $\{s_k\}_{k=1}^r$ dos valores singulares de X , onde $r = \text{rank}(X)$. Então, a α -norma Schatten de X é dada por*

$$\|X\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^r s_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.4)$$

onde $\alpha \in [1, \infty)$.

Demonstração. Tal resultado segue diretamente da Definição 21 tomando o fato de que o traço é um invariante por mudanças de base e considerando a base que diagonaliza o operador $\sqrt{X^\dagger X}$. \square

Por fim, veja que nós poderíamos ter definido as α -norma Schatten utilizando $\sqrt{XX^\dagger}$ ao invés de $\sqrt{X^\dagger X}$. A razão é que X e X^\dagger possuem os mesmos valores singulares.

² Uma vez que o operador $X^\dagger X$ é positivo semi-definido, já mostramos que isto implica que ele também é hermitiano, logo seus auto-valores são todos reais e positivos e tal operador pode ser diagonalizado de acordo com o teorema espectral.

³ Este é o conteúdo do Teorema de decomposição de uma matriz em valores singulares. Para uma breve revisão sobre os conceitos centrais da álgebra linear, o leitor é indicado a consultar a referência (3).

Isto é, $X^\dagger X$ e XX^\dagger possuem os mesmos auto-valores. Para ver isso, denotamos $\text{spec}(X^\dagger X)$ como o conjunto de auto-valores do operador $X^\dagger X$, isto é, seu espectro (ou conjunto de raízes do polinômio característico). Vamos mostrar que $\text{spec}(X^\dagger X) = \text{spec}(XX^\dagger)$. Suponha que $X^\dagger X |\phi\rangle = \lambda |\phi\rangle$, ou seja, $\lambda \in \text{spec}(X^\dagger X)$. Definimos o vetor $|\xi\rangle = X |\phi\rangle$. Logo, nós temos que $XX^\dagger |\xi\rangle = XX^\dagger X |\phi\rangle = X(X^\dagger X |\phi\rangle) = X(\lambda |\phi\rangle) = \lambda |\xi\rangle$, portanto $\lambda \in \text{spec}(XX^\dagger)$. Dessa forma, concluímos que $\text{spec}(X^\dagger X) \subseteq \text{spec}(XX^\dagger)$. De forma análoga, podemos mostrar que $\text{spec}(XX^\dagger) \subseteq \text{spec}(X^\dagger X)$, e portanto $\text{spec}(XX^\dagger) = \text{spec}(X^\dagger X)$, como queríamos demonstrar.

Como uma consequência do Lema 6, nós podemos analisar o caso onde o operador X é hermitiano. Neste caso, temos que $\sqrt{X^\dagger X} = \sqrt{X^2}$ e denotando λ_i como sendo os auto-valores de X , nós temos que $s_k = |\lambda_k|$. Ou seja, os valores singulares de um operador hermitiano são simplesmente iguais aos módulos de seus auto-valores. Dessa forma, a α -norma Schatten de um operador hermitiano X com conjunto $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\text{rank}(X)}$ de auto-valores e $r = \text{rank}(X)$ é dada por

$$\|X\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^r |\lambda_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.5)$$

As α -normas Schatten possuem uma série de propriedades interessantes que podem ser encontradas na literatura. Aqui, vamos enunciar (sem demonstração⁴) duas importantes propriedades que serão utilizadas no contexto dos limites quânticos de velocidade. Antes de enunciar, vamos introduzir o conceito de uma *norma dual*. Dado uma norma Schatten $\|\bullet\|_\alpha$, a norma Schatten $\|\bullet\|_\beta$ é dita sua dual se $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Temos então o seguinte resultado relacionando uma α -norma Schatten com a sua norma dual.

Lema 7. *Para todo operador linear X , sua α -norma Schatten pode ser dada em termos de um supremo*

$$\|X\|_\alpha = \sup_{Y \neq 0} \left\{ \left| \text{Tr}[Y^\dagger X] \right| : \|Y\|_\beta \leq 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right\}. \quad (3.6)$$

Como consequência do Lema 7, nós temos a *desigualdade de Holder* que desempenhará um importante papel nos próximos capítulos⁵.

Definição 22 (Desigualdade de Holder). *O Lema 7 implica que para todo operador linear X e Z , e todo par de números reais $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ satisfazendo $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, nós temos a seguinte desigualdade*

⁴ A demonstração pode ser encontrada na referência (7).

⁵ De fato, nós iremos desenvolver um novo quantificador de limite quântico de velocidade partindo da desigualdade de Holder para normas Schatten.

$$|\text{Tr}[Z^\dagger X]| \leq \|X\|_\alpha \|Z\|_\beta, \quad (3.7)$$

na qual é denominada desigualdade de Holder.

A seguir, iremos brevemente introduzir a noção de *espaço métrico* que será útil no desenvolvimento de um limite quântico de velocidade sob a abordagem geométrica no espaço de estados, que será abordado nos próximos capítulos.

3.2 Uma breve menção a teoria de espaços métricos

Nós próximos capítulos, nós iremos trabalhar com um espaço de estados normado. Ou seja, vamos definir uma norma $\|\bullet\| : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ de operadores no espaço $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ de estados ρ associados a um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} . Além disso, vamos definir uma *métrica* neste espaço de estados, que irá agir como a nossa medida de distinguibilidade dos estados quânticos. Dessa forma, será necessário ter em mente a seguinte definição.

Definição 23 (Espaços Métricos). *Seja M um conjunto e $D : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos os elementos $x, y, z \in M$, nós temos:*

- **Positividade semi-definida:** $D(x, y) \geq 0$ e $D(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$.
- **Simetria:** $D(x, y) = D(y, x)$.
- **Desigualdade triangular:** $D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z)$.

A função D é dita uma *métrica* em M e o par (M, D) é chamado de *espaço métrico*.

É possível demonstrar que toda norma pode induzir uma métrica em um dado conjunto. Ou seja, considere um espaço vetorial V com uma norma $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}$. Logo, o espaço $(V, \|\bullet\|)$ é dito um espaço normado. É possível mostrar que a função $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| \quad (3.8)$$

para todo par de elementos $x, y \in V$ satisfaz os axiomas de uma métrica dados pela Definição 23, ou seja, é uma função positiva semi-definida, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular. Dessa forma, o par (V, d) constitui um legítimo espaço métrico. Com isso, vemos que todo espaço normado pode também ser visto como um espaço métrico. Vale ressaltar também que toda norma pode induzir uma métrica, mas nem toda métrica é definida a partir de uma norma. Similarmente, todo produto interno pode induzir uma norma, mas nem toda norma pode ser gerada a partir de um produto interno. Neste trabalho, tudo que precisaremos é da noção da estrutura geral de espaços métricos, mas para mais informações e também para mais propriedade, o leitor é indicado a consultar a referência (8).

Desta forma, tomando o conjunto $M = \mathcal{D}(\mathcal{H})$, e considerando uma α -norma Schatten no espaço de estados, nós podemos definir a métrica

$$D_\alpha(\rho, \eta) = \|\rho - \eta\|_\alpha \quad (3.9)$$

e então o espaço de estados pode ser visto como um espaço normado $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), \|\bullet\|_\alpha)$ e também como um espaço métrico $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), D_\alpha)$. Neste trabalho, nós iremos combinar a métrica induzida pelas normas Schatten (Eq.(3.9)) com a representação de Bloch definida anteriormente, e iremos expressar tais distâncias em termos de distâncias Euclideana entre os vetores de Bloch. Tais detalhes serão explorados nos próximos capítulos.

3.3 Exemplos de medidas de distinguibilidade

Nesta seção, nós vamos fornecer alguns exemplos de medidas de distinguibilidade comumente aplicadas em problemas de informação quântica. Iremos lidar com alguns casos particulares de distâncias induzidas por normas Schatten, nomeadamente a distância traço ($\alpha = 1$), a distância de Hilbert-Schmidt ($\alpha = 2$). Vamos iniciar discutindo algumas propriedades da norma operador, que possui um papel de destaque em alguns limites quânticos de velocidade.

3.3.1 Norma operador (espectral)

A norma operador toma espaço no limite quântico de velocidade desenvolvido pelo Sebastian Deffner e Eric Lutz (9) e também desempenhará um papel importante neste trabalho.

Definição 24 (Norma Operador, ∞ -norma Schatten ou Norma Espectral). *A Norma Operador, também chamada de ∞ -norma Schatten ou Norma Espectral, é uma norma Schatten (Definição 21) tomando $\alpha = \infty$. Ou seja, para todo operador linear X , sua norma operador $\|X\|_\infty$ é dada pelo limite*

$$\|X\|_\infty \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|X\|_\alpha . \quad (3.10)$$

O próximo resultado constitui uma importante ferramenta no cálculo da norma operador de um operador linear X genérico. Tal resultado irá relacionar a norma operador com os valores singulares de X .

Lema 8 (Norma Operador e Valores Singulares). *Para todo operador linear $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ definido entre dois espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , $\|X\|_\infty$ é igual ao maior valor singular de X , na qual é denotado por s_{max} . Em outras palavras, temos que*

$$\|X\|_\infty = s_{max} . \quad (3.11)$$

Demonstração. Seja $\vec{s} = (s_1, \dots, s_r)$ um vetor cujas componentes correspondem aos valores singulares do operador X e $r = \text{rank}(X)$. Uma vez que os valores singulares são, por definição, os auto-valores do operador positivo semi-definido $\sqrt{X^\dagger X}$, temos que $s_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Logo, para todo $\alpha \geq 1$ e para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, nós temos

$$s_i^\alpha \leq \sum_{j=1}^r s_j^\alpha = \|X\|_\alpha^\alpha, \quad (3.12)$$

onde utilizamos o Lema 6 na última igualdade. Dessa forma, nós temos que $s_j \leq \|X\|_\alpha$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, e em particular tal desigualdade também é válida para o maior valor singular $s_{\max} \equiv \max_j \{s_j\}_j$. Então, temos que $s_{\max} \leq \|X\|_\alpha$ para todo $\alpha \geq 1$. Tomando o limite $\alpha \rightarrow \infty$ nesta desigualdade e considerando a Definição 24, nós concluímos que

$$s_{\max} \leq \|X\|_\infty. \quad (3.13)$$

Para provar a desigualdade oposta, considere agora que $\alpha > \beta > 1$, logo

$$\|X\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^r s_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^r s_k^{\alpha-\beta} s_k^\beta \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\sum_{k=1}^r s_{\max}^{\alpha-\beta} s_k^\beta \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.14)$$

$$= s_{\max}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^r s_k^\beta \right)^{\frac{1}{\alpha}} = s_{\max}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|X\|_\beta^{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (3.15)$$

e então nós temos que

$$\|X\|_\alpha \leq s_{\max}^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|X\|_\beta^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (3.16)$$

para todo $\alpha \geq 1$. Tomando novamente o limite $\alpha \rightarrow \infty$, nós temos que

$$\|X\|_\infty \leq s_{\max}, \quad (3.17)$$

e tomando as duas desigualdades nós podemos concluir que $\|X\|_\infty = s_{\max}$. \square

O Lema 8 justifica o termo *norma espectral* também designado para a ∞ -norma Schatten. O termo *norma operador* também é utilizado pois é possível mostrar que a norma dada pela Definição 24 é induzida pela norma Euclideana definida no espaço de Hilbert \mathcal{H} na qual o operador linear X atua, isto é,

$$\|X\|_\infty = \sup_{|\psi\rangle \neq 0} \frac{\|X|\psi\rangle\|_2}{\| |\psi\rangle \|_2}, \quad (3.18)$$

onde o símbolo \sup significa o supremo do conjunto numérico $\frac{\|X|\psi\rangle\|_2}{\| |\psi\rangle \|_2}$ tomado em relação a todos os vetores não nulos do espaço de Hilbert \mathcal{H} na qual o operador X é definido. Para uma revisão dos conceitos de *infimum* e *supremum* de conjuntos, o leitor é indicado a consultar a referência (10). A norma operador possui diversas outras propriedades em

termos de supremos, mas nós vamos nos limitar a discutir apenas o Lema 8. Para mais informações sobre a norma operador, veja a referência (7).

3.3.2 Norma traço (L_1) e distância traço

Vamos agora considerar o caso particular de uma norma Schatten para $\alpha = 1$. Tal norma é conhecida por *norma traço*, e é amplamente usada em problemas de informação quântica como uma medida de distinguibilidade de estados, assim como em definições de não Markovianidade em dinâmicas de sistemas quânticos abertos. A norma traço também é conhecida como norma L_1 e iremos ver a justificativa em seguida.

Definição 25 (Norma traço (L_1)). *Para um dado operador linear X , sua norma traço, denotada por $\|X\|_1$ ou $\|X\|_{tr}$, é uma norma Schatten considerando $\alpha = 1$. Devido a Definição 21, temos que*

$$\|X\|_{tr} \equiv \|X\|_1 = \text{Tr}\{\sqrt{X^\dagger X}\}. \quad (3.19)$$

Por conta de Lema 8, nós temos que a norma traço é simplesmente a soma dos valores singulares de um dado operador linear X , ou seja,

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^r s_i, \quad (3.20)$$

onde os números s_i com $i = 1, \dots, r$ são os valores singulares de X enquanto que $r = \text{rank}(X)$. Dessa forma, lembre-se que dado um espaço vetorial V , nós temos a norma L_1 definida pelo mapeamento $\|\bullet\|_{L_1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\|\vec{v}\|_{L_1} \equiv \sum_{i=1}^{\dim(V)} |v_i|$ para todo elemento $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{\dim(V)}) \in V$. Logo, uma vez que $s_i = |s_i|$, podemos interpretar a norma traço como sendo uma norma L_1 definida no espaço dos valores-singulares dos operadores lineares que atuam em um certo espaço de Hilbert, e por isso esta norma também é referenciada como norma L_1 .

Também, veja que se o operador X é hermitiano, então $s_i = |\lambda_i|$, onde λ_i com $i = 1, \dots, r$ correspondem aos auto-valores de X . Ou seja, os valores singulares de um operador hermitiano correspondem aos módulos dos seus respectivos auto-valores. Então, devido a Eq.(3.5), nós temos que

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^r |\lambda_i|, \quad (3.21)$$

ou seja, a norma traço de um operador hermitiano é simplesmente a soma dos módulos dos seus auto-valores.

Vale a pena ressaltar que, uma vez que a norma traço (Definição 25) é um caso particular das α -normas Schatten, então a norma traço é uma legítima norma no espaços

de operadores $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que atuam em um certo espaço de Hilbert \mathcal{H} . Em outras palavras, tal mapeamento satisfaz os axiomas dados pela Definição 20. A seguir, vamos discutir algumas propriedades da norma traço.

- **Propriedade 1:** *invariância por isometrias.*

Para todo operador linear $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ definido entre dois espaços de Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{H}' , e todo par de isometrias⁶ $U, V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, nós temos

$$\|UMV^\dagger\|_1 = \|M\|_1, \quad (3.22)$$

ou seja, a norma traço é invariante por transformações isométricas.

Demonstração. Veja que UMV^\dagger e M possuem os mesmos valores singulares. Logo, pela Eq.(3.20), nós temos que ambos operadores possuem a mesma norma traço. \square

- **Propriedade 2** *convexidade.*

A norma traço é um mapeamento convexo, ou seja, para todo par de operadores M, N e todo número $\lambda \in [0, 1]$, nós temos

$$\|\lambda M + (1 - \lambda)N\|_1 \leq \lambda\|M\|_1 + (1 - \lambda)\|N\|_1. \quad (3.23)$$

Demonstração. Esta propriedade é uma consequência da desigualdade triangular juntamente com a propriedade de escala das normas (Definição 20). \square

- **Propriedade 3** *caracterização variacional.*

Para todo operador linear quadrado $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, podemos obter a sua norma traço dada pela expressão variacional

$$\|M\|_1 = \max_U |\text{Tr}\{MU\}|, \quad (3.24)$$

onde a otimização é com respeito a todos operadores unitários U definidos em \mathcal{H} .

Demonstração. Para a demonstração detalhada, consulte a referência (5). \square

Agora, vamos considerar a métrica induzida pela norma traço, nomeadamente a *distância traço*.

⁶ Uma isometria $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ é um operador que satisfaz $V^\dagger V = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. Veja que todo operador unitário é uma isometria, mas a inversa não é necessariamente verdade.

Definição 26 (Distância Traço). *Para todo par de operadores lineares $M, N \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ definidos entre dois espaços de Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{H}' , a distância traço entre eles é definida por*

$$d_T(M, N) \equiv \|M - N\|_1 . \quad (3.25)$$

A distância traço é especialmente útil como medida de distinguibilidade entre dois estados quânticos. Uma vez que esta métrica é induzida por uma norma definida em um espaço vetorial, nós temos que a função d_T satisfaz os axiomas de uma métrica (Definição 23) e o par $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), d_T)$ torna-se um espaço métrico. Em especial, temos as seguintes desigualdades.

Lema 9 (Máximo e Mínimo da Distância Traço). *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Então, para todo par de estados $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, nós temos*

$$0 \leq \|\rho - \sigma\|_1 \leq 2 , \quad (3.26)$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 \in [0, 1] . \quad (3.27)$$

Demonstração. Uma vez que a norma traço satisfaz a Definição 20, o limite inferior é óbvio. Além disso, vemos que $d_T(\rho, \sigma) = 0$ se, e somente se, $\rho = \sigma$. Fisicamente, se $d_T(\rho, \sigma) = 0$ então nenhuma medida pode distinguir entre os operadores ρ e σ .

Da desigualdade triangular, nós temos que

$$\|\rho - \sigma\|_1 \leq \|\rho\|_1 + \|\sigma\|_1 = \text{Tr}\{\sqrt{\rho^\dagger \rho}\} + \text{Tr}\{\sqrt{\sigma^\dagger \sigma}\} , \quad (3.28)$$

e tomando que todo operador densidade é positivo semi-definido (e conseqüentemente hermitiano), nós temos que $\sqrt{\rho^\dagger \rho} = \sqrt{\rho^2} = \rho$, logo $\text{Tr}\{\sqrt{\sigma^\dagger \sigma}\} = \text{Tr}\{\sqrt{\rho^\dagger \rho}\} = 1$. Ou seja, a norma traço de todo operador densidade é igual ao seu traço e, portanto, igual a 1. Dessa forma, temos que

$$\|\rho - \sigma\|_1 \leq 2. \quad (3.29)$$

Além disso, nós temos que $\|\rho - \sigma\|_1 = 2$ se, e somente se, ρ e σ possuem suporte em subespaços ortogonais (7). Fisicamente isto significa que existe uma medição que pode perfeitamente distinguir os estados ρ e σ . \square

Como exemplo, vamos calcular a distância traço entre dois estados $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ associados a um espaço de Hilbert \mathcal{H} bidimensional. Estamos lidando com dois estados de um q -bit. Podemos então escrever estes dois estados na representação de Bloch

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (3.30)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (3.31)$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é um operador vetorial cujas componetes correspondem aos operadores de Pauli, e os vetores \vec{s} e \vec{r} são pontos da esfera unitária tridimensional. Logo, utilizando as relações de comutação das matrizes de Pauli, é fácil mostrar que $|\rho - \sigma| \equiv \sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger(\rho - \sigma)} = \|\vec{s} - \vec{r}\|_2 \mathbf{1}_2/2$, onde nós estamos denotando $\|\vec{x}\|_2 = (\sum_{i=1,2,3} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ como sendo a norma Euclideana de todo vetor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Tirando o traço de $|\rho - \sigma|$, nós obtemos a demonstração do seguinte resultado.

Lema 10 (Distância traço para q-bits). *A distância traço entre dois estados ρ e σ associados a um sistema de dois níveis é igual a distância Euclideana entre seus vetores de Bloch. Ou seja, se*

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (3.32)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) , \quad (3.33)$$

então

$$d_T(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_1 = \|\vec{r} - \vec{s}\|_2 , \quad (3.34)$$

onde $\|\vec{r} - \vec{s}\|_2$ corresponde a distância Euclideana entre os vetores tridimensionais \vec{r} e \vec{s} .

Como uma medida de distinguibilidade, a distância traço entre dois estados também se relaciona com a máxima diferença entre as estatísticas geradas por cada estado relativas a um observável, como descrito a seguir.

Lema 11 (Distância Traço e Diferença Estatística). *A distância traço normalizada entre dois estados quânticos $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, nomeadamente $\frac{1}{2}\|\rho - \sigma\|_1$, é igual a maior diferença de probabilidade que dois estados ρ e σ podem fornecer para um mesmo resultado de medição descrito por um operador Λ , isto é,*

$$\frac{1}{2}\|\rho - \sigma\|_1 = \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} \{\Lambda(\rho - \sigma)\} , \quad (3.35)$$

onde a maximização é tomada com respeito a todos os operadores positivos semi-definidos $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que possui os seus auto-valores limitados por 1.

Demonstração. Para uma prova detalhada, o leitor é indicado a consultar a referência (5). □

Além disso, a distância traço é invariante por transformações unitárias, como descrito pelo próximo resultado.

Lema 12 (Invariância da distância traço via canais unitários). *Seja $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ uma isometria, ou seja $U^\dagger U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$. Então para todo par de estados $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, temos que*

$$d_T(\rho, \sigma) = d_T(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) . \quad (3.36)$$

Demonstração. Veja que $U\rho U^\dagger - U\sigma U^\dagger = U(\rho - \sigma)U^\dagger$, então

$$|U\rho U^\dagger - U\sigma U^\dagger| = \sqrt{(U(\rho - \sigma)U^\dagger)^\dagger U(\rho - \sigma)U^\dagger} \quad (3.37)$$

$$= \sqrt{U(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)U^\dagger} = U\sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)}U^\dagger \quad (3.38)$$

$$= U|\rho - \sigma|U^\dagger , \quad (3.39)$$

onde utilizamos que $Uf(A)U^\dagger = f(UAU^\dagger)$, onde $f(A)$ denota uma função de um operador A definida em termos de uma série de Taylor. Portanto, temos que

$$d_T(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = \|U\rho U^\dagger - U\sigma U^\dagger\|_1 = \text{Tr}\{|U\rho U^\dagger - U\sigma U^\dagger|\} \quad (3.40)$$

$$= \text{Tr}\{U|\rho - \sigma|U^\dagger\} = \text{Tr}\{|\rho - \sigma|U^\dagger U\} \quad (3.41)$$

$$= \text{Tr}\{|\rho - \sigma|\} = \|\rho - \sigma\|_1 = d_T(\rho, \sigma) . \quad (3.42)$$

Dizemos então que a distância traço é invariante sob canais quânticos isométricos. \square

O Lema 12 possui uma importante e fundamental interpretação física. Relembre que a teoria quântica não ruidosa é descrita em termos de canais quânticos unitários $\mathcal{U}(\rho_0) = U\rho_0 U^\dagger$ com $U^\dagger U = \mathbb{1}$. Dessa forma, o Lema 12 afirma que a distinguibilidade entre dois estados não é alterada por transformações unitárias. Ou seja, a distinguibilidade entre dois estados devido a uma evolução ideal (isto é, satisfazendo a equação de Schrödinger) não é alterada. De fato, se a evolução é ideal (ou seja, sem a presença de qualquer fonte de ruído clássico ou quântico), nós esperamos que a medida de distinguibilidade entre dois estados não seja alterada por tais transformações. Nós veremos a seguir que tal propriedade não é válida para canais quânticos gerais. Antes disso, vamos mostrar que a distância traço é monótona com relação ao descarte de partes de um sistema quântico.

Lema 13 (Monotonicidade da Distância Traço com respeito ao descarte de subsistemas). *Seja A e B dois sistemas quânticos descritos pelos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, e considere o sistema composto AB descrito por $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Portanto, para todo par de estados totais $\rho_{AB}, \sigma_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ do sistema composto AB , a distância traço é monótona com relação ao descarte do subsistemas B . Em outras palavras, temos que*

$$\|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|_1 \geq \|\rho_A - \sigma_A\|_1 , \quad (3.43)$$

onde $\rho_A = \text{Tr}_B\{\rho_{AB}\}$ e $\sigma_A = \text{Tr}_B\{\sigma_{AB}\}$, e afirmação análoga vale para o descarte do subsistema A .

Demonstração. Uma vez que $\frac{1}{2}\|\rho_A - \sigma_A\|_1 = \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} \text{Tr}\{\Lambda(\rho_A - \sigma_A)\}$, nós podemos tomar um operador Λ_A que satisfaz tal maximização. Para isso, basta tomar a decomposição espectral do operador $\rho_A - \sigma_A$ e considerar Λ_A como sendo a projeção sob o auto-subespaço que corresponde aos auto-valores positivos. Dessa forma, temos que existe Λ_A positivo semi-definido cujos auto-valores são todos menores ou iguais a um e que satisfaz a igualdade

$$\frac{1}{2}\|\rho_A - \sigma_A\|_1 = \text{Tr}\{\Lambda_A(\rho_A - \sigma_A)\} , \quad (3.44)$$

onde este traço é considerado no espaço \mathcal{H}_A .

Dessa forma, temos que

$$\|\rho_A - \sigma_A\|_1 = 2 \text{Tr}_A\{\Lambda_A(\text{Tr}_B \rho_{AB} - \text{Tr}_B \sigma_{AB})\} \quad (3.45)$$

$$= 2 \text{Tr}_A \text{Tr}_B\{\Lambda_A \otimes \mathbb{1}_B(\rho_{AB} - \sigma_{AB})\} \quad (3.46)$$

$$= 2 \text{Tr}_{AB}\{\Lambda_A \otimes \mathbb{1}_B(\rho_{AB} - \sigma_{AB})\} , \quad (3.47)$$

onde usamos que $\text{Tr}_A \text{Tr}_B = \text{Tr}_{AB}$ é o traço sob o espaço do sistema composto AB .

Por fim, uma vez que o operador $\Lambda_A \otimes \mathbb{1}_B$ é positivo semi-definido e possui todos os auto-valores menores ou iguais a 1 no espaço total $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, nós temos (novamente devido ao Lema 11) que

$$2 \text{Tr}_{AB}\{\Lambda_A \otimes \mathbb{1}_B(\rho_{AB} - \sigma_{AB})\} \leq \|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|_1 , \quad (3.48)$$

e então podemos concluir que

$$\|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|_1 \geq \|\rho_A - \sigma_A\|_1 . \quad (3.49)$$

□

O resultado descrito pelo Lema 13 possui uma clara interpretação física. Uma vez que a distância $\|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|$ corresponde a uma medida de distinguibilidade de dois estados do sistema composto AB , o descarte do subsistema B (ou equivalentemente do subsistema A) corresponde a uma perda de informação no que diz respeito aos estados do sistema. Logo, a medida de distinguibilidade entre dois estados nunca pode aumentar quando parte do sistema é descartado, como retratado acima. Isto é, se descartamos parte do sistema, os estados tendem a ficar mais “parecidos” uma vez que as possíveis diferenças entre eles podem ter sido descartadas juntamente com o subsistema. Também podemos interpretar este resultado em termos de medições no sistema total. Ou seja, uma medição no sistema composto AB será apta a distinguir dois estados do sistema total melhor que qualquer outra medição executada em um dos subsistemas.

Tomando o Lema 12 juntamente com o Lema 13, nós podemos obter a seguinte importante propriedade desta medida de distinguibilidade.

Teorema 6 (Monotonicidade da Distância Traço com respeito a Canais Quânticos). *Seja \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B dois espaços de Hilbert e $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ um canal quântico. Então, para todo par de estados $\rho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$, nós temos que a distância traço é monótona com respeito a ação do canal quântico, ou seja*

$$\|\mathcal{N}(\rho) - \mathcal{N}(\sigma)\|_1 \leq \|\rho - \sigma\|_1 . \quad (3.50)$$

Demonstração. Pelo Teorema de Stinespring (7), para todo canal quântico \mathcal{N} existe uma isometria $V : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E)$ que descreve uma interação entre o sistema descrito por \mathcal{H}_A e um ambiente descrito por \mathcal{H}_E , e podemos escrever, para todo operador linear $X_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que

$$\mathcal{N}(X_A) = \text{Tr}_E\{V X_A V^\dagger\} . \quad (3.51)$$

Então, levando em conta a representação de Stinespring, nós temos que

$$\|\mathcal{N}(\rho) - \mathcal{N}(\sigma)\|_1 = \|\text{Tr}_E\{V \rho V^\dagger\} - \text{Tr}_E\{V \sigma V^\dagger\}\|_1 \quad (3.52)$$

$$\leq \|V \rho V^\dagger - V \sigma V^\dagger\|_1 = \|\rho - \sigma\|_1 , \quad (3.53)$$

onde a primeira desigualdade é devido ao Lema 13 e a última igualdade é devido ao Lema 12. \square

O Teorema 6 possui uma importante interpretação física. Uma evolução quântica \mathcal{N} faz dois estados físicos menos distinguíveis um do outro. Ou seja, o ruído tende a “borrar” os dois estados, fazendo com que eles se pareçam mais semelhantes do que antes da evolução. Como uma leiga analogia, imagine uma pessoa com problemas de visão e que necessita de um óculos para enxergar. Ela então ver duas pessoas com os seus óculos e, em seguida, olha novamente para elas sem os óculos. No segundo caso, as pessoas podem parecer mais semelhantes pois a má visibilidade pode impossibilitar que o observador perceba as características que distinguem entre as duas pessoas. No caso das evoluções quânticas, o ruído é o responsável por tornar os dois estados quânticos mais semelhantes.

Para finalizar esta discussão sobre a distância traço, vamos agora enunciar um importante teorema que relaciona esta medida de distinguibilidade com a probabilidade de distinção entre dois estados quânticos através de medições em um sistema.

Com efeito, considere um sistema descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} cujo estado é representado pelo operador densidade $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ com probabilidade q e $\rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ com probabilidade $1 - q$. Nosso objetivo é determinar o estado real através de uma medição no sistema. Considere então um POVM descrito pelos operadores $\{\Lambda_x\}_{x \in \mathcal{X}}$, onde \mathcal{X} é o conjunto de valores possíveis para um dado observável \hat{X} do sistema. Dessa forma, sendo A um subconjunto de \mathcal{X} , veja que nós podemos dividir \mathcal{X} em dois conjuntos complementares,

nomeadamente A e A^c onde $\mathcal{X} = A \cup A^c$. Se o resultado da medição pertencer ao subconjunto A , diremos que o estado do sistema é ρ_1 , e se pertencer ao complementar A^c , nós iremos dizer que o estado do sistema é ρ_2 . Veja então que o subconjunto A é introduzido de forma que os resultados $x \in A \subset \mathcal{X}$ da medição possam distinguir ρ_1 de ρ_2 . Podemos então definir um novo POVM com o par de operadores $\{T, \mathbb{1} - T\}$ onde $T \equiv \sum_{x \in A} \Lambda_x$.

Logo, quando o estado do sistema é ρ_1 (na qual ocorre com probabilidade q) nós erroneamente identificamos o estado do sistema como ρ_2 com probabilidade

$$\sum_{x \in A^c} \text{Tr}\{\rho_1 \Lambda_x\} = \text{Tr}\left\{\rho_1 \left(\sum_{x \in A^c} \Lambda_x\right)\right\} = \text{Tr}\{\rho_1(\mathbb{1} - T)\}. \quad (3.54)$$

Por outro lado, quando o estado é ρ_2 (que ocorre com probabilidade $1 - q$) a probabilidade de erroneamente identificar o estado ρ_1 é dada por

$$\sum_{x \in A} \text{Tr}\{\rho_2 \Lambda_x\} = \text{Tr}\left\{\rho_2 \left(\sum_{x \in A} \Lambda_x\right)\right\} = \text{Tr}\{\rho_2 T\}. \quad (3.55)$$

Logo, erraremos a identificação do estado do sistema se *o estado real é ρ_1 e identificamos o estado ρ_2* **ou** se *o estado real do sistema é ρ_2 e identificamos o estado ρ_1* . Dessa forma, temos o evento

$$\text{Erro} \equiv ((\rho = \rho_1) \wedge \text{identificamos } \rho_2) \vee ((\rho = \rho_2) \wedge \text{identificamos } \rho_1), \quad (3.56)$$

e calculando a probabilidade do erro⁷, nós temos que

$$\begin{aligned} p(\text{Erro}) &= p((\rho = \rho_1) \wedge \text{identificamos } \rho_2) \\ &+ p(((\rho = \rho_2) \wedge \text{identificamos } \rho_1)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} &= p(\rho = \rho_1)p(\text{identificamos } \rho_2 | \rho = \rho_1) \\ &+ p(\rho = \rho_2)p(\text{identificamos } \rho_1 | \rho = \rho_2), \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde nós temos que $p(\rho = \rho_1) = q$ e $p(\rho = \rho_2) = 1 - q$. Além disso, temos que $p(\text{identificamos } \rho_2 | \rho = \rho_1) = \text{Tr}\{\rho_1(\mathbb{1} - T)\}$ e $p(\text{identificamos } \rho_1 | \rho = \rho_2) = \text{Tr}\{\rho_2 T\}$. Por fim, denotando $p(\text{Erro}) = p_e(T)$, nós concluímos que a probabilidade de identificar erroneamente o estado do sistema através de uma medição do POVM $\{T, \mathbb{1} - T\}$ é dada por

$$p_e(T) = q\text{Tr}\{\rho_1(\mathbb{1} - T)\} + (1 - q)\text{Tr}\{\rho_2 T\}. \quad (3.59)$$

⁷ Note que nós estamos supondo independência estatística na forma de identificar os dois estados.

Por fim, vamos agora adicionar a seguinte pergunta: qual é a melhor escolha de POVM $\{T, \mathbb{1} - T\}$ que minimiza a probabilidade de erro? Ou seja, qual é o operador T que minimiza $p_e(T)$? Dessa forma, buscamos resolver a minimização $p_e^{\min} \equiv \min_{0 \leq T \leq \mathbb{1}} p_e(T)$, ou seja

$$p_e^{\min} = \min_{0 \leq T \leq \mathbb{1}} [q \operatorname{Tr}\{\rho_1(\mathbb{1} - T)\} + (1 - q) \operatorname{Tr}\{\rho_2 T\}] \quad (3.60)$$

$$= \min_{0 \leq T \leq \mathbb{1}} [q + \operatorname{Tr}\{(1 - q)\rho_2 T - q\rho_1 T\}] \quad (3.61)$$

$$= q - \max_{0 \leq T \leq \mathbb{1}} [\operatorname{Tr}(T\Delta)] , \quad (3.62)$$

onde $\Delta \equiv q\rho_1 - (1 - q)\rho_2$ é um operador hermitiano conhecido como *matriz de Helstrom*. Portanto, precisamos resolver o problema de maximização introduzido acima. Tal solução é dada em termos da distância traço no seguinte teorema.

Teorema 7 (Distinguibilidade de Estados e Distância Traço). *A menor probabilidade de erro, p_e^{\min} , na distinção de dois estados, tal como descrito acima, é proporcional a distância traço entre $q\rho_1$ e $(1 - q)\rho_2$. Nomeadamente nós podemos escrever*

$$p_e^{\min} = \min_{0 \leq T \leq \mathbb{1}} [q \operatorname{Tr}\{\rho_1(\mathbb{1} - T)\} + (1 - q) \operatorname{Tr}\{\rho_2 T\}] \quad (3.63)$$

$$= \frac{1 - \|\Delta\|_1}{2} , \quad (3.64)$$

onde $\Delta \equiv q\rho_1 - (1 - q)\rho_2$ é a matriz de Helstrom.

Observe que se $q \in \{0, 1\}$, nós obtemos $p_e^{\min} = 0$, correspondendo ao caso de total certeza sobre o estado preparado.

Demonstração. Para uma prova detalhada, o leitor é convidado a consultar a referência (11). □

Para concluir, vamos então ilustrar os principais pontos discutidos nessa subseção. O nosso objetivo foi de ilustrar as “boas” propriedades que uma medida de distinguibilidade de estados quânticos necessita satisfazer. Vimos que a distância traço é invariante por transformações unitárias (Lema 12), caracterizando assim uma invariância de tal medida de distinguibilidade sob a ação de evoluções quânticas ideais (não ruidosas). Além disso, vimos no Lema 13 que tal medida é monotona sob o descarte de subsistemas, refletindo assim a perda de informação que é causada quando parte do sistema é desconsiderado. Também, o Teorema 6 fornece o caso geral onde o ruído é introduzido na evolução do sistema, e neste caso o ruído nunca pode aumentar a distinguibilidade de dois estados. Finalmente, vimos através do Teorema 7 que a distância traço é relacionada com a probabilidade de distinguir

dois estados quânticos através de uma medição em um observável do sistema. Este conjunto de propriedades faz a distância traço uma excelente medida de distinguibilidade de estados quânticos.

A seguir, iremos discutir a norma de Hilbert-Schmidt e a distância induzida por tal norma, além de esboçar algumas propriedades fundamentais desta medida.

3.3.3 Norma de Hilbert-Schmidt (L_2)

Vamos agora introduzir a norma Schatten correspondente ao caso $\alpha = 2$, que será denotada por $\|\bullet\|_2$. Neste caso, nós temos que

$$\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}\{X^\dagger X\}}, \quad (3.65)$$

para todo operador linear X . Esta norma também é conhecida como *norma de Hilbert-Schmidt* pois ela pode também ser induzida pelo produto interno $\langle \bullet, \star \rangle : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\langle X, Y \rangle_{hs} \equiv \text{Tr}\{X^\dagger Y\}, \quad (3.66)$$

para todo par de operadores lineares $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que é conhecido como *produto interno de Hilbert-Schmidt*. Facilmente vemos que $\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}\{X^\dagger X\}} = \sqrt{\langle X, X \rangle_{hs}}$. Além disso, a norma Schatten com $\alpha = 2$ também é conhecida como norma L_2 , pois devido ao Lema 6 nós temos que

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^r s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.67)$$

onde $r = \text{rank}(X)$ e $\{s_i\}_{i=1}^r$ é o seu conjunto de valores singulares. Dessa forma, a norma Schatten $\|X\|_2$ pode ser interpretada como a norma L_2 definida no espaço Euclidiano \mathbb{R}^r dos valores singulares de um operador linear X .

Além disso, sendo um caso particular de uma norma Schatten, a norma de Hilbert-Schmidt satisfaz os axiomas dados pela Definição 20. Também podemos definir uma distância no espaço de operadores induzida por tal norma, nomeadamente

$$d_{hs}(M, N) \equiv \|M - N\|_2, \quad (3.68)$$

para todo par de operadores lineares $M, N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Similarmente, a função definida na Eq.(3.68) satisfaz os axiomas de uma métrica (Definição 23) e o par $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), d_{hs})$ pode ser visto como um espaço métrico.

A métrica d_{hs} se demonstra muito útil na demonstração de diversos teoremas na teoria da informação quântica, pois é muito comum encontrar boas relações de desigualdade induzidas pela desigualdade de Cauchy-Schwarz satisfeita pelo produto interno de

Hilbert-Schmidt. Além disso, estas relações podem ser estendidas para a distância traço relacionando a norma L_2 com a norma L_1 . Por exemplo, podemos mencionar o seguinte resultado.

Lema 14. *Para todo operador linear X , nós temos que*

$$\|X\|_1^2 \leq r \|X\|_2^2, \quad (3.69)$$

onde $r = \text{rank}(X)$.

Demonstração. Sabemos que $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^r s_i$ e que $\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^r s_i^2$, onde s_i com $i = 1, \dots, r$ representam os valores singulares de X .

Definimos um vetor $\vec{s} \equiv (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$, logo temos que $\|X\|_1 = \vec{s} \cdot (1, 1, \dots, 1)$ com $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço \mathbb{R}^r , nós temos

$$\|X\|_1 = |\vec{s} \cdot (1, \dots, 1)| \leq \|\vec{s}\|_2 \|(1, \dots, 1)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^r s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{r} = \|X\|_2 \sqrt{r}, \quad (3.70)$$

portanto $\|X\|_1^2 \leq \|X\|_2^2 r$. □

Embora a norma de Hilbert-Schmidt forneça uma métrica no espaço de operadores lineares, esta distância não satisfaz algumas propriedades esperadas para uma adequada medida de distinguibilidade de estados quânticos. Nomeadamente, a distância induzida pela norma L_2 , d_{hs} , não é monótona com relação a aplicação de um canal quântico, diferentemente da distância traço (Teorema 6). Logo, é necessário ter cuidado nas interpretações físicas da distância d_{hs} quando estamos trabalhando com o espaço métrico $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), d_{hs})$.

Como um exemplo da não monotonicidade para a distância d_{hs} , considere dois espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 bidimensionais, cada um com uma base operacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Considere os operadores

$$A = |01\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 10|, \quad (3.71)$$

$$B = |01\rangle \langle 01| + |11\rangle \langle 11|, \quad (3.72)$$

e defina o mapeamento \mathcal{N} escrito por

$$\mathcal{N}(\omega) \equiv A\omega A^\dagger + B\omega B^\dagger. \quad (3.73)$$

É fácil mostrar que tal mapeamento é um canal quântico mostrando que esta decomposição é uma autêntica decomposição de Choi-Kraus. Além disso, considerando os estados $\rho = |0\rangle \langle 0| \otimes \pi$ e $\sigma = |1\rangle \langle 1| \otimes \pi$ com $\pi = \mathbb{1}_2/2$ representando o estado de máxima mistura, nós podemos mostrar que

$$\|\rho - \sigma\|_2 < \|\mathcal{N}(\rho) - \mathcal{N}(\sigma)\|_2 . \quad (3.74)$$

Por outro lado, considere os estados $\chi = |0\rangle\langle 0|$ e $\phi = |1\rangle\langle 1|$. Definimos o novo mapeamento $\mathcal{M}(\omega) \equiv \frac{1}{2}(\omega + \sigma_x \omega \sigma_x)$, onde σ_x é a matriz de Pauli. É fácil mostrar que este mapeamento também é um canal quântico, e neste caso nós temos que

$$\|\chi - \phi\|_2 > \|\mathcal{M}(\chi) - \mathcal{M}(\phi)\|_2 . \quad (3.75)$$

Dessa forma, a distância de Hilbert-Schmidt não é, em geral, monótona com relação a evoluções quânticas. Portanto, é recomendado ter atenção ao usar tal distância no espaço de estados de um dado sistema quântico.

Nem todas as medidas de distinguibilidade são induzidas por normas. Uma medida muito utilizada em problemas de informação quântica é conhecida por *fidelidade*. A fidelidade possui todas as “boas” propriedades que uma medida de distinguibilidade de estados quânticos necessita satisfazer, tal como a distância traço. Além disso, podemos relacionar a distância traço com a fidelidade. Para mais informações sobre medidas de distinguibilidade, o leitor é indicado a consultar as referências (5, 7).

No próximo capítulo, nós iremos aplicar estas medidas de distinguibilidade com o objetivo de definir os chamados *limites quânticos de velocidade*, ou em inglês *quantum speed limits (QSL)*.

4 LIMITES QUÂNTICOS DE VELOCIDADE

Neste capítulo, iniciaremos os estudos dos *limites quânticos de velocidade*, ou em inglês *quantum speed limits*. Usaremos a abreviação QSL para designar tais quantificadores. Iremos ver como que as medidas de distinguibilidade introduzidas no capítulo anterior podem gerar os QSL. Além disso, vamos explorar diversos exemplos que podem ser encontrados na literatura. Por fim, um dos principais resultados deste trabalho foi o desenvolvimento de dois novos quantificadores de QSL, e iremos abordar tal problema nos próximos capítulos. Logo, utilizaremos este espaço para introduzir os principais conceitos que serão necessários em breve.

4.1 Definições e Noções Gerais

Os limites quânticos de velocidade são de interesse fundamental e são explorados em diversos ramos da Física, indo de sistemas de muitos corpos (15, 16) até termodinâmica quântica (12–14) e incluindo também trabalhos em comunicação e computação quântica (18, 19), metrologia quântica (17), aplicações de emaranhamento quântico (20, 21), otimização de sistemas quânticos (24, 25), baterias quânticas (26) e sistemas não hermitianos (27, 28). Desenvolvimentos recentes também incluem investigação experimental dos limites quânticos de velocidade em plataformas de íons aprisionados (29) e também ressonância magnética nuclear (30, 31).

Veremos a seguir que o tempo é o objeto central nos limites quânticos de velocidade, e há uma vasta discussão na literatura no que diz respeito ao papel do tempo na teoria quântica. Entretanto, não é o intuito deste trabalho adentrar em tais questões fundamentais. Além disso, vale destacar que não iremos lidar com problemas relativísticos e iremos supor que os desenvolvimentos tomados daqui em diante são aplicados a sistemas cuja escala de energia atendem a teoria quântica não relativística tradicional.

Dessa forma, o tempo será interpretado como um parâmetro que irá fornecer o estado de um sistema devido a uma evolução dinâmica, ou mais precisamente, será um parâmetro na equação de Schrödinger e poderá ser medido por um relógio usual. Logo, todo sistema físico poderá ser descrito em um referencial inercial tridimensional pelas coordenadas espaciais (x, y, z) e por uma coordenada temporal t , e este conjunto de quatro parâmetros irá definir as equações de movimento dos elementos do sistema. As medições de tempo podem ser definidas e medidas a partir da evolução de sistemas físicos, como por exemplo, a trajetória de uma partícula livre ou também o período de transição de partículas em relógios atômicos.

Matematicamente, como discutido no Capítulo 2, uma evolução dinâmica de um

sistema físico pode ser interpretada como um canal quântico Λ_{t,t_0} . Este mapeamento é responsável por fornecer um estado dinâmico $\rho(t)$ a partir de um dado estado inicial $\rho(t_0)$. Nomeadamente, o tempo t será considerado um número real não negativo que pertence ao intervalo $[t_0, \infty)$, onde¹ $t_0 \geq 0$. Dessa forma, o parâmetro tempo t indexa uma família de canais quânticos $\{\Lambda_{t,t_0}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ e tal família irá fornecer toda a dinâmica do sistema descrita pelo estado dinâmico $\rho(t) = \Lambda_{t,t_0}(\rho(t_0))$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.

É comum iniciar o estudo dos limites quânticos de velocidade com uma abordagem histórica, que passa pelo princípio da incerteza de Heisenberg para energia e tempo. Em seguida, são introduzidas algumas interpretações do tempo na teoria quântica, até que finalmente a noção de um limite quântico de velocidade é apresentada. Para tal abordagem, o leitor poderá encontrar uma excelente discussão nas referências (32,33). No que segue, iremos definir um limite quântico de velocidade sob uma ótica mais axiomática, e iremos discutir as dependências que tais quantificadores possuem.

Com efeito, vamos iniciar nossa discussão com a seguinte pergunta: *o que é um limite quântico de velocidade?*

Definição 27 (Limite Quântico de Velocidade - QSL). *Um limite quântico de velocidade (em inglês, quantum speed limit - QSL) é um limite inferior no tempo de evolução entre dois estados quânticos. Mais precisamente, seja $\rho(t_0)$ um estado inicial e $\rho(\tau)$ um estado final correspondentes a uma dada evolução dinâmica. Então para todo tempo de evolução τ , nós temos que*

$$\tau \geq \tau_{QSL} , \quad (4.1)$$

onde τ_{QSL} denota um quantificador de limite quântico de velocidade.

A Fig. 1 nos fornece uma visão geométrica do limite quântico de velocidade. Suponha um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} com dimensão $d = \dim(\mathcal{H})$. Logo, o espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ será representado por um espaço n -dimensional com $n = d^2$. Por exemplo, para um sistema de dois níveis (q-bit), temos que $d = 2$ e os operadores densidade são descrito por matrizes de quatro elementos, enquanto que para um q-trit ($d = 3$) os operadores densidade possuem nove elementos, e assim por diante. De forma geral, um q-dit ($d = \dim(\mathcal{H})$) é representado por estados ρ com d^2 elementos.

Agora, suponha que $\rho_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ representa o estado inicial do sistema², e que a evolução dinâmica é dada em termos de um mapa dinâmico Λ_{t,t_0} para todo $t \geq 0$. Dessa forma, a evolução dinâmica pode ser interpretada como uma curva parametrizada no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, onde tal curva é definida em termos do estado dinâmico $\rho_t = \rho(t) =$

¹ Sem perda de generalidade, sempre podemos considerar $t_0 \geq 0$ ou até mesmo “zerar” nossos cronômetros em t_0 , isto é, considerar $t_0 = 0$.

² Neste caso, estamos tomando $t_0 = 0$.

$\Lambda_{t,0}(\rho_0)$ para todo $t \geq 0$, onde o tempo é a própria variável de parametrização. Agora, considere um estado final ρ_τ para algum instante $\tau > 0$. Então, dado um quantificador de limite quântico de velocidade τ_{QSL} , temos que

$$\tau \geq \tau_{QSL} , \quad (4.2)$$

para todo tempo de evolução τ entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ .

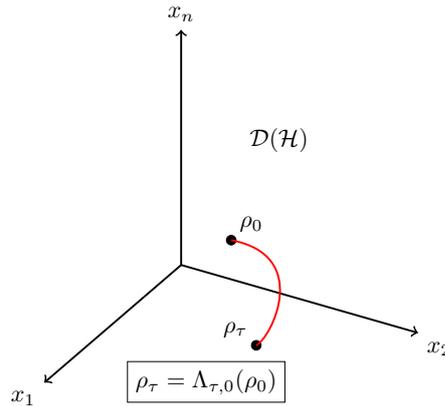


Figura 1 – Evolução dinâmica no espaço de estados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que a Definição 27 nos explica o que é um limite quântico de velocidade, podemos agora nos perguntar: *como tais desigualdades são estabelecidas?* Em geral, existem diversas formas de definir um limite temporal inferior, nomeadamente um quantificador de QSL.

Podemos partir de desigualdades matemáticas definidas em um espaço de estados normado, tal como a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço de operadores. Por exemplo, iremos utilizar a desigualdade de Holder para definir um novo quantificador de QSL nos próximos capítulos. Além disso, diferentes medidas de distinguibilidade adotadas no espaço de estado podem produzir diferentes quantificadores de QSL, e vale a pena mencionar que a relação entre diferentes QSLs não é trivial e abordaremos esse problema em breve. Outra abordagem é a *abordagem geométrica*, onde o “caminho ótimo” no espaço de estados é a geodésica³ entre o estado inicial e o estado final. Também iremos explorar estas ideias para definir um novo limite quântico de velocidade.

Por fim, a dinâmica do sistema também possui um papel importante no QSL. Por exemplo, para um sistema quântico fechado, teremos a equação de von Neumann para o

³ Por definição, dado um espaço métrico, a geodésica entre dois pontos é o caminho que minimiza a distância entre eles. Note que para um espaço Euclídeo, a geodésica é a própria reta que une os dois pontos em questão. Entretanto, isso não é mais verdade quando estamos lidando com espaços que possuem curvaturas.

operador densidade. Para um sistema quântico aberto, teríamos um mapa dinâmico, ou até mesmo uma equação mestra, que irá descrever a evolução do sistema quântico. Logo, o quantificador de QSL também depende dos elementos do modelo físico adotado e do tipo da dinâmica que descreve sua evolução.

Finalmente, como mencionado anteriormente, uma aplicação imediata deste formalismo pode ser realizada no contexto da teoria de otimização de sistemas quânticos, onde o objetivo principal é evoluir de um estado inicial para um estado final no menor tempo possível. Isto é, obter a “melhor dinâmica possível” com o objetivo de saturar tais desigualdades temporais, como veremos a seguir.

A próxima questão que iremos abordar é: *qual é o “melhor” caminho dinâmico entre um dado estado inicial para um estado final no espaço de estados?* Mais precisamente, suponha que você tenha um estado inicial ρ_0 no instante $t = 0$ e um estado final ρ_τ no instante $t = \tau$, e esses dois estados estejam conectados por um caminho dinâmico. Qual é o melhor caminho entre eles? A resposta é dada em termos da próxima definição.

Definição 28 (Tightness e Dinâmicas Ótimas). *Quando o tempo de evolução é igual a um determinado QSL, $\tau = \tau_{QSL}$, o caminho dinâmico é denominado *tight*, e será considerado o melhor caminho dinâmico (ou o caminho dinâmico “mais rápido”) entre ρ_0 e ρ_τ .*

Em outras palavras, dado um quantificador de QSL, τ_{QSL} , uma evolução física partindo de um estado inicial ρ_0 e tendo como estado final ρ_τ é dita ótima, ou *tight*, se $\tau = \tau_{QSL}$. Vale a pena ressaltar que é importante compreender as condições necessárias e suficientes para que uma evolução física seja *tight*. Estas condições são impostas sob o mapa dinâmico que descreve a evolução física, com o objetivo de saturar as desigualdades temporais definidas por um QSL (Definição 27), obtendo assim uma evolução ótima entre um estado inicial e o estado final.

Neste trabalho, iremos desenvolver dois novos limites quânticos de velocidade e estudaremos as condições necessárias e suficientes para obter dinâmicas *tight* de acordo com estes quantificadores. Antes disso, iremos fazer uma breve revisão de outros limites quânticos de velocidade que podem ser encontrados na literatura. Iremos abordar o desenvolvimento técnico de dois casos, nomeadamente o caso de evoluções unitárias e não-unitárias. O objetivo será ressaltar as ideias centrais que estão envolvidas no desenvolvimento de tais desigualdades temporais.

4.2 Mandelstam-Tamm (MT) e Evoluções Unitárias

Inicialmente, vamos discutir o limite quântico de velocidades desenvolvido por Mandelstam e Tamm (34) para sistemas quânticos ideais (evoluções unitárias). Vamos considerar um sistema quântico fechado descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} e com um Hamiltoniano H . No instante inicial $t_0 = 0$ o estado do sistema é $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$, e a evolução

é dada por um operador unitário $U_t = \exp\{(-itH/\hbar)\}$ de tal forma que no instante t o estado do sistema será $|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle = \exp\{(-itH/\hbar)\} |\psi_0\rangle$.

Seja A um observável do sistema que é independente do tempo. Logo, nós sabemos que (36) o produto da incerteza do Hamiltoniano (σ_H) com a incerteza de A (σ_A) satisfaz a relação

$$\sigma_H \sigma_A \geq \frac{1}{2} |\langle [H, A] \rangle|, \quad (4.3)$$

onde $[H, A] = HA - AH$ representa o comutador e $\langle A \rangle \equiv \langle \psi_t | A | \psi_t \rangle$ representa a média de um observável A no estado $|\psi_t\rangle$. Nós também temos que a variância de um observável A é dada por $\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$. Além disso, veja que a média e a variância de H é independente do tempo, uma vez que nós temos

$$\langle \psi_t | H | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | U^\dagger H U | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle. \quad (4.4)$$

Considerando o teorema de Ehrenfest, o valor médio do comutador dos observáveis H e A evolui temporalmente de acordo com a equação

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle, \quad (4.5)$$

e aplicando isto na Eq.(4.4), nós temos que

$$\sigma_H \sigma_A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d}{dt} \langle A \rangle \right|. \quad (4.6)$$

Considere agora que o observável A é o projetor sob o estado inicial $|\psi_0\rangle$, ou seja $A = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$. Logo, vemos facilmente que $A^2 = A$ e portanto $\sigma_A = \sqrt{\langle A \rangle + \langle A \rangle^2}$, e neste caso nós podemos escrever

$$\sigma_H \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d \langle A \rangle / dt}{\sqrt{\langle A \rangle + \langle A \rangle^2}} \right| = \hbar \left| \frac{d}{dt} \arccos(|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|) \right|, \quad (4.7)$$

onde usamos que $\langle A \rangle = |\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$. Agora, podemos integrar tal desigualdade no intervalo $t \in [0, \tau]$,

$$\int_0^\tau dt \sigma_H \geq \hbar \int_0^\tau dt \left| \frac{d}{dt} \arccos(|\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|) \right|, \quad (4.8)$$

e usando que $\int_a^b dx |f(x)| \geq \left| \int_a^b dx f(x) \right|$ e que σ_H é independente do tempo, nós temos que

$$\tau \sigma_H \geq \hbar \arccos(|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|). \quad (4.9)$$

Portanto, para uma evolução unitária descrita por uma Hamiltoniana H , considerando um estado inicial $|\psi_0\rangle$ e um estado final $|\psi_\tau\rangle$, nós temos que todo tempo de evolução $\tau > 0$ satisfaz a desigualdade

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\sigma_H} \arccos (|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) , \quad (4.10)$$

onde $\sigma_H = \sqrt{\langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2}$ é a variância da Hamiltoniana. Portanto, o limite quântico de velocidades desenvolvido por Mandelstam e Tamm, denotado por τ_{QSL}^{MT} , é definido por

$$\tau_{QSL}^{MT} \equiv \frac{\hbar}{\sigma_H} \arccos (|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) . \quad (4.11)$$

Veja que, no caso particular onde o estado final é ortogonal ao estado inicial, nós temos que $\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle = 0$, logo $\arccos (|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) = \pi/2$, e portanto a Eq.(4.11) pode ser escrita como

$$\tau_{QSL}^{MT} = \frac{\hbar\pi}{2\sigma_H} . \quad (4.12)$$

Portanto, a Eq.(4.11) define um limite quântico de velocidades para evoluções unitárias gerais descritas por uma Hamiltoniana H . Observe que no caso onde $\sigma_H \rightarrow \infty$, obtemos a desigualdade trivial $\tau \geq 0$ para todo tempo de evolução τ . Entretanto, no caso onde $\sigma_H \rightarrow 0$, nós temos necessariamente que $\tau \rightarrow \infty$, ou seja, o estado final nunca será atingido (ou melhor, é necessário um tempo infinito para que este seja obtido).

Também vale ressaltar que a desigualdade que induziu este quantificador foi dada pela relação de incerteza entre os observáveis A e H , nomeadamente a Eq.(4.4). Além disso, a dinâmica unitária entra ao utilizarmos o teorema de Ehrenfest, que se baseia na equação de Schrödinger. Por fim, vimos que a medida de distinguibilidade utilizada neste caso corresponde ao arco cosseno do módulo do produto interno entre o estado inicial e final. De fato, uma vez que estamos lidando com estados puros, estes estados estão na superfície do espaço de Bloch, logo o produto interno fornece uma medida de posição relativa entre eles. É possível mostrar que

$$d(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \arccos (|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) \quad (4.13)$$

é uma autêntica métrica no chamado *espaço projetivo complexo* (37, 38).

A seguir, iremos introduzir mais um limite quântico de velocidade que é válido para dinâmicas não unitárias.

4.3 Deffner-Lutz (DL) e Evoluções não-Unitárias

Vamos então prosseguir com a demonstração do limite quântico de velocidade desenvolvido por Sebastian Deffner e Eric Lutz (35) para dinâmicas de sistemas quânticos gerais.

Considere um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} e vamos buscar pelo menor tempo de evolução entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ com $\tau > 0$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que o estado inicial é puro, isto é, $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ para algum estado $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$. O caso de um estado inicial misto pode ser tratado através de purificações em um espaço de Hilbert suficientemente maior (39). Vale ressaltar que para dinâmicas não unitárias, por mais que o estado inicial ρ_0 seja considerado puro, o estado final ρ_τ pode ser misto, ou seja, $\text{Tr}\{\rho_\tau^2\} < 1$.

A medida de distinguibilidade utilizada neste caso é conhecida por *ângulo de Bures*, denotada por D_B , e é definida por

$$D_B(\rho_0, \rho_\tau) \equiv \arccos \left[\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right) \right], \quad (4.14)$$

para todo par de estados $\rho_0, \rho_\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Entretanto, considerando um estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ e um estado final ρ_τ geral, nós podemos desenvolver a Eq.(4.14) e concluir que

$$D_B(\rho_0, \rho_\tau) = \arccos \left(\sqrt{\langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle} \right). \quad (4.15)$$

Inicialmente, para obter o limite quântico de velocidade desejado, vamos calcular a velocidade de evolução do sistema, definida por $dD_B(\rho_0, \rho_\tau)/dt$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_B(\rho_0, \rho_\tau) &\leq \left| \frac{d}{dt} D_B(\rho_0, \rho_\tau) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle}} \frac{|\langle\psi_0|d_t\rho_\tau|\psi_0\rangle|}{2\sqrt{\langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $d_t \equiv d/dt$ representa a derivada temporal total. Por fim, aplicando a definição para o ângulo de Bures com um estado inicial puro, Eq.(4.15), nós temos que a Eq.(4.16) pode ser dada por

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq |\langle\psi_0|d_t\rho_\tau|\psi_0\rangle|. \quad (4.17)$$

A desigualdade dada pela Eq.(4.17) será nosso ponto de partida para a obtenção do limite quântico de velocidades desenvolvido por Deffner e Lutz, denotado por τ_{QSL}^{DL} . Além disso, a desigualdade de von Neumann⁴ (40) irá desempenhar um papel importante no que segue. Esta desigualdade é dada por

⁴ em inglês, von Neumann trace inequality.

$$|\mathrm{Tr}\{A_1 A_2\}| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_{1,i} \sigma_{2,i} , \quad (4.18)$$

que vale para todo par A_1, A_2 de matrizes $n \times n$ complexas com valores singulares descendentes $\sigma_{j,1} \geq \sigma_{j,2} \geq \dots \geq \sigma_{j,n}$ sendo $\sigma_{j,i}$ o valor singular da matriz A_j , com $j = 1, 2$. Além disso, também iremos utilizar a desigualdade de Cauchy–Schwarz, nomeadamente definida por

$$|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 , \quad (4.19)$$

que vale para todo par X, Y de operadores lineares, onde $\|\bullet\|_2$ designa a 2–norma Schatten (norma de Hilbert-Schmidt).

Vamos agora brevemente ilustrar o caso particular de um sistema quântico sob evolução unitária.

4.3.1 DL QSL para dinâmicas unitárias

Embora o nosso foco nesta seção seja ilustrar um limite quântico de velocidade para dinâmicas não unitárias, nós vamos agora brevemente mencionar o caso particular de uma dinâmica unitária.

Neste caso, considere que o sistema quântico fechado possui sua dinâmica descrita por uma Hamiltoniana H_t que pode possuir uma dependência temporal. Logo, a equação mestra local no tempo para o operador densidade é representada pela equação de von Neumann, nomeadamente

$$d_t \rho_t = \frac{1}{i\hbar} [H_t, \rho_t] . \quad (4.20)$$

Aplicando a Eq.(4.20) na desigualdade dada pela Eq.(4.17), nós temos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \frac{1}{\hbar} |\langle \psi_0 | [H_t, \rho_t] | \psi_0 \rangle| , \quad (4.21)$$

e aplicando a desigualdade triangular no módulo, nomeadamente $|\langle \psi_0 | [H_t, \rho_t] | \psi_0 \rangle| \leq |\langle \psi_0 | H_t \rho_t | \psi_0 \rangle| + |\langle \psi_0 | \rho_t H_t | \psi_0 \rangle|$ e denotando $\langle \psi_0 | H_t \rho_t | \psi_0 \rangle = \mathrm{Tr}\{H_t \rho_t \rho_0\}$ uma vez que estamos considerando o estado inicial puro $\rho = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$, nós concluímos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \frac{1}{\hbar} (|\mathrm{Tr}\{H_t \rho_t \rho_0\}| + |\mathrm{Tr}\{\rho_t H_t \rho_0\}|) . \quad (4.22)$$

Por fim, lembre que para todo operador linear A , temos que A e A^\dagger possuem os mesmos valores singulares, como discutido na Seção 3.1. Aplicando a desigualdade de von Neumann, Eq.(4.18), na equação acima, considerando $A = \rho_t H_t$ e notando que $A^\dagger = H_t \rho_t$ possui os

mesmos valores singulares que A , podemos escrever

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \frac{2}{\hbar} \sum_i \sigma_i \delta_{i,1} = \frac{2}{\hbar} \sigma_1 = \frac{2}{\hbar} \sigma_{\max} , \quad (4.23)$$

onde σ_i são os valores singulares de $A = \rho_t H_t$ e A^\dagger , σ_{\max} denota o maior valor singular, enquanto que $\delta_{1,i}$ denota um delta de Kronecker que representa os valores singulares do estado puro ρ_0 . Como vimos no capítulo anterior, a norma operador de uma dada matriz é igual ao seu maior valor singular, enquanto que a norma traço é igual a soma dos valores singulares. Como uma consequência desse fato, temos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \frac{2}{\hbar} \|(H_t \rho_t)\|_{op} \leq \frac{2}{\hbar} \|(H_t \rho_t)\|_{tr} , \quad (4.24)$$

onde $\|\bullet\|_{op} \equiv \|\bullet\|_\infty$. Adicionalmente, note que a norma traço se relaciona com o valor esperado de energia, nomeadamente

$$\|(H_t \rho_t)\|_{tr} = \text{Tr}\{|H_t \rho_t|\} = \langle H_t \rangle , \quad (4.25)$$

que ocorre quando os auto-valores instantâneos de H_t são todos positivos⁵. Por fim, integrando a última desigualdade no intervalo $t \in [0, \tau]$ e utilizando que $\int_a^b dx |f(x)| \geq |\int_a^b dx f(x)|$, tal como no caso do MT QSL, nós concluímos que

$$\tau \geq \frac{\hbar}{2E_\tau} \sin^2(D_B(\rho_0, \rho_\tau)) , \quad (4.26)$$

onde $E_\tau = (1/\tau) \int_0^\tau dt \langle H_t \rangle$ representa a energia média do sistema no intervalo $[0, \tau]$.

Portanto, a Eq.(4.26) define um limite quântico de velocidades para dinâmicas unitárias, semelhante ao QSL do Mandelstam e Tamm definido na Eq.(4.11). Vamos agora generalizar este desenvolvimento considerando uma dinâmica geral, não necessariamente unitária.

4.3.2 DL QSL para dinâmicas gerais

Nosso ponto de partida será novamente a Eq.(4.17), nomeadamente

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq |\langle \psi_0 | d_t \rho_t | \psi_0 \rangle| . \quad (4.27)$$

Podemos escrever $|\langle \psi_0 | d_t \rho_t | \psi_0 \rangle| = |\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\}|$, onde $\rho_0 = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ denota o nosso estado inicial puro. Vamos supor que a derivada temporal é bem definida em um dado intervalo $(0, \tau)$ com $\tau > 0$. Em outras palavras, pela interpretação geométrica descrita anteriormente (Fig. 1), nós estamos supondo que a dinâmica do sistema é dada em termos de um caminho contínuo e suave no espaço de estados de tal forma que a derivada $d_t \rho_t$ está bem definida em todos os pontos do intervalo $(0, \tau)$.

⁵ Podemos satisfazer esta condição tomando uma escolha adequada do zero de energia.

Dessa forma, nós temos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq |\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\}| , \quad (4.28)$$

e aplicando novamente a desigualdade de von Neumann (Eq.(4.18)), nós temos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \sum_i \delta_{i,1} \lambda_i = \lambda_1 , \quad (4.29)$$

onde λ_i representa os valores singulares do operador $d_t \rho_t$ de tal forma que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, e $\delta_{i,1}$ corresponde aos valores singulares do estado inicial puro ρ_0 . Logo, similarmente ao caso unitário, uma vez que $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ é o maior valor singular do operador $d_t \rho_t$, nós obtemos que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \|d_t \rho_t\|_{op} \leq \|d_t \rho_t\|_{tr} . \quad (4.30)$$

Integrando esta equação no intervalo $[0, \tau]$, nós obtemos que

$$\tau \geq \max \left\{ \frac{1}{\Lambda_\tau^{\text{op}}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{\text{tr}}} \right\} \sin^2(D_B(\rho_0, \rho_\tau)) , \quad (4.31)$$

onde nós definimos

$$\Lambda_\tau^{\text{op, tr}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \left\| \frac{d}{dt} \rho_t \right\|_{\text{op, tr}} , \quad (4.32)$$

sendo o comprimento médio do caminho dinâmico no espaço de estados calculado com a norma traço ou com a norma operador.

Por fim, nós podemos obter mais uma desigualdade temporal utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Eq.(4.19). Partindo da equação

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq |\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\}| , \quad (4.33)$$

e notando que $\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\} = \text{Tr}\{\rho_0^\dagger d_t \rho_t\} = \langle \rho_0, d_t \rho_t \rangle_{hs}$ é o produto interno de Hilbert-Schmidt, nós podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtendo

$$|\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\}| \leq \|d_t \rho\|_2 \|\rho_0\|_2 \quad (4.34)$$

$$= \|d_t \rho\|_2 \sqrt{\text{Tr}\{\rho_0^2\}} \quad (4.35)$$

$$= \|d_t \rho\|_2 , \quad (4.36)$$

pois ρ_0 é um estado puro, e temos então que $|\text{Tr}\{\rho_0 d_t \rho_t\}| \leq \|d_t \rho\|_2$. Portanto, nós podemos escrever que

$$2 \cos(D_B) \sin(D_B) d_t D_B \leq \|d_t \rho_t\|_{hs} , \quad (4.37)$$

onde $\|\bullet\|_{hs} \equiv \|\bullet\|_2$. Integrando novamente no intervalo $[0, \tau]$, nós temos

$$\tau \geq \frac{1}{\Lambda_\tau^{hs}} \sin^2(D_B(\rho_0, \rho_\tau)). \quad (4.38)$$

Finalmente, podemos agrupar a Eq.(4.31) e Eq.(4.38) em uma única desigualdade, nomeadamente

$$\tau \geq \max \left\{ \frac{1}{\Lambda_\tau^{op}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{tr}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{hs}} \right\} \sin^2(D_B(\rho_0, \rho_\tau)), \quad (4.39)$$

e o Deffner-Lutz (DL) QSL é definido por

$$\tau_{QSL}^{DL} = \max \left\{ \frac{1}{\Lambda_\tau^{op}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{tr}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{hs}} \right\} \sin^2(D_B(\rho_0, \rho_\tau)). \quad (4.40)$$

Entretanto, nós podemos facilmente resolver o problema de maximização. Para todo operador linear A , é válida a seguintes desigualdades (veja a referência (41), Teorema 1.16)

$$\|A\|_{op} \leq \|A\|_{hs} \leq \|A\|_{tr}, \quad (4.41)$$

logo nós temos que

$$\max \left\{ \frac{1}{\Lambda_\tau^{op}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{tr}}, \frac{1}{\Lambda_\tau^{hs}} \right\} = \frac{1}{\Lambda_\tau^{op}}. \quad (4.42)$$

Vamos agora sumarizar os resultados desenvolvidos até este ponto. Considerando a medida de distinguibilidade

$$D_B(\rho_0, \rho_\tau) \equiv \arccos \left[\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right) \right], \quad (4.43)$$

que é definida no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, o limite quântico de velocidades τ_{QSL}^{DL} é dado por

$$\tau_{QSL}^{DL} = \frac{\sin^2 D_B(\rho_0, \rho(\tau))}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho(t)}{dt} \right\|_\infty} \tau, \quad (4.44)$$

e considerando um estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, nós obtemos finalmente que

$$\tau_{QSL}^{DL} = \frac{1 - \langle\psi_0|\rho(\tau)|\psi_0\rangle}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho(t)}{dt} \right\|_\infty} \tau. \quad (4.45)$$

Podemos concluir que para todo tempo de evolução $\tau > 0$ entre dois estados quânticos ρ_0 e ρ_τ , nós temos que $\tau \geq \tau_{QSL}^{DL}$, onde o limite quântico de velocidade é dado pela Eq.(4.44) no caso geral e Eq.(4.45) considerando um estado inicial puro. A Eq.(4.45) irá desempenhar um papel fundamental nos próximos capítulos.

Veja então que a medida de distinguibilidade D_B dada pelo ângulo de Bures induziu o limite quântico de velocidades τ_{QSL}^{DL} . Além disso, nós também utilizamos as desigualdades

de von Neumann (Eq.(4.18)), como também a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Eq.(4.19)) e a desigualdade entre as normas operador, traço e Hilbert-Schmidt. Veja também que a dinâmica do sistema entra na derivada temporal $d_t \rho_t$ do operador densidade, além do próprio tempo de evolução τ entre os estados inicial e final.

Para concluir esta seção, vale ressaltar que nosso objetivo aqui foi de exemplificar as técnicas e aspectos gerais na definição de um limite quântico de velocidade que foram ilustrados de forma geral no início deste capítulo. Demos portanto dois exemplos, um para uma dinâmica ideal (unitária) e outro aplicado para uma dinâmica geral.

A seguir, vamos explorar mais alguns exemplos de limites quânticos de velocidade e também destacar as principais propriedades destes quantificadores.

4.4 Mais exemplos e propriedades dos limites quânticos de velocidade

Nesta seção, vamos ilustrar mais alguns limites quânticos de velocidade e ressaltar suas principais propriedades. Uma vez que já ilustramos as técnicas e ideias centrais das deduções destes quantificadores através do Mandelstam-Tamm e Deffner-Lutz QSLs, nós iremos omitir as deduções dos próximos quantificadores. Para o leitor interessado nas demonstrações, a referência (33) reúne todas as provas das próximas desigualdades no seu apêndice *B*.

Vamos iniciar indicando mais um exemplo importante de limite quântico de velocidade no contexto de dinâmicas unitárias. Margolus e Levitin (42) demonstraram o seguinte QSL, definido por

$$\tau_{QSL}^{ML} = \frac{\pi \hbar}{2(\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle - E_0)} , \quad (4.46)$$

que vale para um sistema quântico fechado com Hamiltoniana H , estado inicial $|\psi_0\rangle$ e E_0 denota a energia do ground-state do sistema, ou seja, o menor auto-valor da Hamiltoniana H . Além disso, supõe-se que o estado inicial $|\psi_0\rangle$ é ortogonal ao estado final $|\psi_\tau\rangle$. Resumindo, para todo tempo de evolução τ entre dois estados ortogonais deste sistema, nós temos $\tau \geq \tau_{QSL}^{ML}$. Veja que o limite quântico de velocidade de Margolus e Levitin (ML QSL) se difere fundamentalmente daquele desenvolvido por Mandelstam e Tamm (MT QSL). De fato, o MT QSL – Eq.(4.11) – depende da variância da energia do sistema, enquanto que o ML QSL – Eq.(4.46) – depende da energia média do sistema. Em geral, até mesmo para evoluções não unitárias, nós temos duas classes de quantificadores: uma delas constitui aqueles que dependem do valor médio da energia do sistema, enquanto que outros dependem da variância da energia. Por exemplo, no quantificador deduzido por Deffner e Lutz para dinâmicas unitárias, Eq.(4.26), nós vimos que tal limite quântico de velocidade depende da energia média do sistema. Logo, este QSL é do tipo ML.

Podemos também mencionar outros limites quânticos de velocidade que são válidos para evoluções quânticas não unitárias. Em especial, podemos destacar o QSL desenvolvido por del Campo *et al.* (43), na qual se baseia na desigualdade de Cauchy–Schwarz (Eq.(4.19)) da norma de Hilbert-Schmidt e usa como medida de distinguibilidade a pureza relativa, dada por

$$f(t) \equiv \frac{\text{Tr}\{\rho_0\rho_t\}}{\|\rho_0\|_2^2}, \quad (4.47)$$

onde ρ_0 representa um estado inicial geral (não necessariamente puro). O desenvolvimento do limite quântico de velocidade desenvolvido por del Campo *et al.* é similar ao que foi feito com o DL QSL. Em especial, se a evolução dinâmica ρ_t é descrita por um canal quântico com operadores de Kraus $\{K_\alpha\}_\alpha$, nomeadamente

$$\rho_t = \sum_\alpha K_\alpha(t)\rho_0 K_\alpha^\dagger(t), \quad (4.48)$$

é possível mostrar que

$$\tau \geq \frac{2\theta_\tau^2}{\pi^2} \frac{\|\rho_0\|_2}{\sum_\alpha \langle \|K_\alpha\rho_0\partial_t K_\alpha^\dagger\|_2 \rangle}, \quad (4.49)$$

onde $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\langle \|K_\alpha\rho_0\partial_t K_\alpha^\dagger\|_2 \rangle \equiv (1/\tau) \int_0^\tau dt \|K_\alpha\rho_0\partial_t K_\alpha^\dagger\|_2$ e também $\theta_t = \arccos(f(t))$, sendo $f(t)$ a fidelidade relativa entre o estado inicial ρ_0 e ρ_t (Eq.(4.47)).

Em resumo, a medida de distinguibilidade que foi adotada no QSL desenvolvido por del Campo foi a fidelidade relativa, e a desigualdade utilizada para induzir este quantificador foi a de Cauchy–Schwarz. Além disso, vemos que este limite quântico de velocidade definido na Eq.(4.49) depende da dinâmica do sistema através dos operadores de Kraus K_α , tendo também uma dependência no estado inicial, neste caso expresso em termos da norma L_2 dada por $\|\rho_0\|_2$, e no estado final implícito na pureza relativa dentro da variável θ_τ . Por fim, o tempo de evolução τ também toma destaque na média que é tomada no denominador do limite inferior da desigualdade ilustrada na Eq.(4.49).

Por fim, vamos ilustrar mais um exemplo de limite quântico de velocidades que é válido para dinâmicas gerais. No trabalho desenvolvido por Campaioli *et al.* (44), a medida de distinguibilidade utilizada foi a distância induzida pela norma de Hilbert–Schmidt, nomeadamente a norma L_2 . Eles mostraram que, dado uma dinâmica geral, um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ para um instante $\tau > 0$, nós temos $\tau \geq \tau_{QSL}^{CPM}$, onde o quantificador τ_{QSL}^{CPM} é dado por

$$\tau_{QSL}^{CPM} = \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|_2}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d}{dt}\rho_t \right\|_2} \tau. \quad (4.50)$$

Novamente, vemos que o QSL definido na Eq.(4.50) depende da distância L_2 entre o estado inicial e final, assim como da dinâmica definida por $d_t\rho_t$ e também do tempo de evolução τ .

Para concluir este capítulo, vamos tentar ressaltar os principais pontos e propriedades relativos aos limites quânticos de velocidade. Nós vimos um QSL é o limite inferior do tempo de evolução entre dois estados quânticos e que diferentes medidas de distinguibilidade para estados quânticos podem produzir diferentes QSLs. Além disso, quando temos uma dinâmica onde $\tau = \tau_{QSL}$ para um dado limite quântico de velocidade τ_{QSL} , a dinâmica é chamada *tight*, e esta consitue o caminho dinâmico “mais rápido” (ou o caminho ótimo) entre os dois estados considerados. Por fim, nós vimos através de diversos exemplos que, em geral, um determinado quantificador de QSL pode depender dos estados inicial e final, do tempo de evolução, bem como do processo físico que estamos considerando.

Uma vez que diferentes medidas de distinguibilidade induzem diferentes limites quânticos de velocidade, a seguinte pergunta se torna evidente: *existe alguma relação entre estes diferentes quantificadores? Além disso, qual deles é mais tight? Ou seja, existe alguma hierarquia entre eles?* Estas questões foram abordadas e iremos expor alguns resultados em breve. Nós também iremos desenvolver mais dois quantificadores, um induzido pela abordagem geométrica e o outro pela desigualdade de Holder. Além disso, iremos também relacionar os novos quantificadores com os exemplos mencionados acima.

Antes de ilustrar os resultados obtidos neste trabalho, vamos primeiramente introduzir o conceito de *Markovianidade* no cenário de evoluções de sistemas quânticos. Além de desenvolver novos limites quânticos de velocidade, nós também exploramos as relações entre diferentes quantificadores com efeitos não Markovianos. Portanto, o conceito de não Markovianidade quântica é um dos pilares centrais desta pesquisa e as ideias centrais serão abordadas no próximo capítulo.

5 MARKOVIANIDADE QUÂNTICA

Iniciamos este trabalho discutindo a teoria geral para sistemas quânticos ruidosos e em seguida nós definimos a noção de medidas de distinguibilidade. Além disso, vimos que medidas de distinguibilidade podem induzir os chamados *limites quânticos de velocidade*. Neste capítulo, iremos introduzir o conceito de *Markovianidade quântica*, e no próximo capítulo nós iremos explorar as relações entre os limites quânticos de velocidade e dinâmicas não-Markovianas. Logo, as noções de Markovianidade no domínio quântico são centrais nesta pesquisa.

No domínio de sistemas clássicos, a Markovianidade é muito bem definida em termos de probabilidades condicionais. Entretanto, tais conceitos não podem ser diretamente estendidos para o domínio quântico. Veremos que isto ocorre pois as medições de observáveis possuem um papel não trivial em sistemas quânticos, diferentemente de sistemas clássicos. Além disso, veremos que não há uma única noção de Markovianidade no domínio de sistemas quânticos e exploraremos diferentes definições (que muitas vezes não são equivalentes).

Primeiramente, tomando alguma liberdade, vamos tentar introduzir a noção de Markovianidade (ou, equivalentemente, não-Markovianidade) em sistemas gerais, e propositalmente seremos um pouco imprecisos neste momento. Nomeadamente, um sistema possui uma dinâmica dita *Markoviana* se não houver efeitos de memória em sua evolução. Equivalentemente, uma dinâmica é *não-Markoviana* se, de alguma forma, houverem efeitos de memória. Por “efeitos de memória” entenda que o estado do sistema para um instante posterior depende, de alguma forma, dos estados assumidos nos instantes anteriores. De fato, não estamos esboçando como será essa dependência, e até mesmo o conceito de “memória” em evoluções de sistemas pode parecer impreciso neste momento. É esta imprecisão na noção de “memória” que implica em diversas definições de Markovianidade quântica. De fato, dependendo do tipo do sistema, nós podemos caracterizar tais efeitos de formas diferentes, e portanto a noção de Markovianidade torna-se dependente do tipo de sistema que estamos analisando.

Portanto, vamos então adotar a seguinte definição (ou abordagem) para Markovianidade e não-Markovianidade para evoluções de sistemas físicos.

Definição 29 (Evoluções Markovianas ou não-Markovianas). *Dado um sistema físico, nós primeiro precisamos definir uma forma de caracterizar algum tipo de efeito de memória do sistema. Após isso, tendo bem definida a noção de memória, nós podemos verificar se tais efeitos permanecem presentes ou não em sua evolução. Se o sistema não possuir efeitos de memória em sua evolução, esta será chamada de Markoviana. Caso contrário, a evolução é denominada não-Markoviana.*

Observamos então que nós reduzimos o problema de definir a Markovianidade ao de caracterizar tais efeitos de memória em um dado sistema físico. Dessa forma, dado um sistema S , nós possuímos duas questões fundamentais no que se refere a Markovianidade da evolução do sistema:

- **Problema de caracterização:** como caracterizar tais efeitos de memória na evolução do sistema e, portanto, definir se tal evolução é Markoviana ou não-Markoviana?
- **Problema de quantificação:** como quantificar os desvios da Markovianidade? Isto é, dado que uma evolução é não-Markoviana, seria possível quantificar tais efeitos de memória?
- **Problema de detecção:** como detectar se uma dinâmica é Markoviana ou não-Markoviana?

No que segue, nós vamos analisar o caso clássico e mostrar o motivo de não ser possível estender as definições de sistemas Markovianos clássicos para o domínio quântico. Nós iremos também apresentar formas de definir tais efeitos de memória utilizando o mapa dinâmico que descreve a evolução do sistema. No fundo, nós queremos justificar a tese de que o conceito de Markovianidade em sistemas quânticos é altamente dependente do contexto, isto é, do sistema quântico em questão (49). Por fim, iremos apresentar algumas medidas de não-Markovianidade que serão utilizadas no Capítulo 6.

5.1 Markovianidade em processos estocásticos clássicos

Nesta seção, nós vamos lançar luz nos principais conceitos que se referem a dinâmicas Markovianas de sistemas clássicos. Esta seção é importante por pelo menos três motivos. Primeiro, a noção de evoluções Markovianas surge historicamente de sistemas clássicos, e o problema da Markovianidade quântica tem início ao tentar estender as definições clássicas para sistemas quânticos. Logo, para entender o problema da Markovianidade quântica é importante ter em mente o caso originalmente clássico. Segundo que este caso é um importante exemplo da definição de “efeitos de memória” em sistemas, onde tais efeitos serão simplesmente caracterizados por distribuições de probabilidade condicionais. Por fim, tal estrutura matemática será a motivação para uma das definições de Markovianidade quântica desenvolvida por Rivas, Huelga e Plenio (11). A seguir, iremos supor que o leitor está familiarizado com conceitos básicos de teoria da medida e probabilidade. Para mais informações sobre a teoria de processos estocásticos clássicos, Markovianidade clássica e uma breve introdução a teoria da medida e probabilidades, o leitor é indicado a consultar a referência (45).

5.1.1 Definições e propriedades

Vamos iniciar nossa discussão introduzindo alguns conceitos centrais da teoria de processos estocásticos clássicos que serão ferramentas úteis no que se segue.

Seja X uma variável aleatória clássica¹ definida em um espaço de probabilidades $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde Ω é um dado conjunto (denominado *espaço de estados*), Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω (*eventos possíveis*), contendo o próprio Ω , e a função de probabilidade $\mathbb{P} : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ é σ -aditiva com a propriedade de normalização $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Por simplicidade, nós iremos dedicar atenção a variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto enumerável, nomeadamente denotado por \mathcal{X} , e estas são denominadas de *variáveis aleatórias discretas*.

Um processo estocástico clássico é uma família de variáveis aleatórias indexadas por uma variável contínua, ou seja, um conjunto $\{X(t)\}_{t \in I}$ onde I é um subconjunto de números reais, podendo ser enumerável ou não enumerável. De forma mais simples, um processo estocástico é simplesmente uma variável aleatória que possui uma dependência em um parâmetro t , que comumente irá representar o tempo. Muitas vezes podemos lidar com partições temporais $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (I é enumerável) ou com intervalos de tempo contínuo (I é não enumerável). Note também que, uma vez que a própria variável aleatória muda em relação a um parâmetro $t \in I$, o conjunto de valores possíveis \mathcal{X} também pode mudar² para diferentes valores de t .

A origem da discussão sobre Markovianidade segue da seguinte definição válida para processos estocásticos clássicos.

Definição 30 (Processos de Markov). *Seja $\{X(t)\}_{t \in I}$ um processo estocástico, e suponha que tal variável assumiu o valor x_{n-1} no instante de tempo $t_{n-1} \in I$. Então $\{X(t)\}_{t \in I}$ é dito ser um processo de Markov se a probabilidade da variável aleatória X_t assumir o valor x_n no instante posterior $t_n \in I$ ($t_n > t_{n-1}$) for unicamente determinada e não for afetada pelos possíveis valores assumidos nos instantes anteriores a t_{n-1} .*

Matematicamente, esta situação é formulada em termos das probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) = \mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) , \quad (5.1)$$

para toda partição temporal $\{t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0\} \subset I$.

A Definição 30 caracteriza os efeitos de memória em um dado processo estocástico clássico X_t . Ou seja, um processo de Markov não possui memória dos estados anteriormente obtidos, e isso é modelado em termos das probabilidades condicionais.

¹ Uma função mensurável definida em um espaço de medida (45).

² Por simplicidade de notação, vamos continuar escrevendo \mathcal{X} ao invés de \mathcal{X}_t para o conjunto de valores possíveis para uma variável aleatória X_t no instante t .

Como um exemplo de propriedade importante, o *valor médio condicional* de um processo de Markov, nomeadamente $\mathbb{E}(x|y) \equiv \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbb{P}(x|y)$, satisfaz a igualdade

$$\mathbb{E}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) = \mathbb{E}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (5.2)$$

para toda partição temporal $\{t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0\} \subset I$, onde simplesmente utilizamos a Definição 30 para as probabilidades condicionais. Além disso, um processo de Markov satisfaz uma importante equação. Para demonstrar tal relação, considere três instantes de tempo consecutivos $t_1 < t_2 < t_3$ e aplique a definição de probabilidade condicional duas vezes, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= \mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) \mathbb{P}(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1) \mathbb{P}(x_1, t_1) , \end{aligned} \quad (5.3)$$

e podemos aplicar a Definição 30 nas probabilidades condicionais de um processo de Markov. Marginalizando sobre todos os possíveis valores $x_2 \in \mathcal{X}$ e dividindo ambos os lados por $\mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2)$, nós finalmente chegamos na equação desejada, dada por

$$\mathbb{P}(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2) \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1) , \quad (5.4)$$

que é chamada de *equação de Chapman-Kolmogorov*. Portanto, todo processo de Markov satisfaz a Eq.(5.4). Podemos agora perguntar a afirmação inversa, isto é, uma família de probabilidades condicionais que satisfazem a equação de Chapman-Kolmogorov pode descrever um processo de Markov? A resposta é dada em termos seguinte teorema:

Teorema 8. *Uma família de probabilidades condicionais $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ satisfazendo a Eq.(5.4) sempre pode ser vista como a uma distribuição de probabilidades condicional de um processo de Markov $\{X(t)\}_{t \in I}$.*

Demonstração. Considere uma distribuição de probabilidades $\mathbb{P}(x_n, t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nós então definimos a probabilidade conjunta

$$\mathbb{P}(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \equiv \mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \mathbb{P}(x_{n-1}, t_{n-1}) . \quad (5.5)$$

Além disso, nós também definimos

$$\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) \equiv \mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) , \quad (5.6)$$

para toda partição temporal $\{t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0\} \subset I$, e construímos probabilidades conjuntas de ordens maiores com auxílio da Eq.(5.3). Esta construção sempre é possível pois é compatível com a Eq.(5.4), que é suposta válida para a família de probabilidades

condicionais $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$. Logo, tal família representa um autêntico processo de Markov, de acordo com a Definição 30.

□

Vamos agora observar os processos de Markov clássicos sob a ótica das matrizes de transição. Tal construção será útil para introduzir uma das definições de Markovianidade para sistemas quânticos.

5.1.2 Matrizes de transição

Nesta subseção, nós iremos descrever as evoluções de probabilidades de um ponto³ $\mathbb{P}(x, t)$ para um dado processo estocástico clássico.

Considere um mapeamento linear T que conecta as probabilidades de um dado processo estocástico X_t em diferentes instantes de tempo t_0 e t_1 , ou seja,

$$\mathbb{P}(x_1, t_1) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} T(x_1, t_1 | x_0, t_0) \mathbb{P}(x_0, t_0) ; \forall x_1 \in \mathcal{X} . \quad (5.7)$$

Uma vez que $\mathbb{P}(x_1, t_1)$ satisfaz a normalização $\sum_{x_1 \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(x_1, t_1) = 1$ e também é uma função positiva semi-definida $\mathbb{P}(x_1, t_1) \geq 0$ para todo $t_1 \geq t_0$ (e conseqüentemente para toda distribuição de probabilidades inicial $\mathbb{P}(x_0, t_0)$), podemos concluir que

$$\sum_{x_1 \in \mathcal{X}} T(x_1, t_1 | x_0, t_0) = 1 , \quad (5.8)$$

$$T(x_1, t_1 | x_0, t_0) \geq 0 ; x_1, x_0 \in \mathcal{X} . \quad (5.9)$$

Veja então que o mapeamento linear T pode ser representado por uma matriz $\mathbf{T}(t_1, t_0)$, e para todo $t_1 \geq t_0$ o elemento de matriz pode ser escrito como $[\mathbf{T}(t_1, t_0)]_{m,n} \equiv T(m, t_1 | n, t_0)$. Denotando também o vetor de probabilidades $\vec{P}(t) = (\mathbb{P}(x, t)_{x \in \mathcal{X}})^T$, que consiste em um vetor coluna cujas componentes constituem a distribuição de probabilidades do processo estocástico em um dado instante t , a Eq.(5.7) pode ser escrita como um produto matricial $\vec{P}(t_1) = \mathbf{T} \cdot \vec{P}(t_0)$. Dessa forma, nós temos que a soma dos elementos de uma dada coluna da matriz \mathbf{T} é igual a um, e que todos os seus elementos são números não negativos. Matrizes \mathbf{T} que satisfazem estas propriedades são chamadas de *matrizes estocásticas*, e iremos chamar o operador linear T de *propagador*.

Agora, vamos mencionar uma observação importante na discussão sobre processos Markovianos clássicos. Considere t_0 o instante inicial de algum processo estocástico clássico $\{X(t)\}_{t \in I}$ geral (não necessariamente Markoviano). Então, da definição de probabilidades condicionais, temos que

³ Em inglês, *one-point probabilities*.

$$\mathbb{P}(x_2, t_2; x_0, t_0) = \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_0, t_0) \mathbb{P}(x_0, t_0) , \quad (5.10)$$

e marginalizando sob $x_0 \in \mathcal{X}$, nós temos que

$$\mathbb{P}(x_2, t_2) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_0, t_0) \mathbb{P}(x_0, t_0) , \quad (5.11)$$

e podemos concluir que $T(x_2, t_2 | x_0, t_0) = \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_0, t_0)$ para todo $t_2 \geq t_0$. Isto significa que os elementos da matriz transição que leva o estado do instante inicial t_0 para um instante posterior $t_2 \geq t_0$ pode ser obtida em termos das próprias probabilidades condicionais que descrevem as probabilidades no instante t_2 dado as informações do instante inicial t_0 . Entretanto, é muito importante ressaltar que esta propriedade não é válida em geral para um outro instante $t_1 > t_0$. Ou seja, em geral nós temos que $T(x_2, t_2 | x_1, t_1) \neq \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ para qualquer instante $t_1 > t_0$. Isto se dá pois um processo estocástico pode ser não-Markoviano, logo ele possui efeitos de memória em sua evolução. Matematicamente isto reflete no fato de que a matriz transição de um certo instante $t_1 > t_0$ para um instante posterior $t_2 \geq t_1$ não irá ser unicamente definida em termos do instante t_1 , mas também dependerá dos estados assumidos entre o instante inicial t_0 e t_1 . Em outras palavras, a distribuição $\mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ com $t_1 > t_0$ não é totalmente definida para um processo estocástico geral, pois nós precisamos também das distribuições condicionais $\mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1; x_0, t_0)$ com $x_0 \in \mathcal{X}$ para valores previamente obtidos pelo processo estocástico. Entretanto, isto não é o caso para um processo de Markov, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 9. *Considere um processo de Markov $\{X(t)\}_{t \in I}$ com início no instante t_0 . Então, dado quaisquer dois instantes de tempo t_1 e t_2 com $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, nós temos que*

$$T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1) . \quad (5.12)$$

Demonstração. Para o caso $t_1 = t_0$, foi mostrado acima que o resultado vale para todo processo estocástico. Consideremos agora $t_1 > t_0$. Neste caso, uma vez que nós sempre podemos escrever $\mathbb{P}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1) \mathbb{P}(x_1, t_1)$ (pela definição de probabilidade conjunta) e que a probabilidade condicional $\mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ é bem definida para um processo de Markov, podemos marginalizar a distribuição conjunta $\mathbb{P}(x_2, t_2; x_1, t_1)$ sob $x_1 \in \mathcal{X}$ e concluir que $T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ para todo $t_2 \geq t_1 > t_0$ (similarmente ao caso onde $t_1 = t_0$). Veja que este resultado só é válido para $t_1 > t_0$ pois estamos lidando com um processo de Markov, onde $\mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ é bem definida para todo $t_2 \geq t_1$. \square

Veja que este teorema possui uma interpretação interessante em termos da memória do sistema. Este resultado afirma que, para um processo clássico Markoviano, a matriz transição de qualquer instante $t_1 > t_0$ para um outro instante $t_2 \geq t_1$ não depende dos estados do sistema no intervalo entre o instante inicial t_0 e o instante t_1 . Em outras

palavras, uma vez que o sistema encontra-se no instante $t_1 > t_0$, ele não possui “lembrança” dos estados assumidos no intervalo $[t_0, t_1)$. Dado a discussão prévia ao último teorema, observamos que isso é uma propriedade singular dos sistemas Markovianos clássicos. Por fim, considerando o Teorema 9 juntamente a Eq.(5.4) de Chapman-Kolmogorov, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1. *Seja $\{X(t)\}_{t \in I}$ um processo de Markov com início no instante t_0 . Então, para todo $t_1, t_2, t_3 \in I$ tais que $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq t_0$, o propagador T satisfaz as propriedades*

$$\sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = 1, \quad (5.13)$$

$$T(x_2, t_2 | x_1, t_1) \geq 0, \quad (5.14)$$

$$T(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3 | x_2, t_2) T(x_2, t_2 | x_1, t_1). \quad (5.15)$$

Denotando $\mathbf{T}(t, t')$ como a matriz estocástica que representa o propagador T nos instantes t e t' com $t \geq t'$, temos que a soma dos elementos de uma coluna de \mathbf{T} é igual a um, todos os elementos de matriz de \mathbf{T} são não-negativos e, por fim, para todo $t_1, t_2, t_3 \in I$ tais que $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq t_0$, nós temos que $\mathbf{T}(t_3, t_1) = \mathbf{T}(t_3, t_2)\mathbf{T}(t_2, t_1)$.

Em resumo, o corolário afirma que para um processo estocástico clássico Markoviano, os elementos da matriz de transição são as próprias probabilidades condicionais do processo e satisfazem a relação de composição $\mathbf{T}(t_3, t_1) = \mathbf{T}(t_3, t_2)\mathbf{T}(t_2, t_1)$. Essencialmente, tal composição afirma que a evolução de um instante t_1 para um instante $t_3 \geq t_1$ é equivalente a evoluir do instante t_1 para um instante intermediário $t_2 \in [t_1, t_3]$ e, em seguida, evoluir do instante t_2 para t_3 . Vemos que tais sistemas não possuem a lembrança dos estados previamente obtidos para todo $t \leq t_1$, caracterizando portanto uma dinâmica sem memória. Novamente, vale ressaltar que tal resultado é válido apenas para processos de Markov, pois caso contrário os propagadores $T(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ podem não ser bem definidos para todo $t_1 > t_0$, como discutimos acima. Isso reflete o fato de que processos clássicos não-Markovianos podem quebrar a composição da matriz estocástica devido aos efeitos de memória para instantes $t \in [t_0, t_1]$.

A discussão acima nos motiva a introduzir a seguinte definição.

Definição 31 (Processo Clássico Divisível). *Um processo estocástico geral $\{X(t)\}_{t \in I}$ (não necessariamente Markoviano) para o qual o propagador associado T satisfaz as equações (5.13), (5.14) e (5.15) é dito um processo divisível.*

Dessa forma, o Corolário 1 afirma que todo processo de Markov é um processo divisível. Entretanto, existem processos clássicos não-Markovianos que são também divisíveis⁴.

⁴ Para um exemplo concreto de sistema clássico não-Markoviano e divisível, veja a referência (11).

Logo, nem todo processo divisível é necessariamente Markoviano. Embora haja processos clássicos não-Markovianos que sejam divisíveis, nós podemos estabelecer o seguinte teorema que terá um papel central na nossa discussão sobre Markovianidade no caso quântico.

Teorema 10 (Processo Divisível e Processo de Markov). *Suponha uma família de propagadores $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ com $t_i \in I$, $x_i \in \mathcal{X}$ para $i = 1, 2$, considerando $t_1 < t_2$. Se tal família constitui um processo divisível, ou seja, se satisfaz as equações (5.13), (5.14) e (5.15), então estes propagadores podem ser vistos como as transições de algum processo clássico Markoviano.*

O Corolário 1 afirma que todo processo de Markov é também um processo divisível. Agora, o Teorema 10 afirma que, embora existam processos não-Markovianos que são divisíveis, dado um propagador T divisível nós podemos construir um processo Markoviano que pode ser descrito por T .

Demonstração. Uma vez que a família $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ satisfaz as equações (5.13) e (5.14), podemos definir as probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}(x_2, t_2|x_1, t_1) \equiv T(x_2, t_2|x_1, t_1) , \quad (5.16)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e todo $t_1 < t_2$. Além disso, uma vez tal família satisfaz a Eq.(5.15), estas probabilidades condicionais satisfazem a equação de Chapman-Kolmogorov, definida na Eq.(5.4). Por fim, uma vez que uma família de probabilidades condicionais que satisfazem tal equação podem ser vistas como probabilidades condicionais de um processo de Markov $\{X(t)\}_{t \in I}$ que assume valores no conjunto \mathcal{X} , como descrito no Teorema 8, nós obtemos o resultado desejado. \square

Como consequência deste teorema, nós obtemos o seguinte importante corolário.

Corolário 2 (Contexto de Equivalência Entre Divisibilidade e Markovianidade). *Para um sistemas estocásticos clássicos $\{X(t)\}_{t \in I}$ que assume valores em um conjunto \mathcal{X} , considerando apenas probabilidades de um único ponto, nomeadamente $\mathbb{P}(x, t)$ para $x \in \mathcal{X}$ e $t \in I$, processos divisíveis e processos Markovianos são equivalentes. Ou seja, hierarquia completa das probabilidades condicionais temporais precisam ser conhecidas para que seja possível distinguir entre divisibilidade (Definição 31) e Markovianidade (Definição 30).*

A próxima subseção introduz uma importante propriedade dos sistemas divisíveis clássicos que também será útil em definições de Markovianidade de sistemas quânticos.

5.1.3 Contratividade

Considere um vetor $\vec{v} \in V$ de um dado espaço vetorial V cujas componentes⁵ são dadas por $v(x)$. Nós já vimos que a norma L_1 de um dado vetor é definida por

$$\|\vec{v}\|_1 = \sum_x |v(x)|, \quad (5.17)$$

e assim como no caso quântico, a norma L_1 pode ser usada como medida de distinguibilidade de distribuições de probabilidade. Nomeadamente, considere uma variável aleatória X que assume valores no conjunto \mathcal{X} e que é descrita pela distribuição de probabilidades $p_1(x)$ com probabilidade q e pela distribuição $p_2(x)$ com probabilidade $1 - q$. Nosso objetivo é identificar a distribuição de probabilidades que descreve X (dada por p_1 ou p_2) fazendo uma única amostragem desta variável. Similarmente ao caso quântico, que foi descrito pelo Teorema 7, nós temos que a probabilidade mínima de errar a verdadeira distribuição de probabilidades de X é dada por

$$\mathbb{P}_{\min}(\text{erro}) = \frac{1 - \|\omega\|_1}{2}, \quad (5.18)$$

onde $\omega(x) \equiv qp_1(x) - (1 - q)p_2(x)$. Veja que esse é o análogo clássico do Teorema 7, onde o estado do sistema quântico ρ é substituído pela distribuição de probabilidades $p(x)$ de uma variável aleatória⁶ clássica, e a matriz de Helstrom é substituída pelo vetor $\vec{\omega}$. Logo, a norma L_1 do vetor $\vec{\omega}$ fornece a capacidade de distinguir corretamente entre as duas distribuições p_1 e p_2 da variável aleatória clássica X . A demonstração deste resultado também é análoga à demonstração do Teorema 7.

Também similarmente ao caso quântico, no caso homogêneo $q = 1/2$, nós temos

$$\|\omega\|_1 = \frac{1}{2} \|p_1(x) - p_2(x)\|_1, \quad (5.19)$$

na qual é conhecida como a *distância de Kolmogorov*, *distância L_1* ou *distância variacional entre p_1 e p_2* . Nós podemos usar as normas L_1 como forma de identificar se o processo é divisível ou não, tal como é descrito no próximo teorema.

Teorema 11 (Contratividade e Divisibilidade). *Seja T o propagador de um dado processo estocástico clássico $\{X(t)\}_{t \in I}$ que assume valores em \mathcal{X} . Então, este processo é divisível se, e somente se, a norma L_1 não aumenta quando o propagador T é aplicado em qualquer vetor $v(x)$, $x \in \mathcal{X}$, para todo t_1 e t_2 . Ou seja,*

$$\left\| \sum_{x_1 \in \mathcal{X}} T(x_2, t_2 | x_1, t_1) v(x) \right\|_1 \leq \|v(x_2)\|_1, \quad t_1 \leq t_2. \quad (5.20)$$

⁵ Por abuso de linguagem, muitas vezes vamos simplesmente falar “um vetor $v(x)$ ” como denotando um vetor \vec{v} cujas componentes são dadas por $v(x)$.

⁶ Veja que isto é consistente com a observação feita anteriormente de que o operador densidade é a generalização de uma densidade de probabilidades.

Demonstração. Para uma prova detalhada, o leitor é convidado a consultar a referência (11). No que segue, nós iremos demonstrar um resultado análogo mas para o caso quântico. \square

Por conta do Teorema 11 juntamente com a Eq.(5.15), podemos concluir que a probabilidade de erro $\mathbb{P}_{\min}(\text{erro})$ aumenta monotonicamente com o tempo para um processo divisível. Fisicamente isso significa que, se uma variável aleatória X_t sofre uma evolução Markoviana, é mais fácil distinguir entre as duas possíveis distribuições $p_1(x, t)$ e $p_2(x, t)$ de X_t realizando amostragens em instantes de tempo t tão próximos quanto possível do instante inicial t_0 da evolução do sistema. Tal fato pode ser interpretado como uma evolução sem memória: no instante inicial t_0 a variável aleatória X_{t_0} é preparada na distribuição $p_1(x, t_0)$ com probabilidade q ou na distribuição $p_2(x, t_0)$ com probabilidade $1 - q$. Uma vez que a evolução é Markoviana, o sistema rapidamente “esquece” o estado inicial na qual o sistema foi preparado, e conseqüentemente a probabilidade de errar a verdadeira distribuição inicial cresce monotonicamente com o tempo.

Por outro lado, se a variável aleatória X_t sofre uma evolução não-Markoviana, então o processo não é divisível e conseqüentemente em algum instante $t' > t_0$ a contratividade dada pela Eq.(5.20) é quebrada. Isto significa que em algum instante de tempo $t' > t_0$ o sistema pode “lembrar” da verdadeira distribuição de probabilidades preparada inicialmente para X_t , representando um efeito de memória em dinâmicas não-Markovianas de sistemas estocásticos. Isto é, o sistema pode reter alguma informação sobre o estado da variável aleatória X_t no instante inicial t_0 , na qual pode se manifestar em um decrescimento da probabilidade $\mathbb{P}_{\min}(\text{erro})$ em algum instante posterior t' .

Para concluir esta seção, vamos tentar ilustrar os principais pontos relativos a processos estocásticos clássicos e dinâmicas Markovianas. Processos Markovianos clássicos são definidos através de distribuições de probabilidades condicionais para todos os instantes de tempo, tal como na Definição 30. Entretanto, se o experimentalista tem acesso apenas a distribuições de probabilidade de um ponto, nomeadamente $\mathbb{P}(x, t)$ para um dado processo estocástico X_t , processos Markovianos e processos divisíveis tornam-se equivalentes. Os processos divisíveis são mais facilmente caracterizados em termos de matrizes de transição e da propriedade de contratividade induzida pela norma L_1 .

Os pontos acima serão utilizados no caso quântico como motivações de definições de Markovianidade e caracterização de “efeitos de memória” para evoluções de sistemas através de restrições impostas nos mapas dinâmicos. Logo, vale a pena observar que as definições e propriedades da Markovianidade em evoluções de sistemas clássicos tornam-se indispensáveis para entender as motivações e peculiaridades existentes no caso quântico, como iremos introduzir a seguir.

Como mencionado anteriormente, os efeitos de memória em um sistema quântico podem ser definidos em função de propriedades do mapa dinâmico que descreve a evolução

do sistema. Por outro lado, nós também podemos descrever tais efeitos em função das propriedades das interações entre o sistema e o ambiente, através, por exemplo, das funções de correlação que descrevem tais interações (45, 49).

As abordagens utilizando os mapas dinâmicos são mais comumente utilizados em problemas de informação quântica, onde não sabemos a natureza da interação sistema-ambiente mas conhecemos toda a dinâmica do sistema, sendo esta descrita por um canal quântico. Por outro lado, a abordagem utilizando as interações entre sistema e ambiente, tais como imposições sob o comportamento das funções de correlação, são comumente exploradas em problemas de processos estocásticos quânticos. Cada metodologia depende da natureza do sistema de interesse, sendo uma mais útil que outras a depender do contexto em questão. Neste trabalho, nós iremos focar em definições de Markovianidade quântica baseadas nas propriedades dos mapas dinâmicos, sob a ótica da informação quântica.

5.2 Markovianidade em processos quânticos através do mapa dinâmico

Dado a introdução aos conceitos centrais da teoria de processos estocásticos clássicos Markovianos, nós iremos mostrar agora que não é possível estender a definição clássica para o regime quântico, motivando a buscar novas metodologias e interpretações. Em seguida, vamos introduzir as noções de Markovianidade sob a ótica da teoria da informação quântica, nomeadamente definindo tais efeitos de memória em evoluções de sistemas quânticos através das propriedades do mapa dinâmico do sistema e interpretando os efeitos de memória como fluxos de informação entre o sistema e o ambiente e/ou como uma capacidade do sistema de reter informação sobre o estado inicial em que o sistema foi preparado.

5.2.1 Estendendo as definições clássicas para o domínio quântico

Uma vez que a teoria quântica é uma teoria estatística, o leitor poderia ser levado a pensar que nós poderíamos simplesmente adotar definições análogas à Definição 30 para introduzir a Markovianidade em regimes de sistemas quânticos. Entretanto, diferentemente da mecânica clássica, a teoria quântica é baseada em álgebras não-comutativas, e portanto a ordem da aplicação de transformações toma um papel não trivial neste domínio.

Através da Definição 30, nós precisaríamos obter as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0)$ para um dado observável quântico. O problema no caso quântico é que as medições afetam o estado do sistema de forma não trivial. Ou seja, dado um sistema em um estado ρ , a medida de um observável afeta o estado devido ao colapso da função de onda, e a estatística após a medição depende do resultado da medição em si.

Logo, para definir uma probabilidade condicional $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0)$, precisaríamos especificar o esquema de medição utilizado. Portanto, definições de Markovianidade utilizando probabilidades condicionais seriam dependentes do esquema de medição

adotado para definir $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0)$. Entretanto, nós buscamos uma teoria para a Markovianidade quântica que dependa unicamente da dinâmica de evolução do sistema, ao invés de depender da forma na qual o sistema é monitorado. Portanto, nossa abordagem não irá constituir de tentar estender a Definição 30 para o regime quântico. Ao invés disso, nós iremos buscar condições sob a dinâmica com o objetivo de caracterizar os efeitos de memória em evoluções de sistemas quânticos.

Na próxima subseção, nós iremos introduzir um contexto na qual a *definição RHP para Markovianidade* resolve o problema de caracterização de uma Markovianidade quântica, tal como interpretar os efeitos de memória implícitos nesta teoria.

5.2.2 RHP-Markovianidade: definições

A primeira noção de Markovianidade quântica que iremos introduzir é devido aos trabalhos de Rivas, Huelga e Plenio (11), nomeadamente conhecida como *definição RHP para Markovianidade*. Tal definição se baseia na noção de divisibilidade do mapa dinâmico, similarmente ao que vimos no caso clássico com as matrizes de transição. Vamos agora especificar os contextos nas quais esta definição pode ser útil para caracterizar os efeitos de memória em sistemas quânticos.

Dado o problema anteriormente mencionado, nomeadamente na definição de probabilidades condicionais do tipo $\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0)$, vamos introduzir uma nova abordagem baseada em probabilidades de um único ponto $\mathbb{P}(x, t)$. Supondo que o experimentalista possui acesso apenas a probabilidades $\mathbb{P}(x, t)$, nós vimos que o conceito de Markovianidade clássica (Definição 30) é equivalente ao conceito de divisibilidade (Definição 31) dos propagadores. Lembre que o Teorema 10 e o Corolário 2 afirmam que Markovianidade clássica e divisibilidade de propagadores são conceitos equivalentes para probabilidades de um único ponto $\mathbb{P}(x, t)$. A vantagem dessa abordagem é que nós podemos introduzir as noções de divisibilidade nos canais quânticos sem precisar fazer menção a qualquer processo de medição. Além disso, nós não perdemos generalidade utilizando tal abordagem, pois as probabilidades $\mathbb{P}(x, t)$ de um único ponto são as únicas que podem ser construídas no domínio quântico evitando as dificuldades associadas com interferências devido aos processos de medição.

Lembre que todo sistema quântico pode ser descrito por um estado ρ que possui a seguinte decomposição espectral

$$\rho = \sum_x p(x) |\psi_x\rangle\langle\psi_x| . \quad (5.21)$$

Lembre que os auto-valores $p(x)$ podem ser interpretados como uma distribuição de probabilidades clássica, nomeadamente $p(x)$ pode ser visto como a probabilidade do sistema ser preparado no estado $|\psi_x\rangle$, ou seja,

$$\mathbb{P}(|\psi_x\rangle) = p(x) . \quad (5.22)$$

Vamos inicialmente considerar um caso particular de um canal clássico, nomeadamente uma evolução que preserva os auto-vetores do operador densidade. Considere um estado inicial $\rho(t_0)$ dado por

$$\rho(t_0) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x, t_0) |\psi_x\rangle\langle\psi_x| , \quad (5.23)$$

e vamos denotar por \mathcal{S} o conjunto de todos os operadores densidade que possuem os auto-vetores $\{|\psi_x\rangle\}_{x \in \mathcal{X}}$ para algum conjunto enumerável de índices \mathcal{X} . Dessa forma, um canal clássico é definido pela evolução

$$\rho(t_0) \rightarrow \rho(t) = \sum_x p(x, t) |\psi_x\rangle\langle\psi_x| \in \mathcal{S} . \quad (5.24)$$

Uma vez que tal evolução constitui um processo estocástico clássico na variável aleatória X_t que assume os valores $x \in \mathcal{X}$, onde nesta abordagem \mathcal{X} indexa o estado $|\psi_x\rangle$ do sistema, nós temos que tal processo é divisível se a evolução da distribuição $p(x, t)$ satisfaz a definição clássica de divisibilidade (Definição 31). Supondo então que estamos lidando com um processo divisível, existe um propagador T que se relaciona com a evolução de $p(x, t)$ da forma

$$p(x_1, t_1) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} T(x_1, t_1 | x_0, t_0) p(x_0, t_0) , \quad (5.25)$$

na qual satisfaz as equações (5.13), (5.14) e (5.15). Entretanto, uma vez que este processo também pode ser interpretado como a evolução de um estado quântico, nós podemos utilizar a estrutura dos mapas dinâmicos. Nomeadamente, existe um mapeamento linear $\mathcal{E}_{(t, t_0)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ que leva um estado inicial $\rho(t_0)$ em um estado final $\rho(t)$ descrevendo tal evolução clássica, ou seja

$$\rho(t_1) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho(t_0)) , \quad (5.26)$$

onde $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ preserva os auto-vetores do operador densidade $\rho(t_0)$. Logo, nós temos que

$$\rho(t_1) = \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} p(x_0, t_0) \mathcal{E}_{(t, t_0)} [|\psi_{x_0}\rangle\langle\psi_{x_0}|] \quad (5.27)$$

$$= \sum_{x_1, x_0 \in \mathcal{X}} T(x_1, t_1 | x_0, t_0) p(x_0, t_0) |\psi_{x_1}\rangle\langle\psi_{x_1}| , \quad (5.28)$$

onde na primeira igualdade nós utilizamos a linearidade de $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ juntamente com a decomposição espectral do estado inicial e a relação de igualdade $\rho(t_1) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho(t_0))$. Para a segunda igualdade, nós utilizamos a hipótese de que $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ não altera os auto-vetores do estado inicial, expandindo $\rho(t_1)$ na sua decomposição espectral e utilizando a Eq.(5.25) em $p(x_1, t_1)$. Uma vez que o processo clássico é divisível, utilizando as equações (5.13), (5.14) e (5.15) é fácil ver que $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ preserva a positividade e o traço de qualquer estado em \mathcal{S} , e também satisfaz a seguinte lei de composição

$$\mathcal{E}_{(t_3, t_1)} = \mathcal{E}_{(t_3, t_2)} \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} ; t_3 \geq t_2 \geq t_1 . \quad (5.29)$$

Portanto, nós acabamos de mostrar que o mapeamento $\mathcal{E}_{(t, t_0)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ que descreve uma evolução de um processo estocástico clássico divisível satisfaz também uma relação

de divisibilidade, além de preservar a positividade e o traço do operador densidade. Isto nos motiva a generalizar esta estrutura para evoluções mais gerais (não necessariamente um canal clássico) e introduzir a definição de *processos quânticos divisíveis*. Tendo em mente a diferença entre um mapeamento positivo e um mapeamento completamente positivo discutido nos axiomas gerais da teoria quântica ruidosa, nós vamos primeiramente introduzir a definição de um *processo quântico P-Divisível*.

Definição 32 (Processos Quânticos P-divisível). *Nós dizemos que um sistema sujeito a uma evolução temporal descrita pela família $\{\mathcal{E}'_{(t,t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ de mapas lineares que preservam o traço, considerando um instante inicial t_0 , é um processo p-divisível se, para todo t_2 e t_1 , $\mathcal{E}'_{(t_2, t_1)}$ é um mapa positivo e que, para todo t_3, t_2 e t_1 tais que $t_3 \geq t_2 \geq t_1$, satisfaz a lei de composição*

$$\mathcal{E}'_{(t_3, t_1)} = \mathcal{E}'_{(t_3, t_2)} \mathcal{E}'_{(t_2, t_1)} . \quad (5.30)$$

A terminologia “p-divisível” deve ser interpretada como “positivo-divisível”. É importante introduzir a noção mais fraca de p-divisibilidade devido a diferença entre positividade e completa-positividade que é introduzida nas evoluções quânticas. Como discutido anteriormente, a positividade não é suficiente para descrever evoluções gerais de sistemas quânticos, e precisamos de um requisito mais forte, nomeadamente definido pelos mapas completamente positivos. Dessa forma, nós podemos introduzir o seguinte conceito geral de divisibilidade em evoluções de sistemas quânticos.

Definição 33 (Processos Quânticos Divisíveis). *Dizemos que um sistema quântico sujeito a uma evolução descrita pelo mapa dinâmico $\{\mathcal{E}_{(t,t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ para algum instante inicial t_0 é um processo quântico divisível se, para todo t_2 e t_1 , $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$ é um canal quântico (mapa linear completamente positivo e que preserva o traço) e que, para todo t_3, t_2 e t_1 tais que $t_3 \geq t_2 \geq t_1$, satisfaz a lei de composição*

$$\mathcal{E}_{(t_3, t_1)} = \mathcal{E}_{(t_3, t_2)} \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} . \quad (5.31)$$

Portanto, nós introduzimos a primeira definição de Markovianidade quântica.

Definição 34 (RHP-Markovianidade). *A divisibilidade pode ser considerada como um tipo de definição para a Markovianidade quântica (11). Em outras palavras, um processo quântico divisível pode ser chamado de Markoviano.*

Vamos então comparar a Definição 34 com a Definição 31. Observe que o requerimento de normalização para os propagadores de um processo de Markov clássico é dado por $\sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = 1$, enquanto que no caso quântico nós temos um propagador $\mathcal{E}_{(t,t)}$ que preserva o traço, refletindo a conservação de probabilidades pela evolução do sistema. Além disso, no caso clássico nós temos uma condição de positividade, nomeadamente $T(x_2, t_2 | x_1, t_1) \geq 0$, enquanto que no caso quântico nós lidamos com um mapeamento $\mathcal{E}_{(t,t)}$

completamente positivo. Por fim, nós vimos que os propagadores T de um processo divisível satisfazem a lei de composição $T(x_3, t_3|x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3|x_2, t_2)T(x_2, t_2|x_1, t_1)$, e no caso quântico a composição análoga é dada por $\mathcal{E}_{(t_3, t_1)} = \mathcal{E}_{(t_3, t_2)}\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$.

Em resumo, no contexto de probabilidades de um único ponto, nomeadamente $\mathbb{P}(x, t)$, nós mostramos que um processo clássico Markoviano (Definição 30) é equivalente a um processo clássico divisível (Definição 31). Considerando que um experimentalista só possui acesso a estas probabilidades para um dado sistema quântico, nós vemos que a Definição 34 busca generalizar a noção de Markovianidade clássica (descrita em termos da divisibilidade dos propagadores T) para uma Markovianidade quântica, descrita em termos da divisibilidade dos mapas dinâmicos $\{\mathcal{E}_{(t, t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ que descrevem a evolução de um sistema quântico.

Neste trabalho, nós estamos mantendo o foco na descrição de evoluções quânticas baseada no formalismo dos canais quânticos. Entretanto, frequentemente nós podemos lidar também com equações mestras, análogas a equação de von Neumann para sistemas fechados, nas quais fornecem uma equação diferencial para o operador densidade que descreve a evolução dinâmica do sistema. Logo, é muito comum associar o termo “Markoviano” a alguns tipos de equações.

Vamos brevemente mencionar um caso importante de equação mestra que se relaciona com o conceito de divisibilidade dos mapas dinâmicos. Para ilustrar isto, considere um mapa dinâmico $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ para um dado instante inicial t_0 . Além disso, vamos supor que este mapeamento é diferenciável em t e também é bijetivo (ou seja, admite uma inversa). Então por diferenciação no estado dinâmico $\rho(t) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho(t_0))$, sem ter o objetivo de ser rigoroso, nós temos que

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{d\mathcal{E}_{(t, t_0)}}{dt}[\rho(t_0)] = \frac{d\mathcal{E}_{(t, t_0)}}{dt}\mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1}[\rho(t)] , \quad (5.32)$$

e definimos o *gerador* ou *super-operador de Liouville*, também conhecido como *Liouvilliano*, por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &\equiv \frac{d\mathcal{E}_{(t, t_0)}}{dt}\mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{(t+\Delta t, t_0)} - \mathcal{E}_{(t, t_0)}}{\Delta t} \right) \mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{(t+\Delta t, t)} - \mathbb{1}}{\Delta t} , \end{aligned} \quad (5.33)$$

e o sistema pode ser descrito por uma *equação mestra* do tipo

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}_t[\rho(t)] . \quad (5.34)$$

Portanto, a Eq.(5.34) pode ser interpretada como a generalização da equação de von Neumann para um sistema quântico geral, onde o Liouvilliano é dado pela Eq.(5.33) em termos do mapa dinâmico que descreve a evolução do sistema. Dessa forma, nós podemos

facilmente transitar do formalismo dos canais quânticos para o formalismo das equações mestras. Cada abordagem possui as suas vantagens e desvantagens, seja do ponto de vista conceitual, analítico ou computacional. Neste trabalho, nós iremos continuar focando em canais quânticos. Para mais informações sobre sistemas quânticos abertos descritos por equações mestras, o leitor é indicado a consultar as referências (6) e (45).

Retornando a conexão entre equações mestras e Markovianidade quântica, um importante resultado relaciona o conceito de divisibilidade dos canais dinâmicos e um tipo particular de equações mestras, tal como é descrito no próximo teorema.

Teorema 12 (Gorini-Kossakowski-Susarshan-Lindblad). *Um super-operador \mathcal{L}_t é um gerador de uma evolução quântica divisível (Definição 33) se, e somente se, este pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}_t(\rho(t)) = & -i[H(t), \rho(t)] \\ & + \sum_k \gamma_k(t) \left[V_k(t)\rho(t)V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{V_k^\dagger(t)V_k(t), \rho(t)\} \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde $H(t)$ e $V_k(t)$ são operadores dependentes do tempo, com $H(t)$ hermitiano $\forall t$ e $\gamma_k(t) \geq 0$ é uma função não-negativa para todo tempo t e todo índice k .

Demonstração. Para uma prova detalhada, o leitor é indicado a consultar a referência (6) ou (45). \square

A Eq.(5.35) é conhecida como *equação mestra de Lindblad*, em homenagem a um dos seus desenvolvedores. O conceito de Markovianidade quântica é muitas vezes associado a uma evolução dinâmica descrita por uma equação mestra do tipo Lindblad. Porém, o Teorema 12 afirma que esta abordagem é equivalente a divisibilidade do mapa dinâmico que descreve a evolução do sistema, tal como descrito na Definição 33.

5.2.3 RHP-Markovianidade: ausência de memória

Na subseção anterior, nós introduzimos a noção de evoluções quânticas divisíveis (Definição 33), onde a motivação foi de tentar generalizar os conceitos da Markovianidade clássica através da divisibilidade dos propagadores da evolução, ou seja, nós buscamos construir uma teoria quântica da Markovianidade que fosse consistente com os resultados clássicos. Entretanto, ainda não discutimos quais são os efeitos de memória em tais evoluções. Isto é, tomando a definição clássica de um processo de Markov (Definição 30) em termos de probabilidades condicionais, fica óbvio a ausência de memória em tais evoluções estocásticas. Entretanto, sob a ótica da divisibilidade dos propagadores, tal propriedade não fica clara de forma trivial. Vamos agora mostrar que dinâmicas quânticas divisíveis não possuem “memória” dos seus estados anteriores, fornecendo interpretações adequadas para esta afirmação.

Há pelo menos duas formas de observar a ausência de memória em dinâmicas divisíveis. Uma é baseada na propriedade de contratividade de mapas completamente positivos e divisíveis, similar ao que foi discutido no caso clássico pelo Teorema 11. A segunda é dada em termos da interação entre sistema e ambiente modelada através de um modelo colisional. A seguir, vamos mencionar apenas a propriedade de contratividade, indicando o leitor a consultar a referência (11) para ver o segundo caso.

Vamos considerar novamente as condições do Teorema 7. Suponha um sistema descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} cujo estado é representado pelo operador densidade $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ com probabilidade q ou $\rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ com probabilidade $1 - q$. Nosso objetivo é determinar o estado real através de uma medição no sistema. Vimos que a menor probabilidade de erro, p_e^{\min} , na distinção destes dois estados, tal como descrito acima, é proporcional a distância traço entre $q\rho_1$ e $(1 - q)\rho_2$. Nomeadamente, nós podemos escrever

$$p_e^{\min} = \frac{1 - \|\Delta\|_1}{2}, \quad (5.36)$$

onde $\Delta \equiv q\rho_1 - (1 - q)\rho_2$ é a matriz de Helstrom.

O próximo teorema fornece a relação entre mapas positivos que preservam traço com a medida de distinguibilidade induzida pela 1-norma Schatten, nomeadamente a distância traço.

Teorema 13. *Suponha que \mathcal{E} representa um mapa linear que preserva o traço e a hermitianicidade⁷. Então, \mathcal{E} é um mapeamento positivo se, e somente se, para todo operador hermitiano Δ for verdade que*

$$\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 \leq \|\Delta\|_1. \quad (5.37)$$

Demonstração. Assuma que o mapa linear \mathcal{E} que preserva o traço e a hermitianicidade também é um mapeamento positivo. Então para todo operador positivo semi-definido (e portanto hermitiano) Δ , a norma traço é também preservada, ou seja, $\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 = \|\Delta\|_1$. Agora, considere um operador hermitiano geral Δ (não necessariamente positivo semi-definido). Logo, podemos decompor $\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$, onde Δ^\pm são operadores positivos semi-definidos correspondente às partes positivas e negativas do espectro de Δ . Logo, nós temos que

$$\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 = \|\mathcal{E}(\Delta^+) + \mathcal{E}(\Delta^-)\|_1 \quad (5.38)$$

$$\leq \|\mathcal{E}(\Delta^+)\|_1 + \|\mathcal{E}(\Delta^-)\|_1 = \|(\Delta^+)\|_1 + \|(\Delta^-)\|_1 \quad (5.39)$$

$$= \|\Delta\|_1, \quad (5.40)$$

⁷ Para todo operador A hermitiano, $\mathcal{E}(A)$ também é hermitiano.

onde aplicamos a linearidade do mapa \mathcal{E} juntamente com a desigualdade triangular da norma L_1 e também a hipótese de que \mathcal{E} é um mapa positivo. Logo, a positividade de \mathcal{E} implicou que $\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 \leq \|\Delta\|_1$ para todo operador hermitiano Δ .

Inversamente, assumamos agora que o mapa linear \mathcal{E} que preserva o traço e a hermitianicidade também satisfaz a desigualdade $\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 \leq \|\Delta\|_1$ para todo operador hermitiano Δ . Considerando um operador positivo semi-definido Δ , temos que

$$\|\Delta\|_1 = \text{Tr}\{\Delta\} = \text{Tr}\{\mathcal{E}(\Delta)\}, \quad (5.41)$$

onde usamos que a norma L_1 é a soma dos valores singulares de um operador (correspondendo ao seu traço no caso de um operador positivo semi-definido), e que o mapa \mathcal{E} preserva o traço. Como \mathcal{E} preserva a hermitianicidade e $\Delta \geq 0$ (e portanto hermitiano), temos que $\mathcal{E}(\Delta)$ é hermitiano. Logo, a norma L_1 de $\mathcal{E}(\Delta)$ é igual a soma dos módulos dos seus auto-valores. Uma vez que o traço é igual somente a soma dos auto-valores (sem considerar os módulos), nós temos que $\text{Tr}\{\mathcal{E}(\Delta)\} \leq \|\mathcal{E}(\Delta)\|_1$. Portanto, para todo operador positivo semi-definido Δ , nós acabamos de mostrar que

$$\|\Delta\|_1 \leq \|\mathcal{E}(\Delta)\|_1. \quad (5.42)$$

Tomando a hipótese inicial, nós temos a desigualdade oposta, $\|\Delta\|_1 \leq \|\mathcal{E}(\Delta)\|_1$ para todo $\Delta \geq 0$. Considerando as duas desigualdades, nós temos que $\|\Delta\|_1 = \|\mathcal{E}(\Delta)\|_1$, e portanto é verdade que

$$\|\mathcal{E}(\Delta)\|_1 = \text{Tr}\{\mathcal{E}(\Delta)\}, \quad (5.43)$$

que vale para todo operador positivo semi-definido Δ . Por fim, uma vez que $\|A\|_1 = \text{Tr}\{A\}$ se, e somente se, $A \geq 0$, então concluímos que $\mathcal{E}(\Delta) \geq 0$. Portanto, para todo $\Delta \geq 0$, nós mostramos que $\mathcal{E}(\Delta) \geq 0$, e então o mapeamento \mathcal{E} é positivo. \square

Este teorema é similar ao Teorema 11 que relaciona processos clássicos divisíveis com a propriedade de contração do propagador. Temos também um análogo para dinâmicas quânticas, como ilustrado pelo seguinte teorema.

Teorema 14. *Suponha que temos um sistema quântico descrito pelo espaço de Hilbert \mathcal{H} e cuja dinâmica é dada pelo mapa dinâmico $\{\mathcal{E}_{(t,t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ para um dado instante inicial t_0 . Esta evolução é RHP-Markoviana (Definição 34), ou equivalentemente divisível (Definição 33) se, e somente se, para todo par de instantes t_1 e t_2 tais que $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, é verdade que*

$$\left\| [\mathcal{E}_{(t_2, t_1)} \otimes \mathbf{1}](\Delta') \right\|_1 \leq \|\Delta'\|_1 \quad (5.44)$$

para todo operador hermitiano Δ' atuando no espaço $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Demonstração. Uma vez que um processo quântico divisível é tal que o mapeamento $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$ é um canal quântico, em particular é um mapeamento completamente positivo, para todo $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, então o mapa $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)} \otimes \mathbb{1}$ é positivo. Dessa forma, o resultado segue do Teorema 13. \square

Podemos então caracterizar a divisibilidade como sendo equivalente a propriedade de contração do mapa dinâmico, tal como descrito no Teorema 14. Vamos agora interpretar esse resultado como a manifestação da ausência de memória em dinâmicas divisíveis (ou equivalentemente RHP-Markovianas).

Concretamente, considere que um sistema quântico S que evolui de um instante inicial t_0 para um instante posterior $t \geq t_0$ através de um mapa dinâmico $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$. O sistema S é preparado inicialmente (no instante t_0) no estado ρ_1 com probabilidade q ou no estado ρ_2 com probabilidade $(1 - q)$. Nosso objetivo é descobrir qual foi o verdadeiro estado do sistema preparado no instante t_0 executando uma medição em S no instante t . Veja que a probabilidade de erro para distinguir entre estes dois estados é dada por

$$p_e^{\min}(t) = \frac{1 - \|\Delta(t)\|_1}{2}, \quad (5.45)$$

onde $\Delta(t) \equiv q\rho_1(t) - (1 - q)\rho_2(t)$ é a matriz de Helstrom, e temos que $\rho(t) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho(t_0))$. Logo, note que $\Delta(t) = q\mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho_1) - (1 - q)\mathcal{E}_{(t, t_0)}(\rho_2) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(q\rho_1 - (1 - q)\rho_2) = \mathcal{E}_{(t, t_0)}(\Delta(t_0))$, e portanto nós podemos escrever

$$p_e^{\min}(t) = \frac{1 - \|\mathcal{E}_{(t, t_0)}(\Delta(t_0))\|_1}{2}. \quad (5.46)$$

Portanto, uma vez que a evolução do sistema é descrita em termos de um mapa dinâmico $\{\mathcal{E}_{(t, t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$, temos que $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ é um canal quântico e, conseqüentemente, constitui um mapa completamente positivo para todo $t \geq t_0$. Em particular, tal mapeamento é também positivo, e pelo Teorema 13 podemos concluir que se este processo for divisível, temos

$$\|\mathcal{E}_{(t, t_0)}(\Delta(t_0))\|_1 \leq \|\Delta(t_0)\|_1, \quad (5.47)$$

e então é verdade que

$$p_e^{\min}(t) \geq p_e^{\min}(t_0), \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.48)$$

Dessa forma, para uma evolução divisível (RHP-Markoviana), a probabilidade de errar a distinguibilidade entre dois possíveis estados inicialmente preparados aumenta monotonicamente com o tempo. Isto significa que precisamos medir o sistema o mais brevemente possível para que possamos aumentar as chances de distinguir os estados inicialmente preparados. Podemos então interpretar este comportamento como a ausência da capacidade do sistema de reter informação sobre os estados iniciais, ou seja, o sistema “esquece” os estados inicialmente preparados a medida em que evolui no tempo. Novamente, esta

consequência também é presente nos sistemas estocásticos clássicos com comportamento Markoviano (Definição 30), como foi descrito pelo Teorema 11.

Veja também que no caso quântico, tal como discutido anteriormente, nós nunca podemos excluir a possibilidade de existência de um sistema “oculto” A que não interage com o sistema S e que possui dimensões arbitrárias⁸. Entretanto, a discussão feita no parágrafo anterior vale também neste caso, uma vez que a evolução do sistema composto $S + A$ é dada pelo mapeamento $\mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathbb{1}$. Uma vez que o mapa dinâmico $\mathcal{E}_{(t,t_0)}$ é completamente positivo $\forall t \geq t_0$, então o mapeamento $\mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathbb{1}$ é positivo e toda a discussão anterior continua sendo válida também neste contexto, onde temos a contratividade de evoluções divisíveis dada pelo Teorema 14. Veja que isto não é válido para mapeamentos positivos (somente), e nós precisamos incluir a completa positividade para que o resultado do Teorema 14 seja verdade. Podemos observar então que a diferença entre positividade e completa positividade de mapas lineares toma um importante papel também no contexto da Markovianidade quântica.

Por fim, observe o contraste entre uma dinâmica RHP-Markoviana e uma RHP não-Markoviana. Enquanto que em um processo divisível a melhor escolha é medir o sistema o mais brevemente possível, para uma dinâmica RHP não-Markoviana (não divisível) a contratividade é quebrada para algum instante $t' > t_0$. Isto significa que a norma da matriz de Helstrom $\|\Delta(t)\|_1$ aumenta neste instante, logo a probabilidade de erro diminui. Portanto, no caso de uma dinâmica não divisível, nós podemos esperar até algum instante de tempo t' para medir o sistema, pois a probabilidade de acertar a distinção entre os dois possíveis estados preparados em t_0 pode aumentar no instante t' . Novamente, isto pode ser interpretado como a presença de uma memória do sistema relativa aos estados inicialmente preparados. Isto é, uma dinâmica RHP não-Markoviana (não divisível) pode reter informação sobre seus estados, que pode se manifestar na dinâmica em algum instante posterior.

Para concluir esta discussão, nós apresentamos a definição de Markovianidade quântica introduzida por Rivas, Huelga e Plenio (11) em detalhe, que se baseou na divisibilidade do mapa dinâmico. Vamos também fornecer outras definições de Markovianidade quântica também em termos do mapa dinâmico e estabelecer suas conexões nas próximas subseções. Iremos iniciar discutindo a propriedade de semigrupo, que será introduzida a seguir.

5.2.4 Semigrupos e Markovianidade

Historicamente, a ausência de efeitos de memória foi comumente associada a formulação da evolução de sistemas quânticos através de equações mestras com coeficientes independentes do tempo. Em oposição, modelos descritos por equações mestras dependentes

⁸ Esta discussão motivou a imposição da completa positividade para os canais quânticos.

do tempo foram associados à não-Markovianidade. Para introduzir tal abordagem, nós precisamos definir a *propriedade de semigrupo* para as evoluções quânticas, que também irá ser denotado de *semigrupo dinâmico*.

Definição 35 (Semigrupo dinâmico). *Uma família $\{\mathcal{E}_\tau\}_{\tau \in [0, \infty)}$ de mapeamentos lineares \mathcal{E}_τ que preservam o traço, sendo completamente positivos e satisfazendo a lei de composição*

$$\mathcal{E}_\tau \mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_{\tau+\sigma} ; \forall \tau, \sigma \geq 0 , \quad (5.49)$$

juntamente com $\mathcal{E}_0 = id$, onde id corresponde ao super-operador identidade, é chamada de semigrupo dinâmico.

Note que um semigrupo dinâmico não constitui um grupo pois, em geral, um mapeamento \mathcal{E}_τ não possui inversa⁹. Além disso, veja que a Definição 35 para os semigrupos dinâmicos é diferente da Definição 33 para um processo quântico divisível. De fato, a lei de composição $\mathcal{E}_\tau \mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_{\tau+\sigma}$ é justamente um caso particular da lei de composição utilizada na Definição 33 para um mapa dinâmico com dois parâmetros temporais, como iremos mostrar a seguir. Nomeadamente, a composição $\mathcal{E}_\tau \mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_{\tau+\sigma}$ se aplica para o caso de homogeneidade temporal, enquanto que a composição $\mathcal{E}_{(t_3, t_2)} \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} = \mathcal{E}_{(t_3, t_1)}$ reflete o caso geral de inhomogeneidade temporal.

Historicamente, é comum adotar a noção de semigrupo dinâmico como uma possível definição de Markovianidade quântica.

Definição 36 (Semigrupo dinâmico e Markovianidade Quântica). *A propriedade de semigrupo pode ser considerada uma assinatura de Markovianidade de um sistema quântico. Ou seja, um sistema cuja evolução é descrita por um semigrupo dinâmico pode ser chamado de Markoviano.*

Veja que todo mapa dinâmico que satisfaz a propriedade de semigrupo é um mapa divisível. Nomeadamente, seja \mathcal{E}_τ um mapa dinâmico que descreve um sistema que possui homogeneidade no tempo. Podemos definir $\tau = t - t_0$ para algum instante inicial t_0 , pois a homogeneidade nos permite trabalhar simplesmente com os intervalos de evolução temporal¹⁰. Dessa forma, se $\mathcal{E}_\tau \mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_{\tau+\sigma}$ para todo $\tau, \sigma \geq 0$, então $\mathcal{E}_{(t_3, t_2)} \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} = \mathcal{E}_{(t_3, t_1)}$ para todos os instantes t_1, t_2 e t_3 tais que $t_3 \geq t_2 \geq t_1$. Portanto, um semigrupo dinâmico representa um processo divisível, tal como descrito na Definição 33. Entretanto, vale ressaltar que a afirmação inversa não é verdadeira. Ou seja, existem processos divisíveis que não satisfazem a definição de um semigrupo dinâmico. Isto ocorre quando há um ponto privilegiado no tempo¹¹, e a homogeneidade temporal é quebrada.

⁹ Isso reflete o fato de que as evoluções de sistemas quânticos abertos são, em geral, irreversíveis.

¹⁰ Isso significa que o sistema é invariante por translações no tempo, e nós podemos fixar o instante inicial em qualquer ponto da dimensão temporal.

¹¹ Experimentalmente esta situação pode ser obtida se um campo externo ao sistema é ligado em algum instante de tempo específico, por exemplo.

A definição de Markovianidade quântica sob a ótica dos semigrupos dinâmicos sofre de algumas inconveniências. Por exemplo, esta abordagem não inclui a possibilidade de dinâmicas sem memória descritas por equações mestras com coeficientes dependentes do tempo, se restringindo apenas aos casos onde o gerador (Eq.(5.33)) é independente do tempo. Para mais informações sobre a abordagem dos semigrupos dinâmicos, o leitor é indicado a consultar a referência (51).

A seguir, vamos introduzir mais uma noção de Markovianidade que pode ser adotada no regime de sistemas quânticos gerais e se baseia no comportamento de medidas de distinguibilidade.

5.2.5 BLP-Markovianidade

Trabalhos desenvolvidos por Breuer, Laine e Pillo (46–48) mostraram que é possível definir uma noção de Markovianidade quântica utilizando medidas de distinguibilidade entre estados de um sistema. Concretamente, eles introduziram a seguinte definição para Markovianidade em evoluções quânticas baseando-se no comportamento da distância traço.

Novamente, vamos analisar o caso de um problema de distinção entre dois estados inicialmente preparados em um sistema quântico S . No instante t_0 , preparamos o sistema no estado ρ_1 com probabilidade q ou no estado ρ_2 com probabilidade $1 - q$, e desejamos descobrir qual é o verdadeiro estado inicial do sistema realizando uma medição em S no instante $t \geq t_0$. A probabilidade de erro é então dada pela expressão

$$p_e^{\min}(t) = \frac{1 - \|\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\Delta(t_0))\|_1}{2}, \quad (5.50)$$

onde $\Delta(t_0) = q\rho_1 - (1 - q)\rho_2$. Logo, a BLP-Markovianidade se baseia no comportamento da norma L_1 da matriz de Helstrom, tal como iremos definir a seguir.

Definição 37 (BLP-Markovianidade). *Uma evolução quântica descrita por um mapa dinâmico $\{\mathcal{E}_{(t,t_0)}\}$ para um dado instante inicial t_0 é dita BLP-Markoviana se a função $f(t) \equiv \|\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\Delta(t_0))\|_1$ é monotonicamente decrescente¹² no tempo $t \geq 0$ para todo valor da probabilidade q e para todo par de estados iniciais $\rho_{1,2}$ do sistema quântico aberto.*

A motivação da Definição 37 é análoga à discussão feita para o caso da RHP-Markovianidade. Nomeadamente, o decaimento monótono da função $\|\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\Delta(t_0))\|_1$ no tempo t representa a ausência da capacidade do sistema de reter a informação sobre os estados inicialmente preparados. Logo, o sistema “esquece” dos seus estados iniciais a medida em que evolui temporalmente.

Note que a Definição 34 para a RHP-Markovianidade é um caso particular da BLP-Markovianidade. Nomeadamente, como discutido anteriormente, um sistema quântico

¹² Ou seja, $f(x) \leq f(y)$ para todo par x, y com $x \leq y$.

que evolui de acordo com um mapa dinâmico $\{\mathcal{E}_{(t,t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ divisível satisfaz a condição de que $\|\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\Delta(t_0))\|_1$ é monotonicamente decrescente no tempo $t \geq 0$ para todo valor da probabilidade q e para todo par de estados iniciais $\rho_{1,2}$ do sistema quântico aberto, que segue devido aos Teoremas 13 e 14. Logo, todo sistema que é RHP-Markoviano é também BLP-Markoviano. Entretanto, o contrário não é verdade. É possível mostrar exemplos (11, 48) onde o mapa dinâmico é não divisível (e portanto RHP não-Markoviano) mas satisfaz a condição dada pela Definição 37, sendo portanto BLP-Markoviano.

Vamos agora recapitular os principais pontos discutidos. Nós introduzimos a RHP-Markovianidade motivados por obter uma teoria matemática que generalizasse a teoria clássica de Markovianidade para probabilidades de um único ponto, nomeadamente equivalente ao conceito de divisibilidade dos propagadores que descrevem a evolução do sistema. Além de tal definição, nós também mencionamos que é possível introduzir a noção de Markovianidade no domínio quântico através dos semigrupos dinâmicos, que são responsáveis por descrever sistemas com homogeneidade temporal. Por fim, apresentamos a BLP-Markovianidade, que se baseia no comportamento monótono da medida de distinguibilidade induzida pela norma L_1 no espaço de estados.

Para concluir esta discussão, vale ressaltar a seguinte hierarquia das definições apresentadas. Todo sistema descrito por um semigrupo dinâmico satisfaz a propriedade de divisibilidade, sendo portanto RHP-Markoviano, mas a inversa não é verdadeira. Além disso, toda evolução divisível (RHP-Markoviana) satisfaz as condições impostas pela BLP-Markovianidade, mas a inversa também não é verdade. Podemos então definir uma hierarquia entre tais definições, ilustrada pela seguinte relação

$$\text{Semigrupos dinâmicos} \subset \text{RHP-Markovianidade} \subset \text{BLP-Markovianidade} . \quad (5.51)$$

Todas essas definições se baseiam nas propriedades do mapa dinâmico que descreve o sistema quântico aberto, sem fazer menção as interações entre o sistema e o ambiente, e cada uma é aplicável em determinados contextos bem definidos. Para noções de Markovianidade em sistemas quânticos abertos definidas a partir das interações sistema-ambiente, o leitor é indicado a consultar a referência (49). As três definições apresentadas constituem formas de caracterizar uma dinâmica quântica Markoviana. Na próxima seção, iremos brevemente discutir algumas formas de quantificar os efeitos não-Markovianos introduzindo as *medidas de não-Markovianidade*. Em complemento, iremos apresentar formas de detectar tais efeitos através das *testemunhas de não-Markovianidade*.

5.3 Medidas e Testemunhas de não-Markovianidade

A próxima questão que iremos discutir é da quantificação da não-Markovianidade de uma dada evolução. Em outras palavras, seria possível atribuir um grau ou medida

para os desvios da Markovianidade para uma determinada dinâmica? Este questionamento motiva a seguinte definição.

Definição 38 (Medidas de não-Markovianidade e grau de não-Markovianidade). *Uma medida de não-Markovianidade é uma função não-negativa que assume um valor (positivo ou nulo) para cada dinâmica, de tal forma que o valor nulo é obtido se, e somente se, a dinâmica for Markoviana. Quando uma medida de não-Markovianidade é normalizada, com valores entre 0 e 1, ela será chamada de grau de não-Markovianidade (embora outras normalizações também possam ser utilizadas).*

Existem diversas formas de definir uma medida de não-Markovianidade, partindo de abordagens geométricas (57, 58) ou até mesmo utilizando a contratividade da norma traço da matriz de Helstrom (46, 59), e nem sempre há uma relação bem definida entre estes quantificadores. No que segue, nós iremos apresentar duas medidas que podem ser facilmente relacionadas para o caso de uma dinâmica de um q-dit.

5.3.1 Medida RHP

A medida RHP de não-Markovianidade foi originalmente proposta por Rivas, Huelga e Plenio em (60) e será apresentada a seguir. Suponha um sistema quântico cuja evolução é descrita pelo mapa dinâmico $\{\Lambda_{(t,t_0)}\}_{t \in [t_0, \infty)}$ para um dado instante inicial t_0 . A ideia básica desta medida é quantificar quanto que uma dinâmica intermediária $\{\Lambda_{(t,t_1)}\}_{t \in [t_1, \infty)}$ não é completamente positiva para todo $t_1 \geq t_0$. Veja que, por continuidade temporal, temos

$$\Lambda_{(t,t_0)} = \Lambda_{(t,t_1)}\Lambda_{(t_1,t_0)} , \quad (5.52)$$

entretanto nem sempre o mapeamento $\Lambda_{(t,t_1)}$ constitui um canal quântico para todo $t_1 \geq t_0$, caso contrário a dinâmica será RHP-Markoviana de acordo com a Definição 34. Por simplicidade, vamos supor que o mapeamento $\Lambda_{(t,t_0)}$ é invertível para todo $t \in [t_0, \infty)$. Logo, nós podemos obter a dinâmica intermediária como

$$\Lambda_{(t,t_1)} = \Lambda_{(t,t_0)}\Lambda_{(t_1,t_0)}^{-1} , \quad (5.53)$$

e note que existirá um instante $t_1 > t_0$ onde o mapa $\Lambda_{(t,t_1)}$ não será um canal quântico no caso de uma dinâmica não-Markoviana. Uma vez que $\Lambda_{(t,t_1)}$ dado pela Eq.(5.53) é a composição de dois mapas lineares que preservam o traço, conseqüentemente ele também será um mapa linear que preserva o traço. Conseqüentemente, este mapa não será um canal quântico quando não for completamente positivo. Dessa forma, nós podemos medir o quanto que a dinâmica intermediária descrita por $\{\Lambda_{(t,t_1)}\}_{t \in [t_1, \infty)}$ com $t_1 > t_0$ é RHP não-Markoviana medindo o quanto que o mapa $\Lambda_{(t,t_1)}$ se desvia da completa positividade.

Para quantificar o quanto que a dinâmica intermediária descrita por $\{\Lambda_{(t,t_1)}\}_{t \in [t_1, \infty)}$ pata todo $t_1 > t_0$, nós podemos recorrer ao conhecido *operador de Choi* (5). Considere o estado $|\Phi\rangle$ de máximo emaranhamento entre duas cópias do nosso sistema, nomeadamente

$$|\Phi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle \otimes |i\rangle , \quad (5.54)$$

onde $d = \dim(\mathcal{H})$ representa a dimensão do espaço de Hilbert que descreve o sistema. Nós associamos o mapa $\Lambda_{(t,t_1)}$ com o seu *operador de Choi*, denotado como $\Omega_\Lambda(t, t_1)$ e definido por

$$\Omega_\Lambda(t, t_1) \equiv [\Lambda_{(t,t_1)} \otimes \mathbb{1}] (|\Phi\rangle \langle \Phi|) . \quad (5.55)$$

O Teorema de Choi (5) afirma que o mapeamento $\Lambda_{(t,t_1)}$ é completamente positivo se, e somente se, o seu operador de Choi $\Omega_\Lambda(t, t_1)$ é positivo semi-definido. Considerando a Eq.(5.53), nós temos que $\Lambda_{(t,t_1)}$ preserva o traço e, consequentemente, a norma traço do operador de Choi nos fornece uma medida dos desvios da completa positividade deste mapeamento. De forma precisa, nós temos

$$\left\| [\Lambda_{(t,t_1)} \otimes \mathbb{1}] (|\Phi\rangle \langle \Phi|) \right\|_1 \begin{cases} = 1 & \Leftrightarrow \Lambda_{(t,t_0)} \text{ é completamente positivo,} \\ > 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.56)$$

Podemos então definir a função

$$g(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left\| [\Lambda_{(t+\epsilon, t)} \otimes \mathbb{1}] (|\Phi\rangle \langle \Phi|) \right\|_1 - 1}{\epsilon} , \quad \forall t \in [t_0, \infty) , \quad (5.57)$$

onde teremos $g(t) > 0$ para algum $t \in (t_0, \infty)$ se, e somente se, a evolução é RHP não-Markoviana. Logo, a quantidade de não-Markovianidade contida em um intervalo I é dada por

$$\mathcal{N}_{\text{RHP}}^I \equiv \int_I g(t) dt , \quad (5.58)$$

na qual denota a medida RHP de não-Markovianidade. Nós também podemos normalizar esta medida para obter um *grau de não-Markovianidade*, como descrito em (61).

Note que nós supomos que o mapa $\Lambda_{(t,t_0)}$ é invertível para todo instante $t \in [t_0, \infty)$, onde definimos a dinâmica intermediária através da Eq.(5.53). Se existir um instante t onde o mapa $\Lambda_{(t,t_0)}$ não é invertível, existem métodos para lidar com uma singularidade isolada (11) e também é possível utilizar as Moore–Penrose pseudo-inversas (62).

A medida RHP de não-Markovianidade foi definida em termos do mapa dinâmico que descreve a evolução do sistema, onde a ideia central foi de quantificar os desvios da

completa positividade. Por outro lado, também é comum descrever a evolução de sistemas quânticos através de equações mestras do tipo Lindblad, e nesse caso as *Medida definida através das taxas de decaimento* se mostra bastante útil.

5.3.2 Medida definida através das taxas de decaimento

Considere um sistema quântico descrito por uma equação mestra do tipo Lindblad (Eq.(5.35)), isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}_t(\rho(t)) = & -i[H(t), \rho(t)] \\ & + \sum_k \gamma_k(t) \left[V_k(t)\rho(t)V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{V_k^\dagger(t)V_k(t), \rho(t)\} \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Hall, Cresser, Li e Andersson (63) propuseram uma medida de não-Markovianidade baseada nas taxas de decaimento $\gamma_k(t)$. De acordo com o Teorema 12, nós sabemos que tal sistema será RHP Markoviano se, e somente se, $\gamma_k(t) \geq 0$ para todo k e para todo $t \in [t_0, \infty)$. Dessa forma, podemos definir

$$f_j(t) \equiv \max \{-\gamma_j(t), 0\}, \quad (5.60)$$

e a dinâmica será RHP-Markoviana se, e somente se, $f_j(t) = 0$ para todo j e para todo $t \in [t_0, \infty)$. Definindo $f(t) \equiv \sum_j f_j(t)$ e considerando um intervalo I de tempo limitado, nós podemos definir a seguinte medida de não-Markovianidade

$$\mathcal{N}_\gamma^I \equiv \int_I f(t) dt, \quad (5.61)$$

na qual corresponde a medida de não-Markovianidade definida através das taxas de decaimento.

Para finalizar, vale a pena mencionar que as duas medidas apresentadas são relacionadas de forma muito simples. Pode ser provado (63) que $f(t) = (d/2)g(t)$ e consequentemente temos que

$$\mathcal{N}_\gamma^I = \frac{d}{2} \mathcal{N}_{\text{RHP}}^I. \quad (5.62)$$

Portanto, nós apresentamos duas medidas de não-Markovianidade e ilustramos a relação entre elas. Agora, vamos nos voltar ao problema da detecção de não-Markovianidade, introduzindo o conceito de *testemunha de não-Markovianidade*.

5.3.3 Testemunha de não-Markovianidade e medida BLP

Vamos iniciar introduzindo o conceito de uma *testemunha de não-Markovianidade*, que está diretamente relacionado com o problema de detecção dos efeitos de memória contidos na dinâmica de um sistema.

Definição 39 (Testemunhas de não-Markovianidade). *Por definição, uma testemunha de não-Markovianidade é uma grandeza que é nula para toda dinâmica Markoviana e que também pode ser nula para uma dinâmica não-Markoviana. Entretanto, quando esta grandeza não é nula, nós temos a certeza de que a evolução é não-Markoviana.*

Em outras palavras, uma testemunha de não-Markovianidade é responsável por detectar os efeitos de memória na evolução dinâmica de um dado sistema. A seguir, nós iremos introduzir um exemplo de testemunha de não-Markovianidade induzida pela distância traço e também iremos definir a *medida BLP*.

Considere o caso onde um sistema quântico pode ser inicialmente preparado em um estado $\rho_1(0)$ ou $\rho_2(0)$ com probabilidade $p = 1/2$. Neste caso, a matriz de Helstrom torna-se $\Delta = (\rho_1(0) - \rho_2(0))/2$ e sua norma traço corresponde a distância traço entre $\rho_1(0)$ e $\rho_2(0)$. Adicionalmente, suponha que a evolução dinâmica do sistema é descrita em termos de um mapa dinâmico $\{\Lambda_{(t,0)}\}_{t \geq 0}$ para um instante inicial $t_0 = 0$. Logo, o estado dinâmico do sistema será $\rho_i(t) = \Lambda_{(t,0)}[\rho_i(0)]$ com $i = 1, 2$. A distância traço entre $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$ é dada por

$$D_1(\rho_1(t), \rho_2(t)) \equiv \frac{1}{2} \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_1, \quad (5.63)$$

e podemos definir

$$\sigma(\rho_1, \rho_2, t) \equiv \frac{dD_1(\rho_1(t), \rho_2(t))}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{D_1(\rho_1(t + \epsilon), \rho_2(t + \epsilon)) - D_1(\rho_1(t), \rho_2(t))}{\epsilon}. \quad (5.64)$$

Devido o Teorema 11, se a dinâmica é RHP-Markoviana, nós temos que $\sigma \leq 0$ para todo instante de tempo. Além disso, de acordo com a Definição 37, também temos $\sigma \leq 0 \forall t \geq 0$ para o caso de uma dinâmica BLP-Markoviana. Dessa forma, a distância traço pode ser utilizada como uma testemunha da RHP ou BLP não-Markovianidade. Com efeito, considerando um intervalo limitado I , a grandeza

$$\int_{I, \sigma > 0} dt \sigma(\rho_1, \rho_2, t) \quad (5.65)$$

corresponde a uma testemunha de não-Markovianidade. Em outras palavras, se esta quantidade é não nula para algum par de estados iniciais $\rho_1(0)$ e $\rho_2(0)$, nós garantidamente podemos afirmar que a dinâmica é BLP e RHP não-Markoviana.

Curiosamente, nós podemos obter também uma medida de não-Markovianidade inspirada nessa testemunha de não-Markovianidade. A *medida BLP* foi originalmente desenvolvida por Breuer, Laine e Piilo em (46), e é definida por

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} \equiv \max_{\rho_1(0), \rho_2(0)} \int_{\sigma > 0} dt \sigma(\rho_1, \rho_2, t) \quad (5.66)$$

onde a integral é realizada no intervalo $[0, \infty)$. Em outras palavras, a medida \mathcal{N}_{BLP} corresponde ao maior valor que a testemunha de não-Markovianidade descrita na Eq.(5.65)

pode assumir variando todos os estados iniciais possíveis e integrando sobre todos os tempos de evolução.

Até aqui, nós ilustramos diferentes formas de caracterizar, quantificar e detectar os efeitos de memória na dinâmica de um sistema quântico. A seguir, iremos apresentar um exemplo de sistema onde é possível controlar os efeitos não-Markovianos de sua dinâmica e iremos aplicar as diferentes noções de Markovianidade, assim como discutir as medidas de não-Markovianidade introduzidas nesta seção.

5.4 Controlando a não-Markovianidade

Nesta última seção, nós iremos introduzir um exemplo de dinâmica de um sistema quântico aberto na qual é possível controlar os efeitos não-Markovianos da evolução, baseada na referência (50). Vamos iniciar definindo os parâmetros centrais do modelo e descrevendo a dinâmica do sistema total que será constituído de dois q-bits interagentes que estão acoplados com um ambiente bosônico.

5.4.1 Dinâmica global

Nós iremos trabalhar com dois q-bits interagentes que estão acoplados com um ambiente bosônico. A Hamiltoniana que descreve o sistema composto, nomeadamente os dois q-bits juntamente com o ambiente, é dada por

$$H(t) = H_s(t) + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \frac{S_z}{2} \sum_k \hbar (g_k b_k^\dagger + g_k^* b_k), \quad (5.67)$$

onde a Hamiltoniana $H_s(t)$ que descreve a interação dos dois q-bits é dada por

$$H_s(t) = \sum_{i=1,2} \hbar e_i(t) \frac{\sigma_{zi}}{2} + \hbar \frac{J(t)}{2} \sigma_{z1} \sigma_{z2}. \quad (5.68)$$

Note que o termo $\sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k$ descreve a Hamiltoniana do ambiente bosônico, H_E , enquanto que o termo $\frac{S_z}{2} \sum_k \hbar (g_k b_k^\dagger + g_k^* b_k)$ descreve a Hamiltoniana de interação entre o ambiente e o sistema com dois q-bits, denotada por H_I . Temos então que $H(t) = H_s(t) + H_E + H_I(t)$, sendo H_s e H_E as Hamiltonianas livres do sistema e ambiente, respectivamente, e H_I denota a interação. Além disso, σ_{zi} representa a matriz de Pauli no eixo z para cada um dos q-bits, com $i = 1, 2$, enquanto que $\hbar e_i(t)/2$ é a energia de cada q-bit, e $J(t)$ é o parâmetro de interação entre eles, também conhecida por *constante de acoplamento*. No caso onde cada q-bit representa um spin $1/2$, o operador $S_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2}$ é o spin total na direção z do sistema de dois q-bits.

Vamos expressar as matrizes na base computacional $\{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$ dos auto-estados de σ_{zi} com $i = 1, 2$, ou seja, $\sigma_{zi} |l\rangle_i = (-1)^l |l\rangle_i$ com $l \in \{0, 1\}$. Dessa forma, $\{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$ é uma base ortonormal do espaço de Hilbert bidimensional \mathcal{H}_i do q-bit i , com $i = 1, 2$. Por fim,

uma vez que o ambiente é considerado bosônico, os operadores de criação e aniquilação, b_k e b_k^\dagger , satisfazem a álgebra $[b_m, b_n^\dagger] = \delta_{m,n}$.

O ambiente bosônico, nomeadamente descrito por um banho de osciladores harmônicos e introduzido pelos operadores de criação e aniquilação b_k e b_k^\dagger , é caracterizado pela densidade espectral \mathcal{J} dada por (45)

$$\mathcal{J}(\omega) \equiv \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k), \quad (5.69)$$

que será responsável por fornecer a não unitariedade na evolução do sistema de dois q-bits.

Uma vez que $[\sigma_{zi}, H] = 0$, as populações dos auto-estados $|0\rangle_i$ e $|1\rangle_i$ dos operadores σ_{zi} com $i = 1, 2$ são constantes de movimento, e a dissipação induzida pelo ambiente unicamente induz defasagens aleatórias entre quaisquer superposição destes estados. Além disso, a evolução total do sistema composto pelos dois q-bits juntamente com o ambiente bosônico é descrita por um canal unitário, onde o operador unitário é dado por

$$\begin{aligned} U(t, 0) &= e^{-i \left(\sum_{j=1,2} \frac{\sigma_{zj}}{2} \int_0^t d\tau e_i(\tau) + \frac{\sigma_{z1}\sigma_{z2}}{2} \int_0^t d\tau J(\tau) + t \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \right)} \\ &\times e^{itS_z^2 \sum_k \frac{|g_k|^2}{4\omega_k^2} \left\{ \omega_k - \frac{\sin \omega_k t}{t} \right\}} e^{\frac{S_z}{2} \sum_k [G_k(t) b_k^\dagger - G_k^*(t) b_k]}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

onde $G_k(t) \equiv \frac{g_k(1-e^{i\omega_k t})}{\omega_k}$. Dessa forma, denotemos por $\rho_{SB}(t)$ o estado dinâmico do sistema total, isto é, o sistema composto pelos dois q-bits juntamente com o ambiente. O sistema de dois q-bits será denotado por S , ou seja, $S = Q_1 \cup Q_2$, onde Q_i denota o q-bit i , com $i = 1, 2$. Por outro lado, o ambiente bosônico será denotado por B .

Vamos supor¹³ que inicialmente não há correlações entre S e B , ou seja,

$$\rho_{SB}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0). \quad (5.71)$$

Além disso, vamos assumir que o banho está em equilíbrio térmico em uma temperatura T . Conseqüentemente nós temos $\rho_B(t) = \rho_B(0) \equiv \rho_B \forall t \geq 0$ e ρ_B é dito um estado estacionário do ambiente, que neste caso é dado pelo estado de Gibbs, isto é,

$$\rho_B = \frac{e^{-\hbar\beta_{th} \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k}}{\text{Tr} \left(e^{-\hbar\beta_{th} \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k} \right)}, \quad (5.72)$$

onde $\beta_{th} = \frac{1}{k_b T}$ e k_b é a constante de Boltzman. Portanto, dado o operador unitário descrito pela Eq.(5.70) e o estado inicialmente descorrelacionado, Eq.(5.71), nós temos que a evolução do sistema composto SB é descrita por

$$\rho_{SB}(t) = U(t, 0)[\rho_S(0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t, 0), \forall t \geq 0. \quad (5.73)$$

¹³ É possível mostrar que se o sistema S for inicialmente preparado em um estado puro, o estado inicial total $\rho_{SB}(0)$ é um estado produto (6). Logo, uma vez que o experimentalista possui um controle inicial sobre o sistema, tal hipótese é fisicamente razoável.

Nós podemos descrever a evolução do sistema $S = Q_1 \cup Q_2$ tomando o traço parcial em ρ_{SB} sobre os graus de liberdade do ambiente. Nomeadamente, o estado dinâmico que descreve o sistema composto pelos dois q-bits interagentes é dado por $\rho_S(t) = \text{Tr}_B\{\rho_{SB}(t)\}$. Calculando a derivada total temporal $d\rho_S(t)/dt$ e utilizando a evolução unitária do estado total, dada pela Eq.(5.73), nós podemos mostrar que (50)

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_s(t), \rho_S(t)] + \frac{\gamma(t)}{2} \left(S_z \rho_S(t) S_z - \frac{1}{2} \{S_z^2, \rho_S(t)\} \right), \quad (5.74)$$

onde a taxa de decaimento $\gamma(t)$ é dada por

$$\gamma(t) = \int d\omega \frac{\mathcal{J}(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_b T}\right). \quad (5.75)$$

Por fim, vale ressaltar que a equação mestra (5.74) é obtida de forma exata, sem nenhum tipo de aproximação, e que ela descreve toda a dinâmica do sistema composto de dois q-bits interagentes, ambos acoplados com um ambiente bosônico descrito pela densidade espectral \mathcal{J} , que gera a dissipação do sistema e está implicitamente posicionada nas taxas de decaimento γ . Entretanto, nós não estamos particularmente interessados na dinâmica dos dois q-bits como um todo, mas sim na dinâmica particular de cada um dos q-bits. Na próxima subseção, nós iremos investigar a dinâmica do estado de cada q-bit, e veremos que a constante de acoplamento J irá desempenhar um importante papel na Markovianidade presente nesta evolução.

5.4.2 Dinâmica de um único q-bit

Até agora, nós lidamos com a dinâmica do sistema composto pelos dois q-bits considerando os efeitos dissipativos do ambiente bosônico. Agora nós queremos investigar quais são as propriedades da dinâmica de um único q-bit, levando em conta os efeitos dissipativos induzidos pelo ambiente térmico e também pela interação com o segundo q-bit. Isto é, o q-bit em análise será chamado de *q-bit principal*, enquanto que o segundo será chamado de *q-bit auxiliar*. Dessa forma, nós temos que o q-bit auxiliar juntamente com o ambiente bosônico irão constituir um ambiente efetivo para o q-bit principal, levando a dinâmica do q-bit principal a ser fundamentalmente diferente da dinâmica anteriormente estudada para sistema composto pelos dois q-bits. De fato, nós iremos ver que existem casos onde a dinâmica do sistema composto é Markoviana, enquanto que cada q-bit obedecerá uma dinâmica não-Markoviana.

Suponha que seja possível distinguir os dois q-bits, onde o estado do q-bit principal será denotado por $\rho_1(t)$ e o estado do q-bit auxiliar será $\rho_2(t)$. Dessa forma, o q-bit principal será acoplado com um ambiente efetivo constituído pelo q-bit secundário juntamente com o ambiente bosônico. Seu estado dinâmico será dado por

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_2\{\rho_S(t)\} = \text{Tr}_2\{\text{Tr}_B\{\rho_{SB}(t)\}\}, \quad (5.76)$$

onde $\text{Tr}_2\{\bullet\}$ denota o traço parcial sobre os graus de liberdade do q-bit auxiliar.

Uma vez que o estado dinâmico $\rho_{SB}(t)$ é dado pela Eq.(5.73) e a unitária que descreve a evolução total é dada pela Eq.(5.70), nós podemos calcular o traço parcial diretamente da Eq.(5.76) e escrever a matriz $\rho_1(t)$ na base computacional dos auto-vetores de σ_{z1} (50). Neste caso, nós obtemos que

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha & e^{-i \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\Gamma(t)} \beta(t) \\ e^{i \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\Gamma(t)} \beta^*(t) & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.77)$$

onde $\rho_{11} \equiv \alpha = \langle 0 | \rho_1(t) | 0 \rangle$ denota¹⁴ a população do estado $|0\rangle$, enquanto que $\rho_{12} \equiv e^{-i \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\Gamma(t)} \beta(t) = \langle 0 | \rho_1(t) | 1 \rangle$ representa a coerência entre os dois auto-estados de σ_{z1} , nomeadamente $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Dessa forma, o estado $\rho_1(t)$ pode ser reescrito em função da sua população e coerência como

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & 1 - \rho_{11}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.78)$$

Além disso, nós temos que

$$\Gamma(t) = \int_0^t d\tau \gamma(\tau), \quad (5.79)$$

$$\alpha = \langle 11 | \rho_S(0) | 11 \rangle + \langle 10 | \rho_S(0) | 10 \rangle, \quad (5.80)$$

$$\beta(t) = e^{i \int_0^t d\tau J(\tau)} \langle 10 | \rho_S(0) | 00 \rangle + e^{-i \int_0^t d\tau J(\tau)} \langle 11 | \rho_S(0) | 01 \rangle, \quad (5.81)$$

onde $|lj\rangle \equiv |l\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$, com $l, j \in \{0, 1\}$. Dessa forma, suponha que o experimentalista prepare o sistema composto pelos dois q-bits no estado $\rho_S(0)$. Uma vez que nós conhecemos tal estado, nós podemos calcular α , $\beta(t)$ e a *função de decoerência* (45) $\Gamma(t)$, obtendo assim toda a dinâmica do q-bit principal, nomeadamente descrita pelo estado dinâmico $\rho_1(t)$ dado pela Eq.(5.77).

Finalmente, nós podemos obter uma decomposição muito similar a representação de Kraus para um canal quântico. Nomeadamente, nós podemos escrever (50)

$$\rho_1(t) = \sum_{k \in \{-1, 0, 1\}} \Pi_k \rho_1(0) \Pi_k^\dagger, \quad (5.82)$$

onde temos que

$$\begin{aligned} \Pi_{-1} &= e^{-\frac{i}{2} \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\frac{\Gamma(t)}{2}} \sqrt{\frac{\beta(t)}{\beta(0)}} |1\rangle\langle 1| \\ &+ e^{\frac{i}{2} \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\frac{\Gamma(t)}{2}} \sqrt{\left(\frac{\beta(t)}{\beta(0)}\right)^*} |0\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\Pi_l = \sqrt{1 - e^{-\Gamma(t)} \left| \frac{\beta(t)}{\beta(0)} \right|} |l\rangle\langle l|; \quad l \in \{0, 1\}, \quad (5.84)$$

¹⁴ Como estamos lidando apenas com o q-bit principal, iremos escrever $|l\rangle$ ao invés de $|l\rangle_1$ com $l \in \{0, 1\}$, deixando a notação com subíndice apenas para os casos onde estivermos falando dos dois q-bits no mesmo contexto.

e podemos mostrar que $\Pi_{-1}^\dagger \Pi_{-1} + \Pi_0^\dagger \Pi_0 + \Pi_1^\dagger \Pi_1 = \mathbf{1}$. Nosso próximo ponto é investigar as propriedades do estado dinâmico do q-bit principal. Note que, em geral, o mapa dinâmico definido por $\rho_1(0) \rightarrow \rho_1(t)$ não é linear no estado inicial do q-bit principal, $\rho_1(0)$. Isto ocorre pois o estado $\rho_1(t)$ depende também do estado do sistema composto $\rho_S(0)$ através de α e $\beta(t)$. Além disso, os operadores Π_k também dependem do estado inicial do sistema composto, $\rho_S(0)$, logo a Eq.(5.82) não é uma genuína representação de Kraus. Por fim, independentemente da natureza da evolução do sistema composto por ambos os q-bits, a dinâmica que descreve a evolução de cada q-bit não é necessariamente dada em termos de um mapa dinâmico completamente positivo. Neste caso, não seria adequado nem sequer discutir o caráter Markoviano de tal evolução, uma vez que as definições de Markovianidade quântica discutidas até agora foram definidas somente em termos de canais quânticos. Conseqüentemente, podemos agora realizar o seguinte questionamento: *quais são as condições suficientes para que o mapeamento $\rho_1(0) \rightarrow \rho_1(t)$, dado pela Eq.(5.77), satisfaça um legítimo mapa dinâmico?*

É possível obter uma condição suficiente para que a evolução descrita pela Eq.(5.77) atenda aos requisitos de um mapa dinâmico, isto é, que o mapeamento $\rho_1(0) \rightarrow \rho_1(t)$ seja um mapeamento completamente positivo, linear em $\rho_1(0)$ e que preserve o traço para todo estado inicial. Quando o estado inicial do sistema composto pelos dois q-bits é um estado produto, $\rho_S(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0)$, nós temos que a dinâmica descrita pela Eq.(5.77) corresponde a um legítimo mapa dinâmico¹⁵. Neste caso, nós temos que $\beta(t)/\beta(0)$ não irá mais depender do estado inicial do q-bit principal (embora possa depender do estado inicial do q-bit auxiliar, como iremos ver no Capítulo 6). Por exemplo, veja que se adicionalmente nós considerarmos dois q-bits não interagentes, $J(t) = 0 \forall t$, e inicialmente descorrelacionados, nós temos que $\beta(t)/\beta(0) = 1$.

Uma vez que as propriedades matemáticas centrais da dinâmica descrita por $\rho_1(t)$ foram abordadas, nós iremos agora investigar mais detalhes acerca do comportamento Markoviano desta evolução na próxima subseção. Para tal, será útil descrever a evolução do q-bit principal através de uma equação mestra que será introduzida a seguir.

5.4.3 Controlando a Markovianidade da dinâmica de um q-bit

Considerando a representação matricial, Eq.(5.77), para o estado dinâmico $\rho_1(t)$ do q-bit principal, nós podemos mostrar que o sistema evolui de acordo com a equação mestra

$$\frac{d}{dt}\rho_1(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_1(t), \rho_1(t)] + \frac{\gamma_1(t)}{2}(\sigma_{z1}\rho_1(t)\sigma_{1z} - \rho_1(t)) , \quad (5.85)$$

¹⁵ Isto pode ser interpretado como uma consequência do teorema 3.2.1 da referência (11) tomando o q-bit auxiliar juntamente com o ambiente bosônico como sendo um ambiente efetivo para o q-bit principal.

que representa uma equação mestra de Pauli (6), e temos

$$H_1(t) = \hbar(e_1(t) + J_1(t)) \frac{\sigma_{z1}}{2}, \quad (5.86)$$

$$J_1(t) = \text{Im} \left\{ \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|^2} \frac{d\beta^*(t)}{dt} \right\}, \quad (5.87)$$

$$\gamma_1(t) = \gamma(t) - \text{Re} \left\{ \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|^2} \frac{d\beta^*(t)}{dt} \right\}, \quad (5.88)$$

onde $\gamma(t)$ é definida na Eq.(5.75) e representa o decaimento devido ao acoplamento entre o q-bit principal e o ambiente térmico bosônico que é descrito pela densidade espectral $\mathcal{J}(\omega)$, Eq.(5.69), enquanto que $\beta(t)$ é dado pela Eq.(5.81) e $e_1(t)$ é um parâmetro de escala da energia do q-bit principal, Eq.(5.68). Dessa forma, $H_1(t)$ representa uma Hamiltoniana efetiva para o q-bit principal, enquanto que $\gamma_1(t)$ é a taxa de decaimento efetiva. Note que o conjunto de parâmetros (H_1, J_1, γ_1) dependem implicitamente do estado inicial do sistema composto pelos dois q-bits através da variável $\beta(t)$. Em outras palavras, tal dinâmica ilustra os efeitos dissipativos induzidos pelo ambiente térmico, como também representa as consequências da interação entre os dois q-bits.

A abordagem utilizando a equação mestra, Eq.(5.85), é particularmente útil, como veremos a seguir. Em particular, note que uma vez que $\beta(t)$ depende unicamente do estado inicial do sistema composto pelos dois q-bits – $\rho_S(0)$ na Eq.(5.81) – e do acoplamento $J(t)$ entre eles, nem a parte unitária $-i/\hbar[H_1(t), \rho_1(t)]$ e nem o termo extra $-\text{Re} \left\{ \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|^2} \frac{d\beta^*(t)}{dt} \right\}$ em γ_1 são influenciados pelo acoplamento entre o sistema e o ambiente bosônico. Consequentemente, a contribuição dos efeitos dissipativos causados pelo ambiente térmico bosônico ou pela interação com o q-bit auxiliar podem ser devidamente identificados e quantificados na Equação Mestra (5.85) para a dinâmica do q-bit principal.

Uma vez que nós temos a dinâmica do q-bit principal, descrita pela Equação Mestra (5.85), e a dinâmica do sistema composto pelos dois q-bits, dada pela Equação Mestra (5.74), nós podemos agora comparar a natureza das duas evoluções. Vamos inicialmente analisar dois casos particulares que são especialmente interessantes.

1. ***Dois q-bits não interagentes:***

Considerando $J(t) = 0 \forall t$, nós temos $d\beta(t)/dt = 0$, então $J_1(t) = 0$ e $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ para todo $t \geq 0$. Logo, a dinâmica do q-bit principal sofre apenas efeitos dissipativos devido ao acoplamento com o ambiente, como era de se esperar.

2. ***Q-bit auxiliar com um auto-estado de σ_{z2} como seu estado inicial:***

Considerando $\rho_2(0)_l = |l\rangle\langle l|$ com $l \in \{0, 1\}$, nós podemos demonstrar que

$$\beta(t)/|\beta(t)|^2 d_t \beta^*(t) = -iJ(t), \quad (5.89)$$

e então temos que

$$\text{Re} \left\{ \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|^2} \frac{d\beta^*(t)}{dt} \right\} = 0. \quad (5.90)$$

Neste caso, temos então que $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ e $J_1(t) = J(t) \langle \sigma_{z2} \rangle$, onde $\langle \sigma_{z2} \rangle = \text{Tr}\{\rho_2(0)\sigma_{z2}\}$. Portanto, uma vez que σ_{z2} é uma constante de movimento, o q-bit auxiliar irá permanecer no seu estado inicial (ou seja, $\rho_2(0)_l = |l\rangle\langle l|$ com $l = 0, 1$ é um estado estacionário do q-bit auxiliar). Além disso, o termo de interação $J(t)\sigma_{z1}\sigma_{z2}$ irá simplesmente desempenhar o papel de um campo externo constante, contribuindo com um termo aditivo $J_1(t)$ na Hamiltoniana do q-bit principal, Eq.(5.86), e a dinâmica dissipativa será inteiramente induzida pelo ambiente térmico bosônico.

Dessa forma, para os dois casos apresentados, nomeadamente para dois q-bit não interagentes ou quando um dos q-bits inicia com um auto-estado de σ_z , nós vimos que tanto a dinâmica de um único q-bit quanto a dinâmica do sistema composto por dois q-bits possuem o mesmo comportamento. Nestes dois casos a dissipação é induzida inteiramente pelo acoplamento com o ambiente bosônico. A seguir, nós vamos explorar o comportamento geral, e mostraremos que nem sempre estas dinâmicas possuem as mesmas propriedades.

Note que, em geral (diferentemente dos dois casos anteriores), a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ do q-bit principal não é determinada unicamente pela taxa de decaimento $\gamma(t)$ do sistema composto, e portanto não é geralmente uma função não negativa. Portanto, adotando os critérios RHP e BLP para Markovianidade quântica, não é possível concluir unicamente das equações mestras se a dinâmica do q-bit principal irá seguir o mesmo comportamento observado para a dinâmica do sistema composto pelos dois q-bits interagentes. Ou seja, é possível que o sistema composto tenha uma evolução Markoviana, enquanto que a evolução de cada q-bit possa ser não-Markoviana, e vice-versa.

Para verificar se as dinâmicas são BLP-Markovianas ou RHP-Markovianas, nós precisamos recapitular os pontos anteriormente discutidos. Lembre-se que tal dinâmica será BLP-Markoviana se a distância traço entre dois estados iniciais for uma função monótona decrescente no tempo¹⁶. Dessa forma, dado um estado dinâmico escrito na forma matricial

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha & e^{-i \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\Gamma(t)} \beta(t) \\ e^{i \int_0^t d\tau e_1(\tau)} e^{-\Gamma(t)} \beta^*(t) & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.91)$$

na base de auto-estados de σ_{z1} , nós temos que a distância traço entre dois estados $\rho_1^a(t)$ e $\rho_1^b(t)$ é dada por

$$D_1(\rho_1^a(t), \rho_1^b(t)) = \sqrt{(\alpha_a - \alpha_b)^2 + e^{-2\Gamma(t)} |\beta_a(t) - \beta_b(t)|^2}. \quad (5.92)$$

De acordo com a testemunha de não-Markovianidade introduzida na Eq.(5.65) através da distância traço, para verificar se a dinâmica do q-bit principal é BLP não-Markoviana (e consequentemente RHP não-Markoviana), basta tomar dois estados iniciais $\rho_1^a(0)$ e $\rho_1^b(0)$ e

¹⁶ Aqui estamos considerando $q = 1/2$ na Definição 37, logo a norma da matriz de Helstrom se transforma na distância traço.

verificar se a função $f(t) \equiv D_1(\rho_1^a(t), \rho_1^b(t))$ não é monótona não-crescente¹⁷, isto é, temos que mostrar que existe um par de instantes $t' > t$ onde $f(t') > f(t)$.

Por outro lado, a dinâmica será RHP-Markoviana se o mapa dinâmico que descreve a evolução for divisível. Entretanto, devido ao Teorema 12, temos que o processo será divisível se, e somente se, as taxas de decaimento forem funções não negativas. Dessa forma, uma vez que a dinâmica do q-bit principal é descrita por uma equação mestra do tipo Lindblad, Eq.(5.85), se existir um instante de tempo $t' > 0$ tal que $\gamma_1(t') < 0$, então a dinâmica será RHP não-Markoviana. Dessa forma, a RHP-Markovianidade é satisfeita sempre que a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ for positiva semi-definida, ou seja, $\gamma_1(t) \geq 0$ para todo instante t da evolução.

Vale a pena reescrever o termo extra da taxa de decaimento $\gamma_1(t)$. Nomeadamente, nós definimos

$$\gamma_{\text{aux}}(t) \equiv -\text{Re} \left\{ \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|^2} \frac{d\beta^*(t)}{dt} \right\}, \quad (5.93)$$

e portanto, da Eq.(5.88), nós temos que

$$\gamma_1(t) = \gamma(t) + \gamma_{\text{aux}}(t). \quad (5.94)$$

Se o estado inicial do sistema composto pelos dois q-bits é um estado produto, ou seja,

$$\rho_S(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0), \quad (5.95)$$

nós podemos mostrar que o termo auxiliar pode ser escrito da forma

$$\gamma_{\text{aux}}(t) = \frac{J(t)}{2} \frac{(1 - \langle \sigma_{z2} \rangle^2) \sin \left(2 \int_0^t d\tau J(\tau) \right)}{1 - (1 - \langle \sigma_{z2} \rangle^2) \sin^2 \left(\int_0^t d\tau J(\tau) \right)}. \quad (5.96)$$

A taxa de decaimento auxiliar γ_{aux} introduz uma das principais propriedades deste modelo, nomeadamente o controle da Markovianidade do q-bit principal sem necessariamente alterar o tipo de banho térmico descrito pela densidade espectral $\mathcal{J}(\omega)$. Primeiramente, note que se nós considerarmos problemas com o mesmo estado inicial $\rho_2(0)$ para o q-bit auxiliar, a figura de mérito para ambos os critérios RHP e BLP de Markovianidade quântica se torna a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$, uma vez que a dinâmica do q-bit principal será RHP-Markoviana se, e somente se, $\gamma_1(t) \geq 0 \forall t$, enquanto que a monotonicidade da distância traço entre dois estados dinâmicos também é definida pela taxa $\gamma_1(t)$, pois nós podemos mostrar que $\frac{d}{dt} D(\rho_1^a(t), \rho_1^b(t)) \propto -\gamma_1(t)$. Dessa forma, a positividade da taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ define se a dinâmica é Markoviana sob ambas as definições.

Portanto, nós podemos controlar a Markovianidade, ou equivalentemente os efeitos não-Markovianos, através do controle da interação entre os q-bit e do estado inicial

¹⁷ Relembre que uma função monótona não-crescente é tal que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x \leq y$

do q-bit auxiliar. Dessa forma, veja que o sistema composto pelos dois q-bits pode satisfazer uma dinâmica Markoviana enquanto que a dinâmica do q-bit principal poderia ser não-Markoviana. Para isso, basta que o experimentalista controle adequadamente a interação entre os dois q-bits descrita pelo parâmetro $J(t)$, além de preparar o q-bit auxiliar em um estado inicial $\rho_2(0)$ conveniente, com o objetivo de obter um valor médio $\langle \sigma_{z2} \rangle = \text{Tr}\{\sigma_{z2}\rho_2(0)\}$ adequado para que $\gamma_1(t') = \gamma(t') + \gamma_{\text{aux}}(t') < 0$ para algum tempo $t' > 0$.

A propriedade discutida acima se torna útil pela possibilidade da sua implementação no controle da não-Markovianidade em plataformas de sistemas quânticos abertos. Ou seja, em geral, o experimentalista possui controle sobre os dois q-bits, mas não pode controlar os efeitos do ambiente. Dessa forma, podemos manipular a Markovianidade da dinâmica de cada q-bit sem necessariamente ter que alterar o tipo de ambiente na qual os q-bits estão expostos, isto é, alterar a densidade espectral $\mathcal{J}(\omega)$ que descreve o ambiente.

5.4.4 Exemplos

Nesta subseção, vamos ilustrar um exemplo onde a natureza da dinâmica do q-bit principal é distinta daquela observada pela dinâmica do sistema composto pelos dois q-bits. Nós iremos finalizar este capítulo reproduzindo alguns resultados que foram originalmente desenvolvidos na referência (50).

No que segue, nós vamos considerar apenas¹⁸ um banho Ôhmico que é descrito pela densidade espectral

$$\mathcal{J}(\omega) = \eta\omega e^{-\omega/\omega_c}, \quad (5.97)$$

onde os parâmetros ω_c e η definem o banho Ôhmico (45). Uma vez que a taxa de decaimento $\gamma(t)$ do sistema composto pelos dois q-bits se relaciona com a densidade espectral \mathcal{J} do banho pela Eq.(5.75),

$$\gamma(t) = \int d\omega \frac{\mathcal{J}(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_b T}\right), \quad (5.98)$$

temos que

$$\frac{\gamma(t)}{\eta\omega_c} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega_c} e^{-\omega/\omega_c} \sin(\omega t) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_b T}\right) \quad (5.99)$$

$$= \frac{-t\omega_c}{1 + (t\omega_c)^2} + iC (\text{PG}(0, C(1 - it\omega_c)) - \text{PG}(0, C(1 + it\omega_c))), \quad (5.100)$$

onde $C = \frac{k_b T}{\hbar\omega_c}$ e $\text{PG}(n, z)$ denota a função *PolyGamma* que representa a n-ésima derivada da função digamma $\psi^{(n)}(z)$. A Eq.(5.100) fornece portanto a taxa de decaimento para

¹⁸ Na referência (50), o leitor poderá encontrar também o caso de um banho Lorentziano.

o sistema composto por dois q-bits acoplados a um ambiente térmico bosônico descrito por uma densidade espectral Ôhmica, Eq.(5.97). Além disso, nós podemos calcular a função de decoerência $\Gamma(t)$ para o caso Ôhmico. Considerando a Eq. (5.100) para a taxa de decaimento do caso Ôhmico, nós temos que

$$\Gamma(t) \equiv \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} &= -\eta (\log\Gamma(C[1 + it\omega_c]) + \log\Gamma(C[1 - it\omega_c]) - 2\log\Gamma(C)) \\ &\quad - \frac{\eta}{2} \log(t^2\omega_c^2 + 1) , \end{aligned} \quad (5.102)$$

onde $\log \Gamma$ denota o logaritmo da função gama de Euler. Vamos agora gerar um gráfico da taxa de decaimento $\gamma(t)$ para três temperaturas, tal como descrito na Fig. 2 a seguir.

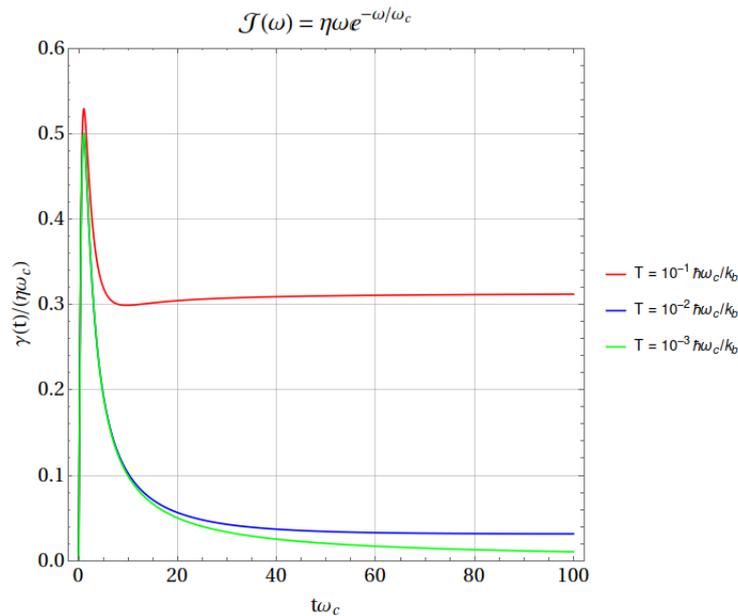


Figura 2 – Gráfico da taxa de decaimento referente ao sistema composto pelos dois q-bits.

Fonte: Adaptada de BRITO; WEKANG (50).

Vemos então que, para as temperaturas analisadas, nós temos $\gamma(t) \geq 0$ para todo instante $t \geq 0$. Portanto, neste contexto a dinâmica do sistema composto pelos dois q-bits é Markoviana sob ambos os critérios RHP e BLP. Agora, considere a dinâmica do q-bit principal levando em conta o mesmo ambiente Ôhmico. Vamos definir o estado puro $|\Omega^\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, que representa uma superposição homogênea dos auto-estados de σ_z . Suponha que o experimentalista prepara o q-bit auxiliar no estado puro $|\Omega^+\rangle$, e que ele possa preparar o estado do q-bit principal como sendo $|\Omega^\pm\rangle$. Dessa forma, o estado inicial do sistema composto pelos dois q-bits é dado por

$$\rho_S^\pm(0) = |\Omega^\pm\rangle\langle\Omega^\pm| \otimes |\Omega^+\rangle\langle\Omega^+| . \quad (5.103)$$

Calculando os parâmetros α e $\beta(t)$ dados pelas Eq.(5.80) e (5.81), respectivamente, nós temos

$$\alpha^\pm = \frac{1}{2}, \quad (5.104)$$

$$\beta^\pm(t) = \pm \frac{\cos(Jt)}{2}, \quad (5.105)$$

onde estamos tomando a escala de energia $e_1(t) = e_1$ e a constante de acoplamento $J(t) = J$ como constantes no tempo. Com os valores dos parâmetros α e $\beta(t)$, juntamente com a taxa de decaimento $\gamma(t)$, nós podemos obter toda a dinâmica do q-bit principal, nomeadamente dada pela Eq.(5.77). Em particular, nós podemos calcular a distância traço entre dois estados dinâmicos do q-bit principal, dada pela Eq.(5.92). Supondo que o experimentalista prepara o q-bit principal inicialmente no estado $|\Omega^+\rangle$ ou no estado $|\Omega^-\rangle$, a distância traço dos estados dinâmicos que evoluem destes dois estados iniciais é dada por

$$D_1 \left(\Lambda_{(t,0)} \left(|\Omega^+\rangle \langle \Omega^+| \right), \Lambda_{(t,0)} \left(|\Omega^-\rangle \langle \Omega^-| \right) \right) = |\cos(Jt)| e^{-\int_0^t d\tau \gamma(\tau)}, \quad (5.106)$$

onde $\gamma(t)$ é dada pela Eq.(5.100). Por fim, calculando a integral $\int_0^t d\tau \gamma(\tau) = \Gamma(t)$ que representa a função de decoerência, nós obtemos o resultado final para a distância traço entre os estados dinâmicos que evoluem dos estados iniciais $|\Omega^\pm\rangle$ do q-bit principal. O comportamento de D_1 em função do tempo é ilustrado na Fig. 3 abaixo.

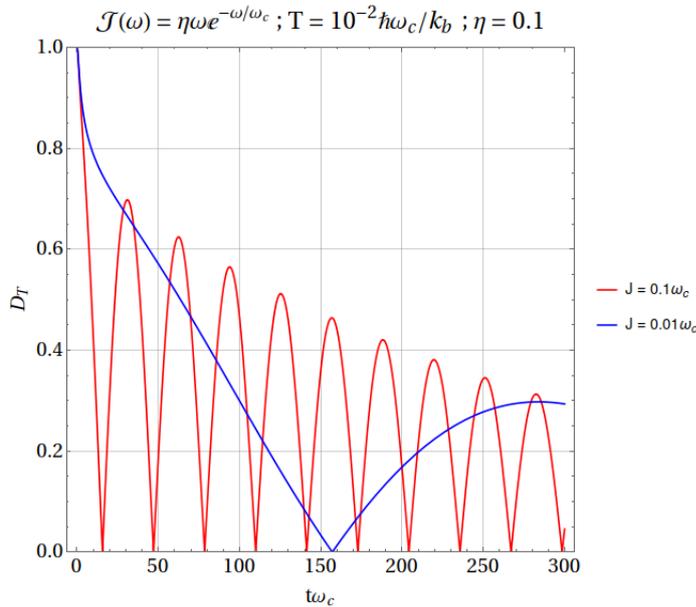


Figura 3 – Gráfico da distância traço em função do tempo. O q-bit auxiliar é preparado inicialmente no estado puro $|\Omega^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, enquanto que o q-bit principal é preparado também no estado $|\Omega^+\rangle$ ou no estado $|\Omega^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Temos então a distância traço entre os estados que evoluem a partir de $|\Omega^\pm\rangle$ inicialmente preparados no q-bit principal.

Fonte: Adaptada de BRITO; WEKANG (50).

Observamos então que, tomando a temperatura $T = 10^{-2}\hbar\omega_c/k_b$ e $\eta = 0.1$ para o banho Ôhmico, a distância entre os dois estados dinâmicos que evoluem dos estados iniciais $|\Omega^\pm\rangle$ preparados para o q-bit principal não representa uma função monótona não-crescente no tempo. Portanto, esta dinâmica para o q-bit principal é BLP e RHP não-Markoviana. Podemos concluir que embora o sistema composto pelos dois q-bits reproduza uma dinâmica Markoviana, nós mostramos que a dinâmica do q-bit principal sofre uma evolução não-Markoviana. Nós conseguimos introduzir estes efeitos não-Markovianos preparando cada q-bit em um estado inicial conveniente e também controlando a interação entre eles. Vale ressaltar que nós também podemos ter o caso contrário, ou seja, é possível obter uma dinâmica onde o sistema composto pelos dois q-bits satisfaz uma evolução não-Markoviana, enquanto que cada q-bit possui uma dinâmica Markoviana. Para mais informações, o leitor é indicado a consultar a referência (50).

Finalmente, nós iniciamos este trabalho introduzindo o formalismo da teoria quântica ruidosa, seguida por medidas de distinguibilidade de estados quânticos, formalmente caracterizando a estrutura física e matemática básica deste trabalho. Em seguida, também introduzimos o conceito dos limites quânticos de velocidade, e agora discutimos as noções de Markovianidade em dinâmicas quânticas. Até agora, a discussão apresentada representa uma breve revisão da literatura que buscou fornecer o ferramental necessário para discutir problemas relacionados aos limites quânticos de velocidade, assim como as peculiaridades relacionadas à dinâmicas não-Markovianas, de forma concisa e precisa.

No próximo capítulo, nós iremos apresentar os principais resultados obtidos nesta pesquisa. Nomeadamente, nós vamos apresentar o desenvolvimento de dois novos limites quânticos de velocidade induzidos pelas α -normas Schatten, além de relacionar estes novos quantificadores com outros paradigmáticos QSLs que podem ser encontrados na literatura. Além disso, nós iremos explorar as relações entre não-Markovianidade quântica e os quantificadores de limites quânticos de velocidade. Nós iremos verificar se é possível utilizar os efeitos de memória em dinâmicas não-Markovianas para modificar os quantificadores de QSL.

6 RESULTADOS

Neste capítulo, vamos desenvolver os principais resultados obtidos nesta pesquisa. Por um lado, nós abordamos problemas fundamentais sobre limites quânticos de velocidade (QSL). Por outro lado, nós investigamos as relações entre diferentes quantificadores de QSL e efeitos não-Markovianos. Inicialmente, nós vamos discutir o desenvolvimento de dois novos limites quânticos de velocidade, ambos induzidos pelas normas Schatten discutidas anteriormente. Em seguida, nós iremos ver como que os efeitos de não-Markovianidade de dinâmicas quânticas podem afetar os limites quânticos de velocidade.

6.1 Limites quânticos de velocidade baseados em normas Schatten: universalidade e tightness

Nós vimos anteriormente que um limite quântico de velocidade (QSL) corresponde a um limite inferior do tempo de evolução. Ou seja, para todo tempo de evolução τ entre dois estados quânticos ρ_0 e ρ_τ , nós temos que $\tau \geq \tau_{QSL}$, onde τ_{QSL} é um limite quântico de velocidade. Também lembre que quando a desigualdade temporal é saturada, i.e., quando $\tau = \tau_{QSL}$, a dinâmica é chamada de *tight*, correspondendo a “melhor” dinâmica que conecta o estado inicial ρ_0 ao estado final ρ_τ . Nós também vimos que diferentes medidas de distinguibilidade induzem diferentes quantificadores de QSL. Podemos agora questionar: existem alguma relação entre diferentes tipos de QSL? Ou seja, existe uma *universalidade* entre os diferentes quantificadores? Esta será uma das questões centrais neste trabalho.

Além disso, dado um limite quântico de velocidade, uma importante tarefa é obter as condições de saturação da desigualdade temporal. Isto é, as condições necessárias e suficientes para que o tempo de evolução entre dois estados seja igual ao menor valor possível, nomeadamente dado por um quantificador de QSL. Buscamos adotar uma abordagem geométrica para tais condições. Ou seja, vamos interpretar a evolução dinâmica como um caminho contínuo e suave no espaço de estados, de tal forma que as condições para uma dinâmica ótima (ou *tight*) representa restrições no caminho dinâmico que possuem propriedades geométricas bem definidas.

Por fim, nós vimos que alguns limites quânticos de velocidade são induzidos por medidas de distinguibilidade que são matematicamente difíceis de serem calculadas para quaisquer estados de um sistema quântico. Por exemplo, o limite quântico de velocidade desenvolvido por Sebastian Deffner e Eric Lutz (35) se baseia no ângulo de Bures D_B entre o estado inicial e final, dado por

$$D_B(\rho, \sigma) \equiv \arccos \left[\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right) \right], \quad (6.1)$$

para qualquer dois estados ρ, σ . Nós temos que $\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right) = \sqrt{F(\rho, \sigma)}$ denota a raiz

quadrada da fidelidade F entre os estados ρ e σ (5). Em geral, para calcular a fidelidade nós precisamos diagonalizar os operadores densidade, e isto requer um grande esforço computacional. Dessa forma, nosso objetivo é introduzir um novo quantificador de QSL que satisfaça duas condições complementares: por um lado, nós queremos obter uma generalização dos QSLs obtidos através de medidas de distinguibilidade que possuem dificuldades computacionais (35, 43, 44) e, ao mesmo tempo, tal QSL deve ser induzido por uma medida de distinguibilidade que demande de menos recursos computacionais. Para tal, nós iremos obter estes quantificadores baseados nas α -normas Schatten, discutidas anteriormente.

Nós iremos agora apresentar duas novas famílias de limites quânticos de velocidade para sistemas quânticos de dimensão finita que sofrem uma evolução física geral: uma será obtida utilizando a abordagem geométrica e outra inspirada na desigualdade de Holder. Ambas as abordagens envolvem o uso das α -normas Schatten. Notavelmente, para um estado de um único q-bit, nós iremos demonstrar que o QSL geométrico permanece independente da norma Schatten escolhida, revelando uma forma de universalidade entre esses quantificadores. Além disso, realizaremos comparações entre os QSLs desenvolvidos neste trabalho e os QSLs paradigmáticos existentes na literatura. Demonstraremos também que os QSLs já existentes são casos particulares de QSLs baseados nas normas Schatten. Adicionalmente, iremos analisar condições necessárias e suficientes para uma dinâmica ótima, ou seja, quando o tempo de evolução entre dois estados quânticos é igual ao QSL. Por fim, compararemos os dois QSLs desenvolvidos, apresentando uma desigualdade entre eles que possui um significado geométrico claro.

Primeiramente, vamos desenvolver um novo limite quântico de velocidade utilizando a *abordagem geométrica* que será definida a seguir.

6.1.1 QSL geométrico em um espaço de estados normado

Consideremos um sistema quântico S descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} com dimensão $\dim(\mathcal{H}) = d$. O sistema possui então o espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}$ que representa o conjunto convexo de todos os operadores densidade que podem descrever o estado de S . Denotemos por Γ_γ o comprimento de um caminho γ que conecta dois estados $\rho, \varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ no espaço de estados.

Por definição, o *caminho geodésico* é tal que minimiza o comprimento de uma curva que conecta dois pontos $\rho, \varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ do espaço de estados. Este comprimento mínimo será chamado de *distância geodésica*, e será denotado por $D^{\text{geo}}(\rho, \varrho)$. Logo, para todo par de estados quânticos $\rho, \varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ e para toda curva $\gamma \subset \mathcal{D}(\mathcal{H})$ que conecta estes dois estados, nós temos que

$$D^{\text{geo}}(\rho, \varrho) \leq \Gamma_\gamma . \quad (6.2)$$

No que segue, vamos considerar um espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ munido com uma norma $\|\cdot\|$,

e nós podemos definir $D^{\text{geo}}(\rho, \varrho) \equiv \|\rho - \varrho\|$ para todo par de estados $\rho, \varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Dessa forma, a dupla $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), D^{\text{geo}})$ satisfaz os axiomas de um *espaço métrico*.

Suponha agora um sistema quântico cuja evolução é descrita em termos de um mapa dinâmico $\{\Lambda_{t,0}\}_{t \in [0, \infty)}$ que é diferenciável no tempo t , e que o sistema é preparado inicialmente (instante $t_0 = 0$) no estado $\rho_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. A curva no espaço de estados gerada pela evolução do sistema até um instante $\tau \geq 0$ corresponde ao conjunto $\gamma_\tau \equiv \{\rho_t = \Lambda_{t,0}(\rho_0) : t \in [0, \tau]\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{H})$, que é uma curva que conecta o estado inicial ρ_0 até o estado final ρ_τ . Uma vez que o mapa dinâmico é diferenciável no tempo t , nós temos um ponto ρ_t para todo $t \geq 0$, ou seja, a curva descrita pelo conjunto γ_τ é contínua e diferenciável (suave) no espaço de estados, similarmente ao que foi ilustrado na Fig. 1. Neste caso, a derivada temporal $d\rho(t)/dt$ é bem definida para todo instante de tempo $t \in (0, \tau)$, e podemos fornecer o comprimento Γ_{γ_τ} da curva dinâmica γ_τ como sendo

$$\Gamma_{\gamma_\tau} = \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|. \quad (6.3)$$

Uma vez que a distância geodésica em um espaço normado pode ser definida como $D^{\text{geo}}(\rho, \varrho) \equiv \|\rho - \varrho\|$ para todo par de estados ρ, ϱ do espaço de estados, combinando as equações (6.2) e (6.3), nós temos que

$$\|\rho_\tau - \rho_0\| \leq \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|. \quad (6.4)$$

Da Eq.(6.4), nós podemos definir um novo limite quântico de velocidades, uma vez que tal equação é equivalente a $\tau\|\rho_\tau - \rho_0\| \leq \tau \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|$ para todo tempo de evolução $\tau \geq 0$, e podemos escrever que $\tau \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|} \leq \tau$. Portanto, para todo tempo de evolução $\tau \geq 0$ entre dois estados quânticos ρ_0 e ρ_τ , nós temos que

$$\tau \geq \tau_{QSL}^{\|\cdot\|}, \quad (6.5)$$

onde o novo limite quântico de velocidades $\tau_{QSL}^{\|\cdot\|} \equiv \tau_{QSL}^{\|\cdot\|}(\tau)$ é definido por

$$\tau_{QSL}^{\|\cdot\|} := \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|}{\left\langle \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\| \right\rangle_\tau}, \quad (6.6)$$

onde $\left\langle \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\| \right\rangle_\tau := (1/\tau) \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|$ denota o comprimento médio da curva dinâmica. Dessa forma, a Eq.(6.6) representa um novo limite quântico de velocidade que é obtido através da abordagem geométrica, nomeadamente induzido pela desigualdade dada pela Eq.(6.2) que define a distância geodésica no espaço de estados. Note que este quantificador é válido para todo processo físico que é descrito por uma curva contínua e suave no espaço de estados, que ocorre quando a derivada temporal $d\rho(t)/dt$ é bem definida para todo instante $t \in (0, \tau)$, sendo τ o instante final da evolução.

Até agora, nós estamos lidando com um espaço de estado munido com uma norma geral $\|\cdot\|$. No que segue, nós vamos fixar $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\alpha$ com $\alpha \in [1, \infty]$, onde iremos adotar

uma α -norma Schatten em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, dada pela Definição 21. Neste caso, a distância geodésica será dada por $D^{\text{geo}}(\rho, \varrho) := D_\alpha(\rho, \varrho) = \|\rho - \varrho\|_\alpha$, onde $\|A\|_\alpha := (\text{Tr}\{(\sqrt{A^\dagger A})^\alpha\})^{\frac{1}{\alpha}}$ para todo operador linear A . Portanto, da Eq.(6.6), o QSL geométrico induzido pela α -norma Schatten, $\tau_{QSL}^\alpha(\tau) := \tau_{QSL}^{\|\cdot\|_\alpha}$, é dado por

$$\tau_{QSL}^\alpha(\tau) = \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|_\alpha}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha} \tau, \quad (6.7)$$

e será chamado de α -QSL. Além disso, note que este novo limite quântico de velocidades é válido para uma dinâmica geral, representando a evolução de um sistema quântico aberto ou fechado, e também é válido para um estado inicial geral (sendo este puro ou misto).

No que segue, nós iremos investigar o caso de uma dinâmica de um q-bit, particularizando a dimensão do espaço de Hilbert do sistema. Nós iremos ver que este quantificador torna-se independente da α -norma adotada no espaço de estados de um q-bit, representando um dos resultados centrais desta pesquisa.

6.1.1.1 α -QSL para um q-bit

Vamos agora considerar um sistema cujo espaço de Hilbert é bidimensional, nomeadamente um q-bit. Nesse caso, o estado do sistema pode ser descrito em termos da representação de Bloch bidimensional, ou seja, $\rho_t = \rho(n_t) = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma})$ onde $\vec{n}_t = (n_{x,t}, n_{y,t}, n_{z,t})$ será chamado de *vetor de Bloch* para todo $t \geq 0$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é um operador vetorial cujas componentes correspondem às matrizes de Pauli. Além disso, vamos supor que a dinâmica deste q-bit é descrita por um mapa dinâmico temporalmente diferenciável, ou seja, a derivada $d\rho_t/dt$ é bem definida para todo instante da evolução. Nestes casos, nós podemos calcular as distâncias $\|\rho_\tau - \rho_0\|_\alpha$ assim como as normas $\|d\rho_t/dt\|_\alpha$ explicitamente.

Considerando a dinâmica de um q-bit, nós podemos perguntar: uma vez que o limite quântico de velocidades geométrico dado pela Eq.(6.7) é induzido pela α -norma Schatten $\|\cdot\|_\alpha$ com $\alpha \in [1, \infty]$, o que ocorre se nós mudarmos a medida de distinguibilidade adotada? Ou seja, qual é a dependência deste quantificador com relação ao parâmetro α ? A resposta é fornecida em termos do próximo teorema.

Teorema 15 (Universalidade do α -QSL para a dinâmica de um q-bit). *Suponha uma dinâmica de um q-bit $\rho_t = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma})$ com estado inicial $\rho_0 = \rho(n_0)$ e tal que $d\rho_t/dt$ é bem definido para todo instante da evolução. Partindo da Eq. (6.7), o α -QSL que é induzido por uma α -norma Schatten, para todo $\alpha \in [1, \infty]$, assume a forma*

$$\tau_{QSL}^\alpha(\tau) = \frac{d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} \tau, \quad (6.8)$$

com

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{j=x,y,z} \left(\frac{dn_{j,t}}{dt} \right)^2}, \quad (6.9)$$

enquanto que

$$d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) = \sqrt{\sum_{j=x,y,z} (n_{j,\tau} - n_{j,0})^2} \quad (6.10)$$

representa a distância Euclideana entre o vetor de Bloch inicial e final, pertencentes ao espaço de Bloch.

Demonstração. Tomando a representação de Bloch para o estado dinâmico do q-bit, nós podemos obter a seguinte representação matricial

$$\rho_t = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_{z,t} & n_{x,t} - in_{y,t} \\ n_{x,t} + in_{y,t} & 1 - n_{z,t} \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

onde estamos adotando a base de auto-estados de σ_z como a base ortonormal do espaço de Hilbert bidimensional do q-bit.

Uma vez que estamos supondo uma evolução contínua e suave no espaço de estados, nós temos que

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{n}_t}{dt} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dn_{z,t}/dt & dn_{x,t}/dt - i dn_{y,t}/dt \\ dn_{x,t}/dt + i dn_{y,t}/dt & -dn_{z,t}/dt \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Para obter os auto-valores do operador $d\rho_t/dt$, basta diagonalizar sua representação matricial 2×2 , e estes são dados por $\gamma_{\pm} = \pm(1/2) \|d\vec{n}_t/dt\|$, onde nós definimos a norma Euclideana $\|d\vec{n}_t/dt\|^2 = \sum_{j=x,y,z} (dn_{j,t}/dt)^2$. Por outro lado, os valores singulares deste operador são dados por $\omega_1 = \omega_2 = (1/2) \|d\vec{n}_t/dt\|$. Consequentemente, uma vez que nós podemos calcular uma α -norma Schatten em termos dos valores singulares de um operador, nós temos a seguinte conclusão geral

$$\left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_{\alpha} = 2^{-1+\frac{1}{\alpha}} \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|. \quad (6.13)$$

Vamos agora calcular a distância $D_{\alpha}(\rho_t, \eta_t) = \|\rho_t - \eta_t\|_{\alpha}$ entre o estados de um único q-bit $\rho_t, \eta_t \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, com $\rho_t = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma})$, e $\eta_t = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{m}_t \cdot \vec{\sigma})$. Primeiramente, nós podemos notar que

$$\rho_t - \eta_t = \frac{1}{2}(\vec{n}_t - \vec{m}_t) \cdot \vec{\sigma}, \quad (6.14)$$

onde $\vec{n}_t = (n_{x,t}, n_{y,t}, n_{z,t})$, e $\vec{m}_t = (m_{x,t}, m_{y,t}, m_{z,t})$ são os vetores de Bloch de ρ_t e η_t , respectivamente. Nós vemos que as equações (6.12) e (6.14) possuem uma estrutura matemática similiar. Consequentemente, os auto-valores do operador $\rho_t - \eta_t$ e os respectivos valores singulares podem ser obtidos do mesmo modo. Portanto, a α -norma Schatten do operador $\rho_t - \eta_t$, nomeadamente a distância $D_{\alpha}(\rho_t, \eta_t)$, é dada por

$$D_{\alpha}(\rho_t, \eta_t) = \|\rho_t - \eta_t\|_{\alpha} = 2^{-1+\frac{1}{\alpha}} d_{\text{euc}}(\vec{n}_t, \vec{m}_t), \quad (6.15)$$

onde

$$d_{\text{euc}}(\vec{n}_t, \vec{m}_t) = \sqrt{(n_{x,t} - m_{x,t})^2 + (n_{y,t} - m_{y,t})^2 + (n_{z,t} - m_{z,t})^2}. \quad (6.16)$$

Dessa forma, a Eq. (6.15) significa que a distância D_α no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ induzida da α -norma Schatten é proporcional para a distância Euclideana d_{euc} no espaço de Bloch.

Por fim, uma vez que o α -QSL é dado por $\tau_{QSL}^\alpha(\tau) := \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|_\alpha}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha} \tau$, nós temos que

$$\tau_{QSL}^\alpha(\tau) = \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|_\alpha}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha} \tau = \frac{2^{-1+\frac{1}{\alpha}} d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt 2^{-1+\frac{1}{\alpha}} \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} \tau \quad (6.17)$$

$$= \frac{d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} \tau, \quad (6.18)$$

como queríamos demonstrar. \square

O Teorema 15 mostra que o α -QSL é invariante sob as mudanças da α -norma adotada no espaço de estados. Em resumo, o QSL geométrico baseado nas normas Schatten, em geral, poderia depender do valor específico de α . Mas, para um qubit, esse quantificador depende apenas da distância entre os vetores de Pauli inicial e final, do comprimento do caminho dinâmico no espaço de Bloch e do tempo de evolução entre o estado inicial e final, tal como ilustrado na Fig. 4. Ou seja, perdemos a dependência do parâmetro α que define a norma Schatten fixada no espaço de estados do q-bit, e nós vemos que há um tipo de *universalidade* para o QSL geométrico induzido pelas normas Schatten. Não importa qual métrica D_α é escolhida em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, nós sempre temos o mesmo quantificador dado pela Eq. (6.8).

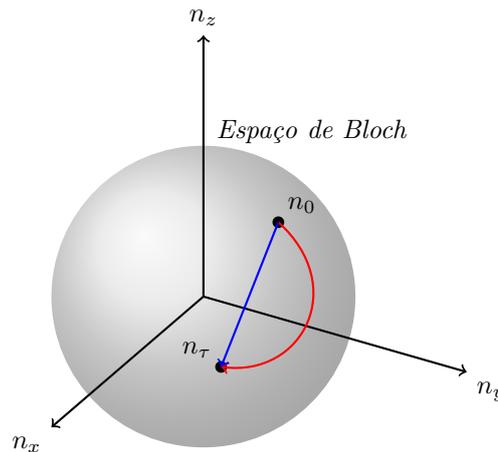


Figura 4 – Interpretação geométrica do Teorema 4. A curva azul representa o caminho *tight*, que é a reta que conecta o estado inicial ao estado final no espaço de Bloch, tal como será demonstrado a seguir, e a distância Euclideana entre o estado inicial e final corresponde ao comprimento desta curva. A curva dinâmica é representada pelo caminho em vermelho. Logo, a razão τ_{QSL}^α/τ é proporcional a razão dos comprimentos da curva ótima (azul) e da curva dinâmica (vermelha).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos agora comparar o α -QSL geométrico com outros limites quânticos de velocidade que podem ser encontrados na literatura.

6.1.1.2 Comparando α -QSL com outros quantificadores

Vamos inicialmente considerar o limite quântico de velocidades desenvolvido por Sebastian Deffner e Eric Lutz (35). Relembre que para um estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, considerando uma evolução geral onde o estado final é denotado por ρ_τ no instante final τ , o DL -QSL é dado por

$$\tau_{QSL}^{DL} = \frac{1 - \langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle}{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\infty} . \quad (6.19)$$

Vamos comparar o DL -QSL, τ_{QSL}^{DL} , com o α -QSL dado pela Eq.(6.8) para uma dinâmica de um q-bit. Uma vez que estamos lidando com um espaço de Hilbert \mathcal{H} bidimensional ($\dim(\mathcal{H}) = 2$), nós sempre podemos escolher uma base ortonormal $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$, onde $\langle\psi_0|\psi_0^\perp\rangle = 0$. Nesta base, nós podemos definir $\sigma_z = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| - |\psi_0^\perp\rangle\langle\psi_0^\perp|$. Portanto, tomando a representação de Bloch para o estado final nesta base, nós podemos escrever que

$$1 - \langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle = \frac{1 - n_{z,\tau}}{2} \leq \frac{1}{2} d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) , \quad (6.20)$$

onde nós temos usado o fato de que $n_{z,t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, e

$$d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) = \sqrt{n_{x,\tau}^2 + n_{y,\tau}^2 + (1 - n_{z,\tau})^2} \quad (6.21)$$

representa a distância Euclideana entre os vetores de Bloch $\vec{n}_t = (n_{x,t}, n_{y,t}, n_{z,t})$, e o vetor de Bloch inicial $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$ na base $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$. Portanto, considerando o Teorema 15, nós podemos concluir que

$$\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL} , \quad (6.22)$$

onde nós usamos que $\|d\rho_t/dt\|_\infty = (1/2)\|d\vec{n}_t/dt\|$.

Vale ressaltar que a Eq. (6.22) é válida até mesmo no caso onde o estado inicial ρ_0 do q-bit não é puro, pois um estado inicial misto pode ser purificado, obtendo novamente o caso inicial. Portanto, o QSL geométrico induzido por uma α -norma Schatten e considerando uma dinâmica de um q-bit é *mais tight* que o QSL desenvolvido por Deffner e Lutz para todo $\alpha \in [1, \infty]$. Isto significa que para todo tempo de evolução $\tau \geq 0$ entre dois estados ρ_0 e ρ_τ de um q-bit, nós temos que

$$\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL} , \quad (6.23)$$

e dessa forma o α -QSL desempenha um papel mais crucial que o τ_{QSL}^{DL} uma vez que estabelecemos a desigualdade $\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL}$.

Agora, vamos comparar o QSL geométrico com o QSL desenvolvido por Campaioli *et al.* (CPM) (44), na qual se baseia na norma de Hilbert-Schmidt. Eles mostraram que

$$\tau_{QSL}^{CPM} := \frac{\|\rho_\tau - \rho_0\|_2}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_2} \tau . \quad (6.24)$$

Ou seja, Eq. (6.24) é um caso particular do α -QSL [veja Eq. (6.7)] para o caso onde $\alpha = 2$. Por outro lado, considerando a dinâmica de um q-bit, impressionantemente o Teorema 15 e a Eq. (6.8) implicam que estes dois quantificadores são equivalentes para todo valor de $\alpha \in [1, \infty]$. Ou seja, considerando a dinâmica de um q-bit e para todo parâmetro $\alpha \in [1, \infty]$, nós temos que

$$\tau_{QSL}^{CPM} = \tau_{QSL}^{(\alpha=2)}(\tau) = \tau_{QSL}^\alpha(\tau) = \frac{d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} \tau. \quad (6.25)$$

Portanto, comparando as equações (6.7) e (6.24), considerando um sistema genérico descrito por um espaço de Hilbert d -dimensional, o CPM-QSL é apenas um caso particular de um limite quântico de velocidades mais geral, nomeadamente o α -QSL, onde nós temos $\alpha = 2$ representando a norma de Hilbert-Schmidt. Por outro lado nós temos que, devido o Teorema 15, estes quantificadores são equivalentes para o caso de uma evolução de um q-bit, como ilustrado na Eq.(6.25).

Na próxima subsecção, nós iremos introduzir as condições necessárias e suficientes para obter $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$, caracterizando uma dinâmica tight.

6.1.1.3 Condições de Tightness para o α -QSL

Nós mostramos que para todo tempo de evolução $\tau \geq 0$ entre dois estados quânticos ρ_0 e ρ_τ , nós temos $\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha$, onde o α -QSL é definido pela Eq.(6.7), enquanto que pode ser escrito em termos da Eq.(6.8) para a dinâmica de um q-bit. Nós agora iremos avaliar o seguinte problema: *quais são as condições necessárias e suficientes para saturar esta desigualdade?* Ou seja, qual tipo de dinâmica é capaz de atingir o tempo mínimo $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$ de evolução entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ ?

Veja que a desigualdade fornecida na Eq.(6.2) é saturada se, e somente se, o caminho dinâmico corresponde à geodésica no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Uma vez que o espaço métrico $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), D_\alpha)$ corresponde a um espaço Euclideano, o caminho geodésico entre dois estados $\rho, \varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ corresponde a linha reta que os conecta¹ (8). Portanto, uma vez que o α -QSL é induzido pela desigualdade fornecida na Eq.(6.2), nós temos que $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$ se, e somente se, o caminho da evolução dinâmica corresponde a linha reta que conecta ρ_0 ao estado final ρ_τ . Ou seja, o estado dinâmico é tal que $\rho_t = (\rho_\tau - \rho_0)t/\tau + \rho_0$ para todo $t \in [0, \tau]$. Esta é portanto o único tipo de dinâmica que satura a desigualdade temporal, e vale para um sistema quântico com um espaço de Hilbert de dimensão arbitrária.

Podemos agora realizar a mesma pergunta pensando em termos do *espaço de Bloch*. No caso do espaço de estados, uma vez que o α -QSL foi induzido pela desigualdade geodésica – nomeadamente que $D_\alpha(\rho, \sigma)$ é menor ou igual a qualquer comprimento de

¹ Note que isto não seria verdade em um espaço não Euclideano, isto é, um espaço que admite torções.

curva que conecte dois estados ρ e σ – e lembrando que $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), D_\alpha)$ é um espaço métrico Euclidiano, fica claro que a desigualdade vai ser saturada apenas no caminho geodésico, que corresponde a linha reta que conecta o estado inicial e final. Entretanto, também podemos questionar qual é o caminho ótimo (tight) também no *espaço de Bloch*. Em outras palavras, nós buscamos mapear o caminho tight no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ no espaço de Bloch correspondendo aos vetores \vec{n}_t .

Primeiramente, lembre que para um dado espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão finita d , nós podemos obter um conjunto $\{F_\alpha\}_{\alpha=0}^{d^2-1}$ de operadores que representa uma base ortonormal de operadores hermitianos com o traço nulo para o espaço dos operadores lineares que atuam em \mathcal{H} . Ou seja, nós temos que $\text{Tr}(F_\alpha F_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, juntamente com $F_0 = \mathbb{1}/\sqrt{d}$ e $F_\alpha^\dagger = F_\alpha$, assim como $\text{Tr}(F_\alpha) = 0$ para todo $\alpha = 1, 2, \dots, d^2 - 1$. Desta forma, todo estado quântico ρ do espaço de Hilbert \mathcal{H} pode ser escrito como

$$\rho(t) = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \vec{x}(t) \cdot \vec{F} \right) \quad (6.26)$$

onde

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{d^2-1}(t)) \in \mathbb{R}^{d^2-1}, \quad (6.27)$$

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_{d^2-1}), \quad (6.28)$$

e nós também temos que

$$x_j(t) = \text{Tr}(F_j \rho(t)). \quad (6.29)$$

Com o auxílio da representação de Bloch, nós podemos mapear o caminho tight do espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ no espaço de Bloch. Tal resultado é obtido em termos do seguinte lema.

Lema 15 (Mapeando retas do espaço de estados no espaço de Bloch). *Se o caminho dinâmico que conecta o estado inicial ρ_0 (com vetor de Bloch \vec{n}_0) ao estado final ρ_τ (com vetor de Bloch \vec{n}_τ) corresponde a uma reta contida no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, então o caminho que conecta o vetor de Bloch inicial \vec{n}_0 ao vetor final \vec{n}_τ também corresponde a uma reta no espaço de Bloch.*

Demonstração. Considere um sistema quântico que é representado pelo estado dinâmico

$$\rho_t = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \vec{n}_t \cdot \vec{F} \right), \quad (6.30)$$

e suponha que o caminho que conecta o estado inicial ρ_0 ao estado final ρ_τ corresponde a uma reta no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ do sistema, ou seja

$$\rho_t = \frac{(\rho_\tau - \rho_0)}{\tau} t + \rho_0. \quad (6.31)$$

Utilizando as decomposições de Bloch $\rho_0 = \frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_0 \cdot \vec{F})$ e $\rho_\tau = \frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_\tau \cdot \vec{F})$ para os estados iniciais e finais, nós temos que

$$\rho_t = \frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_t \cdot \vec{F}) = \frac{(\rho_\tau - \rho_0)}{\tau} t + \rho_0 \quad (6.32)$$

$$= \frac{t}{\tau} \left(\frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_\tau \cdot \vec{F}) - \frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_0 \cdot \vec{F}) \right) + \frac{1}{d} (\mathbb{1} + \vec{n}_0 \cdot \vec{F}) \quad (6.33)$$

$$= \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \left[(\vec{n}_\tau - \vec{n}_0) \frac{t}{\tau} + \vec{n}_0 \right] \cdot \vec{F} \right), \quad (6.34)$$

portanto nós temos que

$$\vec{n}_t = \frac{(\vec{n}_\tau - \vec{n}_0)}{\tau} t + \vec{n}_0. \quad (6.35)$$

Logo, o caminho dinâmico no espaço de Bloch, descrito pela curva parametrizada \vec{n}_t com $t \in [0, \tau]$, também corresponde a uma reta, conectando o vetor de Bloch inicial \vec{n}_0 ao vetor final \vec{n}_τ . \square

O Lema 15 mostra que uma dinâmica é tight de acordo com o QSL geométrico se, e somente se, a curva dinâmica que conecta o estado inicial ao estado final corresponde a uma reta no espaço de Bloch. Este resultado vale para uma dinâmica geral, mas nós podemos também particularizar para o caso de um q-bit. Como consequência do Lema 15, nós temos o seguinte resultado.

Lema 16 (Condição de Tightness do α -QSL para um q-bit). *Considere um estado quântico de um q-bit descrito por $\rho_t = \rho(n_t) = \rho_{11,t}|0\rangle\langle 0| + (1 - \rho_{11,t})|1\rangle\langle 1| + \rho_{12,t}|0\rangle\langle 1| + \rho_{12,t}^*|1\rangle\langle 0|$, com $\rho_{j,l,t}$ sendo o elemento de matriz do estado ρ_t com respeito a base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ de auto-estados de σ^z . Para uma dinâmica geral deste estado, o QSL geométrico induzido por uma α -norma Schatten [veja Eq. (6.8)] é tight (ou seja, $\tau_{QSL}^\alpha/\tau = 1$) se, e somente se, nós obtemos*

$$\frac{d\vec{n}_t}{dt} = \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| \hat{r}_{0,t}, \quad (6.36)$$

na qual é equivalente a condição

$$\left(\operatorname{Re} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), -\operatorname{Im} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), \frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right) = \Omega \hat{r}_{0,t}, \quad (6.37)$$

onde

$$\hat{r}_{0,t} = \frac{\vec{n}_t - \vec{n}_0}{\|\vec{n}_t - \vec{n}_0\|} \quad (6.38)$$

é o vetor unitário na qual define a direção da linha que conecta o vetor de Bloch inicial ao vetor final, com

$$\Omega := \sqrt{\left| \frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right|^2 + \left| \frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right|^2}, \quad (6.39)$$

e $\|d\vec{n}_t/dt\|$ é definida na Eq. (6.9).

Demonstração. Veja que uma dinâmica é tight de acordo com o α -QSL ($\tau = \tau_{QSL}^\alpha$) se, e somente se, o caminho no espaço de estados corresponde a uma reta que conecta o operador densidade inicial ρ_0 ao estado final ρ_τ . De acordo com o Lema 15, isso é equivalente a obter uma reta que conecta o vetor de Bloch inicial \vec{n}_0 ao vetor final \vec{n}_τ . Portanto, sendo \vec{n}_t a curva que parametriza a dinâmica no espaço de Bloch, nós podemos concluir que $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$ se, e somente se,

$$\frac{d\vec{n}_t}{dt} = \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| \hat{r}_{0,t} , \quad (6.40)$$

e isto vale para uma dinâmica geral.

Particularizando para o caso de um q-bit, nós podemos escrever o estado na base computacional como sendo

$$\rho_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_{z,t} & n_{x,t} - in_{y,t} \\ n_{x,t} + in_{y,t} & 1 - n_{z,t} \end{pmatrix} , \quad (6.41)$$

onde obtemos as relações $\rho_{11,t} = (1/2)(1 + n_{z,t})$ e $\rho_{12,t} = (1/2)(n_{x,t} - in_{y,t})$, que podem ser invertidas para obtermos $n_{z,t} = 2\rho_{11,t} - 1$, $n_{x,t} = 2\text{Re}(\rho_{12,t})$, e $n_{y,t} = -2\text{Im}(\rho_{12,t})$. Utilizando estas transformações, nós podemos calcular a derivada temporal do vetor dinâmico \vec{n}_t que descreve a curva dinâmica no espaço de Bloch, nomeadamente

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}_t}{dt} &= \left(\frac{dn_{x,t}}{dt}, \frac{dn_{y,t}}{dt}, \frac{dn_{z,t}}{dt} \right) \\ &= 2 \left(\text{Re} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), -\text{Im} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), \frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right) . \end{aligned} \quad (6.42)$$

Por fim, a Eq. (6.42) implica que a norma Euclideana $\|d\vec{n}_t/dt\|$ pode ser escrita como

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{j=x,y,z} \left(\frac{dn_{j,t}}{dt} \right)^2} = 2\Omega , \quad (6.43)$$

onde nós temos introduzido a quantidade

$$\Omega := \sqrt{\left| \frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right|^2 + \left| \frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right|^2} \quad (6.44)$$

Portanto, combinando as Eqs. (6.40), (6.42) e (6.43), nós encontramos que

$$\left(\text{Re} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), -\text{Im} \left(\frac{d\rho_{12,t}}{dt} \right), \frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right) = \Omega \hat{r}_{0,t} , \quad (6.45)$$

e obtemos a afirmação final do Lema 16. \square

Nós podemos fornecer duas interpretações para o Lema 16. Por um lado, de acordo com o α -QSL, nós vemos que o melhor caminho dinâmico entre dois estados é a reta que os une, tanto em termos da geometria do espaço de estados quanto em termos do espaço

de Bloch. Por outro lado, a condição equivalente dada pela Eq. (6.37) nos fornece uma interpretação algébrica de tal caminho ótimo. Note que, dependendo do estado inicial e final do sistema, nem todo tipo de processo físico é apto a ser tight. Uma vez que $\Omega \geq 0$, se nós tivermos, por exemplo, um estado inicial e final tais que $(\hat{r}_{0,t})_z < 0$, nós temos que um processo tight deve satisfazer $d\rho_{11,t}/dt < 0$. Ou seja, um processo apto a ser tight (nesse caso) necessita ser um processo onde a população $\rho_{11,t}$ é uma função monótona decrescente no tempo. Portanto, dependendo do estado inicial e final do sistema, nós temos uma restrição sob o tipo de processo físico que pode ser tight.

Até agora, nós desenvolvemos um novo limite quântico de velocidade baseado na abordagem geométrica e adotando uma α -norma Schatten no espaço de estados. No que segue, nós iremos desenvolver mais um limite quântico de velocidades, mas baseado agora na *desigualdade de Holder*.

6.1.2 QSL baseado na desigualdade de Holder

O próximo limite quântico de velocidades também se baseia nas α -normas Schatten. Relembre que para todo par de operadores lineares $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, vale a seguinte relação

$$|\text{Tr}[Y^\dagger X]| \leq \|X\|_\alpha \|Y\|_\beta, \quad (6.46)$$

onde nós temos $1/\alpha + 1/\beta = 1$, na qual é conhecida como *desigualdade de Holder*. Além disso, para uma dada norma Schatten $\|\cdot\|_\alpha$ com $\alpha \in [1, \infty]$, a respectiva β -norma $\|\cdot\|_\beta$, com $\beta \in [1, \infty]$ e que satisfaz $1/\alpha + 1/\beta = 1$, é chamada de *norma dual*.

Vamos então considerar um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão $d = \dim(\mathcal{H})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ representa o espaço de estados quânticos deste sistema. Por hipótese, suponha que o espaço de estados é munido com uma α -norma Schatten, e definimos uma métrica $D_\alpha(\rho, \sigma) := \|\rho - \sigma\|_\alpha$ para todo par de elementos deste espaço. Portanto, $(\mathcal{D}(\mathcal{H}), D_\alpha)$ constitui um espaço métrico de estados quânticos. Em complemento, vamos também considerar que a evolução do sistema quântico é descrita por um mapa dinâmico $\Lambda_{(t,0)}$ que é temporalmente diferenciável, com $\rho_t = \Lambda_{(t,0)}(\rho_0)$ para um dado estado inicial $\rho_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Algebricamente, isto significa que a derivada temporal $d\rho_t/dt$ é suposta ser bem definida para todo instante de tempo $t > 0$, e geometricamente isto implica que o caminho dinâmico no espaço de estados constitui uma curva contínua e suave contida em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Nós agora introduzimos o *overlap* entre os estados inicial e final como sendo $\xi(t) = \text{Tr}(\rho_0 \rho_t)$. Em particular, note que quando $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ constitui um estado inicial puro do sistema, o overlap $\xi(t) = \langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle$ torna-se a fidelidade entre estes dois estados (5). Devido a desigualdade de Holder mencionada anteriormente, nós obtemos que o valor

absoluto da taxa de variação do overlap² é limitado superiormente por

$$\left| \frac{d\xi(t)}{dt} \right| = \left| \text{Tr} \left(\rho_0 \frac{d\rho_t}{dt} \right) \right| \leq \|\rho_0\|_\beta \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha, \quad (6.47)$$

onde nós temos usado que $\rho_0 = \rho_0^\dagger$. Integrando esta desigualdade no intervalo $[0, \tau]$, nós obtemos que

$$|\xi(\tau) - \xi(0)| \leq \|\rho_0\|_\beta \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha, \quad (6.48)$$

onde foi usado que $|\xi(\tau) - \xi(0)| = \left| \int_0^\tau dt (d\xi(t)/dt) \right| \leq \int_0^\tau dt |d\xi(t)/dt|$. Entretanto, veja que $\xi(0) = \text{Tr}(\rho_0^2) \in [\frac{1}{d}, 1]$ é a pureza do estado inicial, enquanto que $\xi(\tau) = \text{Tr}(\rho_\tau \rho_0) \in [0, 1]$ é o overlap entre o estado inicial e final. Então, nós obtemos

$$\frac{1}{\|\rho_0\|_\beta} |\text{Tr}[(\rho_\tau - \rho_0)\rho_0]| \leq \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha. \quad (6.49)$$

Portanto, para todo $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ tais que satisfazem a equação $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, Eq. (6.49) implica na seguinte desigualdade temporal

$$\tau \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}, \quad (6.50)$$

onde nós obtemos o novo limite quântico de velocidades induzido pela desigualdade de Holder, nomeadamente o (α, β) -QSL, que é definido por

$$\tau_{QSL}^{\alpha, \beta} = \frac{|\text{Tr}[(\rho_\tau - \rho_0)\rho_0]|}{\|\rho_0\|_\beta \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha} \tau. \quad (6.51)$$

Veja que o limite quântico de velocidades definido na Eq. (6.51) é válido para qualquer tipo de estado inicial, sendo este puro ou misto. Em especial, vamos agora considerar um estado inicial puro, isto é, $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ para um estado $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$. Neste caso, nós encontramos que $\text{Tr}(\rho_0^2) = 1$ e $\text{Tr}(\rho_0 \rho_\tau) = \langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle \in [0, 1]$. Uma vez que ρ_0 constitui um operador de projeção, nós temos que $\rho_0^2 = \rho_0$, e então $\|\rho_0\|_\beta = 1$ para todo $\beta \in [1, \infty]$. Considerando todos estes pontos, a Eq. (6.51) torna-se

$$\frac{\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}}{\tau} = \frac{1 - \langle\psi_0|\rho_\tau|\psi_0\rangle}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_\alpha}. \quad (6.52)$$

Notavelmente, a Eq. (6.52) mostra que não há mais nenhuma dependencia na norma dual $\|\cdot\|_\beta$ do estado inicial, e o limite quântico de velocidades $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$ torna-se dependente unicamente da α -norma Schatten $\|\cdot\|_\alpha$ adotada no espaço de estados do sistema.

Veja que até aqui, nós estamos considerando um espaço de Hilbert d -dimensional geral, podendo descrever um sistema quântico aberto ou fechado, onde consideramos separadamente o caso de um estado inicial puro. A seguir, vamos particularizar a dimensão desse espaço, investigando este limite quântico de velocidade aplicado para dinâmica de q-bits ($d = 2$).

² O módulo da taxa de variação da medida de distinguibilidade é conhecida como *velocidade quântica* (35) e representa a velocidade de evolução de um dado estado inicial para um estado final do sistema.

6.1.2.1 (α, β) -QSL para um q-bit

Vamos agora particularizar o quantificador $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$ de limite quântico de velocidades definido na Eq. (6.51) para o caso de uma evolução de um q-bit que é representada pelo estado dinâmico $\rho_t = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma})$, descrevendo um processo físico geral³ no intervalo $0 \leq t \leq \tau$. Neste contexto, pode ser verificado que a Eq. (6.51) torna-se

$$\frac{\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}}{\tau} = \frac{2^{1-\frac{1}{\alpha}} |(\vec{n}_\tau - \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0|}{[(1 + \|\vec{n}_0\|)^\beta + (1 - \|\vec{n}_0\|)^\beta]^{\frac{1}{\beta}} \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|}. \quad (6.53)$$

Em particular, considerando um estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, nós temos que $\|\vec{n}_0\| = 1$, e o quantificador dado pela Eq. (6.53) pode ser escrito como

$$\frac{\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}}{\tau} = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{(1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|}. \quad (6.54)$$

Nós vemos novamente que o quantificador $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$ torna-se independente da norma dual para um estado inicial puro, e este depende apenas do produto interno entre o vetor final e inicial pertencentes ao espaço de Bloch. Além disso, a dinâmica do q-bit está implicitamente posicionada no comprimento da curva dinâmica no espaço de Bloch, dado por $\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|$. Por fim, o valor de $\alpha \in [1, \infty]$ entra como um parâmetro de escala, nomeadamente dado por $2^{-1/\alpha}$.

Tal como fizemos para o α -QSL, vamos agora comparar o (α, β) -QSL com outros paradigmáticos quantificadores de limite quântico de velocidades.

6.1.2.2 Comparando (α, β) -QSL com outros quantificadores

Vamos agora comparar o (α, β) -QSL, definido na Eq. (6.51), com o quantificador desenvolvido por del Campo *et al.* (CEPH) (43). Inicialmente, nós fixamos $\alpha = \beta = 2$, e então definimos a 2-norma Schatten (norma de Hilbert-Schmidt) no espaço de estados. Dessa forma, a medida de distância no espaço de estados quânticos será dada por $D_\alpha(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_2$. Neste caso, o quantificador de QSL dado na Eq. (6.51) torna-se

$$\frac{\tau_{QSL}^{2,2}}{\tau} = \frac{\|\rho_0\|_2 |f(\tau) - f(0)|}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_2}, \quad (6.55)$$

onde $f(t)$ denota a pureza relativa,

$$f(t) := \frac{\text{Tr}(\rho_0 \rho_t)}{\|\rho_0\|_2^2}, \quad (6.56)$$

³ Nossa única hipótese sobre o processo físico é de que a derivada temporal $d\rho_t/dt$ é bem definida para todo instante da evolução, que pode representar um sistema quântico aberto ou fechado.

com $0 \leq f(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, \tau]$, e $f(0) = 1$. Em particular, introduzindo a parametrização $f(t) = \cos \theta_t$, com $0 \leq \theta_t \leq \pi/2$, e considerando o fato de que $|\cos \theta_\tau - 1| \geq 4\theta_\tau^2/\pi^2$, nós obtemos que Eq. (6.55) implica na desigualdade

$$\frac{\tau_{QSL}^{2,2}}{\tau} = \frac{\|\rho_0\|_2 |\cos \theta_\tau - 1|}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_2} \geq \frac{\|\rho_0\|_2}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|_2} \frac{4\theta_\tau^2}{\pi^2}. \quad (6.57)$$

A grandeza $\tau_{QSL}^{CEPH}/\tau := (4\theta_\tau^2/\pi^2)\|\rho_0\|_2/\int_0^\tau dt \|d\rho_t/dt\|_2$ no lado direito da Eq. (6.57) define o QSL desenvolvido por del Campo *et al.* (CEPH) para evoluções não unitárias de sistemas quânticos abertos (43). Portanto, nós podemos concluir que

$$\tau_{QSL}^{2,2} \geq \tau_{QSL}^{CEPH}. \quad (6.58)$$

A Eq. (6.58) mostra que, para $\alpha = \beta = 2$, o quantificador de limite quântico de velocidades obtido através da desigualdade de Holder, Eq. (6.51), é mais “tight” que o QSL desenvolvido por del Campo *et al.* Por fim, vale a pena mencionar que a escolha $\alpha = \beta = 2$ é necessária pois τ_{QSL}^{CEPH} foi originalmente derivado usando a norma de Hilbert-Schmidt.

Agora, nós iremos comparar o (α, β) -QSL definido na Eq. (6.51) com o limite quântico de velocidade obtido por Deffner-Lutz (35). Por um lado, para um dado estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, o DL-QSL é dado pela Eq. (6.19). Por outro lado, para o mesmo estado inicial puro ρ_0 , o $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ é fornecido na Eq. (6.52). Portanto, note que nós temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{QSL}^{\alpha,\beta} = \tau_{QSL}^{DL}, \quad (6.59)$$

onde neste caso, uma vez que $1/\alpha + 1/\beta = 1$, se $\alpha \rightarrow \infty$ então nós temos que a norma dual $\|\cdot\|_\beta$ é tal que $\beta \rightarrow 1$. Em particular, para a dinâmica de um único q-bit que parte de um estado inicial puro, estes dois quantificadores podem ser escritos como

$$\frac{\tau_{QSL}^{DL}}{\tau} = \frac{1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|}, \quad (6.60)$$

e

$$\frac{\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}}{\tau} = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{(1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|}. \quad (6.61)$$

Portanto, considerando um sistema descrito por um espaço de Hilbert bidimensional (q-bit) cujo estado inicial é puro e tomando uma α -norma Schatten com $\alpha \in [1, \infty]$ e a sua respectiva norma dual $\|\cdot\|_\beta$ com $\beta \in [1, \infty]$ satisfazendo $1/\alpha + 1/\beta = 1$, o quantificador $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ se relaciona com τ_{QSL}^{DL} através da equação

$$\tau_{QSL}^{\alpha,\beta} = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \tau_{QSL}^{DL}. \quad (6.62)$$

Finalmente, nós podemos concluir que o DL-QSL pode ser visto como um caso particular do (α, β) -QSL uma vez que τ_{QSL}^{DL} pode ser obtido diretamente do $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ tomando

o limite $\alpha \rightarrow \infty$. Em particular, considerando a dinâmica de um q-bit, nós podemos concluir que estes dois quantificadores são relacionados a partir de um fator de escala $2^{-1/\alpha}$ que é definido a partir da α -norma Schatten fixada no espaço de estados. Dessa forma, nós vimos que dois limites quânticos de velocidade baseados em abordagens totalmente diferentes podem ser relacionados de uma forma muito simples, tal como descrito na Eq. (6.62), trazendo novamente a noção de *universalidade* entre estes quantificadores.

Na próxima seção, nós iremos investigar as condições necessárias e suficientes para obter uma dinâmica tight de acordo com o (α, β) -QSL. Ou seja, as propriedades requisitadas sobre a dinâmica para obter a saturação da desigualdade temporal, nomeadamente quando $\tau = \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$. Novamente, iremos tentar interpretar estas condições sob uma ótica geométrica, descrevendo a evolução dinâmica como um caminho no espaço de estados (ou no espaço de Bloch), assim como fornecer uma interpretação algébrica em termos do comportamento temporal das populações e coerências do operador densidade que descreve o estado dinâmico do sistema.

6.1.2.3 Condições de Tightness para o (α, β) -QSL

Nós mostramos que para todo tempo de evolução τ entre dois estados quânticos ρ_0 e ρ_τ , nós temos a desigualdade $\tau \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$. Nós iremos agora procurar as condições necessárias e suficientes para obter a “melhor” dinâmica de evolução entre o estado inicial e final, nomeadamente quando esta desigualdade é saturada e nós obtemos $\tau = \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$. Estas condições são descritas no próximo lema, onde nós estamos considerando a dinâmica de um q-bit.

Lema 17 (Condição de Tightness no espaço de Bloch de um q-bit para o (α, β) -QSL). *Suponha um sistema descrito por um espaço de Hilbert bidimensional cujo estado inicial $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ representa um estado puro, enquanto que o estado dinâmico é dado por $\rho_t = \rho(\vec{n}_t) = \rho_{11,t}|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + (1 - \rho_{11,t})|\psi_0^\perp\rangle\langle\psi_0^\perp| + \rho_{12,t}|\psi_0\rangle\langle\psi_0^\perp| + \rho_{12,t}^*|\psi_0^\perp\rangle\langle\psi_0|$. Então, na base ortonormal⁴ $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$, nós temos*

$$\begin{aligned} \tau_{QSL}^{\alpha, \beta} = \tau &\Leftrightarrow \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = -2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\vec{n}_0 \cdot \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right) \\ &= 2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{dn_{z,t}}{dt} \right), \end{aligned} \quad (6.63)$$

com $dn_{z,t}/dt \leq 0$, ou equivalentemente

$$\tau_{QSL}^{\alpha, \beta} = \tau \Leftrightarrow \Omega = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right), \quad (6.64)$$

⁴ Como estamos lidando com um espaço vetorial bidimensional, para todo vetor deste espaço nós temos um correspondente estado ortogonal, e estes dois estados podem representar uma base ortonormal deste espaço.

onde $d\rho_{11,t}/dt = d\langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle/dt \leq 0$, com $\|d\vec{n}_t/dt\|$ definido na Eq. (6.9), e Ω é fornecido na Eq. (6.39).

Demonstração. Veja que nós temos $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}/\tau = 1$ se, e somente se, é válida a equação

$$2^{-\frac{1}{\alpha}}(1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0) = \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|. \quad (6.65)$$

Além disso, nós podemos notar que a Eq. (6.65) é satisfeita se, e somente se, a norma Euclideana da derivada temporal do vetor de Bloch dinâmico satisfaz a equação

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = -2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\vec{n}_0 \cdot \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right), \quad (6.66)$$

onde nós utilizamos que o estado inicial é puro. Em particular, nós previamente fixamos a base ortonormal $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$. Nesta base, nós obtemos o vetor de Bloch inicial dado por $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$, na qual implica que $\vec{n}_0 \cdot (d\vec{n}_t/dt) = dn_{z,t}/dt$. Consequentemente, a Eq. (6.66) é equivalente à

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{dn_{z,t}}{dt} \right). \quad (6.67)$$

Uma vez que $\|d\vec{n}_t/dt\| \geq 0$, nós então necessariamente temos que $dn_{z,t}/dt \leq 0$ na Eq. (6.67). Além disso, nós sabemos que $dn_{z,t}/dt = 2 d\rho_{11,t}/dt = 2 d\langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle/dt$ [veja Eq. (6.42)], e também $\|d\vec{n}_t/dt\| = 2\Omega$ [veja Eqs. (6.43) e (6.44)]. Por fim, substituindo estes resultados na Eq. (6.67), nós obtemos que

$$\Omega = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{d\rho_{11,t}}{dt} \right), \quad \text{com} \quad \frac{d\rho_{11,t}}{dt} = \frac{d}{dt} \langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle \leq 0. \quad (6.68)$$

Portanto, nós vemos que a relação $\tau = \tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ é equivalente à Eq.(6.66) e (6.67), que por sua vez são equivalentes à Eq. (6.68), demonstrando assim a afirmação do lema. \square

Vamos agora interpretar o resultado obtido no Lema 17. Do ponto de vista algébrico, nós podemos ver que a condição necessária para ter $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta} = \tau$ é que a evolução dinâmica é caracterizada por um processo dissipativo, isto é, a população do estado inicial puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, nomeadamente $\rho_{11,t} = \langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle$, precisa necessariamente ser uma função monotonicamente decrescente no tempo. Este resultado restringe a classe de canais quânticos para o qual é possível obter uma dinâmica ótima entre o estado inicial puro e um estado final, isto é, obter $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta} = \tau$.

Para obter uma interpretação geométrica do resultado, nós vamos considerar o caso particular onde $\alpha = \infty$ e $\beta = 1$. Como discutido anteriormente, para este caso particular de norma Schatten e considerando um estado inicial puro, nós temos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{QSL}^{\alpha,\beta} = \tau_{QSL}^{DL}. \quad (6.69)$$

Do Lema 17 e uma vez que $\|\vec{n}_0\| = 1$, nós temos que

$$\begin{aligned} \tau_{QSL}^{(\alpha=\infty),(\beta=1)} = \tau &\Leftrightarrow \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = - \left(\vec{n}_0 \cdot \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{d\vec{n}_t}{dt} = - \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| \vec{n}_0 . \end{aligned} \quad (6.70)$$

Portanto, para o caso particular de norma Schatten onde $\alpha = \infty$ e $\beta = 1$, considerando uma dinâmica de um q-bit com estado inicial puro, tal dinâmica é tight de acordo com o quantificador de limite quântico de velocidade $\tau_{QSL}^{\infty,1} = \tau_{QSL}^{DL}$ se, e somente se, o caminho dinâmico é radial na esfera de Bloch, partindo da superfície da esfera localizada no vetor de Bloch inicial \vec{n}_0 . Além disso, por conta da Eq. (6.69), esta condição pode ser vista como sendo a interpretação geométrica de uma dinâmica tight de acordo com o DL-QSL.

Para finalizar nossas análises, nós iremos agora investigar as relações entre os dois novos QSLs desenvolvidos, nomeadamente o α -QSL e o (α, β) -QSL.

6.1.3 Comparando o α -QSL com o (α, β) -QSL

Até aqui, nós desenvolvemos dois novos limites quânticos de velocidade, um baseado na abordagem geométrica e o outro obtido através da desigualdade de Holder, ambos considerando as α -normas Schatten. Além disso, nós comparamos estes quantificadores com outros que podem ser encontrados na literatura, além de fornecer condições necessárias e suficientes para que uma dinâmica seja tight de acordo com estes dois novos QSLs. Agora, nós iremos comparar o α -QSL com o (α, β) -QSL, e fornecer interpretações geométricas desta relação. Tal resultado é fornecido em termos do próximo Lema.

Lema 18 (Relação de desigualdade entre τ_{QSL}^α e $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$). *Para a dinâmica de um q-bit com um estado inicial puro, se $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_\tau \leq 0$, onde \vec{n}_0 representa o vetor de Bloch inicial e \vec{n}_τ o vetor final da dinâmica, então*

$$\tau_{QSL}^\alpha \leq 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} \tau_{QSL}^{\alpha,\beta} . \quad (6.71)$$

Demonstração. Nós estamos considerando um sistema descrito por um espaço de Hilbert bidimensional cujo estado inicial é puro e sofre uma evolução física geral. Neste contexto, dado a evolução dinâmica entre o estado inicial $\rho_0 = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_0 \cdot \vec{\sigma})$ e o estado final $\rho_\tau = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{n}_\tau \cdot \vec{\sigma})$, nós provamos que o α -QSL pode ser dado por

$$\frac{\tau_{QSL}^\alpha}{\tau} = \frac{d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} , \quad (6.72)$$

e também que o (α, β) -QSL pode ser escrito como

$$\frac{\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}}{\tau} = 2^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{(1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} , \quad (6.73)$$

onde $d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) = \|\vec{n}_\tau - \vec{n}_0\|$ corresponde a distância Euclideana entre o vetor de Bloch inicial e final, com $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ para todo vetor \vec{x} no espaço de Bloch. Nós notamos que a distância Euclideana pode ser escrita como se segue

$$d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) = \sqrt{\|\vec{n}_0\|^2 + \|\vec{n}_\tau\|^2 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_\tau} . \quad (6.74)$$

Uma vez que nós estamos lidando com uma evolução física genérica, o estado dinâmico pode não ser mais puro, e conseqüentemente $\|\vec{n}_t\| \leq 1$ para todo $t \in [0, \tau]$. Então, nós obtemos que $d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) \leq \sqrt{2}\sqrt{1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0}$. Em particular, considerando o caso onde $\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0 \leq 0$, nós obtemos que $1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0 \geq 1$. Neste caso, notando que $\sqrt{x} \leq x$ para todo $x \geq 1$, nós obtemos que $\sqrt{1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0} \leq 1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0$. Conseqüentemente, para $\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0 \leq 0$, a Eq. (6.74) pode ser reescrita como

$$d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau) \leq \sqrt{2}(1 - \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0) . \quad (6.75)$$

Finalmente, combinando as Eqs. (6.72), (6.73), e (6.75), nós obtemos o resultado

$$\tau_{QSL}^\alpha \leq 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} \tau_{QSL}^{\alpha, \beta} , \quad (6.76)$$

na qual é válido sempre que $\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0 \leq 0$, demonstrando assim o resultado afirmado neste Lema.

□

A desigualdade fornecida na Eq. (6.71) possui uma interpretação geométrica interessante, tal como é ilustrado na Fig. 5 abaixo. Veja que o estado inicial puro é representado por um ponto \vec{n}_0 na superfície da esfera de Bloch, uma vez que $\|\vec{n}_0\| = 1$. Este vetor unitário divide a esfera de Bloch em dois hemisférios através do plano ortogonal a este vetor. Vamos chamar de *polo norte* a metade da esfera de Bloch que possui o ponto \vec{n}_0 , e o *polo sul* será a outra metade, na qual possui o ponto $-\vec{n}_0$. Nesta configuração, nós temos que $\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_0 \leq 0$ sempre que o vetor de Bloch final, nomeadamente \vec{n}_τ , pertence ao polo sul, e o resultado do Lema 18 é válido neste caso.

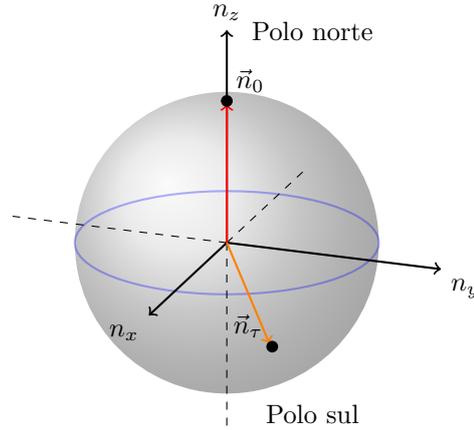


Figura 5 – Interpretação geométrica do Lema 18.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além do resultado fornecido pelo Lema 18, nós também mostramos que o α -QSL é mais tight que o (α, β) -QSL para o caso de uma dinâmica de um q-bit que inicia em um estado puro.

Lema 19. *Considere um sistema de dois níveis preparado em um estado inicial puro. Nesta configuração, o α -QSL é mais tight que (α, β) -QSL. Em outras palavras, para todo tempo de evolução τ entre um estado inicial puro ρ_0 e um estado final geral (não necessariamente puro) ρ_τ de um q-bit, nós temos que*

$$\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}, \quad (6.77)$$

onde $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ e $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Demonstração. Considerando um sistema bidimensional com estado inicial puro, nós mostramos que $\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL}$. Além disso, neste mesmo cenário, também mostramos que o DL-QSL é apenas um caso particular do (α, β) -QSL, ou seja, que $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta} = 2^{-1/\alpha} \tau_{QSL}^{DL}$, ou equivalentemente $\tau_{QSL}^{DL} = 2^{1/\alpha} \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$, onde $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ e $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Como $2^{1/\alpha} \geq 1$ para cada $\alpha \in [1, \infty]$, nós temos

$$\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL} = 2^{1/\alpha} \tau_{QSL}^{\alpha, \beta} \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}, \quad (6.78)$$

e conseqüentemente podemos concluir que $\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$. \square

Como consequência do Lema 19, nós temos que o α -QSL é mais tight que o quantificador desenvolvido por del Campo *et al* (43), pois nós mostramos que o (α, β) -QSL é mais tight que o τ_{QSL}^{CEPH} . Logo, este resultado é a peça final que faltava para que possamos comparar todos os quantificadores anteriormente apresentados. Relembre que o

QSL desenvolvido por Campaioli *et al* (44) pode ser interpretado como um caso particular do α -QSL considerando normas Schatten mais gerais, além de que o α -QSL é mais tight que o DL-QSL para dinâmicas gerais de um q-bit cujo estado inicial é puro. Por outro lado, o (α, β) -QSL é um quantificador intermediário, sendo uma generalização do DL-QSL e também sendo mais tight que τ_{QSL}^{CEPH} , mas é menos tight que o α -QSL. Por fim, o QSL geométrico induzido por uma norma Schatten pode ser interpretado como um QSL universal para a dinâmica geral de um q-bit que é preparado inicialmente em um estado puro. Em outras palavras, o α -QSL é o quantificador mais tight dentre aqueles que foram apresentados neste trabalho.

Vamos sumarizar os resultados obtidos até agora. Nesta seção nós desenvolvemos dois novos limites quânticos de velocidade, e também estabelecemos conexões entre eles e outros quantificadores previamente existentes. Além disso, condições necessárias e suficientes para saturação dessas desigualdades temporais foram obtidas e interpretações geométricas e algébricas foram discutidas. Por fim, nós comparamos o α -QSL com o (α, β) -QSL, obtendo relações de desigualdade entre eles e fornecendo uma clara interpretação geométrica, além de mostrar que o α -QSL pode ser visto como um quantificador universal quando lidamos com a dinâmica de um q-bit cujo estado inicial é puro.

Na próxima seção, nós iremos investigar a relação entre os limites quânticos de velocidade discutidos anteriormente e os efeitos não-Markovianos de dinâmicas quânticas.

6.2 Markovianidade Quântica e Tightness

Como discutido anteriormente, dado um limite quântico de velocidade τ_{QSL} , é importante conhecer as condições necessárias e suficientes para obter uma dinâmica tight, nomeadamente quando $\tau = \tau_{QSL}$ para algum tempo de evolução τ entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ . Nosso objetivo atual consiste em verificar se existe alguma relação bem definida entre as dinâmicas tight e os regimes de Markovianidade ou não-Markovianidade. Em outras palavras, nós queremos investigar quais são os contextos onde uma dinâmica Markoviana (ou não-Markoviana) é tight para os limites quânticos de velocidade discutidos anteriormente.

Por outro lado, por mais que não seja possível obter uma dinâmica tight, será útil investigar se os quantificadores avaliados podem ter os seus valores controlados. Em outras palavras, claramente a melhor dinâmica possível entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ é quando $\tau = \tau_{QSL}$, e o tempo de evolução entre estes dois estados é o mínimo possível. Entretanto, por mais que a evolução não seja tight, nós queremos melhorar a dinâmica do sistema aproximando um tempo de evolução τ ao seu valor mínimo dado por algum quantificador de QSL.

Vamos iniciar nossa análise pelo quantificador desenvolvido por del Campo *et al*

(43), nomeadamente o τ_{QSL}^{CEPH} . Como discutido anteriormente, nós demonstramos que o (α, β) -QSL é mais tight que τ_{QSL}^{CEPH} , ou seja, para todo tempo de evolução τ entre um estado inicial ρ_0 e um estado final ρ_τ , nós temos que

$$\tau \geq \tau_{QSL}^{2,2} \geq \tau_{QSL}^{CEPH}, \quad (6.79)$$

onde precisamos definir $\alpha = \beta = 2$ pois o τ_{QSL}^{CEPH} é originalmente definido apenas considerando a norma de Hilbert-Schmidt. Vale ressaltar que esta desigualdade vale para toda evolução dinâmica⁵ e para um estado inicial ρ_0 geral, sendo puro ou misto. Veja que nós buscamos obter dinâmicas com o tempo τ de evolução tão menor quanto for possível, e uma vez que a desigualdade $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta} \geq \tau_{QSL}^{CEPH}$ é estabelecida de forma geral para $\alpha = \beta = 2$, é suficiente analisar o quantificador $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ ao invés de τ_{QSL}^{CEPH} .

Além disso, nós também mostramos que o limite quântico de velocidade desenvolvido por Deffner e Lutz (35) (DL-QSL), denotado por τ_{QSL}^{DL} , é um caso particular do (α, β) -QSL para $\alpha \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 1$, e nós vimos que uma dinâmica é tight de acordo com este quantificador se, e somente se, o caminho dinâmico é radial na esfera de Bloch, iniciando de um estado puro pertencente a sua superfície. Nós também mostramos que o quantificador desenvolvido por Campaioli *et al* (44), denotado por τ_{QSL}^{CPM} , é apenas um caso particular do α -QSL que foi desenvolvido utilizando a abordagem geométrica. Nomeadamente, nós vimos que o τ_{QSL}^{CPM} corresponde ao τ_{QSL}^α para o caso onde $\alpha = 2$, como descrito nas equações (6.7) e (6.24), representando a escolha da norma L_2 no espaço de estados do sistema. Além disso, estes quantificadores são equivalentes para o caso de uma dinâmica de um q-bit, como ilustrado pelo Teorema 15.

Por fim, o Lema 19 mostrou que α -QSL é mais tight que o (α, β) -QSL para o caso de uma dinâmica de um q-bit que é preparado inicialmente em um estado puro. Dessa forma, nós vemos que os quantificadores τ_{QSL}^α e $\tau_{QSL}^{\alpha,\beta}$ generalizam os outros limites quânticos de velocidade discutidos anteriormente, onde o α -QSL é o quantificador mais tight dentro dos que foram mencionados, e o (α, β) -QSL é um quantificador intermediário. Portanto, considerando a dinâmica de um q-bit que é inicialmente preparado em um estado puro, devido ao Teorema 15, nós temos que

$$\tau_{QSL}^\alpha(\tau) = \frac{d_{\text{euc}}(\vec{n}_0, \vec{n}_\tau)}{\int_0^\tau dt \left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\|} \tau, \quad (6.80)$$

onde $\|\vec{n}_0\| = 1$, e as condições necessárias e suficientes para obter uma evolução tight já foram discutidas através do Lema 16, na qual tal caminho dinâmico corresponde a linha reta que conecta o estado inicial ao estado final do sistema. A questão que colocamos agora é: *qual é a relação entre τ_{QSL}^α e Markovianidade quântica?*

⁵ Desde que a derivada temporal $d\rho_t/dt$ do operador densidade seja bem definida para todo instante de tempo.

Os efeitos não-Markovianos em limites quânticos de velocidade foram originalmente investigados por Sebastian Deffner e Eric Lutz (35). Eles utilizaram o modelo de Jaynes–Cummings (45) para representar a dinâmica do sistema físico, e adotaram a BLP–Markovianidade como a definição de Markovianidade quântica. Eles mostraram que na ausência de efeitos não-Markovianos a dinâmica é tight de acordo com o DL–QSL. Logo, nós teríamos $\tau = \tau_{QSL}^{DL}$ no regime Markoviano, o que poderia nos levar a concluir que as dinâmicas Markovianas representam um tipo de dinâmica ótima no que diz respeito a evolução do sistema entre o estado inicial e final.

Em complemento, J. Teittinen *et al* (52) estenderam a análise feita por Deffner e Lutz para outras dinâmicas. Eles consideraram diferentes tipos de canais para representar a evolução do sistema físico e investigaram a relação entre uma dinâmica tight (considerando o DL–QSL) e os efeitos não-Markovianos. Eles mostraram que não há relação geral entre o DL–QSL e a não-Markovianidade, isto é, também há dinâmicas onde uma evolução não-Markoviana pode ser tight.

Agora, nós buscamos estender as análises feitas por Deffner e Lutz (35) e por J. Teittinen *et al* (52) para um quantificador mais geral, nomeadamente o α –QSL, e investigar sua relação com a Markovianidade quântica. Nós iremos iniciar nossa análise mostrando condições suficientes onde a Markovianidade ou não-Markovianidade sempre implicam em uma dinâmica tight. Em seguida, nós vamos mostrar um exemplo onde ambos os regimes Markoviano e não-Markoviano são tight, e também um exemplo onde ambos não são tight. Por fim, nós vamos mostrar como é possível melhorar a evolução do q-bit controlando o α –QSL, isto é, iremos mostrar como é possível fazer $\tau_{QSL}^\alpha/\tau \approx 1$.

6.2.1 Contextos onde Markovianidade ou não-Markovianidade implicam em uma dinâmica tight

Como discutido anteriormente, nós provamos que [veja Eq.(6.22)] quando lidamos com um q-bit inicialmente preparado em um estado puro, o α –QSL é mais tight que o DL–QSL, isto é

$$\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL}, \quad (6.81)$$

para todo tempo de evolução τ entre um estado inicial puro ρ_0 e o estado final ρ_τ do q-bit. Veja que se $\tau_{QSL}^{DL} = \tau$, então $\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL} = \tau$, logo $\tau_{QSL}^\alpha = \tau$. Dessa forma, nós podemos concluir que quando uma dinâmica é tight de acordo com o DL–QSL nós também obtemos uma dinâmica tight de acordo com o α –QSL. Isso é consistente com os resultados obtidos anteriormente: de acordo com o Lema 17, uma dinâmica é tight de acordo com o DL–QSL se, e somente se, o caminho dinâmico é radial na esfera de Bloch, e de acordo com o Lema 16 uma dinâmica é tight de acordo com o α –QSL se, e somente se, o caminho dinâmico é uma reta no espaço de Bloch. Logo, uma vez que um caminho radial

constitue uma reta com uma direção bem definida, uma evolução tight de acordo com o DL-QSL sempre será tight também de acordo com o α -QSL, mas note que a recíproca não é verdadeira.

Vamos agora ilustrar algumas condições onde a Markovianidade implica em uma dinâmica tight de acordo com o DL-QSL e que foram originalmente desenvolvidas nas referências (35, 52). Estas condições também podem ser aplicadas para o α -QSL uma vez que a Eq.(6.81) é sempre válida para a dinâmica de um q-bit com estado inicial puro.

6.2.1.1 Dinâmica onde Markovianidade implica em tightness: modelo de Jaynes-Cummings

Vamos iniciar com um caso onde a evolução é tight de acordo com o DL-QSL unicamente no regime Markoviano. Esta dinâmica é descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings e representa o decaimento de um sistema de dois níveis.

Utilizando a abordagem microscópica (45), nós podemos partir de uma Hamiltoniana total que descreve um sistema de dois níveis interagindo com um ambiente bosônico com infinitos graus de liberdade. A equação mestra que descreve este sistema de dois níveis (q-bit) é dada por

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \gamma(t) \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho(t) \} \right), \quad (6.82)$$

onde $\sigma_{\pm} \equiv (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ representam os operadores de abaixamento e levantamento do grupo de Lie $SU(2)$, enquanto que o a taxa de decaimento $\gamma(t)$ é definida por

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0\lambda \sinh(t\phi/2)}{\phi \cosh(t\phi/2) + \lambda \sinh(t\phi/2)}, \quad (6.83)$$

sendo $\phi \equiv \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma_0\lambda}$ a largura espectral do reservatório Lorentziano, e γ_0 representa a força do acoplamento entre o q-bit e o ambiente bosônico.

A solução da Equação Mestra (6.82) para o estado dinâmico $\rho(t) = \Lambda_{(t,0)}^{\text{JC}}(\rho_0)$ do q-bit é dada por

$$\rho(t) = \Lambda_{(t,0)}^{\text{JC}}(\rho_0) = \begin{pmatrix} 1 - P_1|b_t|^2 & (q_{10}b_t)^* \\ q_{10}b_t & P_1|b_t|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.84)$$

onde a forma matricial dada pela Eq. (6.84) é escrita na base de auto-estados⁶ de σ_z , sendo que P_1 corresponde a população inicial do estado excitado $|1\rangle$, $q_{10} = \langle 1 | \rho(0) | 0 \rangle$ representa a coerência inicial e nós temos

$$b_t = e^{-\lambda t/2} \left(\cosh(t\phi/2) + \frac{\lambda}{\phi} \sinh(t\phi/2) \right). \quad (6.85)$$

Nós podemos agora calcular a medida BLP de não-Markovianidade para este modelo. Relembre que a medida BLP é dada por

⁶ Temos $\sigma_z |l\rangle = (-1)^l |l\rangle$, onde $l \in \{0, 1\}$.

$$\mathcal{N}(\Lambda_{(\tau,0)}^{\text{JC}}) = \max_{\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}} \int_{\sigma>0} dt \sigma(\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}, t) \quad (6.86)$$

onde nós temos

$$\sigma(\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}, t) \equiv \frac{dD_1[\rho^{(1)}(t), \rho^{(2)}(t)]}{dt} \quad (6.87)$$

sendo $D_1[\rho^{(1)}(t), \rho^{(2)}(t)] = \|\rho^{(1)}(t) - \rho^{(2)}(t)\|/2$ a distância traço entre os dois estados dinâmicos, enquanto que o estado dinâmico que evolui inicialmente de $\rho_0^{(i)}$ de acordo com o modelo de Jaynes–Cummings é dado por

$$\rho^{(i)}(t) = \Lambda_{(t,0)}^{\text{JC}}(\rho_0^{(i)}) ; i = 1, 2 . \quad (6.88)$$

Em (54), foi numericamente mostrado que o par de auto-estados de σ_z resolve o problema de maximização na Eq.(6.86), e também foi demonstrado que é possível escrever o DL–QSL em termos desta medida, provando a seguinte relação

$$\tau_{QSL}^{DL} = \frac{\tau}{1 + 2 \left[\frac{\mathcal{N}(\Lambda_{(\tau,0)}^{\text{JC}})}{1 - |b_\tau|^2} \right]} . \quad (6.89)$$

A Eq.(6.89) caracteriza a relação completa entre a BLP–Markovianidade e o DL–QSL. Veja que quando nós temos uma dinâmica BLP–Markoviana a distância traço entre dois estados dinâmicos constitui uma função monotonicamente decrescente no tempo, e portanto $\mathcal{N} = 0$ e $\tau_{QSL}^{DL} = \tau$. Além disso, de acordo com o Teorema 14, nós temos que a RHP–Markovianidade também implica em $\mathcal{N} = 0$, uma vez que a distância traço também decai monotonicamente no tempo. Logo, em ambos os regimes de RHP e BLP Markovianidade nós sempre⁷ temos uma dinâmica tight de acordo com o DL–QSL.

Em complemento, considerando que o q–bit é preparado inicialmente em um estado puro, nós temos também que a Eq.(6.81) é válida. Dessa forma, para um sistema cuja evolução é descrita pelo modelo de Jaynes–Cummings, o regime RHP e BLP Markoviano sempre será tight de acordo com o α –QSL. Veja que a RHP ou BLP Markovianidade são apenas condições suficientes para obter uma evolução tight de acordo com o α –QSL. Em outras palavras, se a evolução é RHP ou BLP Markoviana, então $\mathcal{N} = 0$ e $\tau \geq \tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL} = \tau$, logo $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$ e a dinâmica é tight. Entretanto, diferentemente do DL–QSL, nós ainda não podemos afirmar que a dinâmica não será tight no regime não–Markoviano, ou seja, quando $\mathcal{N} > 0$.

Um sistema físico cuja evolução é descrita pelo modelo de Jaynes–Cummings representa um exemplo onde o regime Markoviano sempre será tight de acordo com o

⁷ A afirmação é que em ambos os regimes RHP e BLP de Markovianidade, nós obtemos $\mathcal{N} = 0$ e portanto a dinâmica será tight. Entretanto, é importante lembrar que existem dinâmicas BLP Markovianas que não são RHP Markovianas.

α -QSL. Vamos agora apresentar um exemplo onde as dinâmicas não-Markovianas podem ser tight.

6.2.1.2 Dinâmica onde não-Markovianidade implica em tightness

Vamos agora discutir um modelo onde o regime não-Markoviano representa uma evolução tight. Para isso, vamos lidar com a evolução dinâmica no espaço de Bloch. De forma geral, um mapa dinâmico que descreve a evolução de um q-bit pode ser representado por uma matriz 3×3 que atua no espaço de Bloch, transformando o vetor dinâmico \vec{n}_t .

Considere então um sistema quântico descrito pelo espaço de Hilbert \mathcal{H} bidimensional cuja evolução é descrita em termos do mapa dinâmico $\Phi_{(t,0)} \equiv \Phi$. Lembre que o conjunto⁸ $\beta_{SU(2)} \equiv \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \mathbb{1}_2\}$ representa uma base para o espaço vetorial dos operadores lineares hermitianos definidos em um espaço de Hilbert bidimensional. Dessa forma, nós podemos escrever uma representação matricial do mapa dinâmico na base $\beta_{SU(2)}$. Nós definimos os elementos de matriz

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \left\langle \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{2}} \left| \Phi \left(\frac{\sigma_\beta}{\sqrt{2}} \right) \right. \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\sigma_\alpha \Phi(\sigma_\beta)\}, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (6.90)$$

onde $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$, σ_i com $i = 1, 2, 3$ representa as matrizes de Pauli e nós consideramos a normalização $\sigma_\alpha/\sqrt{2}$ para obter os geradores do $SU(2)$ ortogonais com respeito ao produto interno de Hilbert-Schmidt. Escrevendo o operador densidade na sua representação de Bloch, onde $\rho_t = (1/2)(\mathbb{1}_2 + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma})$, todo estado quântico pode ser representado como um vetor coluna do tipo $\vec{x} = (1/2, n_x, n_y, n_z)^T$ escrito na base $\beta_{SU(2)}$. Dessa forma, o mapa dinâmico $\Phi_{(t,0)}$ assume a seguinte representação matricial

$$\Phi_{(t,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{s}(t) & A(t) \end{pmatrix}, \quad (6.91)$$

onde $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ e $A(t)$ é uma matriz 3×3 . Consequentemente, a evolução $\rho_0 \rightarrow \rho_t = \Phi_{(t,0)}(\rho_0)$ pode ser descrita no espaço de Bloch em termos a transformação afim

$$\vec{n}_0 \rightarrow \vec{n}_t = A(t) \cdot \vec{n}_0 + \vec{s}(t), \quad (6.92)$$

onde nós temos

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & g(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_x(0) \\ n_y(0) \\ n_z(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ h(t) \end{pmatrix}. \quad (6.93)$$

Os termos $A(t)$ e $\vec{s}(t)$ representam uma deformação e uma translação, respectivamente, no estado inicial \vec{n}_0 e descrevem a dinâmica do q-bit no espaço de Bloch.

⁸ Essencialmente nós temos os geradores do grupo de Lie $SU(2)$ juntamente com a identidade 2×2

Vamos fixar a base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ dos auto-estados de σ_z ($\sigma_z |l\rangle = (-1)^l |l\rangle$ com $l = 0, 1$) para o espaço de Hilbert \mathcal{H} do nosso q-bit, logo $|0\rangle$ representa o *estado fundamental* e $|1\rangle$ será o *estado excitado* do sistema. Os resultados desenvolvidos na referência (55) garantem que o par de estados iniciais de um q-bit na qual maximiza a medida BLP de não-Markovianidade sempre pode ser escolhido como um par de estados puros ortogonais. Logo, vamos supor que o sistema é inicialmente preparado em um dos auto-estados de σ_z , então $\vec{n}_0^\pm = (0, 0, \pm 1)^T$, sendo \vec{n}_0^+ quando o sistema é preparado inicialmente no estado excitado e \vec{n}_0^- quando o sistema inicia no estado fundamental. Este par de estados iniciais resolvem o problema de maximização implícito na medida BLP, e podemos relacionar tal medida com o DL-QSL.

Considere um modelo onde o termo $h(t) = 0$ para todo instante de tempo t da evolução, e $g(\tau) < 0$ para um tempo de evolução $\tau > 0$. Calculando a medida BLP de não-Markovianidade, denotada por $\mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)})$, considerando o estado inicial preparado em cada um dos auto-estados de σ_z , e possível mostrar que (52) o DL-QSL se relaciona com $\mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)})$ através da expressão

$$\frac{\tau_{QSL}^{DL}}{\tau} = \left(\frac{2\mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)})}{1-g(\tau)} + \frac{1+g(\tau)}{1-g(\tau)} \right)^{-1}. \quad (6.94)$$

Logo, nós temos que $\tau_{QSL}^{DL}/\tau = 1 \Leftrightarrow \mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)}) = |g(\tau)|$. Em outras palavras, a evolução será tight de acordo com o DL-QSL se, e somente se, a dinâmica é BLP não-Markoviana⁹ satisfazendo $\mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)}) = |g(\tau)|$.

Como estamos considerando um q-bit inicialmente preparado em um estado puro, nós temos que $\tau_{QSL}^\alpha \geq \tau_{QSL}^{DL}$. Logo, uma vez que a não-Markovianidade implica $\tau_{QSL}^{DL} = \tau$, nós podemos concluir que $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$. Portanto, se a dinâmica for descrita pelo modelo discutido acima, sempre que a evolução for não-Markoviana com $\mathcal{N}(\Phi_{(\tau,0)}) = |g(\tau)|$ nós temos uma dinâmica tight de acordo com o α -QSL. Veja novamente que isso corresponde apenas a uma condição suficiente para uma dinâmica tight com respeito a este quantificador. Em outras palavras, nesse regime de não-Markovianidade nós teremos $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$, mas (diferentemente do DL-QSL) nós não podemos afirmar que o regime Markoviano não será tight.

Nesta seção, nós vimos um exemplo onde a Markovianidade implica em uma dinâmica tight para o α -QSL. Por outro lado, nós agora mostramos um exemplo contrário, onde a não-Markovianidade também implica em uma dinâmica tight de acordo com este quantificador. Em geral, sempre que lidarmos com um q-bit inicialmente preparado em um estado puro na qual sofre uma dinâmica tight de acordo com o DL-QSL, tal evolução também será tight de acordo com o α -QSL. Para mais exemplos de modelos onde a

⁹ Lembre que uma dinâmica BLP não-Markoviana é também RHP não-Markoviana

Markovianidade ou não-Markovianidade implicam em uma evolução tight de acordo com o DL-QSL, o leitor é indicado a consultar a referência (52).

6.2.2 Contexto onde não há uma relação bem definida entre Markovianidade e tightness para o α -QSL

Vamos agora ilustrar alguns casos onde não há uma relação bem definida entre uma evolução tight e os regimes de Markovianidade e não-Markovianidade. Veremos casos onde ambos os regimes serão tight, e também ilustrar exemplos onde ambos não correspondem a evoluções tight. Concretamente, vamos utilizar o modelo de dois q-bits interagentes e acoplados com um ambiente bosônico que foi ilustrado na Seção 5.4. A seguir, nós iremos obter a representação de Bloch que descreve a dinâmica do q-bit principal, e que será essencial para calcular o α -QSL. A próxima discussão pode ser vista como um exemplo concreto do cálculo de um quantificador de QSL para uma determinada dinâmica.

6.2.2.1 Dois q-bits interagentes e acoplados com banho bosônico

Os detalhes do modelo foram discutidos no Capítulo 5, na Seção 5.4. Nós vimos que o q-bit auxiliar juntamente com o ambiente bosônico constituem um ambiente efetivo para o q-bit principal, onde a Markovianidade (de acordo com ambas as definições BLP e RHP) pode ser controlada através do estado inicial preparado para o q-bit auxiliar juntamente com a constante de acoplamento $J(t)$ que descreve a interação entre os dois q-bits.

Veja que, de acordo com o modelo proposto, toda a informação da Markovianidade do q-bit principal está implícita na taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ [veja a Eq.(5.85)]. Por outro lado, nós precisamos obter o vetor de Bloch \vec{n}_t que descreve a dinâmica do q-bit principal no espaço de Bloch, com a finalidade de calcular o α -QSL. No que segue, nós iremos obter explicitamente a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ assim como as componentes do vetor dinâmico \vec{n}_t .

Relembre que o estado inicial $\rho_S(0)$ do sistema composto pelos dois q-bits precisa ser um estado produto (50) para que a dinâmica $\rho_1(t)$ (Eq.(5.77)) seja um mapa completamente positivo e que preserva o traço¹⁰, isto é, satisfaça a definição de um mapa dinâmico. Logo, considerando que os dois q-bits estão inicialmente descorrelacionados, nós temos que

$$\rho_S(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0) , \quad (6.95)$$

e nós iremos denotar o estado inicial $\rho_j(0)$ na base de auto-estados de σ_{z_j} , com $j = 1, 2$, como sendo

$$\rho_1(0) = \begin{pmatrix} c & d \\ d^* & 1 - c \end{pmatrix} , \quad \rho_2(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1 - a \end{pmatrix} , \quad (6.96)$$

¹⁰ Ou abreviadamente em inglês, um mapa *CPTP*.

onde $a, c \in \mathbb{R}$ representam as populações iniciais enquanto que $b, d \in \mathbb{C}$ são as coerências iniciais dos estados $\rho_2(0)$ e $\rho_1(0)$, respectivamente.

Vamos considerar um banho Ôhmico, descrito pela densidade espectral dada pela Eq. (5.97). Além disso, vamos também supor que o acoplamento entre os dois q-bits e a escala de energia do q-bit principal são constante, ou seja, $J(t) = J$ e $e_1(t) = e_1$ para todo $t \geq 0$, onde $J, e_1 \in \mathbb{R}$. Neste caso, considerando dois q-bits inicialmente descorrelacionados, a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ do q-bit principal pode ser calculada explicitamente. Tomando que $\gamma_1(t) = \gamma(t) + \gamma_{\text{aux}}(t)$, onde $\gamma(t)$ é dada pela Eq.(5.99) enquanto que $\gamma_{\text{aux}}(t)$ é fornecida pela Eq. (5.96), nós temos que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1(t)}{\eta\omega_c} &= \frac{-t\omega_c}{1 + (t\omega_c)^2} + \frac{J}{2\eta\omega_c} \left[\frac{(1 - (2a - 1)^2) \sin(2Jt)}{1 - (1 - (2a - 1)^2) \sin^2(Jt)} \right] \\ &+ iC [\text{PG}(0, C(1 - it\omega_c)) - \text{PG}(0, C(1 + it\omega_c))], \end{aligned} \quad (6.97)$$

onde $C = \frac{k_b T}{\hbar\omega_c}$ representa o valor numérico da temperatura em unidades de $\hbar\omega_c/k_b$, $\text{PG}(n, z)$ denota a função *PolyGamma* que representa a n-ésima derivada da função digamma $\psi^{(n)}(z)$, e nós calculamos que $\langle \sigma_{z2} \rangle = \text{Tr}\{\rho_2(0)\sigma_{z2}\} = 2a - 1$. Além disso, considerando o estado inicial dado pelas equações (6.95) e (6.96), nós podemos calcular os parâmetros α e $\beta(t)$ que descrevem o estado $\rho_1(t)$ do q-bit principal, Eq. (5.77). Nomeadamente, uma vez que α é definido na Eq.(5.80) e $\beta(t)$ é fornecido na Eq.(5.81), nós temos que

$$\alpha = c, \quad (6.98)$$

$$\beta(t) = d \left(e^{iJt} - 2ai \sin(Jt) \right). \quad (6.99)$$

Por fim, escrevendo o estado dinâmico na forma matricial

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & 1 - \rho_{11}(t) \end{pmatrix}, \quad (6.100)$$

e comparando com a Eq(5.77), nós facilmente reconhecemos que

$$\rho_{11}(t) = \alpha = c, \quad (6.101)$$

$$\rho_{12}(t) = e^{-ite_1} e^{-\Gamma(t)} \beta(t) = e^{-ite_1} e^{-\Gamma(t)} d \left(e^{iJt} - 2ai \sin(Jt) \right), \quad (6.102)$$

onde $\Gamma(t) = \int_0^t d\tau \gamma(\tau)$ é a função de decoerência dada pela Eq.(5.102) para o caso de um ambiente Ôhmico. As equações (6.101) e (6.102) fornecem as populações e coerências dos auto-estados de σ_{z1} . Conseqüentemente, nós temos toda a dinâmica do q-bit principal caracterizada pela Eq.(6.100) e o estado dinâmico $\rho_1(t)$ descreve uma curva no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ do q-bit principal.

Nós podemos agora calcular também a representação de Bloch do estado dinâmico $\rho_1(t)$. Uma vez que o q-bit principal é descrito em termos de um espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 bidimensional, nós podemos escrever

$$\rho_1(t) = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_2 + \vec{n}_t \cdot \vec{\sigma}) , \quad (6.103)$$

onde $n_k(t) = \text{Tr}\{\rho_1(t)\sigma_{k1}\}$, com $k = x, y, z$ e $\mathbb{1}_2$ representa a matriz identidade 2×2 . Dessa forma, nós podemos obter as componentes do vetor de Bloch \vec{n}_t em termos das populações e coerências de $\rho_1(t)$ de acordo com as seguintes transformações

$$n_z(t) = 2\rho_{11}(t) - 1 , \quad (6.104)$$

$$n_x(t) = 2 \text{Re}(\rho_{12}(t)) , \quad (6.105)$$

$$n_y(t) = -2 \text{Im}(\rho_{12}(t)) , \quad (6.106)$$

e utilizando as equações (6.101) e (6.102), nós podemos concluir que

$$\begin{aligned} n_x(t) &= 2e^{-\Gamma(t)} \{ \text{Re}\{d\} [\cos(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \sin(te_1)] \\ &\quad - \text{Im}\{d\} [\sin(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \cos(te_1)] \} , \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$\begin{aligned} n_y(t) &= -2e^{-\Gamma(t)} \{ \text{Re}\{d\} [\sin(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \cos(te_1)] \\ &\quad + \text{Im}\{d\} [\cos(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \sin(te_1)] \} , \end{aligned} \quad (6.108)$$

enquanto que $n_z(t) = n_z(0) = 2c - 1$ é uma constante de movimento. Dessa forma, nós temos o vetor dinâmico $\vec{n}_t = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$ que descreve a dinâmica do q-bit principal no espaço de Bloch. Veja que a contribuição da dissipação induzida pelo ambiente é descrita por $e^{-\Gamma(t)}$ nas componentes $n_x(t)$ e $n_y(t)$, enquanto que o termo entre as chaves corresponde a contribuição da dissipação induzida pela interação entre os dois q-bits.

A dinâmica do q-bit principal possui uma interessante interpretação geométrica em termos do espaço de Bloch. Como discutido anteriormente, dado que $[\sigma_{zi}, H] = 0$ onde H é a Hamiltoniana do sistema global (q-bit principal, q-bit auxiliar, ambiente bosônico e interações), as populações dos auto-estados dos operadores σ_{zi} com $i = 1, 2$ são constantes de movimento. Logo, uma vez que a população $\rho_{11}(0) = c$ de $\rho_1(0)$ é definida, o seu valor permanece constante para todo tempo $t > 0$. Em termos do espaço de Bloch, isso significa que a componente $n_z(t) = n_z = 2c - 1$ é constante e previamente fixada pela população inicial ρ_{11} do estado fundamental $|0\rangle$. Geometricamente, isto significa que o vetor dinâmico \vec{n}_t pode pertencer unicamente à área transversal da esfera de Bloch cuja altura é fixada em $n_z = 2c - 1$, tal como representado na Fig. 6.

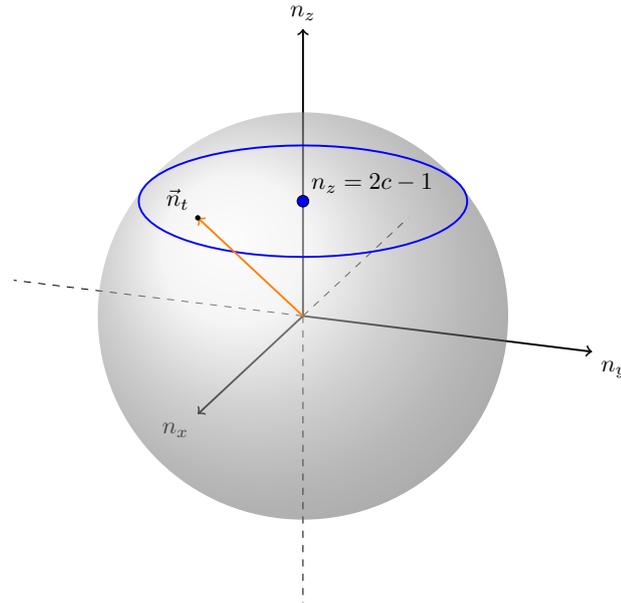


Figura 6 – Evolução dinâmica do q-bit principal no espaço de Bloch.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que nós temos o vetor dinâmico \vec{n}_t que representa o estado $\rho_1(t)$ do q-bit principal, vamos agora calcular sua derivada temporal $d\vec{n}_t/dt = (dn_x/dt, dn_y/dt, dn_z/dt)$ e a norma $\|d\vec{n}_t/dt\|$, que serão úteis no estudo dos diferentes quantificadores de limite quântico de velocidade. Obviamente nós temos $dn_z/dt = 0$, e podemos direcionar nossos esforços para calcular dn_x/dt e dn_y/dt . Para tal, vamos definir

$$\begin{aligned} \xi_x(t) &\equiv \operatorname{Re}\{d\} [\cos(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \sin(te_1)] \\ &\quad - \operatorname{Im}\{d\} [\sin(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \cos(te_1)] , \end{aligned} \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &\equiv \operatorname{Re}\{d\} [\sin(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \cos(te_1)] \\ &\quad + \operatorname{Im}\{d\} [\cos(t(J - e_1)) - 2a \sin(Jt) \sin(te_1)] , \end{aligned} \quad (6.110)$$

e então, observando as equações (6.107) e (6.108), nós podemos escrever $n_x(t) = 2e^{\Gamma(t)}\xi_x(t)$ e $n_y(t) = -2e^{\Gamma(t)}\xi_y(t)$. Derivando com relação ao tempo t e notando que $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(\tau)d\tau$ implica que $d\Gamma/dt = \gamma$, nós concluímos que

$$\frac{dn_x(t)}{dt} = 2e^{-\Gamma(t)} \left(-\gamma(t)\xi_x(t) + \frac{d\xi_x(t)}{dt} \right) , \quad (6.111)$$

$$\frac{dn_y(t)}{dt} = -2e^{-\Gamma(t)} \left(-\gamma(t)\xi_y(t) + \frac{d\xi_y(t)}{dt} \right) , \quad (6.112)$$

$$\frac{dn_z(t)}{dt} = 0 , \quad (6.113)$$

onde a taxa de decaimento $\gamma(t)$ e a função de decoerência $\Gamma(t)$ para o caso Ôhmico são dadas pelas equações (5.100) e (5.102), respectivamente. Por fim, a norma $\|d\vec{n}_t/dt\| =$

$\sqrt{(dn_x/dt)^2 + (dn_y/dt)^2}$ pode ser escrita como

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = 2e^{-\Gamma(t)} \left[\left(-\gamma(t)\xi_x(t) + \frac{d\xi_x(t)}{dt} \right)^2 + \left(-\gamma(t)\xi_y(t) + \frac{d\xi_y(t)}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.114)$$

Utilizando as definições de $\xi_{x,y}(t)$ e calculando suas derivadas explicitamente, após uma longa álgebra nós podemos concluir que

$$\left\| \frac{d\vec{n}_t}{dt} \right\| = 2e^{-\Gamma(t)} |d| \sqrt{\Xi(t)}, \quad (6.115)$$

onde nós definimos

$$\begin{aligned} \Xi(t) \equiv & (1 + 2(a-1)a)e_1^2 + 2(2a-1)e_1J + (1 + 2(a-1)a)(J^2 + \gamma^2(t)) \\ & + 2(1-a)a \left[(e_1^2 - J^2 + \gamma^2(t)) \cos(2Jt) + 2J\gamma(t) \sin(2Jt) \right]. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Como teste de consistência, suponha que o estado inicial corresponde ao estado fundamental $|0\rangle$, sendo o auto-estado com auto-valor positivo de σ_{z1} . Neste caso, temos que $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$ ou equivalentemente podemos escrever a representação matricial

$$\rho_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.117)$$

Nós temos que $d = 0$ para o estado fundamental, e conseqüentemente, da Eq.(6.115), $\|d\vec{n}_t/dt\| = 0$, que ocorre se, e somente se, $d\vec{n}_t/dt = \vec{0}$. Logo, temos que $\vec{n}_t = (0, 0, 1) \forall t \geq 0$ representa um vetor constante. Isto é consistente com o resultado fisicamente esperado, pois uma vez que este estado é uma constante de movimento, nós temos que sua população é uma constante no tempo, ou seja, $n_z(t) = 1 \forall t \geq 0$. Além disso, se o efeito da decoerência for muito forte, ou seja, se a exponencial da função de decoerência $\Gamma(t)$ cresce mais rapidamente que $\sqrt{\Xi(t)}$, o vetor dinâmico tende a assumir um valor constante no espaço de Bloch.

Portanto, supondo dois q-bits inicialmente descorrelacionados e acoplados com um ambiente bosônico, nós calculamos a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ que representa a dissipação do q-bit principal e define os regimes de Markovianidade e não-Markovianidade de sua dinâmica com relação a ambos os critérios BLP e RHP. Além disso, nós calculamos o estado dinâmico $\rho_1(t)$ que representa o caminho dinâmico no espaço de estados $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ do q-bit principal, assim como também obtemos o vetor $\vec{n}_t = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$ que descreve sua dinâmica no espaço de Bloch.

No que segue, nós iremos apresentar um contexto onde ambos os regimes Markoviano e não-Markoviano podem representar uma evolução tight.

6.2.2.2 Condição onde dinâmicas Markovianas e não-Markovianas são tight

As condições necessárias e suficientes para que uma evolução seja tight de acordo com o α -QSL foram descritas no Lema 16, onde nós vimos que o caminho dinâmico de uma evolução tight consiste em uma linha reta que conecta o estado inicial ρ_0 ao estado final ρ_τ . Nesta situação, nós temos que $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$. Note que para tempos de evolução τ infinitesimais, o caminho dinâmico será aproximadamente linear. Portanto, de forma geral, independente do sistema sofrer uma evolução Markoviana ou não-Markoviana, a evolução será inicialmente tight para pequenos valores de τ . Isso significa que $\tau_{QSL}^\alpha/\tau \approx 1$ no início na dinâmica.

Em termos do modelo descrito anteriormente, para uma condição inicial dos dois q-bits fixada, nós podemos controlar a não-Markovianidade do q-bit principal através da constante de acoplamento J . Para cada acoplamento, há um τ_{\max} onde $\tau = \tau_{QSL}^\alpha$ para todo $\tau \in [0, \tau_{\max}]$. Este comportamento pode ser observado na Fig. 7. Para as simulações ilustradas nas Figuras 7, 8, 9, 10 e 11, nós consideramos um ambiente Ôhmico com $\eta = 0.1$, $\omega_c = 1$ e $T = 2,5 \cdot 10^{-3} \hbar \omega_c / k_b$. Além disso, a escala de energia do q-bit principal é $e_1 = 1$. Em adição, nós sempre preparamos o q-bit auxiliar no estado puro $\sqrt{0.1}|0\rangle + \sqrt{0.9}|1\rangle$.

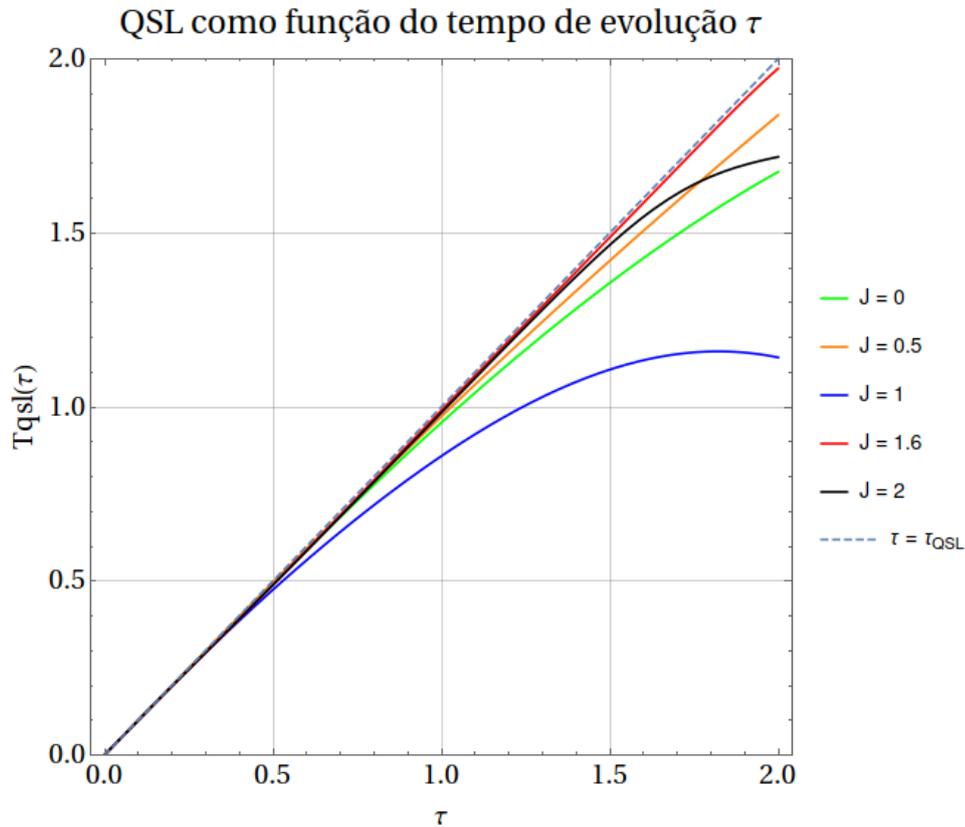


Figura 7 – α -QSL em função de τ para pequenos valores do tempo de evolução. O q-bit principal é preparado inicialmente em um dos auto-estados de σ_x , nomeadamente $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A curva verde corresponde ao caso onde os dois q-bits não interagem, $J = 0$, e para o conjunto de parâmetros descritos na Fig. 6 ela corresponde a uma evolução Markoviana. Podemos comprovar que o q-bit principal sofre uma evolução Markoviana para $J = 0$ observando a taxa de decaimento $\gamma_1(t)$ que descreve a sua interação com o ambiente, tal como é ilustrado na Fig. 8.

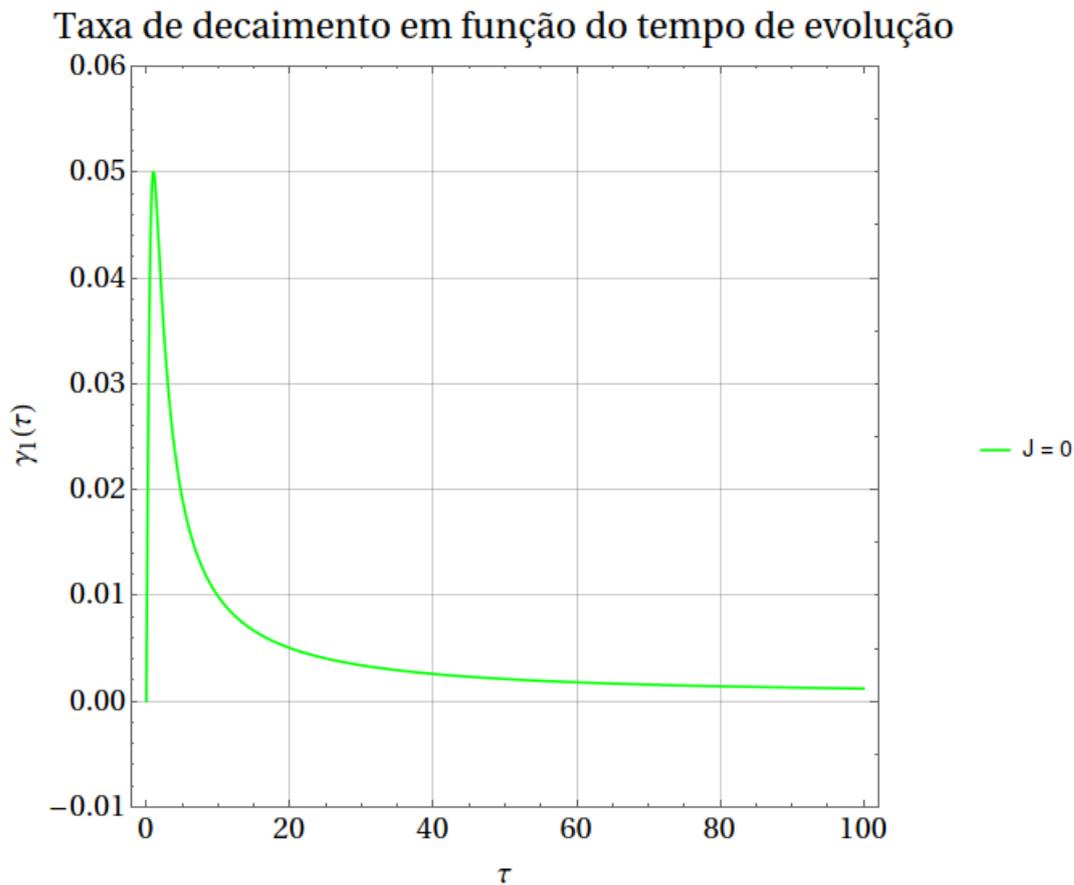


Figura 8 – Taxa de decaimento em função do tempo de evolução τ do q-bit principal. O q-bit principal é preparado inicialmente no estado puro $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que $\gamma_1(t) \geq 0$ para todo instante de tempo t , nós podemos afirmar que esta dinâmica é RHP Markoviana. Além disso, lembre também que a RHP-Markovianidade implica na BLP-Markovianidade, e portanto esta evolução também é BLP Markoviana. Por outro lado, para $J = 1.6$, nós temos uma dinâmica não-Markoviana, como pode ser observado na Fig. 9.

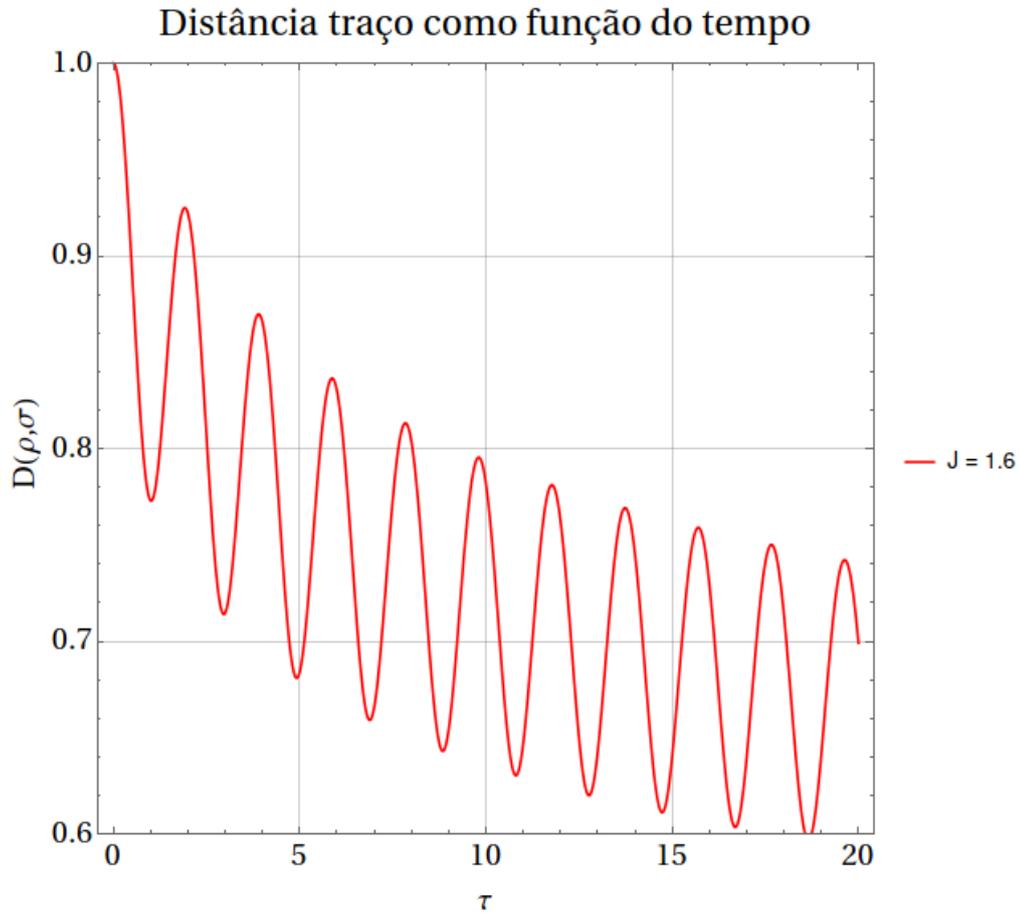


Figura 9 – Distância traço em função do tempo. Os dois estados iniciais avaliados para calcular a distância traço correspondem aos dois auto-estados de σ_x , nomeadamente $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que a distância traço não é monotonicamente decrescente para esse conjunto de parâmetros, nós temos que para $J = 1.6$ a dinâmica do q-bit principal é BLP e RHP não-Markoviana. Portanto, nós estamos mostrando um exemplo onde ambos os regimes Markoviano e não-Markoviano representam uma dinâmica tight se considerarmos um tempo de evolução pequeno. Em outras palavras, nós temos que $\tau_{QSL}^\alpha \approx \tau$ para pequenos valores de τ tanto no caso Markoviano quanto no caso não-Markoviano.

Vamos agora analisar um caso onde o tempo de evolução não é infinitesimal. Em geral, quando τ não é infinitesimal o caminho dinâmico não é necessariamente linear, e nós obtemos uma dinâmica que não é tight. Tal comportamento pode ser observado na Fig. 7, onde $\tau \neq \tau_{QSL}^\alpha$ quando τ não assume valores pequenos. Considere agora o gráfico ilustrado na Fig. 10.

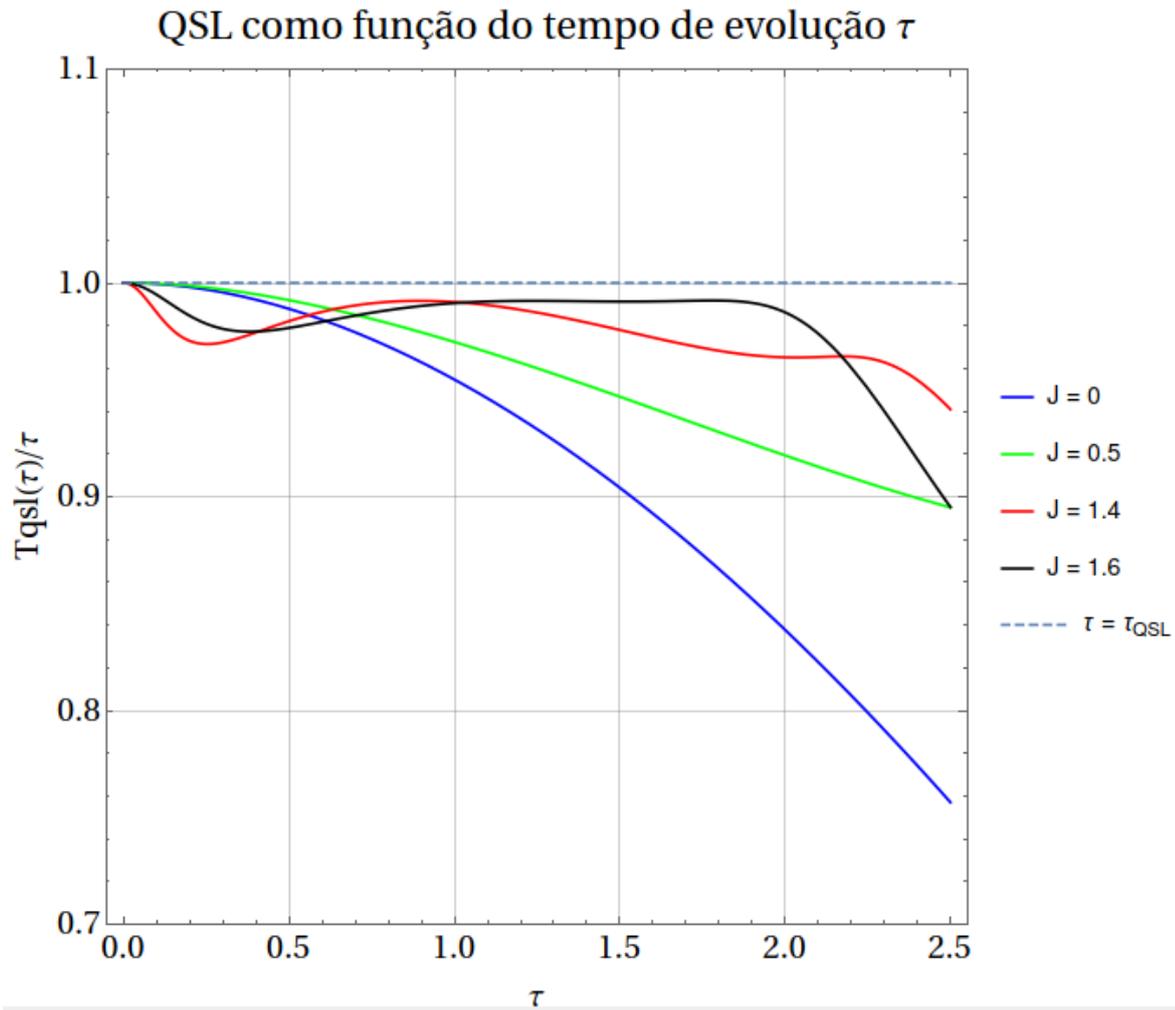


Figura 10 – τ_{QSL}^α/τ em função do tempo de evolução. O q-bit principal é preparado inicialmente no estado $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a Fig. 10, ambos os casos Markoviano ($J = 0$) e não-Markoviano ($J = 1.6$) são inicialmente tight para valores infinitesimais de τ , mas ambos os regimes deixam de ser tight para valores maiores do tempo de evolução. Além disso, note que nós podemos ajustar o valor do acoplamento entre os dois q-bits com o objetivo de melhorar a dinâmica do sistema. Em outras palavras, nós aumentamos o valor de J que vai de $J = 0$ até $J = 1.6$, transitando de uma dinâmica Markoviana para não-Markoviana, tal como foi mostrado anteriormente. Perceba que embora a dinâmica para $J = 1.6$ não seja tight, nós obtemos $\tau_{QSL}^\alpha/\tau \approx 1$ para um intervalo maior de tempo de evolução em comparação com a dinâmica Markoviana com $J = 0$, tal como é ilustrado na Fig. 11.

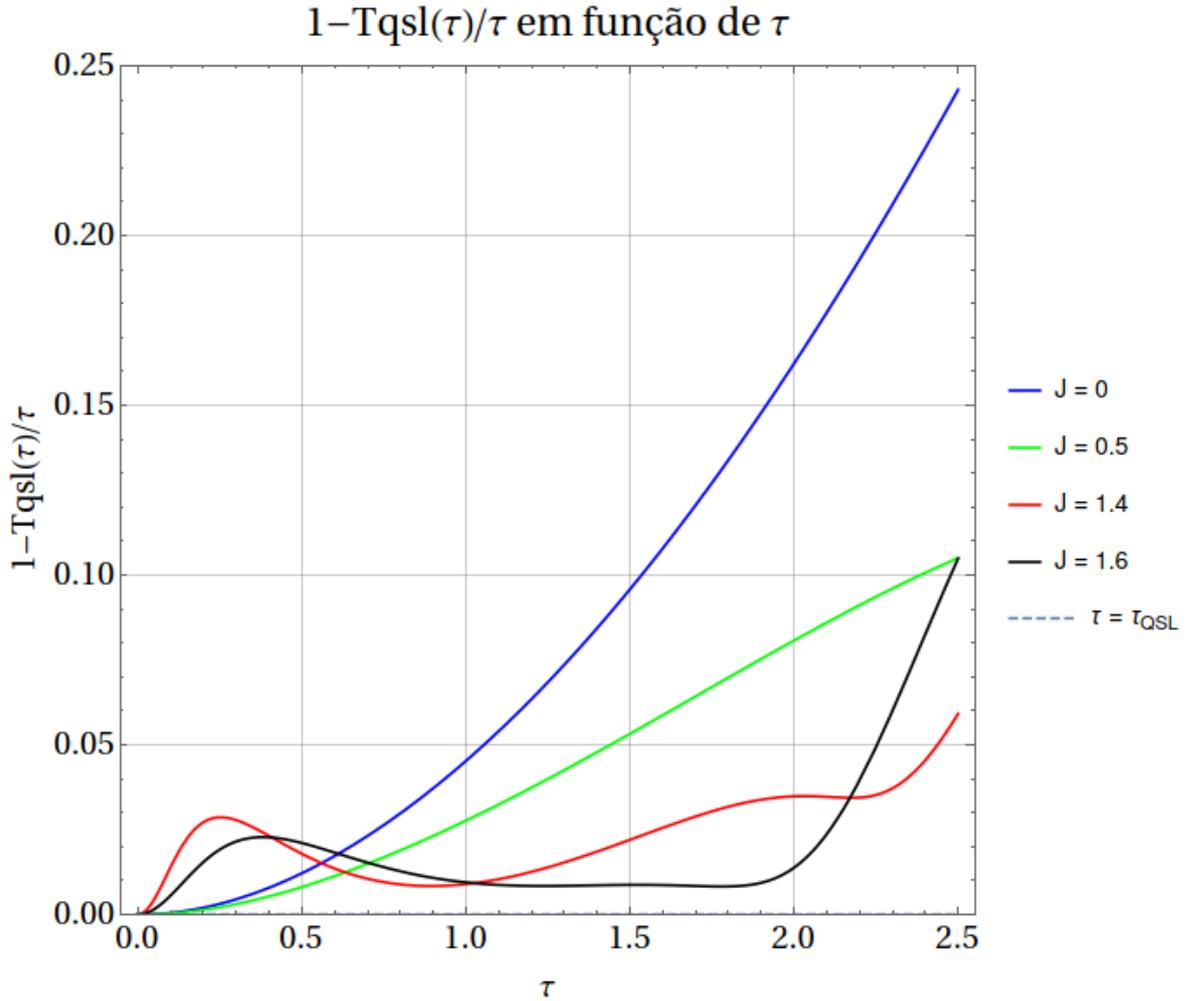


Figura 11 – $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ em função do tempo de evolução. O estado inicial do q-bit principal corresponde a um dos auto-estados de σ_x , nomeadamente $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a Fig. 11, a dinâmica Markoviana com $J = 0$ é inicialmente melhor que o caso não-Markoviano com $J = 1.6$. Em outras palavras, nós obtemos que a razão $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ é menor inicialmente para a dinâmica Markoviana. A partir do instante $\tau \approx 0.6$, nós observamos um comportamento diferente. Embora a onde a dinâmica não-Markoviana com $J = 1.6$ não seja tight, nós obtemos $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau| \approx 0.009$ para $\tau \in [1, 2]$, e tal valor é menor que o seu respectivo para a dinâmica Markoviana com $J = 0$. De fato, a partir de $\tau \approx 0.5$, nós obtemos que o valor de $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ é menor para o caso não-Markoviano com $J = 1.6$ do que para o caso Markoviano com $J = 0$. Dessa forma, para este exemplo, nós podemos afirmar que o caso não-Markoviano é melhor que o caso Markoviano. Além disso, veja que nós melhoramos a dinâmica controlando o valor do acoplamento J , isto é, diminuimos o valor de $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ alterando a constante J .

7 CONCLUSÕES

Os Capítulos 2 e 3 foram o ponto inicial da nossa discussão, onde nós formalizamos a teoria quântica ruidosa, assim como os principais tipos de medidas de distinguibilidade de estados quânticos. Além disso, nós discutimos a definição das normas Schatten, que foram uma das principais ferramentas utilizadas neste trabalho. No Capítulo 4, nós introduzimos os conceitos centrais relativos aos limites quânticos de velocidade (QSL). Nós discutimos sobre os principais exemplos já existentes na literatura, assim como elaboramos as ideias principais no que diz respeito ao desenvolvimento de um QSL. Nós vimos que diferentes medidas de distinguibilidade podem induzir diferentes quantificadores e questionamos a relação eles.

Em complemento, nós vimos no Capítulo 5 que existem diferentes abordagens para caracterizar e quantificar os efeitos de memória em dinâmicas de sistemas quânticos, ilustrando as principais definições e noções de Markovianidade quântica. Nós vimos que a definição de Markovianidade é altamente dependente do contexto, ou seja, depende do tipo de cenário na qual estamos lidando. Quando não possuímos informação sobre a interação entre o sistema e o ambiente mas conhecemos a dinâmica do sistema quântico aberto descrita por um canal quântico, nós podemos utilizar as definições BLP ou RHP de Markovianidade, ou até mesmo caracteriza-la em termos do gerador de um semigrupo. Neste ponto, nós colocamos a seguinte questão: é possível que haja alguma relação entre os limites quânticos de velocidade e os efeitos Markovianos ou não-Markovianos?

Dessa forma, esta pesquisa teve como objetivo investigar se há alguma relação entre os diferentes tipos de limites quânticos de velocidade já existentes na literatura, ou melhor, buscamos um quantificador universal, que generalizasse os demais casos preexistente. Além disso, buscamos também investigar as relações entre os efeitos não-Markovianos e dinâmicas tight de acordo com os QSLs estudados. No Capítulo 6 nós desenvolvemos dois novos limites quânticos de velocidade induzidos por normas α -Schatten. O primeiro quantificador foi obtido através da abordagem geométrica, dando origem ao τ_{QSL}^{α} (α -QSL), enquanto que o segundo foi induzido a partir da desigualdade de Holder, fornecendo o $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$ ((α, β) -QSL). Tais quantificadores foram comparados com outros QSLs encontrados na literatura e também obtemos as condições necessárias e suficientes para obter uma evolução tight de acordo com o α -QSL e com o (α, β) -QSL.

Para o α -QSL, foi demonstrado que este pode ser visto como uma generalização do QSL obtido por Campaioli et al. (44) para normas α -Schatten mais gerais, e também foi mostrado que o valor deste quantificador é invariante com respeito à norma Schatten escolhida quando estamos considerando uma dinâmica de um q-bit, destacando uma certa noção de universalidade. Além disso, nós mostramos que quando lidamos com a evolução

de um q-bit que é inicialmente preparado em um estado puro, o α -QSL é mais tight que o quantificador desenvolvido por Deffner e Lutz (35), nomeadamente o DL-QSL. Para o QSL obtido a partir da desigualdade de Holder, nós vimos que este pode ser visto como uma generalização do quantificador desenvolvido por del Campo et al (43) (τ_{QSL}^{CEPH}) para normas Schatten mais gerais que a norma de Hilbert-Schmidt. Além disso, nós mostramos também que o (α, β) -QSL é mais tight que o τ_{QSL}^{CEPH} . Por fim, vimos que o DL-QSL é apenas um caso particular do $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$ para $\alpha \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 1$, e para a dinâmica de um q-bit nós mostramos que estes quantificadores são proporcionais um ao outro, onde o termo de proporcionalidade é definido pela α -norma Schatten fixada [veja Eq.(6.62)] no espaço de estados do q-bit.

Em adição, nós analisamos as condições necessárias e suficientes para obter uma evolução tight para um q-bit de acordo com os limites quânticos de velocidade induzidos pelas normas Schatten. Obtemos condições com interpretações geométricas em termos do caminho dinâmico no espaço de Bloch, assim como obtemos as restrições ao comportamento das populações e coerências do estado dinâmico do q-bit, refletindo assim uma condição algébrica. Para o caso do QSL geométrico, o a evolução será tight se, e somente se, o caminho constitui uma reta que conecta o estado inicial ao estado final. Por outro lado, foi demonstrado que apenas processos dissipativos estão aptos a representarem uma evolução tight de acordo com o (α, β) -QSL.

Por fim, comparamos os dois novos quantificadores desenvolvidos neste trabalho para o caso de um sistema qubit. Encontramos uma relação de desigualdade entre eles que se mantém sempre que o estado inicial é puro. Esta relação provou ter uma interpretação geométrica interessante em termos dos vetores inicial e final no espaço de Bloch. Além disso, para a dinâmica de um q-bit preparado inicialmente em um estado puro, nós vimos que o α -QSL é mais tight que o (α, β) -QSL, ou seja, nós demonstramos que $\tau_{QSL}^{\alpha} \geq \tau_{QSL}^{\alpha, \beta}$. Uma vez que nós temos $\tau_{QSL}^{\alpha, \beta} \geq \tau_{QSL}^{CEPH}$, nós podemos concluir que o α -QSL também é mais tight que o quantificador desenvolvido por del Campo *et al* (43). Portanto, nós mostramos que o τ_{QSL}^{α} é mais tight que todos os limites quânticos de velocidade que foram discutidos neste trabalho, trazendo então a noção de um QSL universal.

Portanto, além de obter novos limites quânticos de velocidade, nós mostramos que os quantificadores induzidos pelas normas Schatten podem ser vistos como generalizações de quantificadores já existentes na literatura, desenvolvidos sob abordagens completamente diferentes, e mostramos que o α -QSL pode ser visto como um quantificador universal para dinâmica de q-bits com estado inicial puro.

Em seguida, nós investigamos a relação entre a Markovianidade quântica e os limites quânticos de velocidade. Uma vez que o α -QSL é o quantificador mais tight para a dinâmica de um q-bit inicialmente em estado puro, nós consideramos apenas o comportamento do τ_{QSL}^{α} sob o regime de uma dinâmica Markoviana e não-Markoviana. Inicialmente, nós

estendemos os resultados desenvolvidos por Deffner e Lutz (35) e por J. Teittinen *et al* (52) onde eles obtiveram as relações entre o DL-QSL e a BLP-Markovianidade. Nós mostramos condições onde a BLP e RHP Markovianidade implicam em uma dinâmica tight de acordo com o α -QSL, e também mostramos um exemplo onde uma dinâmica RHP ou BLP não-Markoviana será tight de acordo com este mesmo quantificador. Estas condições constituem os contextos onde há uma relação bem definida entre Markovianidade e tightness do limite quântico de velocidade τ_{QSL}^α .

Além disso, nós mostramos que uma evolução pode ser tight independentemente do regime de Markovianidade da dinâmica. Nós vimos que para tempos de evolução suficientemente pequenos, ambos os regimes de Markovianidade e não-Markovianidade podem representar uma evolução tight. Por outro lado, para tempos de evolução que não são infinitesimais, o caminho dinâmico não é, em geral, linear no espaço de estados e a dinâmica deixa de ser tight. Nós mostramos casos onde uma dinâmica Markoviana e outra não-Markoviana não representavam uma evolução tight. Em complemento, utilizando o modelo de dois q-bits interagentes e acoplados com um banho bosônico, nós mostramos que é possível melhorar a dinâmica de um dos q-bits controlando a interação entre eles. Nós vimos que foi possível diminuir o valor de $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ passando de uma evolução Markoviana para uma não-Markoviana, obtendo $\tau_{QSL}^\alpha \approx \tau$ para um maior intervalo de tempos de evolução para o regime não-Markoviano.

Uma continuidade natural das nossas análises poderia ser de tentar investigar qual o mecanismo que melhora a dinâmica de um q-bit alterando a constante de acoplamento J , e investigar se isto está relacionado com algum fluxo de informação entre o sistema e o ambiente efetivo composto pelo q-bit auxiliar juntamente com o ambiente bosônico. Podemos então motivar o seguinte problema geral: dado uma dinâmica que não é tight, qual é o conjunto de parâmetros que minimiza $|1 - \tau_{QSL}^\alpha/\tau|$ e, conseqüentemente, melhora a evolução? Além disso, poderíamos investigar novas condições suficientes onde a Markovianidade ou não-Markovianidade implicam em evoluções tight de acordo com o α -QSL.

REFERÊNCIAS

- 1 PASHBY, T. **Time and the foundations of quantum mechanics**. 2014. 209 p. Ph D. Thesis (Doctor in Physics) – Department of History and Philosophy of Science, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2014. Disponível em: <http://philsci-archive.pitt.edu/10723>. Acesso em: 12 mar. 2024.
- 2 BUSCH, P. The time-energy uncertainty relation. In: MUGA, G.; MAYATO, R. S.; EGUSQUIZA, I. N. (ed.). *Time in quantum mechanics*. 2nd ed. Berlin: Springer, 2008. v. 1, p. 73–105. (Lecture notes in physics, 734).
- 3 NILSEN, M.A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. 10th anniversary edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- 4 BENGTTSSON, I.; ŻYCZKWOESKI, K. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- 5 WILDE, M. M. **Quantum information theory**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- 6 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. **Open quantum systems: an introduction**. Berlin: Springer, 2011.
- 7 KHATRI, S.; WILDE, M. **Principles of quantum communication theory: a modern approach**. 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2011.04672.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2024.
- 8 LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- 9 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Quantum speed limit for non-Markovian dynamics. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 1, p. 010402, 2013.
- 10 LIMA, E. L. **Curso de análise - vol.1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1995.
- 11 RIVAS, Á.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection. **Reports on Progress in Physics**, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014.
- 12 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Generalized Clausius inequality for nonequilibrium quantum processes, **Physical Review Letters**, v. 105, n. 17, 170402, 2010.
- 13 AGHION, E.; GREEN, J. R. Thermodynamic speed limits for mechanical work. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 56, n. 5, p. 05LT01, 2023.
- 14 MOHAN, B.; PATI, A. K. Reverse quantum speed limit: how slowly a quantum battery can discharge. **Physical Review A**, v. 104, n. 4, p. 042209, 2021.
- 15 FORGATY, T.; DEFFNER, S.; BUSCH, T.; CAMPBELL, S. Orthogonality catastrophe as a consequence of the quantum speed limit. **Physical Review Letters**, v.124, n. 11, p. 110601, 2020.

- 16 DEL CAMPO, A. Probing quantum speed limits with ultracold gases. **Physical Review Letters**, v. 126, n. 18, p. 180603, 2021.
- 17 GIOVANNETTI, V.; LOYD, S.; MACCONE, L. Advances in quantum metrology. **Nature Photonics**, v. 5, 222, 2011. DOI: 10.1038/nphoton.2011.35.
- 18 BEKENSTEIN, J. D. Energy cost of information transfer. **Physical Review Letters**, v. 46, p. 623, 1981.
- 19 LLOYD, S. Ultimate physical limits to computation. **Nature**, v. 406, p. 1047, 2000. DOI: 10.1038/35023282.
- 20 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. The role of entanglement in dynamical evolution. **Europhysics Letters**, v. 62, n. 5, p. 615, 2003.
- 21 BATLE, J.; CASAS, M.; PLASTINO, A.; PLASTINO, A. R. Connection between entanglement and the speed of quantum evolution. **Physical Review A**, v. 72, n. 3, p. 032337, 2005.
- 22 SHANAHAN, B.; CHENU, A.; MARGOLUS, N.; DEL CAMPO, A. Quantum speed limits across the quantum-to-classical transition. **Physical Review Letters**, v. 120, n. 7, p. 070401, 2018.
- 23 OKUYAMA, M.; OHZEKI, M. Quantum speed limit is not quantum. **Physical Review Letters**, v. 120, n. 7, p. 070402, 2018.
- 24 CANEVA, T.; MURPHY, M.; CALARCO, T.; FAZIO, R.; MONTAGERO, S.; GIOVANNETTI, V.; SANTORO, G. E. Optimal control at the quantum speed limit. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 24, p. 240501, 2009.
- 25 KOBAYASHI, K.; YAMAMOTO, N. Quantum speed limit for robust state characterization and engineering. **Physical Review A**, v. 102, n. 4, p. 042606, 2020.
- 26 GYHM, J. Y.; ROSA, D.; SAFRANEK, D. The minimal time it takes to charge a quantum system. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2308.16086.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- 27 IMPENS, F.; D'ANGELIS, F. M.; PINHEIRO, F. A.; GUERY-ODELIN, D. Time scaling and quantum speed limit in non-Hermitian Hamiltonians. **Physical Review A**, v.104, n. 5, p. 052620, 2021.
- 28 WANG, Y. Y.; FANG, M. F. Quantum speed limit time of a non-Hermitian two-level system. **Chinese Physics B**, v. 29, n. 3, p. 030304, 2020.
- 29 NESS, G.; LAM, M. R.; ALT, W.; MESCHÉDE, D.; SAGI, Y.; ALBERTI, A. Observing crossover between quantum speed limits. **Science Advances**, v. 7, n. 52, p. 9119, 2021.
- 30 VILLAMIZAR, D. V.; DUZZIONI, E. I.; LEAL, A. C. S.; AUCCAISE, R. Estimating the time evolution of NMR systems via a quantum speed-limit-like expression. **Physical Review A**, v. 97, n. 5, p. 052125, 2018.

-
- 31 PIRES, D. P.; AZEVEDO, E. R.; SOARES-PINTO, D. O.; BRITO, F.; FILGUEIRAS, J. G. Experimental investigation of geometric quantum speed limits in an open quantum system. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2307.06558.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- 32 DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 50, p. 453001, 2017.
- 33 PIRES, D. P. **Geometria da informação quântica: uma abordagem geral acerca do tempo de evolução**. 2017. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 34 MANDELSTAM, L.; TAMM, I. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. **Journal of Physics URSS**, v. 9, n. 4, p. 249, 1945.
- 35 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Quantum speed limit for non-Markovian dynamics. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 1, p. 010402, 2013.
- 36 ROBERTSON, H. P. The uncertainty principle. **Physical Review**, v. 34, n. 1, p. 163, 1929.
- 37 ANANDAN, J.; AHARONOV, Y. Geometry of quantum evolution. **Physical Review Letters**, v. 65, n. 14, p. 1697, 1990.
- 38 BENGTTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- 39 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. **Journal of Modern Optics**, v. 41, n. 12, p. 2315–2323, 1994.
- 40 VON NEUMANN, J. Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space. **Tomsk Universities Reviews**, v. 1, p. 286, 1937.
- 41 SIMON, B. **Trace ideals and their applications**. Berlin: Springer, 2005.
- 42 MARGOLUS, N.; LEVITIN, L. B. The maximum speed of dynamical evolution. **Physica D**, v. 120, n. 1–2, p. 188, 1998.
- 43 DEL CAMPO, A. *et al.* Quantum speed limits in open system dynamics. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 5, p. 050403, 2013.
- 44 CAMPAIOLI, F.; POLLOCK, F. A.; MODI, K. Tight, robust, and feasible quantum speed limits for open dynamics. **Quantum**, v. 3, p. 168, 2019. DOI: 10.22331/q-2019-08-05-168.
- 45 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- 46 BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PIILO, J. Measure for the degree of non-Markovian behavior of quantum processes in open systems. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 21, p. 210401, 2009.
- 47 LAINE, E.-M.; PIILO, J.; BREUER, H.-P. Measure for the non-Markovianity of quantum processes. **Physical Review A**, v. 81, n. 6, p. 062115, 2010.

- 48 BREUER, H-P.; LAINE, E-M.; PIILO, J.; VACCHINI, B. Colloquium: non-Markovian dynamics in open quantum systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 88, n. 2, p. 021002, 2016.
- 49 LI, L.; HALL, M. J. W.; WISEMAN, H. M. Concepts of quantum non-Markovianity: a hierarchy. **Physics Reports**, v. 759, p. 1-51, 2018. DOI: 10.1016/j.physrep.2018.07.001.
- 50 BRITO, F.; WERLANG, T. A knob for Markovianity. **New Journal of Physics**, v. 17, n. 7, p. 072001, 2015.
- 51 ALICKI, R.; LENDI, K. **Quantum dynamical semigroups and applications**. Berlin: Springer, 2007.
- 52 TEITTINEN, J; LYYRA, H; MANISCALCO, S. There is no general connection between the quantum speed limit and non-Markovianity. **New Journal of Physics**, v. 21 n. 12, p. 123041, 2019.
- 53 BREUER, H. P.; KAPPLER, B.; PETRUCCIONE, F. Stochastic wave-function method for non-Markovian quantum master equations. **Physical Review A**, v. 59, n. 2, p. 1633, 1999.
- 54 XU, Z.-Y. LUO, S. YANG, W. L.; LIU, CHEN.; ZHU, SHIGUN. Quantum speedup in a memory environment. **Physical Review A**, v. 89, n. 1, p. 012307, 2014.
- 55 WISSMANN, S.; KARLSSON, A.; LAINE, E.-M., PIILO, J.; BREUER, H.-P. Optimal state pairs for non-Markovian quantum dynamics. **Physical Review A**, v. 86, n. 6, p. 062108, 2012.
- 56 ROSAL, A. J. B.; SOARES-PINTO, D. O.; PIRES, D. P. Quantum speed limits based on Schatten norms: universality and tightness. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2312.00533.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2024.
- 57 WOLF, M. M.; CIRAC, J. I. Dividing quantum channels. **Communications in Mathematical Physics**, v. 279, p. 147, 2008. DOI: 10.1007/s00220-008-0411-y.
- 58 WOLF, M. M.; EISERT, J.; CUBITT, T. S.; CIRAC, J. I. Assessing non-Markovian quantum dynamics. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 15, p. 150402, 2008.
- 59 CHRUSCIŃSKI, D.; KOSSAKOWSKI, A.; RIVAS, A. Measures of non-Markovianity: divisibility versus backflow of information. **Physical Review A**, v. 83, n. 5, p. 052128, 2011.
- 60 RIVAS, A.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Entanglement and non-Markovianity of quantum evolutions. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 5, p. 050403, 2012.
- 61 HOU, S. C.; YI, X. X.; YU, S. X.; OH, C. H. Alternative non-Markovianity measure by divisibility of dynamical maps. **Physical Review A**, v. 83, n. 6, p. 062115, 2011.
- 62 ANDERSSON, E.; CRESSER, J. D.; HALL, M. J. W. Finding the Kraus decomposition from a master equation and vice versa. **Journal of Modern Optics**, v. 54, n. 12, p. 1695, 2007.
- 63 HALL, M. J. W.; CRESSER, J. D.; LI, L.; ANDERSSON, E. Canonical form of master equations and characterization of non-Markovianity. **Physical Review A**, v. 89, n. 4, p. 042120, 2014.

64 CHAVES, R.; BRASK, J. B.; MARKIEWICZ, M.; KOŁODYŃSKI, J.; ACÍN, A. Noisy Metrology beyond the Standard Quantum Limit. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 12, p. 120401, 2013.

65 BRASK, J. B.; CHAVES, R.; KOŁODYŃSKY, J. Improved Quantum Magnetometry beyond the Standard Quantum Limit. **Physical Review X**, v. 5, n. 3, p. 031010, 2015.