

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Gabriel Fukamoto Magno**

**Quantificador de adiabaticidade em sistemas quânticos via  
geometrias clássicas**

**São Carlos**

**2024**



**Gabriel Fukamoto Magno**

**Quantificador de adiabaticidade em sistemas quânticos via geometrias clássicas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

**Versão corrigida**  
**(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)**

**São Carlos**  
**2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Magno, Gabriel Fukamoto

Quantificador de adiabaticidade em sistemas quânticos via geometrias clássicas / Gabriel Fukamoto Magno; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto; co-orientador Carlos Henrique Grossi Ferreira - versão corrigida -- São Carlos, 2024.

103 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Evolução adiabática . 2. Geometrias clássicas. 3. Isometria acompanhante. 4. Geometria da informação. I. Pinto, Diogo de Oliveira Soares , orient. II. Ferreira, Carlos Henrique Grossi , co-orient. III. Título.



*Aos camaradas,  
pelas voltas que o mundo deu  
e pelas voltas que ainda vai dar.*

## AGRADECIMENTOS

À Universidade de São Paulo pela estrutura que proporcionou. Ao Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto pela orientação. Ao Prof. Dr. Carlos Grossi Ferreira pela coorientação. Ao Prof. Dr. Frederico B. de Brito pela colaboração.

Ao irmãozão de caminhada e luta, galã e cuidador de crianças. Ao irmão gênio, barbado, matemático e companheiro de espadas. Ao urso idealista e o urso niilista. À memória do porco triste. Ao veado tímido sua legião de amigos. Aos anciãos e mestres espadachins. Às disciplinas marciais japonesas. À sabedoria dentro das luvas de boxe. À toda literatura consumida vorazmente. Às histórias que nos tocam. À arte que nos ofusca. Ao pessoal do treinamento físico. Aos tambores e camaradas do Rochedo de Ouro.

À capoeiragem, a todos os camaradas e todas às camaradas pelo mundo afora. Ao professor malandro e gentil, ao padrinho bruto, à maestria da elegante professora, ao camarada expressivo e de boa, à bela camarada angoleira, ao camarada xará-chavoso-tranquilão, à camarada xerifona mãe dos nossos três camaradas fortes, guerreiros e animados. Aos camaradas iniciados junto comigo. Por toda raça, luta, companherismo, jogo, mandinga, vadiagem, brincadeira, alegria e espírito. Ao samba de roda. À toda cultura popular brasileira. Axé.

À minha família. À doce mãe, a meu pai e irmã, meus ogros preferidos. Aos avós, pelas raízes e pelo estudo que me proporcionaram. À toda ancestralidade.

À bailarina e sua família de comerciantes. Especialmente à bailarina que seguiu seu caminho no mundo.

Esta tese foi financiada pelo CAPES.



*“Meu mestre falou pra mim  
camarada, tenha respeito  
com quem sabe do que faz  
com quem pra tudo dá um jeito  
quem carrega no saber  
a memória de um povo  
que jamais vai se esquecer  
das marcas que trás no corpo.*

*Valentia tem valor  
e humildade é virtude  
na vida, na batalha  
tem que saber escutar  
porque quem tem a língua grande  
há de ficar mais apertado  
que São Jorge na minguante, camará.”  
Prof. Raphael Pereira Moreno, Sagu*

*“Capoeira é tudo que a boca come e tudo que o corpo dá”  
Mestre Pastinha*

*“Há mais razão em teu corpo do que em tua melhor sabedoria”  
Friedrich Nietzsche*



## RESUMO

MAGNO, G. F. **Quantificador de adiabaticidade em sistemas quânticos via geometrias clássicas**. 2024. 103p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Partindo da abordagem matemática de geometrias clássicas, uma abordagem linear para modelos geométricos que aparecem com frequência em Física (e.g. Fubini-Study, hiperbólico, de Sitter, anti-de Sitter, conforme), elaboraremos um novo quantificador para adiabaticidade no contexto de sistemas quânticos puros com dinâmica unitária. O quantificador será construído a partir da isometria acompanhante, conceito naturalmente definido neste cenário que tem a si atrelado uma estrutura de fibrado principal. Este quantificador, vindo da geometria ambiente do problema, deve carregar consigo a história da evolução e servirá como base para formulação de um bom critério geométrico para adiabaticidade. Para fins de exemplificação, traremos duas aplicações no caso de q-bits com Hamiltonianos paradigmáticos apresentando *gaps* de energia variável e constante ao longo do tempo de evolução.

**Palavras-chave:** Evolução adiabática. Geometrias clássicas. Isometria acompanhante. Geometria da informação.



## ABSTRACT

MAGNO, G. F. **Adiabaticity quantifier in quantum systems through classical geometries**. 2024. 103p. Thesis (Doctor in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

From the mathematical approach of classical geometries, a linear approach to geometric models that appear frequently in Physics (e.g. Fubini-Study, hyperbolic, de Sitter, anti-de Sitter, conformal), we want to present a new quantifier for adiabaticity in the context of pure quantum systems with unitary dynamics. The quantifier will be constructed from the path-following isometry, naturally defined object in this scenario that has a principal bundle structure associated to it. This quantifier, coming from the ambient geometry of the problem, must carry with it the history of evolution and will serve as a basis for formulating a good geometric criteria for adiabaticity. For exemplification purposes, we will bring two applications in the q-bits case with a paradigmatic Hamiltonians presenting energy gaps that are variable and constant over the time of evolution.

**Keywords:** Adiabatic evolution. Classical geometries. Path-following isometry. Information geometry.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação da intuição sobre vetor tangente a ponto projetivo. . . .	42
Figura 2 –	Visualização do quociente $V/W$ . . . . .	42
Figura 3 –	Do lado esquerdo, temos uma base $M$ sendo uma circunferência parametrizando fibras $F_p$ que são retas cuja colagem forma o espaço total $E$ com a topologia de um cilindro. Do lado direito, temos uma base $M$ sendo uma reta parametrizando circunferências $F_p$ cuja colagem também forma um cilindro como espaço total $E$ . Note ainda na imagem da direita que destacamos em vermelho uma direção tangente à fibra e outra direção complementar à fibra. Andar na direção tangente à fibra faz com que você nunca saia dela, caminhar na direção complementar leva inevitavelmente a mudança de fibra. . . . .	49
Figura 4 –	Diagrama fibrado, onde $\pi_1$ representa projeção do primeiro fator do produto. . . . .	50
Figura 5 –	Diagrama fibrado destacando a trivialização local promovida pela função $\Phi$ . . . . .	50
Figura 6 –	Diagrama fibrado principal. . . . .	53
Figura 7 –	Representação do fibrado da isometria acompanhante. No caso, temos uma curva fechada em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ com $ \mathbf{c}(a)\rangle =  \mathbf{c}(b)\rangle =  \mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ e seu levantamento horizontal $F$ em $SU(V)$ que inicia na identidade da fibra $\pi^{-1}( \mathbf{p}\rangle) = \text{Stab}( \mathbf{p}\rangle)$ sobre o ponto projetivo inicial e termina na mesma fibra em $F(b)$ . Em $V^{\times}$ temos o levantamento normalizado $ c_0\rangle$ , não necessariamente fechado, iniciando no representante $ p\rangle$ do ponto projetivo. . . . .	55
Figura 8 –	$ \langle\psi_0(t) \Psi(t)\rangle ^2 \times t\lambda$ escolhendo $\omega = \omega_0/2$ , pois queremos avaliar um regime fora da ressonância. Repare que as oscilações ocorrem no eixo ordenado numa vizinhança próxima do valor 1, indicando que o estado evoluído é aproximadamente $ \psi_0(t)\rangle$ durante todo tempo da implementação, ou seja, não há transições de nível aproximadamente. . . . .	61
Figura 9 –	$ \langle\psi_0(t) \Psi(t)\rangle ^2 \times t\lambda$ escolhendo $\omega = \omega_0$ que é a condição de regime de ressonância. Repare que durante o tempo da implementação o valor ordenado vai a zero, indicando que o estado evoluído não possui nenhuma componente no estado fundamental ao fim da implementação, ou seja, o estado transiciona neste regime. . . . .	62

Figura 10 – $\min_t  \langle \psi_0(t)   \Psi(t) \rangle ^2 \times \omega/\omega_0$ . No caso do Hamiltoniano (3.16), nessa imagem podemos ver para diferentes valores de $\omega$ o valor mínimo do módulo quadrado da projeção do estado de Schrödinger no estado fundamental. Vemos nas vizinhanças da ressonância os valores mínimos caírem, indicado que nesta região ocorrerão transições entre níveis. Tempo de evolução $t\lambda = 1$ . . . . .	62
Figura 11 – $C \times \omega/\omega_0$ . Para o Hamiltoniano (3.16), nosso quantificador se comporta como o previsto mostrando que na ressonância e nas suas vizinhanças não vale a condição de adiabaticidade, sendo que na ressonância as transições são iminentes. Tempo de evolução $t\lambda = 1$ . . . . .	64
Figura 12 – $\min_t  \langle \psi_0(t)   \Psi(t) \rangle ^2 \times \omega/\omega_0$ . No caso do Hamiltoniano (3.18), nessa imagem podemos ver para diferentes valores de $\omega$ o valor mínimo do módulo quadrado da projeção do estado de Schrödinger no estado fundamental. Vemos nas vizinhanças da ressonância os valores mínimos caírem, indicado que nesta região ocorrerão transições entre níveis. Tempo de evolução $t\lambda = 1$ . . . . .	65
Figura 13 – $C \times \omega/\omega_0$ . Para o Hamiltoniano (3.18), nosso quantificador se comporta como o previsto mostrando que na ressonância e nas suas vizinhanças não vale a condição de adiabaticidade, sendo que ressonância as transições são iminentes. Tempo de evolução $t\lambda = 1$ . . . . .	66
Figura 14 – Projeção estereográfica da isometria acompanhante $F \mapsto \mathbb{R}^3$ associada a curva que satisfaz a dinâmica de Schrödinger, iniciando no estado fundamental, referente ao Hamiltoniano da Eq. (3.16). Projeção fora do regime de ressonância. Não colocamos dimensões nos eixos do gráfico pois queremos observar o comportamento de $F$ de um ponto de vista matemático, apenas como uma matriz do grupo de isometrias com entradas complexas, para depois chegar a alguma conclusão física. Note o comportamento periódico da curva projetada nesse regime fora da ressonância . . . . .	67
Figura 15 – Projeção estereográfica da isometria acompanhante $F \mapsto \mathbb{R}^3$ associada a curva que satisfaz a dinâmica de Schrödinger, iniciando no estado fundamental, referente ao Hamiltoniano da Eq. (3.16). Projeção no regime de ressonância. Não colocamos dimensões nos eixos do gráfico pois queremos observar o comportamento de $F$ de um ponto de vista matemático, apenas como uma matriz do grupo de isometrias com entradas complexas, para depois chegar a alguma conclusão física. Note o aspecto de curva densa da projeção no regime de ressonância . . . . .	68
Figura 16 – Fibrado de Berry-Simon. . . . .	83

- Figura 17 – Representação das constatações acerca do fibrado de Berry-Simon e sua relação com o levantamento normalizado  $|c_0\rangle$  e o fibrado tautológico. . . 84
- Figura 18 – A reta passando por  $p(w)$  e  $\hat{\varphi}(p(w))$  é uma curva e não um ponto da grassmaniana. Nem toda função é constante ao longo desta curva. . . . 98
- Figura 19 – Cada reta passando pela origem em  $\mathbb{R}^2$  marca dois pontos antípodas na circunferência de raio 1 centrada na origem. Desta forma, todas as retas passando pela origem estão mapeadas na semi-circunferência superior. Identificando os pontos antípodas correspondentes ao eixo  $x$ , temos  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  como uma circunferência de raio  $1/2$ . A métrica de Fubini-Study mede exatamente o ângulo entre estas retas passando pela origem em  $\mathbb{R}^2$ . . . 102



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Panorama da teoria da informação</b>	<b>19</b>
1.1.1	Os primórdios e consequências diretas	19
1.1.2	Geometria da informação	21
1.1.3	Informação quântica	23
<b>1.2</b>	<b>Evolução adiabática</b>	<b>25</b>
1.2.1	Definição de evolução adiabática	25
1.2.2	Abordagem tradicional	27
<b>1.3</b>	<b>Estado da arte da adiabaticidade</b>	<b>29</b>
<b>1.4</b>	<b>Apresentação do trabalho</b>	<b>33</b>
<b>1.5</b>	<b>Notação</b>	<b>36</b>
<b>2</b>	<b>FORMALISMO</b>	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Geometrias clássicas e isometria acompanhante</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Heurística sobre fibrados</b>	<b>48</b>
2.2.1	Fibrado Principal	52
<b>2.3</b>	<b>Fibrado da isometria acompanhante</b>	<b>54</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADO</b>	<b>57</b>
<b>3.1</b>	<b>Entes geométricos clássicos no contexto físico</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>O critério</b>	<b>59</b>
<b>3.3</b>	<b>2 exemplos paradigmáticos</b>	<b>60</b>
<b>3.4</b>	<b>Conjectura e perspectiva</b>	<b>66</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE A – FASE DE BERRY E O FIBRADO TAUTOLÓGICO</b>	<b>81</b>
<b>A.1</b>	<b>Fase de Berry e o fibrado de Berry-Simon</b>	<b>81</b>
<b>A.2</b>	<b>Fibrado de Berry-Simon e o fibrado tautológico</b>	<b>84</b>
	<b>APÊNDICE B – GEOMETRIAS CLÁSSICAS E ESTADOS MISTOS DE UM Q-BIT</b>	<b>87</b>

<b>B.1</b>	<b>Um pouquinho mais de geometrias clássicas . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>B.2</b>	<b>Geometria de estados mistos de um q-bit . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>B.3</b>	<b>Tância e estados mistos de um q-bit . . . . .</b>	<b>94</b>

**APÊNDICE C – GEOMETRIAS CLÁSSICAS EM GRASSMANIANAS E A CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT . . . . . 95**

<b>C.1</b>	<b>Formalismo das grassmanianas . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>C.2</b>	<b>Exemplos paradigmáticos . . . . .</b>	<b>101</b>
C.2.1	Hiperbólico, de Sitter . . . . .	101
C.2.2	Anti-de Sitter . . . . .	102

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo de introdução iremos realizar uma exposição histórica da teoria da informação dando ênfase na sua relação com a geometria. Daremos uma perspectiva da teoria da informação com enfoque na geometria da informação, seguido da apresentação da teoria da informação quântica e suas nuances mais geométricas. Em seguida falaremos dos enunciados acerca da adiabaticidade em sistemas quânticos puros com dinâmica unitária. Faremos uma definição de adiabaticidade, enunciaremos o critério adiabático tradicional seguido de formulações mais recentes de critérios adiabáticos presentes na literatura, muito num espírito de expor o estado da arte dos enunciados dos critérios. Finalizamos apresentando a estrutura do trabalho a ser desenvolvido. Este capítulo pretende estabelecer os bastidores do resultado a ser desenvolvido, critério geométrico para uma evolução adiabática quântica a partir do formalismo de geometrias clássicas.<sup>1</sup>

## 1.1 Panorama da teoria da informação

Partiremos do surgimento da área e suas consequências na nossa maneira de processar informação e abordar problemas em diversos campos. Damos destaque a geometria da informação, área que concentra o espírito do trabalho, ou seja, aplicar formalismo matemático-geométrico em contexto físico de interesse obtendo um resultado. Por fim, falamos da informação quântica como efeito da aplicação dos fundamentos da teoria quântica ao que já era conhecido da teoria da informação clássica de modelos estatísticos.

Nesta seção utilizaremos muitos trechos da dissertação de Trindade, (1) principalmente no que se refere à geometria da informação. Seu texto construiu muito bem um apanhado histórico de desenvolvimento desta área, recomendamos a leitura do trabalho caso haja desejo de mergulhar nos conceitos fundadores do pensamento da geometria da informação.

### 1.1.1 Os primórdios e consequências diretas

O termo ciência da informação denota um campo vasto, interdisciplinar e moderno de pesquisa que abarca diversas áreas como física, estatística, computação, matemática, engenharia, teoria da informação (2) e suas correlações em maior ou menor grau. Sumariamente, sua intenção é o estudo dos sistemas de comunicação/informação. (3) Estes estudos estatísticos são implementados pelo desenvolvimento da teoria da informação, uma maneira de modelar matematicamente a forma de processar, transmitir e medir informação em sistemas de comunicação com interesse prático.

---

<sup>1</sup> Aqui não iremos desenvolver questões acerca das geometrias clássicas. Esta discussão será realizada no Cap. 2.

A Claude Shannon, engenheiro elétrico e matemático, é atribuído o título de pai da teoria da informação. Sua obra fundamental, “A Mathematical Theory of Communication”, (4) revolucionou a forma como vemos a informação. Shannon percebeu que a informação pode ser tratada de maneira matemática, independentemente do significado das mensagens. Ele formalizou a comunicação como um processo que envolve um transmissor, um canal e um receptor, lançando as bases para a análise matemática da troca de informações. Especificamente, ele demonstra que um aumento na taxa de transmissão de informação implicar num aumento na probabilidade de erro na saída do canal era um pressuposto falso. (5)

Shannon também desenvolveu conceitos centrais como o *bit*, abreviação de *binary digit*, sendo a unidade fundamental de informação, representando a escolha entre dois estados mutuamente exclusivos, geralmente chamados de 0 e 1. A introdução do bit possibilitou a medição precisa da quantidade de informação e sua representação em sistemas de computação.

Um outro conceito notável na teoria da informação introduzido por ele foi o de *entropia*, interpretada como uma medida da incerteza ou desordem em uma fonte de informação. Quanto maior a entropia, maior a incerteza e, portanto, maior a quantidade de informação necessária para descrever a fonte. Shannon desenvolveu fórmulas para calcular a entropia de sistemas, incluindo fontes de informações binárias e distribuições de probabilidade, permitindo uma análise quantitativa da informação.

Com o passar dos anos, a teoria da informação transcende seu contexto inicial na comunicação. A formalização da informação como uma entidade mensurável encontrou aplicações em diversas disciplinas. Por exemplo, na economia, conceitos como a entropia são adaptados para analisar mercados financeiros e a tomada de decisões em condições de incerteza. Em particular, utilizando grandezas análogas à entropia podemos estudar séries de retorno em uma bolsa de valores; na ciência da computação a busca de algoritmos mais eficientes/“geodésicos” se traduz matematicamente através da minimização da complexidade de Kolmogorov e da complexidade computacional; na física estatística e termodinâmica vemos já nos cursos de formação como a entropia termodinâmica se conecta com a definição de entropia da teoria da informação; na estatística a intersecção é enorme, afinal diversas grandezas em teoria da informação podem ser traduzidas numa linguagem estatística, a principal delas são estados do sistema traduzidos em distribuições de probabilidade, mas também podemos citar o caso de medidas de distinguibilidade traduzidas em métricas e/ou divergências em espaços de probabilidade (5); na biologia, teve aplicação no estudo de distribuições gaméticas de genótipos de uma população diploide<sup>2</sup>. (6)

---

<sup>2</sup> Distribuição das células sexuais de uma população que apresenta cromossomos em pares. Genótipo é o conjunto de todos os genes do indivíduo, a sequência específica do DNA que armazena as informações hereditárias.

De fato, ter informação como entidade mensurável revolucionou a compreensão da comunicação, naturalmente levando ao desenvolvimento de códigos mais eficientes de transmissão e compressão de dados. Contemporaneamente, a teoria da informação tem muito potencial de influenciar novos campos interdisciplinares em evidência, como teoria da complexidade, aprendizagem de máquina e a inteligência artificial. Além disso, suas aplicações na tecnologia da informação e comunicação contribuem para a informática e o surgimento de dispositivos cada vez mais eficazes de comunicação e armazenamento de dados, possibilitando impacto na vida socioeconômica presente e futura.

### 1.1.2 Geometria da informação

Antes de Shannon publicar seu trabalho sobre informação, entre os anos de 1930-1945 aproximadamente, o econometrista Harold Hotelling e o estatístico Calyampudi Rao ao estudar modelos estatísticos utilizando técnicas de geometria Riemanniana, constroem o alicerce do que hoje chamamos *geometria da informação*. Equipando modelos estatísticos com uma métrica Riemanniana específica chamada *métrica de Fisher*, Rao estuda a relação entre as distâncias geodésicas e problemas de teste de hipóteses, derivando assim a desigualdade de Cramér-Rao (2, 7, 8), relação muito importante em estimativa de parâmetros. (9) Essa métrica coincide com a chamada matriz de informação de Fisher<sup>3</sup>, que possui estreita relação com a entropia de Shannon<sup>4</sup>. (10)

Medidas de distinguibilidade são objeto central em teoria da informação. A ação de qualquer protocolo deve codificar informação no estado do sistema, estado este representado por uma distribuição de probabilidade em um modelo estatístico, por exemplo. Ter acesso a esta informação codificada após a aplicação da operação pede por alguma maneira de distinguir os estados inicial e resultante do sistema, proporcionando um paralelo direto com as questões geométricas. Nesse espírito, entre 1946 e 1948, ao estudar maneiras de mensurar a distinguibilidade entre distribuições de probabilidade, o geofísico e estatístico

<sup>3</sup> Ao estudar estimativa de parâmetros em metrologia e derivar, neste contexto, a expressão da desigualdade de Cramér-Rao permite interpretar o porquê da métrica de Fisher ter atrelada a si um sentido de medida de informação. Na derivação da desigualdade de Cramér-Rao para um estimador de um parâmetro, a cota inferior para a variância do estimador vai com o inverso da informação de Fisher que os dados fornecem sobre este parâmetro, quanto mais informação menos incerteza temos sobre a estimativa (9)

<sup>4</sup> Para o leitor afeito a geometria da informação. As famílias de distribuições exponencial - veja equação 2.31 em (10) - e mistura - veja equação 2.35 em (10) - tem a si associadas as  $\alpha$ -conexões - veja equação 2.25 em (10) -  $\alpha = \{1, -1\}$ , respectivamente. Tais conexões são duais entre si com respeito a métrica de Fisher. A conexão  $\alpha = 1$  é plana na exponencial e a  $\alpha = -1$  é plana na mistura. A métrica de Fisher nessas famílias escreve-se nos sistemas de coordenadas afim respectivos a cada conexão como a Hessiana de uma função potencial. Esta função potencial se escreve com a expressão da entropia de Shannon no caso das distribuições mistura. Além disso, expressões de entropia vão estar ligadas também a medidas distinguibilidade em espaços de probabilidade, como as  $\alpha$ -entropias relativas de Rényi (11) são ligadas as  $\alpha$ -divergências.(10)

Harold Jeffreys introduziu a divergência de Kullback-Leibler. Verificando o comportamento dessa grandeza sob aproximações locais infinitesimais, Jeffreys notou que a matriz de informação de Fisher surgia para aproximações de segunda ordem. (8)

Na segunda metade do século XX, surgem os trabalhos do matemático Nikolai Chentsov, desenvolvendo uma conexão linear plana no espaço das distribuições de probabilidade sobre um conjunto finito, chamada posteriormente de conexão exponencial. (8) Dando estrutura de variedade diferenciável a modelos estatísticos ele estuda de maneira geral como certas grandezas variavam tanto por reparametrizações suaves quanto por certas funções especiais, chamadas de estatísticas suficientes. Quando há invariâncias temos o que é chamado de invariância estatística, fato que resulta na existência de um campo tensorial covariante de rank-3 totalmente simétrico caracterizado pela invariância estatística. (2) Isto o levou a provar uma importante caracterização para a métrica de Fisher em um contexto de estatística sobre amostras finitas, resultado hoje conhecido como Teorema de Chentsov, publicado junto a outros de seus resultados em “Statistical decision rules and optimal inference” em 1972. (12, 13) Futuramente, caberia ao matemático L. Lorne Campbell estudar essa caracterização para a métrica de Fisher em espaços de medidas positivas sobre uma amostra finita. (8, 14) Na área, o Teorema de Chentsov é conhecido por expressar a naturalidade da métrica de Fisher em modelos estatísticos.

Ainda sobre a conexão exponencial, o estatístico Bradley Efron desenvolveu um estudo acerca do que chamou curvatura estatística, nome que usava para se referir à segunda forma fundamental restrita a família exponencial. Ele interpreta a família exponencial como subvariedades Riemannianas de uma variedade diferenciável munida da métrica de Fisher. (8) Dado os trabalhos de Efron, o estatístico Philip Dawid propôs uma segunda conexão linear plana, atualmente chamada de conexão mistura por ser atrelada à família de distribuições mistura, que mostrou possuir uma intrínseca ligação com a conexão exponencial havendo uma relação de dualidade entre elas. (2)

Passamos então aqueles que, em meados dos anos 90, vão inaugurar a área com o nome geometria da informação, o matemático Shun-ichi Amari e do engenheiro Hiroshi Nagaoka que iniciam sua contribuição estudando a questão da dualidade de conexões. Inicialmente, Amari prova que, dada uma conexão linear  $\nabla$  livre de torção em uma variedade Riemanniana, existe uma segunda conexão com essas mesmas características, chamada de dual  $\nabla^*$  de  $\nabla$ , tal que a conexão de Levi-Civita da métrica escreve-se como a média dessas duas conexões. (2) Posteriormente, Amari junto de Nagaoka apresentam a  $\alpha$ -geometria, geometria que emerge ao considerar duas conexões,  $\nabla^{(\alpha)}$  e  $\nabla^{(-\alpha)}$ , duas uma a outra. Inicialmente, tomava-se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , (10) porém mais recentemente restringe-se  $\alpha$  ao intervalo  $[-1, 1]$ . (8, 15)

Dito isso, podemos falar das três maneiras de tratar geometria da informação que se tem contemporaneamente. Temos então que iniciar falando dos trabalhos do

matemático Steffen Lauritzen que apresentou uma abordagem intrínseca para o estudo geral de variedades vinculadas a interpretações estatísticas, em contraposição a abordagem extrínseca dos modelos estatísticos. Em 1987, Lauritzen definiu as variedades estatísticas como variedades diferenciáveis munidas de uma métrica Riemanniana e de um campo tensorial covariante de rank-3 totalmente simétrico, tal qual o descoberto por Chentsov. (16) A partir dessa definição, é possível induzir nessa variedade conexões  $\nabla$  e  $\nabla^*$  duais. Reciprocamente temos a abordagem da  $\alpha$ -geometria de Amari e Nagaoka por meio da introdução das conexões duais obtendo uma estrutura de variedade estatística para a variedade diferenciável. Dessa forma é possível pensar uma dualidade não apenas entre conexões, mas entre abordagens, entre àquela via dualismo desenvolvida por Amari e Nagaoka e a proposta por Lauritzen. Temos assim duas maneiras compatíveis de tratar geometria da informação.

Para falar da terceira, e mais recente, maneira de tratar a geometria da informação, precisamos mencionar que a  $\alpha$ -geometria e a abordagem de Lauritzen tem como premissa que os modelos estatísticos, como variedades, possuíam dimensão finita. Assim, os precursores de uma geometria da informação em dimensão infinita foram os estatísticos Giovanni Pistone e Carlo Sempì, em 1995, apresentando uma generalização para dimensão infinita de resultados já conhecidos no contexto finito. (8, 17)

Por fim, podemos dizer, de maneira muito direta, que geometria da informação é uma área da ciência da informação que utiliza-se da perspectiva da geometria diferencial para estudar a natureza de modelos estatísticos. Ao utilizar esse formalismo matemático robusto, ganhamos mais interpretação e visão acerca dos entes que compõem a teoria da informação. Podemos acrescentar também que dada a naturalidade da informação de Fisher e a busca por medidas de distinguibilidade eficientes no contexto estatístico, o caminho para geometrização é imediato. Por ser uma área jovem, apresenta grande potencial de pesquisa. Inclusive, por questões de divulgação, demos tanta atenção em detalhar seu desenvolvimento nesta seção.

### 1.1.3 Informação quântica

Informação quântica é uma área que começa a se desenvolver por volta dos anos 60-70. Podemos citar como pioneiros os trabalhos em comunicação do físico James Gordon e do engenheiro físico Carl Helstrom que vão propor formulações de comunicações ópticas usando a teoria quântica e estudar principalmente probabilidades de erro e capacidades desse novo canal. (18, 19)

A informação quântica tem como proposta estudar e utilizar fundamentos da teoria quântica, como superposição, emaranhamento, q-bits<sup>5</sup> e medições quânticas, com intuito

<sup>5</sup> Abreviação para *quantum bits*. Estado quântico de um sistema de dois níveis de energia.

de idealizar protocolos e critérios que maximizem a eficiência, aquisição e processamento de informação em canais de comunicação que possuem entes quânticos atuando. (20)

Os estudos estatísticos quânticos são implementados pelo desenvolvimento da teoria da informação quântica através dos conhecimentos já consolidados na teoria da informação descrita nas seções anteriores, que iremos chamar teoria da informação clássica. No contexto quântico, modelamos matematicamente a maneira de se processar, transmitir e medir informação em sistemas de comunicação que tem agentes fundamentais sendo estados quânticos. Portanto, se realiza uma correspondência dos entes da teoria da informação clássica para seus respectivos semelhantes quânticos. Assim variedades estatísticas são trocadas pelos espaços de estados quânticos, estados quânticos fazem o papel das distribuições de probabilidade, medições serão representadas por operadores POVM<sup>6</sup>.

Da mesma maneira que o caso clássico, queremos nos direcionar a aplicação geométrica neste contexto. A nível de geometria da informação quântica temos que dar destaque as medidas de distinguibilidade quânticas. São conhecidas diversas medidas de distância em espaços de estados na literatura que são utilizadas como quantificadores de distinguibilidade, por exemplo, a distância do traço, distância de Hellinger, distância de Hilbert-Schmidt, entropias relativas, entre outras. (21, 22) Como o conceito de distância é intimamente ligado a algum tipo de estrutura geométrica do espaço envolvido, analogamente ao caso clássico, temos a ligação entre métodos de geometria e teoria da informação quântica.

Historicamente, na década de 80, o físico William Wootters começa os primeiros estudos acerca do elo entre distâncias estatísticas em espaços de probabilidade com medidas de distinguibilidade quânticas. (23) Alguns anos mais tarde, o problema foi trazido propriamente para o formalismo de geometria diferencial por nomes como os matemáticos Elena Morozava e Nikolai Chentsov, (24) em um capítulo dedicado a geometria da informação no livro de Amari e Nagaoka, (10) nos trabalhos dos físicos Samuel Braunstein e Carlton Caves estudando medidas de distinguibilidade e métricas Riemannianas no espaço de operadores densidade (25) e o trabalho do físico-matemático Dénes Petz que define a família de métricas permitidas num espaço de estados quânticos. (26)

Aprofundando nos trabalhos de Morozava, Chentsov e Petz, eles expõem que no caso do espaço de estados quânticos mistos existe uma família de métricas permitidas, contrativas pela ação de mapas completamente positivos, parametrizadas pelas funções de Morozava & Chentsov. Essa família surge justamente pela natureza não comutativa do espaço de estados quânticos mistos composto por matrizes densidade. Isso difere do caso clássico em que temos o Teorema de Chentsov assegurando a métrica de Fisher sendo a única métrica natural dos modelos estatísticos. Podemos observar que no caso de porções

<sup>6</sup> Sigla vinda do inglês *positive-operator valued measure* que é utilizada para se referir à medidas quânticas generalizadas.

comutativas do espaço de estados misto as métricas se reduzem a métrica de Fisher, como já foi discutido por Amari e Nagaoka. (10)

Além disso, devido ao fato de medidas quânticas serem representadas por um conjunto de operadores POVM e agora a informação de Fisher ter de ser traduzida para um formato quântico, em metrologia quântica a expressão da desigualdade de Cramér-Rao deve levar em conta estes novos aspectos. (9, 27) No espírito de desigualdades, um resultado em geometria da informação quântica que deve ser destacado está na busca por limites quânticos de velocidade, QSLs. No estudo de distinguibilidade entre dois estados de um sistema, a inserção de uma métrica Riemanniana de Morozava, Chentsov e Petz nesses modelos conduz à utilização de comprimentos geodésicos com respeito à conexão de Levi-Civita da métrica para produzir QSLs geométricos. (28)

Seguindo para as aplicações um tanto mais práticas, uma das mais notáveis da informação quântica é a computação quântica. Computadores quânticos exploram a capacidade dos q-bits de estar em estados de superposição, permitindo realizar cálculos em paralelo. Algoritmos quânticos, como o algoritmo de Shor para fatoração de números (29) e o algoritmo de Grover, (30) prometem revolucionar a criptografia<sup>7</sup> e a busca de informações. (20)

Nos dias de hoje, é dado ao mundo o grande desafio sobre a construção de um hardware de computação quântica confiável, a minimização de erros quânticos e os efeitos destrutivos do fenômeno de decoerência induzido pelo próprio aparato de medida. Grandes empresas, como a Google e a IBM, fazem uma corrida para implementar de forma eficiente computadores que utilizem mais e mais tecnologia puramente quântica na sua estrutura. (34–36)

## 1.2 Evolução adiabática

Nesta seção, inicialmente, apresentaremos o enunciado que iremos ter como definição modelo para adiabaticidade no nosso trabalho. Em seguida enunciaremos e discutiremos a versão tradicional do critério.

### 1.2.1 Definição de evolução adiabática

Nossa discussão agora vai se restringir a mecânica quântica de estados puros. Visto que, o trabalho a ser desenvolvido será também neste nível. Vamos olhar para o espaço de estados quânticos puros como um espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão finita munido

---

<sup>7</sup> Presentemente, em paralelo com o desenvolvimento dos primeiros computadores que utilizam tecnologia quântica, existe uma significativa busca para segurança de informação a nível quântico. No que tange a criptografia quântica, podemos citar a troca segura de chaves quânticas nos protocolos BB84, E91, BBM92. (31–33)

de forma hermitiana não-degenerada  $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  positivo definida apresentando as propriedades que serão vistas na Eq. (2.1).

Sejam o estado quântico  $|\Psi(t)\rangle$  e uma evolução unitária  $U(t, t_0)$ , operador contínuo no parâmetro num espaço de dimensão finita. Temos um Hamiltoniano dependente do tempo  $H_t$ , relacionado com  $U(t, t_0)$  pela expressão  $H_t = i\dot{U}U^\dagger$ , diagonalizável para todo instante de tempo satisfazendo a equação de autovalores

$$H_t |\psi_n(t)\rangle = E_n(t) |\psi_n(t)\rangle \quad \text{onde} \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{n,m}, \quad \forall t, \quad (1.1)$$

com  $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1, \dots, \dim_{\mathbb{C}} V}$  conjunto de vetores complexos de  $V$  que diagonaliza o operador Hamiltoniano e  $E_n(t) < E_{n+1}(t) \quad \forall t, n$ .

A dinâmica de um estado quântico  $|\Psi(t)\rangle$  sob ação de uma evolução unitária  $U(t, t_0)$  pode ser descrita como  $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$ , onde  $|\Psi(t_0)\rangle$  é condição inicial da evolução, desta forma este  $|\Psi(t)\rangle$  satisfaz equação de Schrödinger usual.

**Definição 1** (Evolução adiabática). Num espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão finita, seja a equação dinâmica

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad (1.2)$$

do operador unitário  $U(t, t_0)$ , onde  $H(t)$  é operador Hamiltoniano com

$$H(t) = \sum_n E_n(t) |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| \quad (1.3)$$

e o estado do sistema é dado por  $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$ . Uma evolução temporal proporcionada por um operador unitário  $U_{ad}(t, t_0)$  é dita adiabática se

$$|\langle \psi_n(t) | U_{ad}(t, t_0) | \psi_n(t_0) \rangle|^2 \approx 1. \quad (1.4)$$

Deste modo, as probabilidades das medições dos autovalores do Hamiltoniano são aproximadamente constantes durante a evolução.

Perceba que escolhido  $U_{ad}(t, t_0)$  com uma forma específica

$$U_{ad}(t, t_0) = \sum_n e^{i\gamma_n(t, t_0)} |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t_0)| \quad (1.5)$$

tem a propriedade de  $U_{ad}(t, t_0) = U_{ad}(t, t_1) U_{ad}(t_1, t_0) \quad \forall t_0, t_1$ , logo  $\gamma_n(t, t_0) = \gamma_n(t, t_1) + \gamma_n(t_1, t_0)$  com  $\gamma_n^*(t, t_0) = \gamma_n(t, t_0)$ . Assim, qualquer  $U_{ad}(t, t_0)$  com a estrutura apresentada anteriormente fornece uma evolução adiabática.

Com efeito, dado  $|\Psi(t_0)\rangle = \sum_n q_n(t_0) |\psi_n(t_0)\rangle$ , temos  $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = \sum_n q_n(t) |\psi_n(t)\rangle$  com  $|q_n(t_0)| = |q_n(t)|$ .

**Corolário 1.** No limite de evolução adiabática  $\langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle \approx 0$  para  $m \neq n$ .

<sup>8</sup> Deixaremos subentendidas dependências temporais para não carregar a notação.

Esta definição de evolução adiabática aparenta ser um enunciado muito simples e tecnicamente menos sofisticado se comparado as discussões que serão desenvolvidas na Sec. 1.3. Todavia, destacamos que ela nos serviu de inspiração para definir nosso critério geométrico.

Tendo em vista a definição de evolução adiabática, seguimos para a elaboração mais tradicional do critério de adiabaticidade de uma evolução unitária no contexto de estados puros.

### 1.2.2 Abordagem tradicional

Partiremos para a abordagem mais tradicional da adiabaticidade com a intenção de apresentar o fundamento físico do conceito de evolução adiabática.

Uma solução geral para a equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i |\dot{\Psi}\rangle = H_t |\Psi\rangle, \quad (1.6)$$

pode ser expressa na base de autovetores  $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1,\dots,\dim_{\mathbb{C}} V}$  como

$$|\Psi\rangle = \sum_m q_m(t) \exp\left[-i \int_{t_0}^t E_m dt'\right] |\psi_m\rangle. \quad (1.7)$$

Inserindo a Eq. (1.7) na Eq. (1.6) obtemos para os coeficientes  $q_m$

$$\begin{aligned} \dot{q}_m &= -q_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle \\ &\quad - \sum_{k \neq m} q_k \langle \psi_m | \dot{\psi}_k \rangle \exp\left[-i \int_{t_0}^t (E_k - E_m) dt'\right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Fixo um coeficiente  $q_m$ , o primeiro termo à direita da Eq. (1.8) corresponde a contribuições que o próprio autoestado associado  $|\psi_m\rangle$  fornece ao seu coeficiente durante o tempo de evolução. Já o segundo termo contém todas as contribuições que os outros autoestados  $|\psi_k\rangle_{k \neq m}$  irão fornecer à evolução de  $q_m$ , ou seja, esse segundo termo é relacionado as transições/trocas entre autoestados.

A fim de inspecionarmos os termos relacionados as transições da Eq. (1.8) vamos derivar a Eq. (1.1) em relação a  $t$  obtendo

$$\dot{H}_t |\psi_k\rangle + H_t |\dot{\psi}_k\rangle = \dot{E}_k |\psi_k\rangle + E_k |\dot{\psi}_k\rangle, \quad (1.9)$$

que implica para o termo dentro do somatório da Eq. (1.8) ser escrito como

$$\langle \psi_m | \dot{\psi}_k \rangle = \frac{\langle \psi_m | \dot{H}_t | \psi_k \rangle}{E_k - E_m}, \quad m \neq k. \quad (1.10)$$

Queremos analisar quando podemos negligenciar o termo da Eq. (1.10), não tendo assim contribuição das transições de nível na dinâmica. A fim de comparar o numerador e o

denominador do termo à direita da equação, note que o numerador é ligado a uma taxa de variação do Hamiltoniano no tempo e o denominador um termo de energia correspondente ao *gap* entre os estados. Ainda para o denominador, o intervalo de tempo natural associado ao *gap* de energia é o tempo característico de transição,  $\Delta T_{km}$ , entre os estados  $|\psi_m\rangle$  e  $|\psi_k\rangle$ . Com isso montamos a desigualdade com dimensão de [energia/tempo].

$$|\langle \psi_m | \dot{H}_t | \psi_k \rangle| \ll \frac{|E_k - E_m|}{\Delta T_{km}}. \quad (1.11)$$

Analisando a desigualdade, quando  $\Delta T_{km}$  é muito grande, matematicamente  $\Delta T_{km} \rightarrow \infty$ , então a grandeza  $|\langle \psi_m | \dot{H}_t | \psi_k \rangle| \rightarrow 0$ . Pela desigualdade, fisicamente, isto implica que  $H_t$  deve variar lentamente em relação a escala natural de tempo do sistema. Logo, é equivalente dizer que não há transições de nível para  $H_t$  variando muito lentamente no tempo em comparação com a escala natural de tempo do sistema. Nestas condições, dizemos que a evolução gerada por  $H_t$  é considerada adiabática, afinal transições para outros níveis são supostamente negligenciáveis neste cenário devido as rápidas oscilações do fator de fase  $\exp[-i \int_{t_0}^t (E_k - E_m) dt']$  na Eq. (1.8).

Saindo desta análise, surge então o enunciado mais tradicional do critério para a condição adiabática.

**Critério 1.** Um sistema inicializado em um autoestado  $|\psi_n(t_0)\rangle$  permanecerá no mesmo autoestado instantâneo  $|\psi_n(t)\rangle$ , a menos de uma fase global, para todo  $t \in [t_0, t_f]$ , onde  $t_f$  denota o tempo total de evolução adiabática, se satisfazer a condição (37)

$$\max_{t \in [t_0, t_f]} \frac{|\langle \psi_n | \dot{\psi}_m \rangle|}{|E_n - E_m|} = \max_{t \in [t_0, t_f]} \frac{|\langle \psi_n | \dot{H}_t | \psi_m \rangle|}{|E_n - E_m|^2} \ll 1 \quad \forall n \neq m. \quad (1.12)$$

Válida a condição de adiabaticidade, temos então para a solução da equação de Schrödinger, com condição inicial  $|\Psi(t_0)\rangle = |\psi_n(t_0)\rangle$ ,

$$|\Psi\rangle \approx e^{-i \int E_n} e^{i \beta_n} |\psi_n\rangle, \quad (1.13)$$

onde  $\int E_n := \int_{t_0}^t E_n dt'$  e  $\beta_n := i \int_{t_0}^t \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle dt'$ .

Apresentada esta abordagem mais tradicional do critério, seguimos apresentando outros enunciados de critérios de evolução adiabática que vieram depois deste mais tradicional afim de colocar nosso trabalho em perspectiva.

Vale mencionar que a formulação do Crit. 1 foi criticada com base em argumentos e exemplos envolvendo uma escala de tempo separada e independente de  $t_f$ . (38–43) Se o Hamiltoniano incluir um termo oscilatório então a população de autoestados oscilará com uma escala de tempo determinada por este termo independente de  $t_f$ , mesmo que o

critério adiabático acima seja satisfeito.<sup>9</sup> Entretanto, existem argumentos que defendem que este fato é apenas uma afirmação precipitada sobre o critério tradicional, bastaria na ressonância fazer uma mudança para um referencial girante para que o critério tradicional respondesse corretamente. (45) O que pretendemos aqui com este comentário é apenas salientar a existência deste debate, todavia o nosso trabalho *não* tem intenção contribuir ou tomar parte no debate. Queremos tão somente derivar um novo quantificador para adiabaticidade saindo de um formalismo matemático aplicado à Física. Em seção futura, onde apresentaremos duas aplicações do nosso critério em Hamiltonianos de um q-bit iremos avaliar o regime de ressonância como figura de mérito para o potencial do nosso critério, sem querer acrescentar qualquer ponto ao debate em questão.

Dito isto, deste ponto iremos apresentar alguns resultados da literatura acerca dos critérios de evolução adiabática para colocar nosso trabalho em perspectiva.

### 1.3 Estado da arte da adiabaticidade

Esta seção é destinada a habitual reunião produções literárias relevantes em torno do tema central do trabalho, a aproximação adiabática e seus critérios. Os físicos Daniel Lidar e Tameem Albash fizeram um excelente compilado destes resultados na introdução de um artigo recente. Vamos então construir esta seção a partir dos principais enunciados desta introdução. (44) Recomendamos a leitura para aqueles que desejarem detalhes mais específicos.

Procedendo do Crit. 1, a intenção de contornar a questão de escalas de tempo externas inseridas no critério tradicional via termos oscilatórios no Hamiltoniano é proposta uma nova formulação. Assumimos que o Hamiltoniano  $H_{t_f}(t)$ , com a respectiva equação dinâmica  $\partial |\Psi_{t_f}(t)\rangle / \partial t = -iH_{t_f}(t) |\Psi_{t_f}(t)\rangle$ , pode ser reescrito como  $H(s) = H_{t_f}(st_f)$  independente de  $t_f$ , onde  $s := t/t_f \in [0, 1]$  é parâmetro adimensional. Desta forma, ganhamos porções do Hamiltoniano que irão se intercalar,  $H(s) = A(s)H_0 + B(s)H_1$ , onde  $A(s)$  e  $B(s)$  são monotonicamente decrescente e crescente, respectivamente. Isto excluiria escalas de tempo adicionais, tornando a equação de Schrödinger

$$\frac{1}{t_f} \frac{\partial |\Psi_{t_f}(s)\rangle}{\partial s} = -iH(s) |\Psi_{t_f}(s)\rangle. \quad (1.14)$$

**Critério 2.** Levando em conta a formulação acima, temos uma nova condição adiabática (42)

$$\frac{1}{t_f} \max_{s \in [0,1]} \frac{|\langle \psi_n(s) | \partial_s H(s) | \psi_m(s) \rangle|}{|E_n(s) - E_m(s)|^2} \ll 1 \quad \forall n \neq m. \quad (1.15)$$

<sup>9</sup> Por exemplo, para um Hamiltoniano de dois níveis  $H(t) = a\sigma_z + b\sin(\omega t)\sigma_x$ , a condição adiabática em questão se reduz à  $|b\omega| \ll a^2$ . Porém, mesmo que esta condição seja satisfeita a população pode oscilar entre os dois autoestados na *ressonância*, quando  $\omega = 2a$ , o sistema sofre oscilações de Rabi com período  $\pi/|b|$ , uma escala de tempo que é independente de  $t_f$ . (44) O critério que iremos desenvolver neste trabalho irá abordar este mesmo Hamiltoniano na Sec. 3.3.

As condições do Crit. 1 e da Eq. (1.15) são critérios amplamente utilizados e conhecidos. O tempo total de evolução adiabática  $t_f$  deve ser grande em relação a escala de tempo definida pelo inverso do mínimo quadrado do intervalo espectral  $\Delta_{nm}(s) := E_n(s) - E_m(s)$ . Na maioria dos casos estamos interessados no estado fundamental, de modo que  $\Delta_{nm}(s)$  é substituído por

$$\Delta := \min_{s \in [0,1]} \Delta(s) = \min_{s \in [0,1]} E_1(s) - E_0(s). \quad (1.16)$$

No entanto, argumentos como aqueles do Crit. 1 e da Eq. (1.15) são aproximados, no sentido que não resultam em desigualdades estritas e em limites de proximidade entre o estado real evoluído no tempo e o estado próprio desejado.

Deste modo, na intenção passa a ser de prosseguir para condições mais rigorosas que falem da proximidade entre o estado real evoluído e o estado adiabático evoluído idealmente. Vamos assumir por simplicidade que o sistema é preparado no estado fundamental e o *gap* de energia é o dado por  $\Delta$ , na Eq. (1.16). Assumimos também que no intervalo  $s \in [0, 1]$  o Hamiltoniano  $H(s)$  tem autoprojeter  $P(s)$  com energia  $E_0(s)$ <sup>10</sup> e o *gap* nunca se anula, ou seja,  $\Delta > 0 \forall s$ .  $P(s)$  representa uma evolução adiabática “ideal”. Definimos então o projetor  $P_{t_f}(s) := |\Psi_{t_f}(s)\rangle \langle \Psi_{t_f}(s)|$  sobre a solução da equação de Schödinger, que chamaremos de estado real do sistema.

Essa nova maneira de formular a condição adiabática surge de afirmar acerca de distâncias instantâneas entre os projetores associados as evoluções real e ideal do sistema,  $|P_{t_f}(s) - P(s)|$ , ou da distância no instante final da evolução,  $|P_{t_f}(1) - P(1)|$ . Tipicamente, enunciados de condições pensados desta forma irão fornecer uma cota de ordem  $\mathcal{O}(1/t_f)$  para o caso instantâneo e de ordem  $\mathcal{O}(1/t_f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  para o caso do instante final. Ao quadrarmos estas cotas vindas de distâncias entre projetores ganhamos cotas para as probabilidades de transição,  $|\langle \Psi_{t_f}^\perp(s) | \Psi_{t_f}(s) \rangle|^2$ , onde  $|\Psi_{t_f}(s)^\perp\rangle = (1 - P) |\Psi_{t_f}(s)\rangle$ . Segue então um novo critério fruto deste processo.

**Critério 3.** Suponha que o espectro de  $H(s)$  restrito a  $P(s)$  consiste de  $m(s)$  autovalores separados por um *gap*  $\Delta(s) = E_1(s) - E_0(s) > 0$  do resto do espectro. Além disso, pedimos que  $H(s)$  seja operador 2-diferenciável. Definido  $H^{(k)}(s) := (\partial^k H(x)/\partial x)|_s$ , assumamos que  $H$ ,  $H^{(1)}$  e  $H^{(2)}$  são operadores limitados. Então, para  $s \in [0, 1]$  (46)

$$\begin{aligned} |P_{t_f}(s) - P(s)| &\leq \frac{m(0)|H^{(1)}(0)|}{t_f \Delta^2(0)} + \frac{m(s)|H^{(1)}(s)|}{t_f \Delta^2(s)} \\ &+ \frac{1}{t_f} \int_0^s \left( \frac{m|H^{(2)}|}{\Delta^2} + \frac{7m\sqrt{m}|H^{(1)}|^2}{\Delta^3} \right) dx. \end{aligned} \quad (1.17)$$

<sup>10</sup> É mencionado no texto original o fato do estado fundamental poder apresentar degenerescências.

Por simplicidade, ignorando a dependência em  $m$  o limite adiabático pode ser aproximado arbitrariamente se

$$t_f \gg \max \left\{ \max_{s \in [0,1]} \frac{|H^{(2)}(s)|}{\Delta^2(s)}, \max_{s \in [0,1]} \frac{|H^{(1)}(s)|^2}{\Delta^3(s)}, \max_{s \in [0,1]} \frac{|H^{(1)}(s)|}{\Delta^2(s)} \right\}. \quad (1.18)$$

Note, os numeradores dependem de derivadas primeiras e segundas do Hamiltoniano ao invés de elementos de matriz que aparecem no critério tradicional. Este critério estabelece a dependência de  $t_f$  com o *gap* de energia sem fazer fortes suposições acerca da suavidade de  $H(s)$ . Seu requerimento essencial é que o espectro de  $H(s)$  tem banda associada a  $P(s)$  separada por um *gap* não nulo  $\Delta(s)$ <sup>11</sup>.

Continuando, a vontade agora era apresentar uma nova condição que produzisse uma escala  $t_f$  que vai com o logaritmo do *gap* e seu inverso ao quadrado. Esse desejo surge pois todas outras versões de critérios que até então apresentaram uma dependência de *gap* cúbica ou superior, em comparação são, menos satisfatórias. Segue então uma definição preliminar e a apresentação desse um novo critério que vai com o logaritmo do *gap*.

**Definição 2** (Classe de Gevrey). Dizemos que o Hamiltoniano  $H(s)$  pertence a classe  $G^\alpha$  se  $dH(s)/ds \neq 0 \forall s \in [0, 1]$  e existem constantes positivas  $C, R$  tal que, para todo  $k > 1$ ,

$$\max_{s \in [0,1]} |H^{(k)}(s)| \leq CR^k k^{\alpha k}. \quad (1.19)$$

**Critério 4.** Assuma  $H(s)$  limitado, suave e pertencente a uma classe de Gevrey  $G^\alpha$  com  $\alpha > 1$ . Dado que  $\Delta \ll h$ , onde  $h := |H(0)| = |H(1)|$ , se

$$t_f \geq \frac{K}{\Delta^2} |\ln(\Delta/h)|^{6\alpha} \quad (1.20)$$

para alguma constante  $K > 0$  com unidades de energia, então a distância  $|P_{t_f}(s) - P(s)|$  é da ordem  $\mathcal{O}(1) \forall s \in [0, 1]$ . (49)

É dito que este resultado, além de fornecer a dependência com o inverso do quadrado do *gap*, é *tight*<sup>12</sup> devido a existência de uma cota inferior da forma  $t_f = \mathcal{O}(\Delta^{-2}/|\ln \Delta|)$  para Hamiltonianos com  $\text{rank}H(1) \ll \dim(V)$ , onde  $V$  é o espaço vetorial com forma hermitiana não-degenerada positiva definida que contém o espaço de estados. (50) Entretanto, era observado que a cota do erro associado não é *tight*.

Nesse sentido, surge a demanda de formulação de um outro critério que possuisse um erro exponencialmente pequeno associado a  $t_f$ , porém com dependência inversa do *gap* é cúbica. Segue então seu enunciado.

<sup>11</sup> Este critério foi desenvolvido a partir de técnicas baseadas em resolventes e análises complexas apresentadas pelo trabalho do matemático Tosio Kato (47) sobre teoria de perturbação de operadores lineares. A abordagem de Kato pode ser usada para provar um teorema adiabático para sistemas quânticos abertos, onde a evolução é gerada por um Liouvilliano não-hermitiano em vez de um Hamiltoniano. (48)

<sup>12</sup> Denota um sentido de estreito, apertado, justo. Em contexto, optamos por deixar a palavra no original em inglês.

**Critério 5.** Por simplicidade, pedimos  $E_0(s) = 0$  e escolhemos a fase de  $|\psi_0(s)\rangle$  de forma que  $\langle \dot{\psi}_0(s) | \psi_0(s) \rangle = 0$ , onde aqui ponto é derivada parcial em relação a  $s$ . Assuma que todas as derivadas de  $H(s)$  se anulam em  $s = 0, 1$ . Além disso, assumimos que as derivadas satisfazem agora a seguinte condição de Gevrey: existem constantes positivas  $C, R, \alpha$  tal que, para todo  $K > 1$ ,

$$\max_{s \in [0,1]} |H^{(k)}(s)| \leq CR^k \frac{(k!)^{1+\alpha}}{(k+1)^2}. \quad (1.21)$$

Então o erro associado a  $t_f$  tem cota dada por

$$\min_{\theta} | |\Psi_{t_f}(1)\rangle - e^{i\theta} |\psi_0(1)\rangle | \leq c_1 \frac{C}{\Delta} e^{-(c_2 \Delta^3 t_f / C^2)^{1/(1+\alpha)}}, \quad (1.22)$$

onde  $c_1 = eR(8\pi^2/3)^3$  e  $c_2 = (3/4\pi^2)^5/(4eR^2)$ . Deste modo, contanto que  $t_f \gg C^2/\Delta^3$ , o erro é exponencialmente pequeno em  $t_f$ . (51)

A ideia de usar derivadas que se anulam no contorno já havia sido empregada anteriormente, (52) inclusive usada até para uma classe de funções diferente da classe Gevrey. (53) Uma outra diferença importante entre os Critérios 4 e 5 é que o primeiro se aplica a todos os tempos  $s \in [0, 1]$  enquanto o último se aplica apenas no tempo final  $s = 1$ , dando origem a uma cota do erro mais *tight*.

Para finalizar, apresentaremos uma última formulação de critério que usa de um pouco mais geometria na sua proposição, em sintonia com o resultado que queremos expor nesta tese. Seja agora  $s \in [0, 1]$  visto como uma curva hamiltoniana suave e um autoestado não-degenerado  $|\psi(s)\rangle$ . A única hipótese feita é sermos capazes de evoluir  $H(s(t))$  para alguma curva  $s$ , permitido inclusive que  $s$  seja função geral de  $t$ , sem explorar qualquer estrutura de  $H(s)$ .

Defimos o comprimento

$$L := \int_0^1 | \langle \dot{\psi}(s) | \dot{\psi}(s) \rangle |^2 ds, \quad (1.23)$$

onde, novamente, ponto denota derivada parcial em relação a  $s$ . Assumimos, sem perda de generalidade, que a fase de  $|\psi(s)\rangle$  é escolhida de forma que  $\langle \dot{\psi}(s) | \psi(s) \rangle = 0$ , então, a menos de constantes multiplicativas,  $L$  é comprimento natural do espaço projetivo associado ao espaço vetorial que contém o espaço de estados em questão. O critério segue enunciado abaixo.

**Critério 6.** Há uma cota inferior para o tempo necessário de preparação de  $|\psi(1)\rangle$  a partir de  $|\psi(0)\rangle$  com precisão dada por (54)

$$t_f > \mathcal{O}(L/\Delta). \quad (1.24)$$

Uma vez que a cota superior para  $L$  é dada por  $\max_s |\dot{H}(s)|/\Delta$  obtemos  $t_f \sim \mathcal{O}(\max_s |\dot{H}(s)|/\Delta^2)$  que remete a versão do Critério 2.

Finalizada esta apresentação do estado da arte de enunciados para a condição adiabática, colocada as coxias do nosso trabalho em contexto seguimos para a exposição do conteúdo principal do texto.

## 1.4 Apresentação do trabalho

Nosso trabalho irá utilizar de técnicas geométricas, no espírito da geometria da informação quântica, com propósito apresentar mais um quantificador como critério para avaliar se uma evolução é adiabática ou não. A novidade desse critério é que ele descende da aplicação direta do formalismo matemático de geometrias clássicas, especificamente da ferramenta natural deste contexto chamada isometria acompanhante, em sistemas quânticos puros com dinâmica unitária. Essa natureza matemática permitirá visão e interpretação geométrica dos efeitos da adiabaticidade na evolução, levando à forma final do critério posteriormente. Vale notar que a inspiração física na elaboração do critério vem pela via da Def. 1 e pelo conteúdo apresentado na Sec. 1.3<sup>13</sup>.

A expressão explícita do critério irá envolver apenas a matriz da isometria acompanhante que carrega consigo a história da evolução do sistema. Iremos mostrar que o quantificador funciona dentro e fora do regime de ressonância. Sua alma geométrica vem da intuição de distâncias no fibrado principal associado a isometria acompanhante. Iremos também comentar sobre nossa conjectura que a partir do nosso critério seria possível provar a impossibilidade de haver adiabaticidade em regime de ressonância.

Iremos dedicar todo o Cap. 2 para a apresentação do formalismo matemático necessário para a discussão. Posto isso, para um espaço vetorial complexo  $V$  finito munido de forma hermitiana não-degenerada positivo definida, entenderemos por geometrias clássicas as geometrias que emanam da forma de  $V$ .

Como geometrias clássicas se desenvolvem a nível projetivo seguiremos com toda uma apresentação de resultados de geometria projetiva. Iniciando da definição de espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  como o espaço das retas complexas que passam pela origem de  $V$ .

Falaremos da estrutura suave de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  induzida do próprio  $V$ , graças a esta estrutura teremos noção de tangência a um ponto projetivo, assim dado  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \simeq \text{Lin}(V, V)$  tal que  $|\mathbf{p}\rangle \rightarrow |\mathbf{p}^{\perp}\rangle \rightarrow 0$ .

Entendido quem são os vetores tangentes ao projetivo ganharemos geometria definindo a métrica, independente de representantes dos pontos, utilizando da forma hermitiana do espaço vetorial. Dados  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $|p\rangle$  representante do ponto projetivo e

<sup>13</sup> A saber, a afirmação que condições adiabáticas surgem de distâncias instantâneas entre os projetores de evoluções real e ideal do sistema.

$\phi_1, \phi_2 \in T_{|\mathbf{p}}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  definimos a métrica

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{|\mathbf{p}}^{FS} := \frac{\langle \phi_2 p \mid \phi_1 p \rangle}{\langle p \mid p \rangle}, \quad (1.25)$$

conhecida por métrica de Fubini-Study.

Seguiremos a discussão falando de curvas. Teremos boa definição para vetor tangente à curva projetiva, onde dada  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  curva suave, se  $|c\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$  é um levantamento suave de  $|\mathbf{c}\rangle$ , então

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{(\pi[c]|\dot{c}\rangle)\langle c|}{\langle c|c\rangle}, \quad (1.26)$$

onde  $\pi[c]$  é projetor na direção ortogonal a curva. Apresentaremos um levantamento especial e único  $|c_0\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$ , chamado levantamento normalizado, tal que  $\langle c_0|c_0\rangle = 1$  e  $\langle c_0|\dot{c}_0\rangle = 0 \forall t \in [a, b]$ . Ainda, dado um levantamento unitário  $|\tilde{c}\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$ , tal que  $\langle \tilde{c}|\tilde{c}\rangle = 1 \forall t \in [a, b]$ , temos que  $|c_0\rangle = \exp(i\varphi(t))|\tilde{c}\rangle$ , com  $\dot{\varphi} = i\langle \tilde{c}|\dot{\tilde{c}}\rangle$ .

Daí seguiremos para a estrela do formalismo. Dada curva  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , temos  $\dot{\mathbf{c}}(t) \in T_{|\mathbf{c}(t)}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ . Defina  $\hat{\mathbf{c}} := \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}^*$  ganhando uma curva na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(V)$ . A isometria acompanhante da curva  $|\mathbf{c}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é definida como  $F : [a, b] \rightarrow SU(V)$  tal que  $\dot{F}(t) = \hat{\mathbf{c}}(t)F(t)$  e  $F(a) = 1_{SU(V)}$ .

Em seguida iremos iniciar um parêntesis na nossa apresentação do formalismo para apresentar uma rápida e simplificada conceituação sobre fibrados, visto que esta construção é por vezes considerado muito abstrata, ou até desconhecida, para a comunidade de físicos. Porém, a principal finalidade aqui é a de nos preparar para introduzir um fibrado natural que está associado a isometria acompanhante. Por isso, terminaremos esta apresentação mostrando os ingredientes que compõem um fibrado principal e descrevendo conexão de Ehresmann.

Desta maneira, após sermos apresentados aos fibrados, finalizamos o formalismo dizendo que dado  $|\mathbf{c}(a)\rangle = |\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , temos que  $SU(V)/\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ . Desta forma, temos um *fibrado principal*,  $\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle) \hookrightarrow SU(V) \xrightarrow{\pi} SU(V)/\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ . A isometria acompanhante  $F(t)$  da curva  $|\mathbf{c}\rangle$  é declarada horizontal, definindo assim uma conexão de Ehresmann no fibrado.

No Cap. 3 é o momento de chocarmos o formalismo com a Física produzindo nosso critério e seus resultados. Olhando para o espaço de estados quânticos puros como um espaço vetorial complexo  $V$  finito munido de forma hermitiana não-degenerada positivo definida. O operador Hamiltoniano  $H_t$  é diagonalizável para todo  $t$  satisfazendo a equação de autovalores

$$H_t |\psi_n(t)\rangle = E_n(t) |\psi_n(t)\rangle \quad \text{onde} \quad \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{n,m}, \quad \forall t, \quad (1.27)$$

com  $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1, \dots, \dim_{\mathbb{C}} V}$  conjunto autovetores e autoenergias  $E_n(t) < E_{n+1}(t) \forall t, n$ .



É importante destacar e recomendar fortemente a leitura dos Apêndices desta tese, principalmente para o leitor que se interessou pela aplicabilidade das geometrias clássicas no contexto físico. Neles incluímos conteúdos que ou emanaram espontaneamente do que foi desenvolvido na tese, ou foram desenvolvidas paralelamente ao texto principal, podendo servir futuramente como perspectivas e diretrizes para novos trabalhos. No Apêndice A falamos sobre a relação do levantamento normalizado de curvas com a fase de Berry e a conexão do fibrado de Berry-Simon. O Apêndice B é dedicado a aplicação de geometrias clássicas ao espaço de estados mistos de um q-bit, já apresentando resultados geométricos relevantes. Já o Apêndice C apresenta uma discussão formalmente mais sofisticada que tenta indicar a possível relação entre geometrias clássicas em grassmanianas com correspondência AdS/CFT.

Todas as imagens foram elaboradas pelo autor utilizando do editor *online* gratuito Mathcha ou do *software* Wolfram Mathematica.

## 1.5 Notação

Utilizamos algumas notações já bem estabelecidas nas literaturas de matemática, contudo, por completude, melhor compreensão do texto e principalmente por se tratar de uma tese de Física, decidimos especificar aqui algumas delas:

- $\ll$ : muito menor que.
- $\simeq$ : isomorfismo linear.
- $\perp$ : perpendicular.
- $\mathbb{K}$ : corpo, *e.g.*,  $\mathbb{R}$  corpo real,  $\mathbb{C}$  corpo complexo.
- $W \leq V$ :  $W$  é subespaço vetorial de  $V$ , onde  $W$  e  $V$  são espaços vetoriais.
- $V^\times$ : espaço vetorial  $V$  sem a origem,  $V \setminus \{|0\rangle\}$ .
- $A^*$ : transformação adjunta à transformação linear  $A$  definida no espaço vetorial  $V$  com respeito a forma hermitiana não-degenerada deste espaço.
- $\text{Ker}(A)$ : núcleo da transformação linear  $A$ .
- $\text{Lin}(W, V)$ : espaço de todas as transformações lineares de  $W$  em  $V$ , onde  $W$  e  $V$  são espaços vetoriais.
- $\circ$ : ação de grupo à direita.
- $1_G$ : identidade do grupo  $G$ .
- $\mathfrak{g}$ : álgebra de Lie do Grupo de Lie  $G$ .

- 
- $\text{Stab}(x)$ : estabilizador do ponto  $x \in X$ , onde o grupo  $G$  age sobre o conjunto  $X$ .
  - $\mathcal{O}(x)$ : órbita do ponto  $x \in X$ , onde o grupo  $G$  age sobre o conjunto  $X$ .
  - $\sim$ : relação de equivalência.
  - $|\mathbf{p}\rangle = [|p\rangle]$ : classe de equivalência num espaço vetorial  $V$  sob alguma relação de equivalência definida neste contexto.
  - $|p\rangle$ : representante da classe  $|\mathbf{p}\rangle$ . Escolha arbitrária em  $V$  dentro da classe de equivalência.
  - $|\mathbf{p}^\perp\rangle$ : conjunto de todas as direções perpendiculares a classe  $|\mathbf{p}\rangle$  com respeito a forma hermitiana não-degenerada deste espaço.
  - $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ : espaço projetivo do espaço vetorial  $V$  sob corpo  $\mathbb{K}$ .
  - $T_pM$ : espaço tangente no ponto  $p \in M$ , onde  $M$  é variedade suave.
  - $C^\infty(M)$ : conjunto de todas as funções suaves de  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $M$  é variedade suave.
  - $\mathbf{S}^n$ : esfera unitária contida em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Terminado aqui a introdução, iremos iniciar no próximo capítulo a apresentação dos conceitos necessários acerca das geometrias clássicas e isometria acompanhante que nos servirão como objetos de trabalho daqui pra frente.



## 2 FORMALISMO

Este capítulo irá apresentar todo o formalismo matemático das geometrias clássicas (55, 56) necessário para a elaboração do critério geométrico para adiabaticidade. Iremos passar pelas primeiras definições onde descreveremos do que se tratam as geometrias clássicas, seguido de uma série de resultados de geometria projetiva, terreno onde serão desenvolvidas nossas afirmações. Falaremos desde a estrutura suave do projetivo, caracterização de seu espaço tangente, estrutura geométrica proporcionada pela métrica de Fubini-Study e um conjunto de resultados acerca de curvas projetivas. Feito isso, estaremos nas condições de definir a isometria acompanhante, curva no grupo de isometrias que “acompanha” uma dada curva projetiva. Será feito então um parêntesis para apresentar uma introdução ao conceito de fibrados, pois queremos finalizar a discussão definindo o fibrado principal relacionado naturalmente a isometria acompanhante. Este, futuramente, nos servirá para certas análises geométricas que estarão na alma do critério que queremos apresentar neste trabalho.

### 2.1 Geometrias clássicas e isometria acompanhante

Seja  $V$  espaço vetorial sobre os complexos de  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$  munido de forma hermitiana não-degenerada positiva definida  $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \text{i) biaditiva:} \quad & \langle u + v | w \rangle = \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle, \\
 & \langle u | v + w \rangle = \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle. \\
 \text{ii) sesquilinear:} \quad & \langle ku | v \rangle = \bar{k} \langle u | v \rangle, \\
 & \langle u | kv \rangle = k \langle u | v \rangle, \text{ para } k \in \mathbb{C}. \\
 \text{iii) } & \langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por *geometrias clássicas* entendemos os estudos acerca da geometria que emana da forma hermitiana não-degenerada positiva definida  $\langle - | - \rangle$ , ou ainda, geometrias que se manifestam a partir da álgebra linear. Esta é, uma abordagem linear de modelos geométricos que se manifestam na Física como, por exemplo, Fubini-Study, hiperbólico, (57) de Sitter, anti-de Sitter.

O nome “*clássicas*” se deve ao fato das formas terem atreladas a si grupos de isometrias, que aqui denotaremos por  $U(V)$  e  $SU(V)$ , chamados grupos de Lie clássicos.

**Definição 3** (Espaço Projetivo). Seja  $V^{\times} := V \setminus \{0\}$ . Defina uma classe de equivalência  $|p\rangle$  em  $V$  dado que  $|p\rangle \sim |p'\rangle$ , com  $|p\rangle, |p'\rangle \in V$ , se existe  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $|p\rangle = \lambda |p'\rangle$ .

Definimos o espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  através do quociente  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V := V^{\times}/\sim$ . Em outras palavras,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é o espaço de retas complexas contidas em  $V$  passando pela origem.

O espaço de estados quânticos puros pode ser representado pela esfera unitária  $\mathcal{H} \subset V$ , sendo que estados que diferem por uma fase, i.e., pela multiplicação por um escalar complexo unitário, devem ser identificados. A geometria projetiva aparece naturalmente em problemas com este tipo de invariância, ao projetivizar  $V$  obtemos  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  como verdadeiro espaço de estados quânticos puros.<sup>1</sup> Desta maneira, exploramos a geometria da forma  $\langle - | - \rangle$  em nível projetivo.

O espaço projetivo, para corpo real e complexo, apresenta estrutura suave induzida do próprio  $V$ . Este é um típico exemplo dos cursos de geometria cuja prova é bastante técnica e acrescenta pouco ao nosso contexto. Por isso, como existem muitos materiais didáticos onde a prova pode ser encontrada, vamos só apresentar um roteiro da prova como observação.

*Observação 1* (Estrutura suave do projetivo). Vamos trabalhar com o caso real  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  para dar a noção da prova, o caso complexo é análogo pois, desde que  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , identificando  $(x + iy) \mapsto (x, y)$ , é direto que  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ , então podemos olhar para  $\mathbb{C}^n$  como variedade de dimensão real  $2n$ .

A prova deve ser iniciada mostrando que o projetivo é espaço de Hausdorff com base enumerável através da topologia induzida do quociente, não iremos nos alongar neste ponto aqui. Seguindo, em coordenadas, os abertos  $U_i \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  são os conjuntos de retas passando pela origem com  $x_i \neq 0$  com  $i = 1, \dots, n+1$ . Definimos as cartas locais  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = (y_{(i)}^1, \dots, y_{(i)}^n), \quad (2.2)$$

de maneira que, omitindo a razão  $x_i/x_i = 1$ , temos

$$y_{(i)}^1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{(i)}^{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_{(i)}^i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_{(i)}^n = \frac{x_{n+1}}{x_i}. \quad (2.3)$$

$\varphi_i$  é bijeção pois tem inversa

$$\varphi_i^{-1}(y_{(i)}^1, \dots, y_{(i)}^n) = [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n]. \quad (2.4)$$

$\{y_{(i)}^j\}_{j=1, \dots, n}$  é independente da escolha de representante de classe e uma vez que pelo menos um  $x_i \neq 0$  em toda reta, cada representante deve estar contido em pelo menos um aberto  $U_i$ , logo  $(U_i, \varphi_i, y_{(i)}^j)$  é atlas do projetivo.

<sup>1</sup> O espaço de estados quânticos puros pode ser visto como o projetivo complexo, pois existe um isomorfismo entre  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \simeq \mathcal{H}/\sim'$  onde a relação de equivalência  $\sim'$  é definida como  $p \sim' p'$  se existe  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$  tal que  $|\lambda|^2 = 1$  e  $p = \lambda p'$ , com  $p, p' \in \mathcal{H}$ . Este fato pode ser pictoricamente visualizado, pois cada circunferência unitária está contida em uma, e apenas uma, reta complexa passando pela origem.

Se  $[x_1, \dots, x_{n+1}] \subset U_i \cap U_j$ , as funções de transição  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  são dadas por

$$y_{(j)}^k = \frac{x_k}{x_j} = \frac{x_k x_i}{x_i x_j} = y_{(i)}^k y_{(j)}^i, \quad (2.5)$$

que são claramente invertíveis e suaves.

O caso complexo segue o mesmo roteiro. O aberto  $U_i$  é o conjunto de retas com  $z_i \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Definimos os mapas  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  por

$$\varphi_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) = (w_{(i)}^1, \dots, w_{(i)}^n), \quad (2.6)$$

de maneira que, omitindo a razão  $z_i/z_i = 1$ , temos

$$w_{(i)}^1 = \frac{z_1}{z_i}, \dots, w_{(i)}^{i-1} = \frac{z_{i-1}}{z_i}, w_{(i)}^i = \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, w_{(i)}^n = \frac{z_{n+1}}{z_i}. \quad (2.7)$$

Novamente,  $\varphi_i$  é bijeção, pois tem inversa e  $\{w_{(i)}^j\}_{j=1, \dots, n}$  é independente da escolha do representante da classe  $[z_1, \dots, z_{n+1}]$ . Uma vez que pelo menos um  $z_i \neq 0$  em toda reta, cada representante está contido em pelo menos um  $U_i$ , assim o conjunto de cartas  $(U_i, \varphi_i, w_{(i)}^j)$  cobre todo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

As funções de transição  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  são dadas por  $w_{(j)}^k = w_{(i)}^k w_{(j)}^i$  que de novo são invertíveis e suaves.

Dado que temos estrutura suave, no caminho geométrico que seguimos é natural falarmos do espaço tangente ao projetivo. Sendo  $|p\rangle \in V^\times$ , antes do enunciado precisamos definir as projeções

$$\pi'[p] : \begin{cases} V & \longrightarrow V \\ |v\rangle & \longmapsto \frac{\langle v | p \rangle}{\langle p | p \rangle} |p\rangle \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi[p] : \begin{cases} V & \longrightarrow V \\ |v\rangle & \longmapsto |v\rangle - \pi'[p] |v\rangle \end{cases}. \quad (2.8)$$

**Teorema 1** (Espaço tangente ao projetivo). Seja  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \simeq \text{Lin}(V, V)$  tal que  $|\mathbf{p}\rangle \rightarrow |\mathbf{p}^\perp\rangle \rightarrow 0$ . Dado  $\phi \in T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , podemos representá-lo por  $\phi = |v\rangle \langle p|$ , onde  $|v\rangle \in |\mathbf{p}^\perp\rangle$  e  $\langle p|$  é funcional linear em  $V^*$  associado ao representante  $|p\rangle$ .

*Demonstração.* Antes de procedermos com a prova, vamos dar uma intuição do fato a ser demonstrado: um ponto  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  corresponde a uma reta passando pela origem, um vetor tangente  $\phi$  em  $|\mathbf{p}\rangle$  deve ser um movimento infinitesimal desta reta, uma espécie de rotação em torno da origem, Fig. 1, e portanto pode ser exibido como uma direção ortogonal a  $|\mathbf{p}\rangle$ . Mas esta direção não é meramente um elemento  $\phi(|p\rangle) \in |\mathbf{p}^\perp\rangle$ . O fato que  $\phi$  é uma aplicação linear providencia a independência da escolha de um representante  $|p\rangle \in V$ .

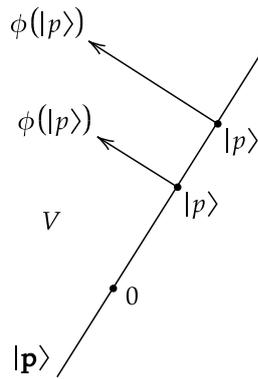


Figura 1 – Representação da intuição sobre vetor tangente a ponto projetivo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora vamos seguir com a sequência de enunciados a serem provados.

(i) Dado  $W \leq V$  subespaço vetorial de  $V$ , é espaço vetorial o quociente

$$V/W = \{[v] \mid v \in V\} \quad , \quad \text{onde} \quad [v] = [v'] \Leftrightarrow v - v' \in W. \quad (2.9)$$

Tome  $|u\rangle, |u'\rangle, |v\rangle, |v'\rangle \in V$  e  $|w\rangle, |w'\rangle \in W$  de forma que  $|u\rangle = |v\rangle + |w\rangle$  e  $|u'\rangle = |v'\rangle + |w'\rangle$ , logo  $[u] \in [v]$  e  $[u'] \in [v']$  que implica

$$[v] + [v'] = [v + v'] = [u] + [u']. \quad (2.10)$$

Além disso

$$[\alpha v] = \alpha[v] \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.11)$$

Portanto  $V/W$  é sempre espaço vetorial. Este quociente representa um achatamento de  $V$  na direção de  $W$ .  $V/W$  lista todas as paralelas às direções de  $W$ , Fig. 2.

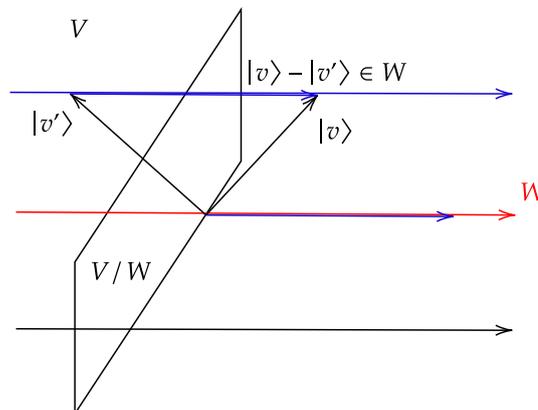


Figura 2 – Visualização do quociente  $V/W$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$(ii) T_{|\mathbf{p}\rangle} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \simeq \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle). \quad (58)$$

No ponto projetivo  $|\mathbf{p}\rangle$  considere uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear  $\phi : |\mathbf{p}\rangle \rightarrow V/|\mathbf{p}\rangle$  e uma função projetiva suave  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V)$ . Para cada  $|p\rangle \in |\mathbf{p}\rangle$  e cada representante  $|v\rangle$  de  $\phi(|p\rangle)$  defina

$$\phi(\mathbf{f}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle), \quad (2.12)$$

onde  $f$  é levantamento da função projetiva. A aplicação  $\mathbf{f} \mapsto \phi(\mathbf{f})$  será uma derivação em  $|\mathbf{p}\rangle$ , ou seja, um funcional linear das funções projetivas suaves que satisfaz a regra de Leibniz

$$\phi(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \mathbf{f}(|\mathbf{p}\rangle)\phi(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(|\mathbf{p}\rangle)\phi(\mathbf{f}), \quad (2.13)$$

sendo  $\mathbf{g} \in C^\infty(\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V)$ .

Vamos então mostrar  $\phi(\mathbf{f})$  independe da escolha de representantes  $|p\rangle$  e  $|v\rangle$ . Se  $|v'\rangle$  é outro representante de  $\phi(|p\rangle)$ , então  $|h\rangle := |v\rangle - |v'\rangle \in |\mathbf{p}\rangle$ . Daí segue que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v'\rangle) + \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|h\rangle), \quad (2.14)$$

pois diferencial<sup>2</sup>  $d_{|p\rangle} f$  é linear, isto é,  $d_{|p\rangle} f(|v\rangle) = d_{|p\rangle} f(|v'\rangle + |h\rangle) = d_{|p\rangle} f(|v'\rangle) + d_{|p\rangle} f(|h\rangle)$ .

Como  $|h\rangle \in |\mathbf{p}\rangle$ , existe  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  satisfazendo  $|h\rangle = \alpha|p\rangle$ , portanto

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|h\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f((1 + \alpha\epsilon)|p\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle) = 0, \quad (2.15)$$

pois  $f(|p\rangle) = f((1 + \alpha\epsilon)|p\rangle)$ . Desta forma concluímos que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v'\rangle), \quad (2.16)$$

ou seja, nossa definição não depende da escolha do representante de  $\phi(|p\rangle)$ . Se  $|p'\rangle$  é outro representante de  $|\mathbf{p}\rangle$ , então existe  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  satisfazendo  $|p'\rangle = \alpha|p\rangle$ . Se  $|v\rangle$  é representante de  $\phi(|p\rangle)$ , então  $|u\rangle = \alpha|v\rangle$  é representante de  $\phi(|p'\rangle)$ . Assim

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(\alpha|p\rangle + \epsilon\alpha|v\rangle) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p'\rangle + \epsilon|u\rangle), \quad (2.17)$$

ou seja, não há dependência da escolha de  $|p\rangle$  na definição de  $\phi(\mathbf{f})$ .

Repare que  $\phi$  é derivação, logo temos um mapa  $\mathbb{R}$ -linear

$$\Phi : \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle) \longrightarrow T_{|\mathbf{p}\rangle} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \quad (2.18)$$

dado por  $\Phi(\phi) = \phi$ .

Antes de prosseguirmos, vamos mostrar um outro resultado.

**Proposição 1.** Se  $\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle) = 0$  para toda  $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V)$ , então  $|v\rangle$  é paralelo a  $|p\rangle$ .

<sup>2</sup> Do cálculo,  $d_{|p\rangle} f(|v\rangle) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon|v\rangle)$  é a diferencial da função  $f$  no ponto  $|p\rangle$ .

*Demonstração.* Considere uma base  $\{|b_1\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ , com  $|b_1\rangle = |p\rangle$ . Temos que  $|v\rangle = \sum_i \alpha_i |b_i\rangle$ . Claramente, se  $|v'\rangle = \sum_{i \neq 1} \alpha_i |b_i\rangle$  então

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon |v\rangle) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon |v'\rangle). \quad (2.19)$$

Considere a função suave

$$f_i(|u\rangle) = \frac{|u_1 + u_i|^2}{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2} \quad \text{com } i = 2, \dots, n, \quad (2.20)$$

onde  $u = u_1 |b_1\rangle + \dots + u_n |b_n\rangle$ .

Para  $i = 2, \dots, n$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f_i(|p\rangle + \epsilon |v'\rangle) &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2}{1 + \epsilon^2(\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2) (1 - \epsilon^2(\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) + o(\epsilon^2)) \\ &= 2\alpha_i. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dado que  $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f_i(|p\rangle + \epsilon |v'\rangle) = 0$ , conclui-se que  $\alpha_i = 0$ . Como  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  temos que  $|v\rangle$  é paralelo a  $|p\rangle$ .  $\square$

Agora podemos provar que a aplicação  $\Phi : \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle) \rightarrow T_{|\mathbf{p}\rangle} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  é isomorfismo.

A injetividade de  $\Phi$  segue imediatamente da proposição acima. Se

$$\phi \in \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle) \quad \text{e} \quad \phi(\mathbf{f}) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} f(|p\rangle + \epsilon |v\rangle) = 0 \quad (2.22)$$

para toda  $f$  suave, onde  $|p\rangle \in |\mathbf{p}\rangle$  e  $|v\rangle$  é representante de  $\phi(|p\rangle)$ , então  $|v\rangle$  é paralelo a  $|p\rangle$ , ou seja,  $\phi(|p\rangle) = 0$  implicando  $\phi = 0$  que garante a injetividade de  $\Phi$ . Como  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle) = (n-1)\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} T_{|\mathbf{p}\rangle} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  segue que  $\Phi$  é isomorfismo.

(iii) Dado  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ ,  $V/|\mathbf{p}\rangle \simeq |\mathbf{p}^\perp\rangle$  se  $\langle p|p\rangle \neq 0$ , onde  $|p\rangle$  é representante de  $|\mathbf{p}\rangle$ .

Seja o mapa

$$\begin{aligned} \Psi : V/|\mathbf{p}\rangle &\longrightarrow |\mathbf{p}^\perp\rangle \\ [[v]] &\longmapsto \pi[p] |v\rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $|v\rangle$  é representante da classe  $[[v]]$ .

Ele é linear porque a projeção  $\pi[p]$  é linear (a forma em  $V$  é linear). Não depende da escolha de representante de  $[[v]]$  uma vez que, dados  $|v\rangle$  é representante de  $[[v]]$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , para outro representante  $|v'\rangle = |v\rangle + \alpha |p\rangle$

$$\pi[p] |v\rangle = |v\rangle - \frac{\langle v | p \rangle}{\langle p, p \rangle} |p\rangle = \pi[p] |v'\rangle, \quad (2.24)$$

pois  $\pi[p](\alpha|p\rangle) = 0$ .

Se

$$\begin{aligned}\Psi([|v\rangle]) &= \Psi([|w\rangle]) \\ \pi[p]|v\rangle &= \pi[p]|w\rangle\end{aligned}\tag{2.25}$$

então

$$|v\rangle - |w\rangle = \frac{\langle v|p\rangle}{\langle p,p\rangle}|p\rangle - \frac{\langle v|w\rangle}{\langle p,p\rangle}|p\rangle \in |\mathbf{p}\rangle,\tag{2.26}$$

logo  $[|v\rangle] = [|w\rangle]$ ,  $\Psi$  é injetora. Além disso,  $\dim_{\mathbb{R}}(V/|\mathbf{p}\rangle) = \dim_{\mathbb{R}}|\mathbf{p}^\perp\rangle = (n-1)\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ . Portanto  $\Psi$  é isomorfismo.

No nosso caso, em que a forma de  $V$  é positivo definida, não possuímos pontos isotrópicos do tipo  $\langle p|p\rangle = 0$  com  $|p\rangle \in V^\times$ . Assim

$$\text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V/|\mathbf{p}\rangle) \simeq \text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, |\mathbf{p}^\perp\rangle).\tag{2.27}$$

(iv) Tome uma  $\phi \in T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ .  $\text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, |\mathbf{p}^\perp\rangle)$  é extensível para  $\text{Lin}(|\mathbf{p}\rangle, V)$  com a propriedade de  $\phi|p\rangle \in |\mathbf{p}^\perp\rangle$ , onde  $|p\rangle$  é representante de  $|\mathbf{p}\rangle$ . Agora basta estender por zeros para uma  $\tilde{\phi} \in \text{Lin}(V, V)$  tal que

$$\tilde{\phi}|v\rangle := \phi(\pi'[p]|v\rangle + \pi[p]|v\rangle) = \phi(\pi'[p]|v\rangle),\tag{2.28}$$

como  $V = |\mathbf{p}\rangle \oplus |\mathbf{p}^\perp\rangle$ , em  $|\mathbf{p}\rangle$  sabemos atuar  $\phi$  e em  $|\mathbf{p}^\perp\rangle$  exigimos que  $\phi \circ \pi = 0$ . Logo um vetor tangente a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é uma transformação linear em  $\text{Lin}(V, V)$  tal que  $|\mathbf{p}\rangle \rightarrow |\mathbf{p}^\perp\rangle \rightarrow 0^3$ .

□

Tendo a noção de espaço tangente, ganhamos a geometria do projetivo ao definir a métrica independente de representante do jeito mais simples possível utilizando a forma de  $V$ .

**Definição 4** (Métrica de Fubini-Study). Dados  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $|p\rangle$  representante do ponto projetivo e  $\phi_1, \phi_2 \in T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , definimos a métrica

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{|\mathbf{p}\rangle}^{FS} := \frac{\langle \phi_2 p | \phi_1 p \rangle}{\langle p | p \rangle}.\tag{2.29}$$

Assim, vale notar que o espaço de estados quânticos puros visto como projetivo complexo possui métrica de Fubini-Study naturalmente.

Seguimos então com enunciados à cerca de curvas projetivas e levantamentos de curvas que irão ser centrais na discussão.

<sup>3</sup> Dado  $\phi \in T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  temos  $\phi \circ \phi = 0$ . Isto é ser tangente infinitesimalmente, é ser nulo e ter quadrado nulo, é um objeto infinitesimal algebricamente.

**Proposição 2.** Seja  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  curva suave, se  $|c\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$  é um levantamento suave de  $|\mathbf{c}\rangle$ , então

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{(\pi[c]|\dot{c}\rangle)\langle c|}{\langle c|c\rangle}. \quad (2.30)$$

*Demonstração.* Sabemos que  $\dot{\mathbf{c}} \in T_{|\mathbf{c}(t)\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V = \text{Lin}(|\mathbf{c}\rangle, |\mathbf{c}^{\perp}\rangle)$ , uma transformação linear  $\phi$  desta natureza é vista como derivação definida por

$$\phi(\mathbf{f}) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(|c\rangle + t\phi|c\rangle), \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $f$  levantamento da função projetiva e  $|c\rangle$  levantamento da curva projetiva. Basta, portanto, encontrar uma expressão deste tipo para  $\dot{\mathbf{c}}$  e identificar quem é  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}(t_0)(\mathbf{f}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \mathbf{f}(|\mathbf{c}\rangle) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(|c\rangle) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(|c(t_0)\rangle + s|\dot{c}(t_0)\rangle) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(|c(t_0)\rangle + s(\pi'[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle + \pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f\left(|c(t_0)\rangle + s\frac{\langle \dot{c}(t_0)|c(t_0)\rangle}{\langle c(t_0)|c(t_0)\rangle}|c(t_0)\rangle + s\pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle\right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

definindo  $k \equiv \frac{\langle \dot{c}(t_0)|c(t_0)\rangle}{\langle c(t_0)|c(t_0)\rangle}$  temos

$$\begin{aligned} &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f((1+ks)|c(t_0)\rangle + s\pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f\left(|c(t_0)\rangle + \frac{s}{1+ks}\pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle\right) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(|c(t_0)\rangle + s\pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle), \end{aligned} \quad (2.33)$$

por identificação

$$\phi|c(t_0)\rangle = \pi[c(t_0)]|\dot{c}(t_0)\rangle, \quad (2.34)$$

que implica o resultado.  $\square$

**Proposição 3** (Levantamento normalizado). Seja  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  curva suave. Existe um levantamento  $|c_0\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$ , chamado *levantamento normalizado*, tal que  $\langle c_0|c_0\rangle = 1$  e  $\langle c_0|\dot{c}_0\rangle = 0 \forall t \in [a, b]$ . Este levantamento é único a menos de multiplicações por complexos unitários.

*Demonstração.* Tome um levantamento  $|\tilde{c}\rangle$  da curva projetiva tal que  $\langle \tilde{c}|\tilde{c}\rangle = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{c}|\tilde{c}\rangle &= 0 \\ \langle \dot{\tilde{c}}|\tilde{c}\rangle + \langle \tilde{c}|\dot{\tilde{c}}\rangle &= 0 \rightarrow \\ \text{Re}(\langle \tilde{c}|\dot{\tilde{c}}\rangle) &= 0 \rightarrow \\ \langle \tilde{c}|\dot{\tilde{c}}\rangle &= if(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

com  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suave.

A fim de manter  $\langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = 1$  só podemos multiplicar por complexo unitário, então a única opção é multiplicar  $\tilde{c}$  por  $e^{i\varphi(t)}$  e encontrar a condição que esta fase  $\varphi$  deve satisfazer para obtermos a propriedade requerida. Desta forma

$$\begin{aligned} \langle e^{i\varphi} \tilde{c} | (e^{i\varphi} \tilde{c})' \rangle &= 0 \rightarrow \\ \langle \tilde{c} | \dot{\tilde{c}} \rangle &= -i\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} &= -f. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Basta tomar  $\varphi$  satisfazendo a equação diferencial acima, assim temos a curva  $|c_0\rangle := e^{i\varphi} |\tilde{c}\rangle$  satisfazendo as duas propriedades do enunciado.

UNICIDADE: Outro levantamento será da forma  $g(s) |c_0\rangle$ , com  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , suposto satisfazendo as propriedades do enunciado. Então, da primeira propriedade temos

$$\langle gc_0 | gc_0 \rangle = 1 \rightarrow |g|^2 = 1, \forall s. \quad (2.37)$$

Já da segunda propriedade temos

$$\langle gc_0 | (gc_0)' \rangle = 0 \rightarrow \langle gc_0 | \dot{g}c_0 + g\dot{c}_0 \rangle = 0 \rightarrow \bar{g}\dot{g} = 0 \rightarrow \dot{g} = 0, \quad (2.38)$$

o que implica  $g$  sendo uma constante unitária.

□

**Corolário 2.** Dado  $|\tilde{c}\rangle : [a, b] \rightarrow V^\times$  levantamento unitário de  $|\mathbf{c}\rangle$  tal que  $\langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = 1 \forall t \in [a, b]$ , temos que  $|c_0\rangle = \exp(i\varphi(t)) |\tilde{c}\rangle$ , com  $\dot{\varphi} = i \langle \tilde{c} | \dot{\tilde{c}} \rangle$ . Além disso, temos que um vetor tangente a uma curva projetiva  $|\mathbf{c}\rangle$  pode ser expresso em termos do levantamento  $|c_0\rangle$  como  $\dot{\mathbf{c}} = |\dot{c}_0\rangle \langle c_0|$ .

Dito isto, tome uma curva  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , faça  $\dot{\mathbf{c}}(t) \in T_{|\mathbf{c}(t)\rangle} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ . Defina  $\hat{\mathbf{c}} := \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{c}^*$  ganhando uma curva na álgebra de Lie de  $SU(V)$ ,  $\mathfrak{su}(V) = \{\phi \in \text{Lin}(V, V) \mid \text{tr } \phi = 0 \text{ e } \phi + \phi^* = 0\}$ .

**Definição 5 (Isometria Acompanhante).**  $F : [a, b] \rightarrow SU(V)$  tal que  $\dot{F}(t) = \hat{\mathbf{c}}(t)F(t)$  e  $F(a) = 1_{SU(V)}$  é chamada *isometria acompanhante* da curva  $|\mathbf{c}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ .

O nome “*acompanhante*” vem do fato que a curva  $F$  no grupo de isometrias é um levantamento da curva  $|\mathbf{c}\rangle$  do projetivo. A curva do projetivo dá origem a uma curva na álgebra de Lie, que por sua vez dá uma curva no grupo e para cada ponto da curva  $|\mathbf{c}\rangle$  temos uma isometria  $F$  correspondente em  $SU(V)$ .

**Proposição 4.**  $F(t) |c_0(a)\rangle = |c_0(t)\rangle \forall t \in [a, b]$  onde  $|c_0\rangle$  é o levantamento normalizado de  $|\mathbf{c}\rangle$ .

*Demonstração.*  $SU(V)$  age em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  da seguinte forma: dado  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  e  $I \in SU(V)$ ,  $I|\mathbf{p}\rangle := I|p\rangle$  com  $|p\rangle \in V^{\times}$  representante do ponto projetivo. Lembrando que  $SU(V) \subset \text{Lin}(V, V) \supset \mathfrak{su}(V)$

Observe que  $|c_0\rangle : [a, b] \rightarrow V^{\times}$  é solução da equação diferencial

$$\begin{cases} |\dot{y}(t)\rangle &= \langle y(t) | c_0 \rangle |\dot{c}_0\rangle - \langle y(t) | \dot{c}_0 \rangle |c_0\rangle, \\ |y(a)\rangle &= |c_0(a)\rangle. \end{cases} \quad (2.39)$$

Agora basta verificar que  $(F(t) |c_0(a)\rangle)'$  satisfaz a mesma equação diferencial. Vale notar que se você tem um vetor tangente  $\phi \in T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  representado por  $|v\rangle\langle p|$ , com  $|v\rangle \in |\mathbf{p}^{\perp}\rangle$ , o seu dual é dado por  $(|v\rangle\langle p|)^* = |p\rangle\langle v|$ <sup>4</sup>. Identificando  $F(t) |c_0(a)\rangle \equiv |\alpha(t)\rangle$ , temos

$$|\dot{\alpha}\rangle = \dot{F}(|c_0(a)\rangle) = \hat{c}F(|c_0(a)\rangle) = (\dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}^*) |\alpha\rangle. \quad (2.40)$$

Logo

$$\begin{aligned} |\dot{\alpha}\rangle &= (|\dot{c}_0\rangle\langle c_0| - |c_0\rangle\langle \dot{c}_0|) |\alpha\rangle \\ |\dot{\alpha}\rangle &= \langle \alpha | c_0 \rangle |\dot{c}_0\rangle - \langle \alpha | \dot{c}_0 \rangle |c_0\rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

□

## 2.2 Heurística sobre fibrados

Aqui iremos fazer um desvio de rota da nossa apresentação do formalismo de geometrias clássicas para dar uma rápida e simplificada conceituação sobre fibrados, pois o conhecimento desta estrutura se faz necessário para arrematarmos este capítulo e sabemos que este conceito pode não ser familiar para muitos colegas físicos.

Fibrados são objetos ricos e até muito complicados dependendo da abordagem, (59–61) visto que são feitos de muitos ingredientes. Genericamente, um fibrado usa uma variedade base para parametrizar uma família de outras variedades que vão ser chamadas fibras, Fig. 3.

<sup>4</sup> Esta é de fato a expressão para o dual, pois uma transformação dual é caracterizada pela relação  $\langle v | \varphi(u)\rangle = \langle \varphi^*(v) | u\rangle$ , assim  $\langle v | \langle p | u \rangle v\rangle = \langle p | u \rangle \langle v | v\rangle$  e  $\langle \langle v | v \rangle p | u \rangle = \langle p | u \rangle \langle v | v\rangle$ .

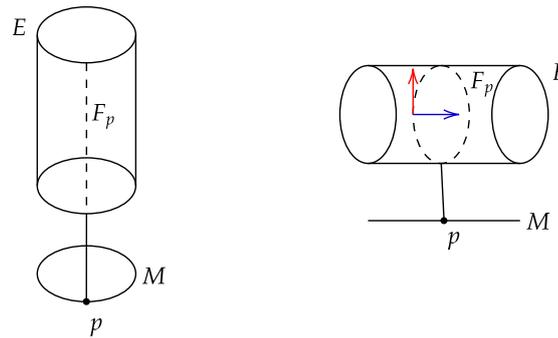


Figura 3 – Do lado esquerdo, temos uma base  $M$  sendo uma circunferência parametrizando fibras  $F_p$  que são retas cuja colagem forma o espaço total  $E$  com a topologia de um cilindro. Do lado direito, temos uma base  $M$  sendo uma reta parametrizando circunferências  $F_p$  cuja colagem também forma um cilindro como espaço total  $E$ . Note ainda na imagem da direita que destacamos em vermelho uma direção tangente à fibra e outra direção complementar à fibra. Andar na direção tangente à fibra faz com que você nunca saia dela, caminhar na direção complementar leva inevitavelmente a mudança de fibra.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Queremos então, de uma forma razoável, associar a cada ponto da base uma cópia da fibra. O jeito mais simples de se fazer isso é pelo *produto cartesiano* formando o chamado *fibrado trivial*

$$M \times F = \{(p, x) \mid p \in M \text{ e } x \in F\} = \{(p, F), p \in M\}. \quad (2.42)$$

Portanto, a inspiração para a definição de fibrado é o produto cartesiano, pensar esta construção como uma maneira de parametrizar um dos fatores do produto por pontos do outro fator<sup>5</sup>.

Para generalizar a ideia da forma mais simples possível basta usar o produto cartesiano como modelo local. Dada a quadra  $(E, \pi, M, F)$ , onde  $E$  é o chamado *espaço total*,  $\pi$  *projeção ou sobrejeção suave*<sup>6</sup>,  $M$  *base* e  $F$  *fibras*, pedimos que esta 4-upla é localmente modelada pelo produto cartesiano de abertos de  $M$  e  $F$ . O espaço total  $E$  surge como colagem de produtos cartesianos locais de  $M$  por  $F$ .

Formalmente, aqui vamos pedir  $\pi$  suave;  $E$ ,  $M$  e  $F$  variedades suaves e  $E$  localmente trivial, ou seja,  $\forall p \in M$ ,  $\exists$  um aberto  $U \ni p$  tal que  $\phi : \pi^{-1}(U) = E|_U \xrightarrow{\sim} U \times F$ , onde  $\phi$

<sup>5</sup> Note que no caso do produto cartesiano existem duas maneiras equivalentes de pensar quem parametriza e quem é parametrizado. É exatamente o que acontece na Fig. 3, logo aquele fibrado, da maneira que foi apresentado, é trivial.

<sup>6</sup> Poderíamos generalizar mais pedindo  $E$ ,  $M$  e  $F$  sendo espaços topológicos e  $\pi$  contínua. Porém esse objeto seria, no mínimo, pouco prático para nossa discussão além de não classificável.

faz com que o diagrama da Fig. 4 abaixo comute, ou seja,  $\phi$  preserva fibras. Denotamos o fibrado por  $\pi : E \rightarrow M$

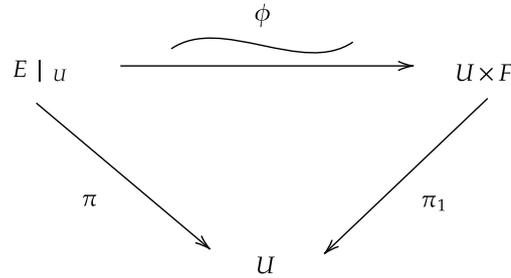


Figura 4 – Diagrama fibrado, onde  $\pi_1$  representa projeção do primeiro fator do produto.

Fonte: Elaborada pelo autor.

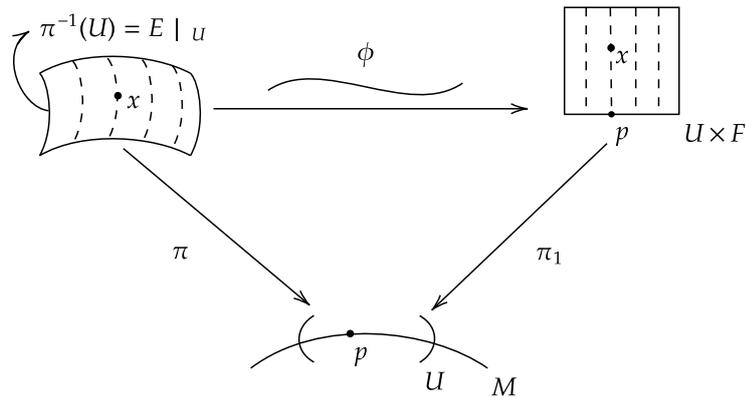


Figura 5 – Diagrama fibrado destacando a trivialização local promovida pela função  $\Phi$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os fibrados de diferentes naturezas vão surgir quando pedirmos das fibras maior estrutura, como, por exemplo, estrutura de espaço vetorial ou grupos de Lie. No primeiro caso, ganhamos os *fibrados vetoriais*, que tem como grande representante o *fibrado tangente* à uma variedade suave. Já no segundo, ganhamos os chamados *fibrados principais*, estrutura interessa à isometria acompanhante.

*Exemplo 1* (Fibrado tautológico sobre o projetivo). Podemos dizer que o fibrado tautológico é o fibrado cujas fibras são os espaços que dão origem aos pontos sobre os quais a fibra está descrita. No caso de  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , a fibra é a reta complexa no espaço vetorial. Este fibrado tem funções de transição bem definidas obtidas via coordenadas homogêneas.

Agora é interessante falarmos sobre a noção de *conexões em fibrados*. O fibrado também tem o seu espaço tangente  $T_x E$  com  $x \in E$  que, naturalmente, deve apresentar dois tipos de direções especiais, como visto na Fig. 3.

- (i) Direção tangentes à fibra: andar por esta direção faz com que você não saia da fibra  $F_x$  que passa pelo ponto  $x$ .
- (ii) Direções complementares: andar por estas direções faz com que você mude de fibras.

A direção tangente à fibra é sempre bem definida, pois basta tomarmos o núcleo da diferencial  $d_x \pi$  da sobrejeção suave  $\pi$  no ponto.  $\text{Ker}(d_x \pi)$  são os vetores tangentes ao espaço total do fibrado que projetam no vetor nulo do fibrado tangente a base, ou seja, não correspondem a movimentos em  $M$  só andando na fibra. Este é o chamado *espaço vertical*  $V_x E := \text{Ker}(d_x \pi)$ . Note que dada uma curva  $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E$  com  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = v_x$ , então

$$d_x \pi(v_x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi \circ \gamma) = 0 \quad (2.43)$$

caracteriza uma curva que nas proximidades de  $x$  está totalmente contida na fibra.

Agora vem o desejo de quebrar  $T_x E$  em uma parte vertical e outra *horizontal* à fibras. O ponto é que não temos uma maneira natural de escolher esta direção horizontal  $H_x E$ . Posso pegar qualquer direção complementar para quebrar o espaço na soma direta  $T_x E = V_x E \oplus H_x E$ . A escolha desta direção horizontal é chamada de *conexão no fibrado*. Escolher  $H_x E$  em cada ponto  $x \in E$  de modo que a escolha varia suavemente com o ponto. Desta forma se  $X(x)$  é campo suave em  $T_x E$ , então  $X(x) = X^V(x) + X^H(x)$  com  $X^V(x) \in V_x E$  e  $X^H(x) \in H_x E$ .

A pergunta natural que segue é: afinal, por que chamamos esta escolha de conexão? Pois, esta escolha dá origem ao *transporte paralelo* neste contexto mais abstrato que o nível de variedades suaves. Dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  na base quero  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow E$  tal que  $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ . Em geral, existem infinitos levantamentos  $\tilde{\gamma}(t)$  que satisfazem a condição, porém, com a escolha da conexão fazemos um pedido adicional que os vetores tangentes ao levantamento sejam sempre horizontais,  $\tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)} E$ . Isto garante a unicidade deste levantamento pelo Teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias<sup>7</sup>.

*Exemplo 2* (Conexão afim em  $TM$ ). No caso do fibrado tangente  $TM$  de uma variedade suave  $M$  o levantamento horizontal é o próprio transporte paralelo ao longo de curvas, ou seja, a escolha da conexão afim  $\nabla$  é equivalente a escolha de  $H_x E$ .

<sup>7</sup> Em fibrados muito complicados, onde  $E$  não é completo e/ou apresenta “buracos”, as soluções das equações diferenciais podem não existir em trechos do levantamento. Daí vem a preocupação da conexão ser completa no fibrado. Porém, no nosso caso de interesse isso não será um problema.

Apresentadas essas ideias basilares acerca de fibrados e suas conexões, podemos especificar para o objeto de valor para nossa apresentação. Seguimos para uma rápida descrição dos fibrados principais. Note que não iremos apresentar demonstrações das afirmações feitas à seguir, afinal esta seção é uma mera exposição para contextualizar o leitor e tais provas seriam puramente técnicas e fora do assunto de geometrias clássicas, não acrescentando globalmente ao nosso trabalho.

### 2.2.1 Fibrado Principal

Chamamos de *G-variedades* variedades que um grupo de Lie  $G$  age à direita. Sejam  $M, N$   $G$ -variedades, uma função  $f : M \rightarrow N$  é *equivariante à direita* se  $f(xg) = f(x)g$  para todo  $g \in G$

**Definição 6.**  $\pi : P \rightarrow M$ , denotado por  $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ , com fibra  $G$  indentificada com um grupo de Lie, é um *fibrado principal* se  $G$  age livremente em  $P$  pela direita e  $\phi_U : \pi^{-1}(U) \subset P \rightarrow U \times G$  é equivariante à direita

$$(x, g)h := (x, gh) \begin{cases} \phi_U(p) = (\pi(p), g) \\ \phi_U(ph) = (\pi(p), gh) \end{cases} \quad g, h \in G \text{ e } p \in P, \quad (2.44)$$

com  $U$  aberto de  $M$ .

A questão central da definição de fibrado principal são as trivializações locais. Temos o grupo  $G \curvearrowright P$  agindo livremente<sup>8</sup> à direita e preservando fibras, ou seja,  $G_x = \pi^{-1}(x) \ni p \rightarrow pg \in \pi^{-1}(x)$  com  $g \in G$  e  $x \in M$ . Dado que a variedade base é recoberta por abertos,  $M = \bigcup_i U_i$ , o diagrama da Fig. 6 comuta de forma que  $\phi_{U_i}$  preserva fibras, logo  $\phi_{U_i}$  é difeomorfismo que manda fibra em fibra do produto  $U_i \times G$ . Em  $U_i \times G$  o grupo age naturalmente à direita. Como a ação de  $G$  preserva fibras logo  $pg \in G_x$  também irá, assim  $\phi_{U_i}$  é  $G$ -equivariante,  $\phi_{U_i}(pg) = \phi_{U_i}(p)g$ . Em palavras, na trivialização local a ação de  $G$  na variedade comuta com a ação na trivialização.

<sup>8</sup> Não existem pontos fixos sob a ação de  $G$  a não ser a identidade do grupo  $1_G$ .

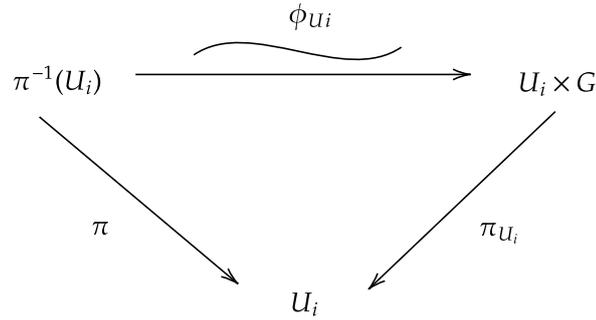


Figura 6 – Diagrama fibrado principal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclusão, fibrados principais são formados por:

- i) sobrejeção suave  $\pi : P \rightarrow M$ .
- ii) ação à direita de um grupo de Lie  $G \curvearrowright P$  livre que preserva fibras.
- iii)  $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$  localmente trivial com trivializações  $G$ -equivariantes.

Vamos então finalizar essa seção sobre fibrados mostrando o que significa fazer uma escolha de direção horizontal a um fibrado principal.

**Proposição 5** (Campo fundamental). Seja  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie<sup>9</sup> de  $G$ , dado  $v \in \mathfrak{g}$ ,  $p \in P$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  subgrupo uniparamétrico tal que  $\alpha(0) = 1_G$ ,  $\dot{\alpha}(0) = v$ ,

$$A^v(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p\alpha(t) \quad (2.45)$$

é campo fundamental associado a  $v \in \mathfrak{g}$ . Além disso,  $A^v$  é suave e vertical, ou seja, pertence ao  $\text{Ker}(d_p\pi) := V_pP$ .

Dada a escolha de uma distribuição horizontal  $H_pP$  suave invariante à direita; ou seja, definindo  $r_g : P \rightarrow P$  tal que  $p \mapsto pg$  implica  $(dr_g)_p(H_pP) = H_{pg}P$ ; com a propriedade de que  $T_pP = V_pP \oplus H_pP$  definimos uma *1-forma*  $\omega_p$  com valores em  $\mathfrak{g}$  com as seguintes propriedades:

<sup>9</sup> A álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$  é o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda pela ação do grupo, que por sua vez é isomorfo a  $T_{1_G}G$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , junto com os colchetes de Lie fazendo o papel do produto da álgebra.

1.  $\omega_p(A^v(p)) = v \in \mathfrak{g}$ .
2.  $r_g^* \omega = (\text{Ad } g^{-1}) \omega$ .<sup>10</sup>
3.  $\omega(H)(p) = 0$ , com  $H \in H_p P$ .

**Definição 7** (Conexão de Ehresmann). Uma conexão de Ehresmann em  $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  é uma 1-forma  $\omega$  com valores em  $\mathfrak{g}$  satisfazendo as propriedades acima.

Com isso temos todos os conceitos necessários no que tange o assunto fibrados para introduzir o fibrado natural que esta associado a isometria acompanhante.

### 2.3 Fibrado da isometria acompanhante

Segue um último ingrediente antes definirmos o fibrado natural da isometria acompanhante.

**Definição 8** (Forma de Killing). Em  $U(V)$  ou  $SU(V)$  existe uma aplicação  $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ , chamada *forma de Killing*, tal que

$$B(\phi_1, \phi_2) := \text{Tr}(\phi_1 \circ \phi_2) \quad (2.46)$$

com  $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{g}$ .

Agora sim, temos tudo que precisamos para apresentar a nossa estrutura de interesse.

**Definição 9** (Fibrado da isometria acompanhante). Dado  $|c(a)\rangle = |\mathfrak{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , temos que  $SU(V)/\text{Stab}(|\mathfrak{p}\rangle) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ . Desta forma, temos um *fibrado principal*,  $\text{Stab}(|\mathfrak{p}\rangle) \hookrightarrow SU(V) \xrightarrow{\pi} SU(V)/\text{Stab}(|\mathfrak{p}\rangle) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , esquematizado na Fig. 7. O levantamento  $F(t)$  da curva  $|c\rangle$  no fibrado vai ser declarado horizontal definindo assim uma *conexão de Ehresmann*. De fato, esta conexão vem da forma de Killing em  $SU(V)$ .

<sup>10</sup> Ad denota a representação adjunta, um homomorfismo de grupos  $G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ . Dado  $g \in G$  temos a função  $\text{conj}_g : G \rightarrow G$  tal que  $h \mapsto ghg^{-1}$ , Ad manda  $g \mapsto (d\text{conj}_g)_{1_G}$ , é invariante à direita e  $\text{Ad } g^{-1} = (\text{Ad } g)^{-1}$ .

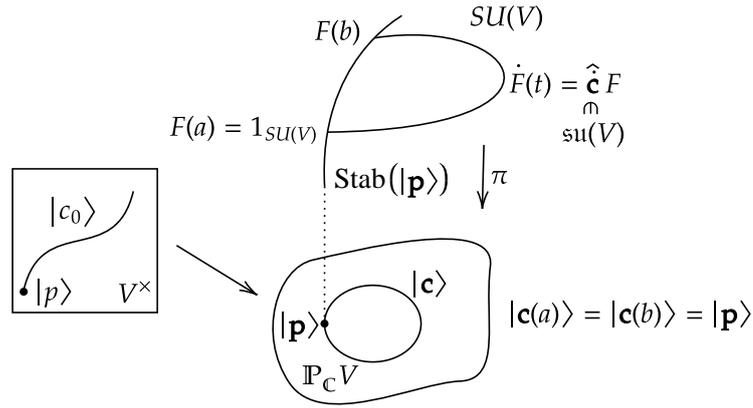


Figura 7 – Representação do fibrado da isometria acompanhante. No caso, temos uma curva fechada em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  com  $|c(a)\rangle = |c(b)\rangle = |p\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  e seu levantamento horizontal  $F$  em  $SU(V)$  que inicia na identidade da fibra  $\pi^{-1}(|p\rangle) = \text{Stab}(|p\rangle)$  sobre o ponto projetivo inicial e termina na mesma fibra em  $F(b)$ . Em  $V^\times$  temos o levantamento normalizado  $|c_0\rangle$ , não necessariamente fechado, iniciando no representante  $|p\rangle$  do ponto projetivo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Afim de finalizar o capítulo com esmero basta provarmos que, de fato, a curva da isometria acompanhante  $F(t)$  é levantamento horizontal da curva  $|c\rangle$  no projetivo com respeito à forma de Killing, tendo seus vetores tangentes ortogonais à fibras no sentido da forma Killing. Vale salientar que esta prova foi feita exclusivamente para esta tese.

**Proposição 6.** Dados  $q \in SU(V)$  e  $|p\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ ,  $T_q SU(V) = qT_1 \text{Stab}(|p\rangle) \oplus q(T_1 \text{Stab}(|p\rangle))^\perp := V_q \oplus H_q$  com respeito a forma de Killing é conexão no fibrado  $SU(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ .

*Demonstração.* Dado  $|p\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , considere  $\text{Stab}(|p\rangle) \leq SU(V)$ . Como a ação de  $SU(V)$  é transitiva, temos que  $SU(V)/\text{Stab}(|p\rangle) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \simeq \mathcal{O}(|p\rangle)$ , onde  $\mathcal{O}(|p\rangle)$  é o conjunto de órbitas do ponto  $|p\rangle$ . Assim ganhamos o fibrado  $\text{Stab}(|p\rangle) \hookrightarrow SU(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ .

Tome  $|q\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  e faça o  $\widehat{T_{|q}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V} \subset \mathfrak{su}(V)$  pegando cada elemento  $\phi \in T_{|q}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  e mandando para  $\phi - \phi^*$ .

Vamos primeiro provar que  $\widehat{T_{|q}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V} \subset (T_1 \text{Stab}(|q\rangle))^\perp$ . Dado um representante  $|q\rangle$ , escrevemos  $\phi = |v\rangle\langle q|$ , com  $|v\rangle \in |q^\perp$ , assim  $\hat{\phi} = |v\rangle\langle q| - |q\rangle\langle v|$ . Dado  $a \in T_1 \text{Stab}(|q\rangle)$

$$\begin{aligned} B(\hat{\phi}, a) &= \text{tr}(a \circ \hat{\phi}) = \text{tr}(a \circ [|v\rangle\langle q| - |q\rangle\langle v|]) \\ &= \text{tr}(a|v\rangle\langle q| - a|q\rangle\langle v|) = \langle q|a(v)\rangle - \langle v|a(q)\rangle. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como  $a \in \mathfrak{su}(V)$  então  $a + a^* = 0$ , logo  $\langle q|a(v)\rangle = \langle a^*(q)|v\rangle = -\langle a(q)|v\rangle$ . Dado que  $a \in \text{Lin}(V, V)$ , basta mostrar que  $a|q\rangle = 0$ . Se  $a$  é tangente ao  $\text{Stab}(|q\rangle)$ , existe uma curva

$\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \text{Stab}(|\mathbf{q}\rangle)$  tal que  $\gamma(0) = 1$  e  $\gamma'(0) = a$ , mas se eu fizer a curva na variedade ela fixa o ponto  $|\mathbf{q}\rangle$ , ou seja,  $\gamma(t)|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{q}\rangle \forall t$  que implica  $(\gamma(t)|\mathbf{q}\rangle)' = \gamma'(t)|\mathbf{q}\rangle = 0$ . Como  $|\mathbf{q}\rangle \neq 0$  basta tomar  $t = 0$  e temos  $\gamma'(0)|\mathbf{q}\rangle = a|\mathbf{q}\rangle = 0$ , logo

$$B(\hat{\phi}, a) = 0. \quad (2.48)$$

A questão que fica é: Temos a fibra passando pela  $1_{SU(V)}$  onde já sabemos que se levantarmos uma curva temos ortogonalidade Killing, pegando outro ponto a ortogonalidade é mantida?

Tome a curva  $|\mathbf{c}\rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  com  $|\mathbf{c}(a)\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ . Sabemos da definição de isometria acompanhante que  $\dot{F}(s) = \hat{\mathbf{c}}F(s)$  que implica  $\dot{F}(s) \in \left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)\right)^{\perp_B} F(s)$ , pois  $\hat{\mathbf{c}} \in \widehat{T_{|\mathbf{p}\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V} \subset \left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)\right)^{\perp_B}$  e fazemos um deslocamento aplicando  $F(s)$ ,  $\forall s$ . Entretanto,  $F(s)|\mathbf{c}(a)\rangle = F(s)|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{c}(s)\rangle$  logo

$$\text{Stab}(|\mathbf{c}(s)\rangle) = F(s)\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)F^{-1}(s) \rightarrow (\text{Stab}(|\mathbf{c}(s)\rangle))F(s) = F(s)\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle). \quad (2.49)$$

De uma outra forma, dado  $g \in \text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)$  temos

$$(F(s)gF^{-1}(s))|\mathbf{c}(s)\rangle = F(s)g|\mathbf{p}\rangle = F(s)|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{c}(s)\rangle \rightarrow FgF^{-1} \in \text{Stab}(|\mathbf{c}(s)\rangle). \quad (2.50)$$

Portanto  $\dot{F}(s) \in \left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{c}(s)\rangle)\right)^{\perp_B} F(s) = F(s)\left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)\right)^{\perp_B}$  tal que  $F(s) \in SU(V) \forall s$ . Ou seja, no levantamento  $F(s)$  os vetores tangentes a curva são ortogonais as fibras no sentido da forma de Killing  $\forall s$ <sup>11</sup>.  $\square$

No próximo capítulo, veremos como o formalismo se comporta diante da Física de sistemas quânticos descritos por estados puros e transformações unitárias, que culminará na nossa definição do critério adiabático geométrico e sua aplicação para os problema da ressonância.

<sup>11</sup> Sempre iniciamos o levantamento  $F(s)$  pela  $1_{SU(V)}$ . Na identidade temos também a fibra  $\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)$ . A forma de Killing zera na identidade onde caracterizamos  $T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)$  e  $\dot{F}(0) \in \left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)\right)^{\perp_B}$ . Depois só deslocamos  $\left(T_1\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle)\right)^{\perp_B}$  ao longo do levantamento pela conjugação por  $F(s)$ .

### 3 RESULTADO

Neste capítulo iremos olhar o espaço de estados quânticos puros sob o holofote das geometrias clássicas, ou seja, colocar em prática o formalismo matemático no contexto físico. Inicialmente iremos proceder com uma abordagem geral, tomando o espaço de estados como um espaço vetorial de dimensão finita com um Hamiltoniano dependente do tempo diagonalizável sendo responsável pela dinâmica. Tomamos um autoestado do Hamiltoniano como o levantamento unitário das geometrias clássicas, podendo assim construir as entradas da matriz  $\hat{c}$  associada e, conseqüentemente, resolver a equação para a isometria acompanhante nestas condições. A partir da análise das entradas da matriz  $\hat{c}$  começaremos a discussão que levará ao enunciado do nosso critério geométrico para adiabaticidade a partir da isometria acompanhante. Apresentaremos a expressão do critério e vamos falar da inspiração para sua definição. Por fim, restritos ao espaço  $V = \mathbb{C}^2$ , espaço de um q-bit, iremos apresentar dois exemplos em que aplicamos nosso critério para Hamiltonianos que apresentam regime de ressonância, observando o bom funcionamento do mesmo dentro deste regime.

#### 3.1 Entes geométricos clássicos no contexto físico

Vamos olhar para o espaço de estados quânticos puros como um espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão finita munido de forma hermitiana não-degenerada  $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  positivo definida apresentando as mesmas propriedades vistas na Eq. (2.1).

Dado um Hamiltoniano dependente do tempo  $H_t$ , operador contínuo no parâmetro num espaço de dimensão finita, sabemos que ele é diagonalizável para todo instante de tempo satisfazendo a equação de autovalores

$$H_t |\psi_n(t)\rangle = E_n(t) |\psi_n(t)\rangle \text{ onde } \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{n,m}, \forall t, \quad (3.1)$$

com  $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1,\dots,\dim_{\mathbb{C}} V}$  conjunto de vetores complexos de  $V$  que diagonaliza o operador Hamiltoniano e  $E_n(t) < E_{n+1}(t) \forall t, n$ .

A princípio, queremos calcular a matriz de  $F$  associada a apenas um dos autoestados do Hamiltoniano visto como levantamento de uma curva projetiva. Vamos então fixar o levantamento unitário como o  $n$ -ésimo autoestado do Hamiltoniano, ou seja,

$$|\tilde{c}\rangle = |\psi_n\rangle. \quad (3.2)$$

Assim, temos nosso levantamento normalizado

$$|c_0\rangle = \exp\left(-\int_0^t \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle dt'\right) |\psi_n\rangle \quad (3.3)$$

e sua derivada em relação ao parâmetro

$$|\dot{c}_0\rangle = \exp\left(-\int_0^t \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle dt'\right) (-\langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle + |\dot{\psi}_n\rangle). \quad (3.4)$$

Note que a fase de  $|c_0\rangle$  tem a mesma expressão do termo que irá resultar na fase de Berry quando evoluímos ciclicamente nosso Hamiltoniano no tempo. É dada a devida atenção a este fato no Apêndice A.

Dado que possuímos a forma explícita do levantamento  $|c_0\rangle$ , podemos calcular

$$\dot{\mathbf{c}} = |\dot{c}_0\rangle \langle c_0| = (-\langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle + |\dot{\psi}_n\rangle) \langle \psi_n| \quad (3.5)$$

e

$$\dot{\mathbf{c}}^* = |c_0\rangle \langle \dot{c}_0| = \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + |\psi_n\rangle \langle \dot{\psi}_n|, \quad (3.6)$$

logo

$$\hat{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}^* = (|\dot{\psi}_n\rangle - 2\langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle) \langle \psi_n| - |\psi_n\rangle \langle \dot{\psi}_n|. \quad (3.7)$$

Vamos agora calcular as entradas da matriz  $\hat{\mathbf{c}}$  na base  $\{|\psi_n\rangle\}$ . Para isso aplicamos  $\hat{\mathbf{c}}$ , fixo  $|\psi_n\rangle$ , a um elemento  $|\psi_a\rangle$  qualquer da base, obtendo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}}|\psi_a\rangle &= \langle \psi_a | \psi_n \rangle \left( |\dot{\psi}_n\rangle + 2\langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle \right) - \langle \psi_a | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle = \\ &= \begin{cases} |\dot{\psi}_a\rangle - \langle \psi_a | \dot{\psi}_a \rangle |\psi_a\rangle & \text{se } n = a, \\ \langle \psi_a | \dot{\psi}_n \rangle |\psi_n\rangle & \text{se } n \neq a. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora fazemos  $\hat{\mathbf{c}}|\psi_a\rangle$  argumento do funcional linear  $\langle \psi_b|$  de um vetor qualquer da base, obtendo

$$\langle \psi_b | \hat{\mathbf{c}}(\psi_a) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n = a = b, \\ -\langle \dot{\psi}_a | \psi_b \rangle & \text{se } n = a \text{ e } a \neq b, \\ \langle \psi_a | \dot{\psi}_b \rangle & \text{se } n \neq a \text{ e } b = n, \\ 0 & \text{se } n \neq a \text{ e } b \neq n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Em outras palavras, a matriz de  $\hat{\mathbf{c}}$ , fixo  $|\psi_n\rangle$ , na base  $\{|\psi_n\rangle\}$  se escreve como

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} & -\langle \dot{\psi}_n | \psi_1 \rangle & & & & \\ & -\langle \dot{\psi}_n | \psi_2 \rangle & & & & \\ & \vdots & & & & \\ \langle \psi_1 | \dot{\psi}_n \rangle & \langle \psi_2 | \dot{\psi}_n \rangle & \dots & 0 & \langle \psi_{n+1} | \dot{\psi}_n \rangle & \dots \\ & & & -\langle \dot{\psi}_n | \psi_{n+1} \rangle & & \\ & & & \vdots & & \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Sendo  $\dot{F}(t) = \hat{\mathbf{c}}(t)F(t)$ , com  $[\hat{\mathbf{c}}(t), \hat{\mathbf{c}}(t')] \neq 0$ , contruímos a solução através de ordenamento temporal de sucessivas evoluções infinitesimais,

$$F(t) = \left(\overleftarrow{T} e^{\int \hat{\mathbf{c}}}\right) F(t_0), \quad (3.11)$$

onde  $\overleftarrow{T} e^{\int \hat{c}} := \prod_i e^{dt \hat{c}(t_i)}$  com  $t_{i+1} = t_i + dt$  e  $dt$  incremento infinitesimal de tempo<sup>1</sup>.

Note que a matriz de  $\hat{c}$  na Eq. (3.10) só contém termos do tipo  $\langle \psi_n | \dot{\psi}_m \rangle$  com  $n \neq m$ . Pelo Cor. 1, em regime adiabático temos que  $\hat{c}$  tende a matriz nula, logo,  $F$  tende a ficar numa vizinhança muito próxima da identidade do grupo durante toda a evolução no tempo  $t$ . Esta foi a constatação que deu origem ao embrião da ideia para a formulação do critério geométrico para adiabaticidade.

Seguiremos então definindo a forma final do nosso critério e em seguida faremos uma exposição de como partindo do embrião chegamos a sua versão última.

### 3.2 O critério

**Critério 7** (Critério geométrico de adiabaticidade a partir da isometria acompanhante). Dado um espaço vetorial complexo  $V$  finito munido de forma hermitiana positivo definida e o Hamiltoniano  $H_t$ , tomamos a curva  $|\Psi(t)\rangle$  em  $V$  que satisfaz a equação de Schrödinger e construímos a isometria acompanhante  $F(t)$  associada a ela. Podemos dizer que temos um regime adiabático durante todo o tempo de evolução se o quantificador

$$C := \max_t \left[ 1 - \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}} V} \sum_n |\langle \psi_n(t) | F | \psi_n(t_0) \rangle|^2 \right] \approx 0, \quad (3.14)$$

onde  $C \in [0, 1]$ .

Falando sobre a elaboração deste quantificador. Graças a intuição vinda da análise das entradas da matriz na Eq. (3.10) e a representação pictórica do fibrado na Fig. 7 concluímos que em regime adiabático devemos ter a matriz  $F$  nas vizinhanças da matriz identidade do grupo de isometrias durante toda a evolução do estado. Estabelecemos este formato do critério geométrico transpondo esta ideia para o nível do espaço vetorial<sup>2</sup>, nível que todos os critérios da literatura se apresentam.

Inspirados pela Prop. 4 e pela Def. 1, é suficiente para garantir evolução adiabática que<sup>3</sup>

$$\langle \psi_n(t) | F | \psi_n(t_0) \rangle \approx 1. \quad (3.15)$$

<sup>1</sup> Se  $dt$  é incremento infinitesimal de tempo, pela Def. 5, observe que

$$F(t + dt) = (1 + dt \hat{c}(t)) F(t) \approx e^{dt \hat{c}(t)} F(t). \quad (3.12)$$

Como

$$F(t + 2dt) = (1 + dt \hat{c}(t + dt)) F(t + dt) \approx e^{dt \hat{c}(t+dt)} e^{dt \hat{c}(t)} F(t), \quad (3.13)$$

e assim sucessivamente, logo temos  $F(t) = (\overleftarrow{T} e^{\int \hat{c}}) F(t_0)$ .

<sup>2</sup> Agradecemos ao Professor Frederico B. de Brito por sua imensa colaboração neste ponto.

<sup>3</sup> Aqui vale mencionar a possibilidade de unirmos as propriedades da matriz  $F$  com o conteúdo apresentado no artigo (62), que separa a evolução do estado entre a holonomia e operador dinâmico, podendo identificar na evolução a isometria acompanhante com o operador dinâmico e a holonomia com a fase que acompanha a curva normalizada  $|c_0\rangle$ .

Dado que conhecemos da literatura, apresentada no Cap. 1, que critérios em geral tem formato de distâncias entre projetores associados as evoluções real e ideal do sistema, por analogia nosso critério tem o 1 na Eq. (3.14) fazendo o papel da condição ideal e o termo da Eq. (3.15) fazendo o papel da condição real. Isso permite transpor a nível de espaço vetorial a noção de distância entre as matrizes  $F$  e  $1_{SU(V)}$ . O fato da isometria acompanhante estar na vizinhança da identidade durante todo tempo de evolução dinâmica, implicando adiabaticidade, se reflete pela maximização em  $t$  ser muito próxima de zero.

Nosso critério envolve apenas a matriz  $F$  explicitamente, que vem da geometria natural ao nosso problema, e uma noção físico-geométrica de proximidade que regime adiabático proporciona. A matriz  $F$  implicitamente, via  $\hat{c}$ , está relacionada a termos do tipo  $\langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$  com  $m \neq n$  que por sua vez envolvem a primeira derivada do Hamiltoniano e o inverso do gap entre as respectivas autoenergias, como visto na Eq. (1.10), mostrando uma proximidade do nosso critério com o Crit. 1.

Como  $F$  “acompanha” a curva de Schrödinger podemos dizer que nosso critério carrega a história da evolução através da matriz da isometria acompanhante. Veremos na Sec. 3.3 que ele funciona em qualquer regime da dinâmica, inclusive na ressonância. Apresentamos nosso critério com base em um quantificador, sendo que se ele apresentar uma resposta próxima de 0 é sinal que a adiabaticidade foi válida durante o tempo que durou a dinâmica, já se apresentar resposta próxima de 1 é sinal que houveram transições pelo caminho.

É importante destacar que se quisermos saber quais instantes de tempo em que houveram transições durante a evolução basta retirar a maximização em  $t$  na Eq. (3.14) e aplicar o quantificador como função do tempo, podendo ter acesso aos instantes que as transições se mostram mais propensas a ocorrer. Neste sentido, podemos dizer que com pequenas modificações, o quantificador funciona também instantaneamente. Isso se deve ao fato dele depender de poucos ingredientes. Sua expressão só depende da existência de uma curva no espaço de estados seguindo a dinâmica de Schrödinger, suficientemente regular para satisfazer os enunciados do formalismo matemático, e uma intuição geométrica de distância proporcionada pela própria geometria dos espaços que trabalhamos. Daí vem sua versatilidade de poder servir para critério local ou global no tempo de evolução.

Nos resta agora testar o critério num cenário com Hamiltonianos específicos e observar seu comportamento.

### 3.3 2 exemplos paradigmáticos

A fim de trazer a aplicação do nosso critério em problemas de interesse físico concreto, vamos trabalhar com o espaço vetorial  $V = \mathbb{C}^2$ , ou seja, vamos tratar de espaços de um q-bit. Sejam  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  as matrizes de Pauli, tomamos um primeiro Hamiltoniano

de dois níveis (42)

$$H_t = -\frac{\omega_0}{2}\sigma_z - \frac{\lambda}{2}\sin(\omega t)\sigma_x, \quad (3.16)$$

com autoenergias e autoestados da forma

$$E_{0,1}(t) = \mp \frac{1}{2}\Omega \text{ e } |\psi_{0,1}(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^\pm \\ \pm\alpha^\mp \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + 4\lambda^2 \sin^2(\omega t)}$  e  $\alpha^\pm = \sqrt{(\Omega \pm \omega_0)/2\Omega}$  coordenadas na base canônica de  $V$ . Note que para este Hamiltoniano o *gap* entre as autoenergias varia com  $t$ .

Utilizando do *software* Wolfram Mathematica, fixo  $\lambda = 10^{-2}\omega_0$  com  $\omega_0 \sim 1$ , resolvemos numericamente para  $2\pi/(\lambda\omega) \sim 10^3$  pontos a curva  $|\Psi(t)\rangle$  que satisfaz a dinâmica de Schrödinger com  $|\Psi(0)\rangle = |\psi_0(0)\rangle$ .

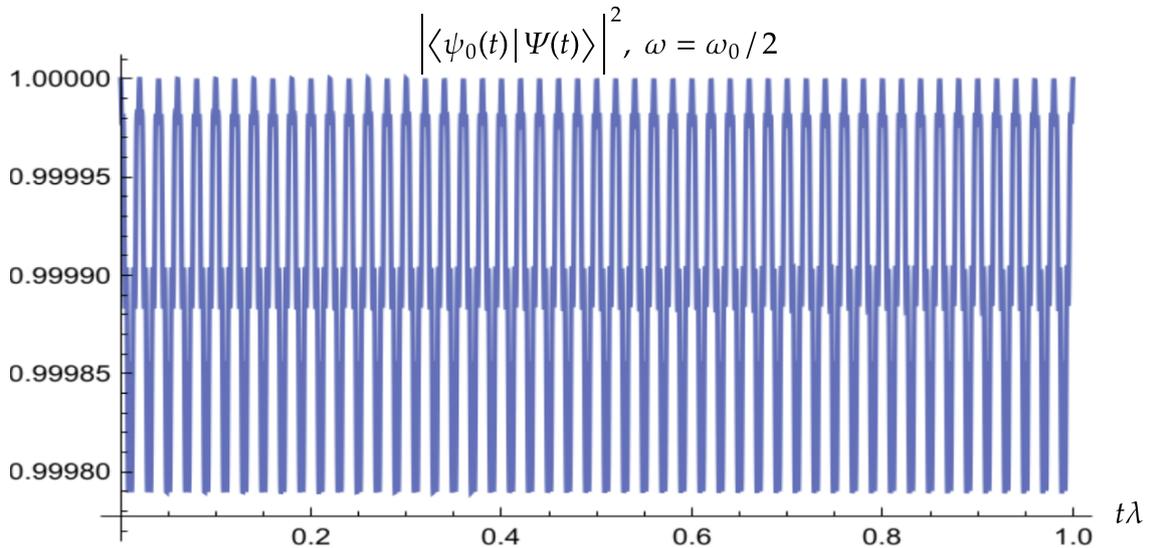


Figura 8 –  $|\langle\psi_0(t)|\Psi(t)\rangle|^2 \times t\lambda$  escolhendo  $\omega = \omega_0/2$ , pois queremos avaliar um regime fora da ressonância. Repare que as oscilações ocorrem no eixo ordenado numa vizinhança próxima do valor 1, indicando que o estado evoluído é aproximadamente  $|\psi_0(t)\rangle$  durante todo tempo da implementação, ou seja, não há transições de nível aproximadamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

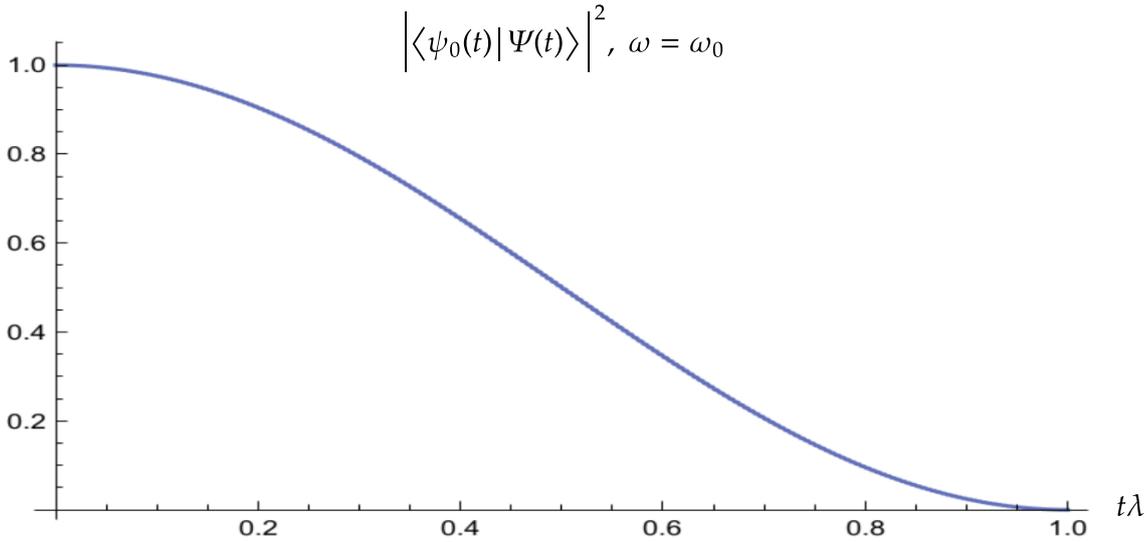


Figura 9 –  $|\langle\psi_0(t)|\Psi(t)\rangle|^2 \times t\lambda$  escolhendo  $\omega = \omega_0$  que é a condição de regime de ressonância. Repare que durante o tempo da implementação o valor ordenado vai a zero, indicando que o estado evoluído não possui nenhuma componente no estado fundamental ao fim da implementação, ou seja, o estado transiciona neste regime.

Fonte: Elaborada pelo autor.

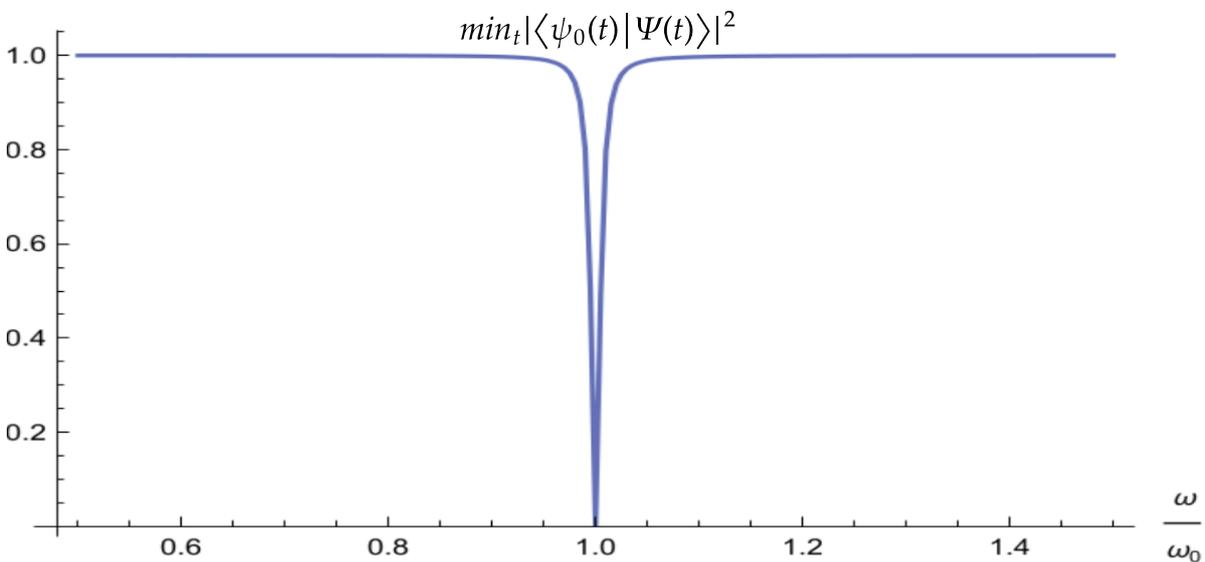


Figura 10 –  $\min_t |\langle\psi_0(t)|\Psi(t)\rangle|^2 \times \omega/\omega_0$ . No caso do Hamiltoniano (3.16), nessa imagem podemos ver para diferentes valores de  $\omega$  o valor mínimo do módulo quadrado da projeção do estado de Schrödinger no estado fundamental. Vemos nas vizinhanças da ressonância os valores mínimos caírem, indicado que nesta região ocorrerão transições entre níveis. Tempo de evolução  $t\lambda = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A princípio vamos escolher dois valores de  $\omega$  para o Hamiltoniano em questão e observar o valor mínimo do módulo quadrado da projeção da curva de Schrödinger  $|\Psi(t)\rangle$  no estado fundamental  $|\psi_0(t)\rangle$ , dentro do tempo de implementação  $t\lambda = 1$ , afim de uma abordagem preliminar dos efeitos da ressonância. Na primeira escolha tomamos o valor de  $\omega = \omega_0/2$ , uma região de regime fora da ressonância; observamos através da escala vertical dos gráficos na Fig. 8 que o módulo quadrado da projeção oscila numa vizinhança muito próxima de 1, indicando uma condição de evolução adiabática. Já na segunda escolha tomamos o valor de  $\omega = \omega_0$ , representando o regime de ressonância do sistema; observamos através da Fig. 9 que na condição de ressonância teríamos uma inversão total da população dentro do intervalo de tempo implementado, pois a projeção zera em um determinado tempo, logo, perdendo a condição de adiabaticidade da evolução.

Agora vamos olhar os mínimos do módulo quadrado da projeção para diferentes valores de  $\omega$  em torno da ressonância, dentro do tempo implementado  $t\lambda = 1$ . Nas vizinhanças da ressonância,  $\omega \approx \omega_0$ , os valores mínimos do módulo quadrado da projeção vão ficando menores que 1 e muito próximo de zero quanto mais  $\omega$  se aproxima de  $\omega_0$ . Ou seja, próximo da ressonância não se pode manter a adiabaticidade da evolução, pois aumentam muito as chances de ocorrerem transições de nível entre os estados. Já nas regiões fora da vizinhança da ressonância os valores mínimos do módulo quadrado da projeção são sempre muito próximos de 1 indicando condição de evolução adiabática nesses valores de  $\omega$ . O nosso critério deve refletir justamente este fato.

É exatamente isso que vemos na Fig. 11. Ao implementarmos o valor do quantificador para diferentes valores de  $\omega$  em torno do valor da ressonância, o critério nos diz que a adiabaticidade só é quebrada nas vizinhanças de  $\omega_0$ , sendo que na ressonância temos um pico indicando iminentes transições de nível. Assim, neste caso, vemos nosso critério dizendo que não há forma de manter adiabaticidade na ressonância deste sistema, já fora da sua vizinhança podemos garanti-la como a Fig. 10 já nos indicava.

Vamos então aplicar o critério para outro Hamiltoniano que se comporta de forma análoga a este primeiro caso e observar se obtemos o mesmo bom comportamento do critério.

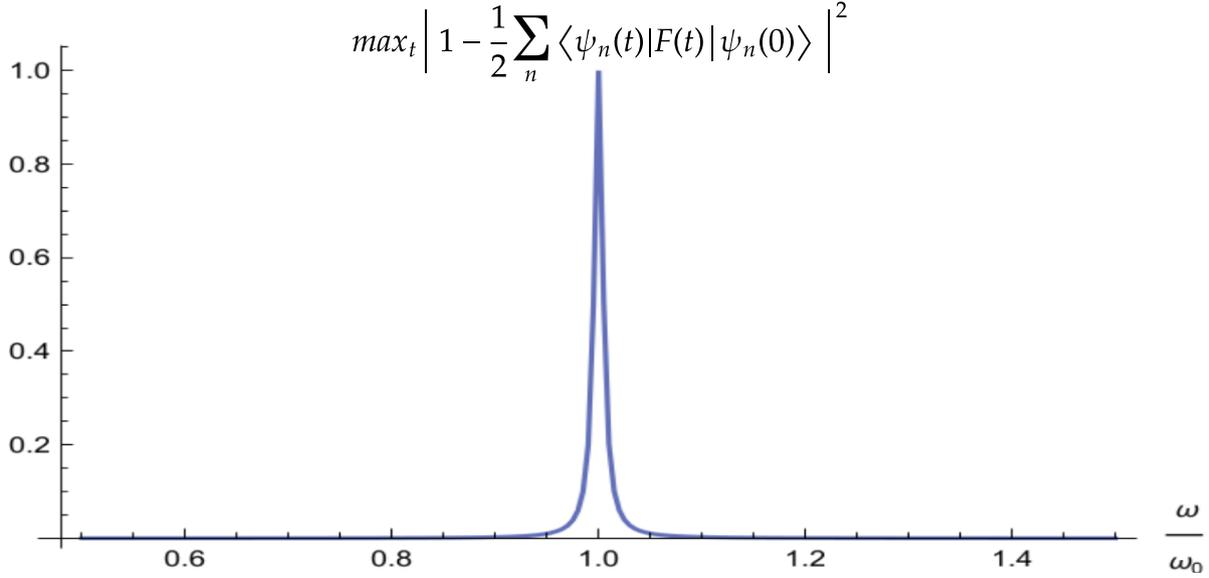


Figura 11 –  $C \times \omega/\omega_0$ . Para o Hamiltoniano (3.16), nosso quantificador se comporta como o previsto mostrando que na ressonância e nas suas vizinhanças não vale a condição de adiabaticidade, sendo que na ressonância as transições são iminentes. Tempo de evolução  $t\lambda = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nosso segundo Hamiltoniano será o Hamiltoniano de Rabi. Vamos identificar a base canônica de  $\mathbb{C}^2$  com a base computacional, ou seja,  $|0\rangle \simeq (1, 0)^T$  e  $|1\rangle \simeq (0, 1)^T$ . Desta forma, nosso segundo Hamiltoniano é escrito como

$$H_t = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \frac{\lambda}{2} \{ e^{-i\omega t} |0\rangle \langle 1| + e^{i\omega t} |1\rangle \langle 0| \}. \quad (3.18)$$

Diagonalizamos numericamente nosso Hamiltoniano<sup>4</sup>, novamente fixo  $\lambda = 10^{-2} \omega_0$  com  $\omega_0 \sim 1$  resolvendo para  $2\pi/(\lambda\omega) \sim 10^3$  pontos, obtendo as autoenergias e os autoestados. Neste exemplo o *gap* entre as autoenergia é constante no tempo. Em seguida, implementamos a curva  $|\Psi(t)\rangle$  que satisfaz a dinâmica de Schrödinger com condição inicial sendo o autoestado fundamental no instante zero,  $|\Psi(0)\rangle = |\psi_0(0)\rangle$ .

Na Fig. 12, observamos para diferentes valores de  $\omega$  em torno da ressonância um comportamento idêntico ao caso anterior para os mínimos do módulo quadrado da projeção da curva de Schrödinger  $|\Psi(t)\rangle$  no estado fundamental  $|\psi_0(t)\rangle$ , dentro do tempo implementação  $t\lambda = 1$ .

<sup>4</sup> Sabemos que este Hamiltoniano é facilmente diagonalizável analiticamente, porém, por questões de código, já fizemos este processo numericamente durante a implementação.

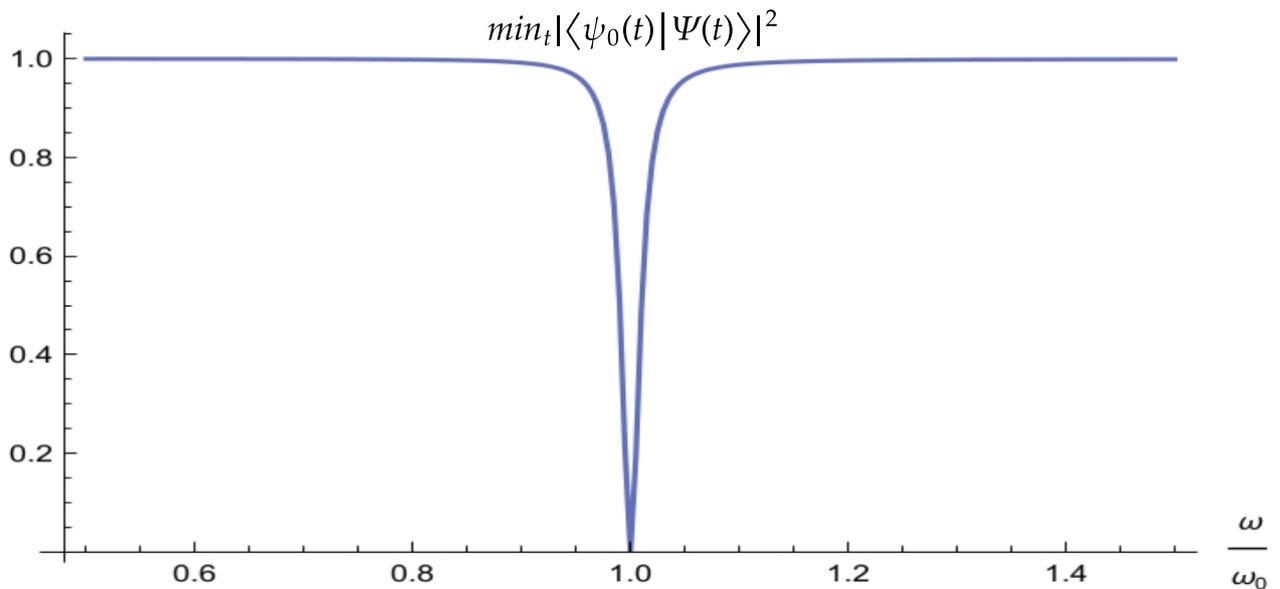


Figura 12 –  $\min_t |\langle \psi_0(t) | \Psi(t) \rangle|^2 \times \omega/\omega_0$ . No caso do Hamiltoniano (3.18), nessa imagem podemos ver para diferentes valores de  $\omega$  o valor mínimo do módulo quadrado da projeção do estado de Schrödinger no estado fundamental. Vemos nas vizinhanças da ressonância os valores mínimos caírem, indicado que nesta região ocorrerão transições entre níveis. Tempo de evolução  $t\lambda = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Fig. 13, vemos ao implementar o critério o fato da adiabaticidade só ser quebrada nas vizinhanças de  $\omega_0$ , tendo na ressonância um pico indicando iminentes transições de nível não havendo forma de manter adiabaticidade neste regime.

Com estes exemplo esperamos ter mostrado a capacidade do nosso critério. Apresentamos um quantificador para adiabaticidade construído a partir do objeto  $F$  que vem da geometria natural do problema. Ao estabelecer um critério a partir do quantificador observamos que a ressonância de sistemas deve produzir um efeito geométrico na curva  $F$  que tem como resultado obstruir a validade da adiabaticidade neste regime. O critério funciona em qualquer regime da dinâmica e carrega a história da evolução através de  $F$ , pois  $F$  acompanha a evolução de Schrödinger por definição. Com estes dois exemplos paradigmáticos queremos apontar a relevância deste critério geométrico vindo da isometria acompanhante, dada a sua consistência de funcionamento.

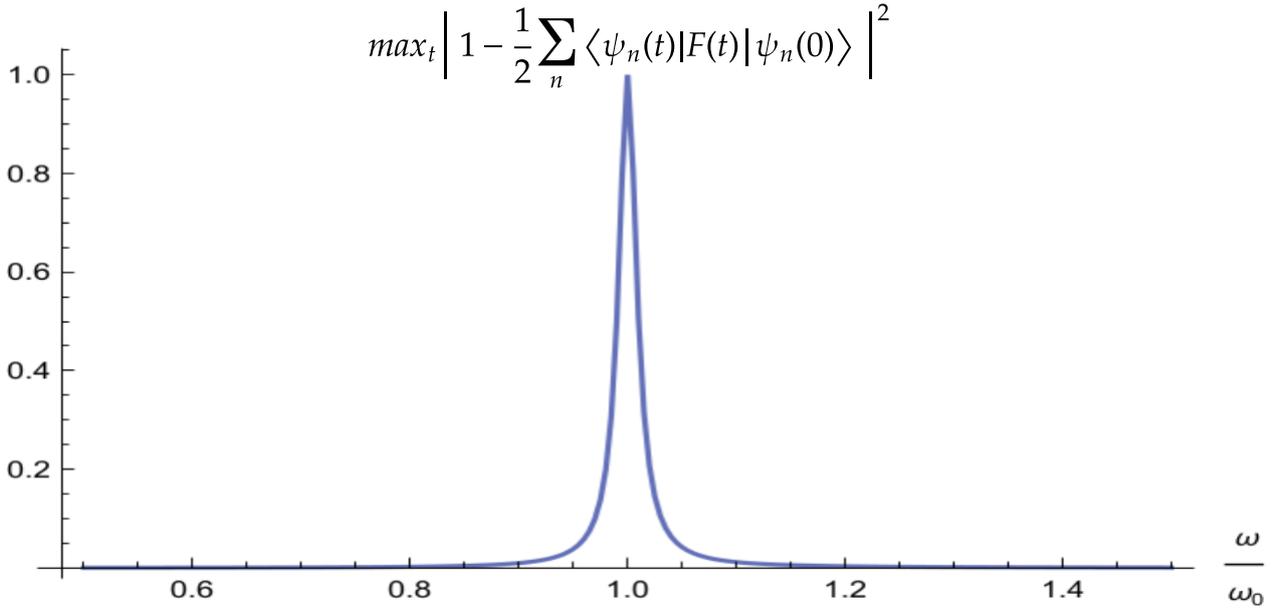


Figura 13 –  $C \times \omega/\omega_0$ . Para o Hamiltoniano (3.18), nosso quantificador se comporta como o previsto mostrando que na ressonância e nas suas vizinhanças não vale a condição de adiabaticidade, sendo que ressonância as transições são iminentes. Tempo de evolução  $t\lambda = 1$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.4 Conjectura e perspectiva

Nesta seção, vamos fechar o capítulo apresentando ideias que emanaram naturalmente do desenvolvimento do critério e que tem potencial futuro de trabalho.

Inicialmente, queremos fazer a projeção estereográfica da isometria acompanhante  $F$  associada a curva que satisfaz a dinâmica de Schrödinger, iniciando no estado fundamental, referente ao primeiro Hamiltoniano da Eq. (3.16) fixo  $\lambda = 10^{-2} \omega_0$  com  $\omega_0 \sim 1$ . Vamos observar como esta projeção se comporta no regime de ressonância e fora dele.

Para isso, lembramos que o conjunto  $SU(2)$  pode ser representado como

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}. \quad (3.19)$$

Mapeamos então  $SU(2) \rightarrow \mathbf{S}^3 \in \mathbb{R}^4$  com a aplicação

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mapsto \left( \text{Re}(z_1), \text{Im}(z_1), \text{Re}(z_2), \text{Im}(z_2) \right)^T. \quad (3.20)$$

Fixo um ponto  $|p\rangle \in \mathbb{R}^4$  como polo da esfera, a projeção estereográfica a partir deste polo

é definida como:

$$\begin{aligned} \zeta_{|p\rangle} : \mathbf{S}^3 \setminus \{|p\rangle\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ |q\rangle &\mapsto \frac{|q\rangle + |p\rangle}{1 + \langle q | p \rangle} - |p\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde o produto interno é o de  $\mathbb{R}^4$ .

A projeção estereográfica nada mais é que olhar a curva de  $F$  do grupo de isometrias  $SU(2)$  como uma curva na esfera  $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  e em seguida realizar sua projeção estereográfica em  $\mathbb{R}^3$ .

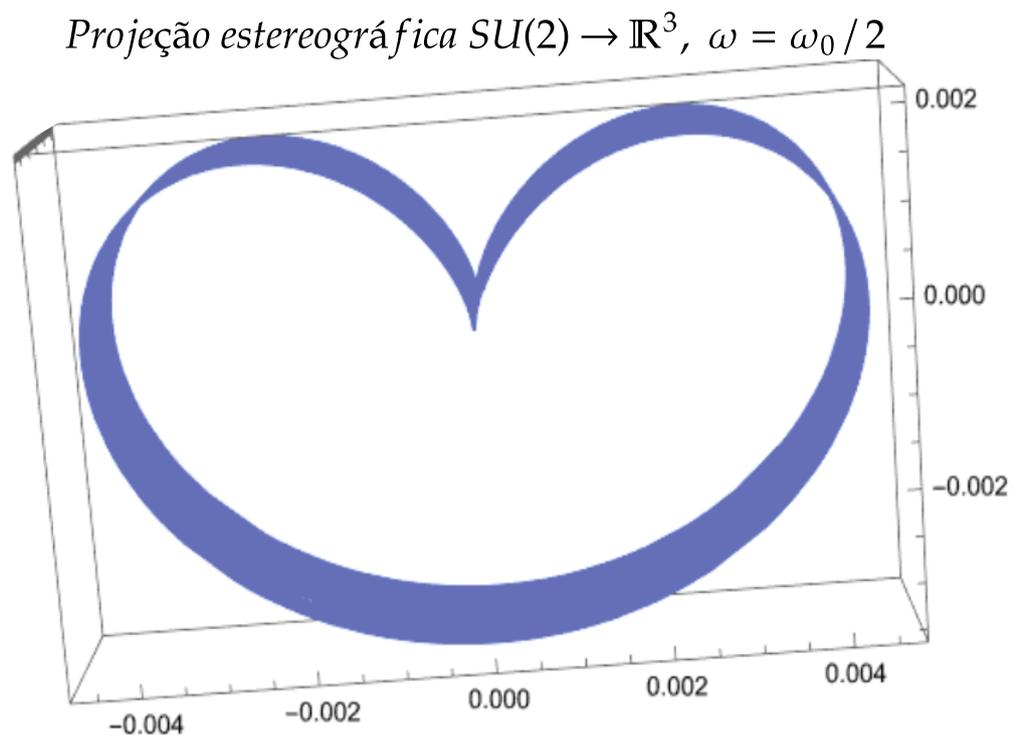


Figura 14 – Projeção estereográfica da isometria acompanhante  $F \mapsto \mathbb{R}^3$  associada a curva que satisfaz a dinâmica de Schrödinger, iniciando no estado fundamental, referente ao Hamiltoniano da Eq. (3.16). Projeção fora do regime de ressonância. Não colocamos dimensões nos eixos do gráfico pois queremos observar o comportamento de  $F$  de um ponto de vista matemático, apenas como uma matriz do grupo de isometrias com entradas complexas, para depois chegar a alguma conclusão física. Note o comportamento periódico da curva projetada nesse regime fora da ressonância

Fonte: Elaborada pelo autor.

*Projeção estereográfica  $SU(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\omega = \omega_0$*

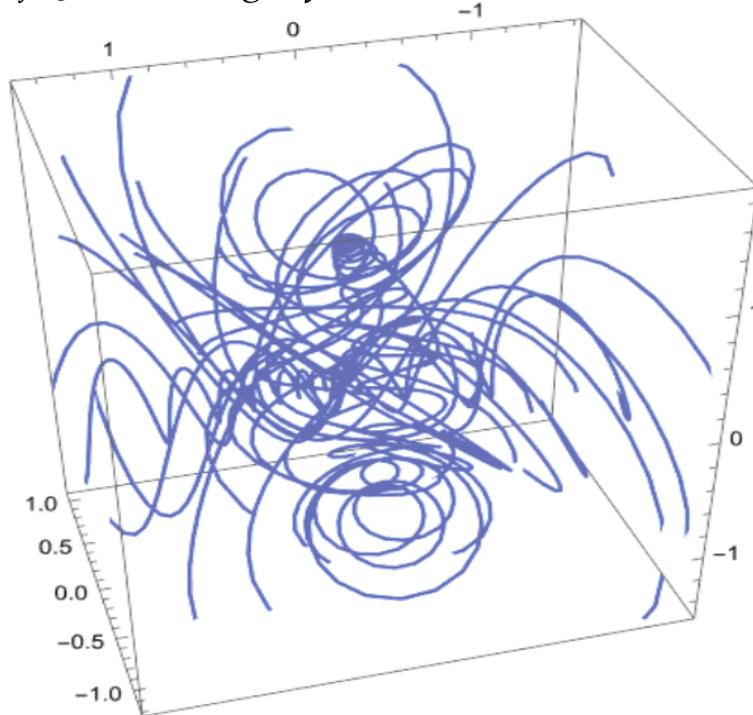


Figura 15 – Projeção estereográfica da isometria acompanhante  $F \mapsto \mathbb{R}^3$  associada a curva que satisfaz a dinâmica de Schrödinger, iniciando no estado fundamental, referente ao Hamiltoniano da Eq. (3.16). Projeção no regime de ressonância. Não colocamos dimensões nos eixos do gráfico pois queremos observar o comportamento de  $F$  de um ponto de vista matemático, apenas como uma matriz do grupo de isometrias com entradas complexas, para depois chegar a alguma conclusão física. Note o aspecto de curva densa da projeção no regime de ressonância

Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro realizamos a projeção estereográfica de  $F$  fora da ressonância, Fig. 14. Observamos um comportamento periódico ao longo do tempo de evolução, pois nosso critério atesta que não estamos em regime adiabático e portanto permanecemos aproximadamente no estado fundamental que deve ser periódico, dado que o Hamiltoniano é periódico.

Quando realizamos a projeção estereográfica de  $F$  na ressonância a situação muda, Fig. 15. Nosso critério nos diz que não é possível manter a adiabaticidade neste regime, isso se reflete visivelmente no aspecto de curva. Olhando para a projeção estereográfica da curva  $F$  a impressão é que a ressonância se caracterizaria pela densidade dessa curva na esfera. Note que o desenho que se manifesta é curiosamente parecido com a fibração de Hopf, em que a esfera  $\mathbf{S}^3$  é folheada por círculos sobre uma esfera  $\mathbf{S}^2$ .

Nossa conjectura a partir destes fatos seria provar uma afirmação para o caso de

---

um q-bit. Dado nosso critério geométrico para adiabaticidade, ele garantiria que para qualquer Hamiltoniano no regime de ressonância não é possível haver evolução adiabática. A prova consistiria em caracterizar ressonância geometricamente sem falar de nenhum Hamiltoniano específico, depois impor de saída esta condição de ressonância observando os efeitos produzidos na isometria acompanhante e provar que nestas circunstâncias a curva de  $F$  é densa em  $SU(2)$ , ou seja, nunca se fecha, percorrendo toda a esfera<sup>5</sup>. Fisicamente significa que a curva do estado de Schödinger vai percorrendo todo o espaço de estados sem se fechar ou apresentar periodicidade, marcando o fato de na ressonância haver iminentes transições de nível.

Este plano de prova já apresenta em si um obstáculo interessante. O que é ressonância do ponto de vista matemático? Como dar uma boa definição do que é um regime de ressonância geometricamente em uma dinâmica sem falar de um Hamiltoniano específico? Sem responder essa questão não é possível prosseguir com a prova e por isso ficamos só com a conjectura. Essa é uma diretriz que pode servir para trabalhos futuros.

Mais um ponto que queríamos destacar é a potencial universalidade de aplicação do nosso critério. Ele seria o critério natural para adiabaticidade. Novamente, a isometria acompanhante é um objeto que trás toda a história da evolução consigo da curva, é um objeto geométrico natural no contexto que estamos. A expressão do critério, inspirada pela literatura, reflete noção de distância em um espaço que tem essa noção bem definida. Se nosso critério apresentar acurácia nas suas previsões, potencialmente ele, e consequentemente a matriz de  $F$ , são os objetos naturais para estudar a adiabaticidade da evolução do sistema.

---

<sup>5</sup> A prova da densidade da curva no grupo também pode não ser tarefa simples, precisaríamos da ajuda de um dinamicista para tal.



## 4 CONCLUSÃO

Nosso trabalho, no espírito da geometria da informação, utilizou do formalismo das geometrias clássicas; especificamente de uma ferramenta que aparece nesse contexto chamada isometria acompanhante; aplicada ao contexto físico de sistemas quânticos puros com dinâmica unitária, aliada aos conhecimentos da literatura sobre critérios da adiabaticidade, construindo um critério geométrico para adiabaticidade.

O critério que desenvolvemos é centrado na matriz da isometria acompanhante. É um quantificador com valores entre  $[0, 1]$ , onde o critério emana do entendimento que o valor do quantificador ser muito próximo de zero indica que a evolução é adiabática durante o tempo total que se desenrolou.

Nesse entendimento do critério reside sua alma geométrica e fonte de inspiração para sua criação. Reflete o fato de evolução adiabática fazer com que a matriz da isometria acompanhante, associada ao estado físico que evolui segundo dinâmica de Schrödinger, fique sempre na vizinhança da identidade do grupo de isometrias, ou seja, em regime adiabático a distância da isometria acompanhante para a identidade é próxima de zero durante todo o tempo de evolução.

Da forma que o critério foi formulado, com pequenas modificações da sua expressão, podemos fazer com que ele nos diga instantaneamente ou para intervalos de tempo específicos da evolução se naqueles pontos ou trechos há adiabaticidade. Note, na prática, o critério só depende da existência de uma curva no espaço de estados seguindo a dinâmica de Schrödinger, suficientemente regular para satisfazer os enunciados do formalismo matemático por trás, e uma intuição geométrica. Daí vem sua versatilidade.

Testamos nosso critério em dois exemplos, dois Hamiltonianos que apresentam regime de ressonância. Observamos resposta muito condizente do critério fora do regime de ressonância e, principalmente, nas vizinhanças da ressonância. Na condição de ressonância temos um pico do critério nos dois casos, indicando a improbabilidade de se manter uma evolução adiabática nessas condições.

Dado este fato, apresentamos uma conjectura acerca de uma afirmação que nosso critério advogaria a impossibilidade de haver adiabaticidade em qualquer regime de ressonância, independente da escolha do Hamiltoniano a nível de  $q$ -bits.

A principal dificuldade de elaborar uma prova para esta conjectura está no fato de não termos uma definição do que seria o conceito físico de ressonância em termos geométricos. Afinal, tendo esta definição a partir dela poderíamos estudar seu efeito na curva da isometria acompanhante no grupo e observar se ela é curva densa no grupo nestas circunstâncias. Além disso, caracterizar ressonância puramente em termos matemáticos e

geométricos, em si, deve ser uma tarefa interessante com potencial de aplicação. Deixamos aqui estas diretrizes um possível trabalho futuro.

Nosso critério apresenta naturalidade, no sentido que dada a curva de Schrödinger a isometria acompanhante é estrutura geométrica natural associada a curva e a expressão do critério vem da noção de distância em espaços que possuem este conceito bem definido. Dada a naturalidade do critério, uma questão que também pode ser explorada no futuro é sua acurácia na prática. O quanto ele, de fato, é preciso ao indicar adiabaticidade. Dado que ele se mostre eficiente na tarefa, somado com sua naturalidade, ele ganharia um potencial de universalidade de uso.

Por fim, ressaltamos novamente a leitura dos apêndices desta tese para aqueles que quiserem mais perspectivas de aplicação das geometrias clássicas na Física. Lá estão resultados e diretrizes que ou emanaram naturalmente do que foi desenvolvido na tese, ou foram desenvolvidas paralelamente ao texto principal. Tratamos neles conteúdos correspondentes a fase de Berry e o fibrado de Berry-Simon, espaço de estados mistos de um q-bit, grassmanianas e a correspondência AdS/CFT, respectivamente. Tudo sob o olhar das geometrias clássicas. É esperado desse conteúdo dos apêndices render futuros trabalhos caso sejam devidamente trabalhados por mentes interessadas.

## REFERÊNCIAS

- 1 TRINDADE, G. R. **De modelos estatísticos a  $\alpha$ -conexões**: um panorama geral da geometria da informação. 2023. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.
- 2 NIELSEN, F. The many faces of information geometry. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 69, n. 1, p. 36–45, 2022.
- 3 ASH, R. **Information theory**. Mineola: Courier Dover Publications, 1900. (Dover books on mathematics). ISBN 978-0486665214.
- 4 SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- 5 COVER, T.; THOMAS, J. **Elements of information theory**. 2nd. ed. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. ISBN 9780471241959.
- 6 AKIN, E. **The geometry of population genetics**. New York: Springer-Verlag, 1979. (Lecture notes in biomathematics, v. 31). ISBN 9783540097112.
- 7 RAO, C. R. **Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters**. a tribute to the legend of professor CR Rao: the centenary volume. Singapura: Springer, 2021.
- 8 AY, N. *et al.* **Information geometry**. Suíça: Springer, 2017. (a series of modern surveys in mathematics ser., v. 64). ISBN 9783319564777.
- 9 MAGNO, G. F. **Geometria da informação**: métricas em espaços de estado e correções na cota de Cramér-Rao. 2020. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- 10 AMARI, S.; NAGAOKA, H. **Methods of information geometry**. Oxford: Oxford University Press, 2000. ISBN 9780821843024.
- 11 RÉNYI, A. On measures of entropy and information. *In*: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY, 4., 1961, Berkeley. **Proceedings[...]**. Berkeley: University of California Press, 1961. v. 1, p. 547–561.
- 12 BAKHVALOV, N. S. *et al.* Memorial: Nikolai Nikolaevitch Chentsov. **Theory of Probability & its Applications**, v. 38, n. 3, p. 506–515, 1994.
- 13 CHENTSOV, N. N. **Statistical decision rules and optimal inference**. Providence: American Mathematical Society, 1982. (Translations of Mathematical Monographs, v. 53).
- 14 CAMPBELL, L. L. An extended Čencov characterization of the information metric. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 98, n. 1, p. 135–141, 1986.
- 15 ZHANG, J. Divergence function, duality, and convex analysis. **Neural Computation**, v. 16, n. 1, p. 159–195, 2004.

- 16 LAURITZEN, S. L. **Differential geometry in statistical inference**. Hayward: Institute of Mathematical Statistics, 1987. p. 163–216. 1987. (Lecture notes–monograph series, v. 10).
- 17 PISTONE, G.; SEMPI, C. An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one. **The Annals of Statistics**, v. 23, n. 5, p. 1543–1561, 1995.
- 18 GORDON, J. P. Quantum effects in communications systems. **Proceedings of the IRE**, v. 50, n. 9, p. 1898–1908, 1962.
- 19 HELSTROM, C. W. Quantum detection and estimation theory. **Journal of Statistical Physics**, v. 1, p. 231–252, 1969.
- 20 NIELSEN, M.; I., C. **Quantum computation and quantum information**. 10th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781107002173.
- 21 FUCHS, C. A. **Distinguishability and accessible information in quantum theory**. 1996. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9601020.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2023.
- 22 WATROUS, J. **The theory of quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. ISBN 9781107180567.
- 23 WOOTTERS, W. K. Statistical distance and Hilbert space. **Physical Review D**, v. 23, n. 2, p. 357, 1981.
- 24 MOROZOVA, E.; CHENTSOV, N. Markov invariant geometry on state manifolds. **Journal of Soviet Mathematics**, v. 56, p. 2648–2669, 1991. DOI: 10.1007/BF01095975.
- 25 BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 22, p. 3439, 1994.
- 26 PETZ, D. Monotone metrics on matrix spaces. **Linear Algebra and its Applications**, v. 244, p. 81–96, 1996. DOI: 10.1016/0024-3795(94)00211-8.
- 27 BASTOS, W. P. **Estudo da atingibilidade do limite de Cramér-Rao em metrologia quântica: surgimento do limite de Heisenberg**. 2016. 120 p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- 28 PIRES, D. P. **Geometria da informação quântica: uma abordagem geral acerca do tempo de evolução**. 2017. 221 p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 29 SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM Review**, v. 41, n. 2, p. 303–332, 1999.
- 30 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *In*: ACM SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING, 28., 1996. Philadelphia. **Proceedings[...]**. Philadelphia: ACM, 1996. p. 212–219.
- 31 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing. **Theoretical Computer Science**, v. 560, p. 7–11, 2014.

- 
- 32 EKERT, A. K. Quantum cryptography based on bell's theorem. **Physical Review Letters**, v. 67, n. 6, p. 661, 1991.
- 33 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G.; MERMIN, N. D. Quantum cryptography without Bell's theorem. **Physical Review Letters**, v. 68, n. 5, p. 557, 1992.
- 34 ARUTE, F. *et al.* Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. **Nature**, v. 574, n. 7779, p. 505–510, 2019.
- 35 BALL, P. First 100-qubit quantum computer enters crowded race. **Nature**, v. 599, p. 542, 2021.
- 36 MACQUARRIE, E. R. *et al.* The emerging commercial landscape of quantum computing. **Nature Reviews Physics**, v. 2, n. 11, p. 596–598, 2020.
- 37 MESSIAH, A. **Quantum mechanics**, v. II. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1962. ISBN 9780720400458.
- 38 MARZLIN, K.-P.; SANDERS, B. C. Inconsistency in the application of the adiabatic theorem. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 16, p. 160408, 2004.
- 39 TONG, D. *et al.* Quantitative conditions do not guarantee the validity of the adiabatic approximation. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 11, p. 110407, 2005.
- 40 DU, J. *et al.* Experimental study of the validity of quantitative conditions in the quantum adiabatic theorem. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 6, p. 060403, 2008.
- 41 ZHAO, M.-S.; CHEN, J.-l. *et al.* Adiabatic condition and quantum geometric potential. **Physical Review A**, v. 77, n. 6, p. 062114, 2008.
- 42 AMIN, M. H. S. Consistency of the adiabatic theorem. **Physical Review Letters**, v. 102, n. 22, p. 220401, 2009.
- 43 SARANDY, M. S.; WU, L.-A.; LIDAR, D. A. Consistency of the adiabatic theorem. **Quantum Information Processing**, v. 3, p. 331–349, 2004.
- 44 ALBASH, T.; LIDAR, D. A. Adiabatic quantum computation. **Reviews of Modern Physics**, v. 90, n. 1, p. 015002, 2018.
- 45 HU, C.-K. *et al.* Validation of quantum adiabaticity through non-inertial frames and its trapped-ion realization. **Scientific Reports**, v. 9, n. 1, p. 10449, 2019.
- 46 JANSEN, S.; RUSKAI, M.-B.; SEILER, R. Bounds for the adiabatic approximation with applications to quantum computation. **Journal of Mathematical Physics**, v. 48, n. 10, p. 102111, 2007.
- 47 KATO, T. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 5, n. 6, p. 435–439, 1950.
- 48 VENUTI, L. C. *et al.* Adiabaticity in open quantum systems. **Physical Review A**, v. 93, n. 3, p. 032118, 2016.
- 49 ELGART, A.; HAGEDORN, G. A. A note on the switching adiabatic theorem. **Journal of Mathematical Physics**, v. 53, n. 10, p. 102202, 2012.

- 50 CAO, Z.; ELGART, A. On the efficiency of Hamiltonian-based quantum computation for low-rank matrices. **Journal of Mathematical Physics**, v. 53, n. 3, p. 032201, 2012.
- 51 GE, Y.; MOLNÁR, A.; CIRAC, J. I. Rapid adiabatic preparation of injective projected entangled pair states and Gibbs states. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 8, p. 080503, 2016.
- 52 GARRIDO, L.; SANCHO, F. Degree of approximate validity of the adiabatic invariance in quantum mechanics. **Physica**, v. 28, n. 6, p. 553–560, 1962.
- 53 LIDAR, D. A.; REZAKHANI, A. T.; HAMMA, A. Adiabatic approximation with exponential accuracy for many-body systems and quantum computation. **Journal of Mathematical Physics**, v. 50, n. 10, 2009.
- 54 BOIXO, S.; SOMMA, R. D. Necessary condition for the quantum adiabatic approximation. **Physical Review A**, v. 81, n. 3, p. 032308, 2010.
- 55 ANAN'IN, S.; GROSSI, C. H. Coordinate-free classic geometries. **Moscow Mathematical Journal**, v. 11, n. 4, p. 633–655, 2011.
- 56 ANAN'IN, S. **Reflections, bendings, and pentagons**. 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1201.1582.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2023.
- 57 FERREIRA, R.; JUNIOR, J. R.; GROSSI, C. H. On the geometry of the kinematic space in special relativity. **Journal of Geometry and Physics**, v. 180, p. 104629, 2022.
- 58 BOTÓS, H. **Geometrias clássicas**. Disponível em: <https://github.com/HugoCBotos/geometria-classica/blob/master/Geometrias%20Cl%C3%A1ssicas%20-%20Hugo%20C.%20Bot%C3%B3s.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2023.
- 59 KOBAYASHI SHOSHICHI; NOMIZU, K. **Foundations of differential geometry: volume I**. New york: Interscience Publ., 1963. ISBN 9780471157335.
- 60 KOLAR P. W. MICHOR, J. S. I. **Natural operations in differential geometry**. Berlin: Springer, 1993. ISBN 9783662029503.
- 61 TU, L. W. **Differential geometry connections, curvature, and characteristic classes**. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. ISBN 9783319550824.
- 62 YU, X.-D.; TONG, D. Evolution operator can always be separated into the product of holonomy and dynamic operators. **Physical Review Letters**, v. 131, n. 20, p. 200202, 2023.
- 63 BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical and physical sciences**, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984.
- 64 SIMON, B. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and berry's phase. **Physical Review Letters**, v. 51, n. 24, p. 2167, 1983.
- 65 BENGTTSSON, I.; ZYCZKOWSKI, K. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9780521891400.

- 
- 66 MILLER, M.; OLKIEWICZ, R. Topology of the cone of positive maps on qubit systems. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 48, n. 25, p. 255203, 2015.
- 67 LOEWY, R.; SCHNEIDER, H. Positive operators on the n-dimensional ice cream cone. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 49, n. 2, p. 375–392, 1975.
- 68 RUSKAI, M. B.; SZAREK, S.; WERNER, E. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on  $M_2$ . **Linear Algebra and its Applications**, v. 347, n. 1-3, p. 159–187, 2002.
- 69 MISZCZAK, J. A. *et al.* **Sub–and super–fidelity as bounds for quantum fidelity**. 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0805.2037.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2022.
- 70 MENDONÇA, P. E. *et al.* Alternative fidelity measure between quantum states. **Physical Review A**, v. 78, n. 5, p. 052330, 2008.
- 71 ANAN'IN, S.; GONÇALVES, E. C. B.; GROSSI, C. H. Grassmannians and conformal structure on absolutes. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 29, n. 1, p. 1–10, 2019.
- 72 LEE, J. **Introduction to smooth manifolds**. Berlin: Springer, 2002. ISBN 9781441999818.
- 73 MALDACENA, J. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999.
- 74 BIANCHI, M. *et al.* Instantons in supersymmetric Yang-Mills and D-instantons in IIB superstring theory. **Journal of High Energy Physics**, v. 1998, n. 08, p. 013, 1998.



## APÊNDICES



## APÊNDICE A – FASE DE BERRY E O FIBRADO TAUTOLÓGICO

No Cap. 3 do texto principal, ao aplicar o formalismo de geometrias clássicas ao contexto físico de estados quânticos puros notamos que a fase que acompanha o levantamento de curva normalizada, elaborada na Eq. (3.3), tem expressão idêntica a que aparece na formulação da fase de Berry, fase geométrica adquirida em evoluções cíclicas no tempo do Hamiltoniano. Neste apêndice iremos explorar este fato. Inicialmente desenvolveremos o conteúdo que apresenta o que é a fase de Berry e como ela se manifesta, isto nos levará imediatamente a construção do fibrado de Berry-Simon, fibrado concebido para trazer na linguagem de conexões e holonomia o fenômeno físico da fase geométrica de Berry. Dados estes conceitos iremos fazer a relação entre o fibrado de Berry-Simon e o fibrado tautológico onde o levantamento normalizado irá desempenhar o papel de curva horizontal, ou seja, uma conexão. Por fim iremos apresentar uma conjectura colocando o fibrado da isometria acompanhante neste contexto que possibilitaria um trabalho futuro.

### A.1 Fase de Berry e o fibrado de Berry-Simon

Trabalhando a partir da Sec. 1.2.2, olhando o espaço de estados quânticos puros como espaço vetorial complexo  $V$  de dimensão finita munido de forma hermitiana não-degenerada  $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , temos o Hamiltoniano  $H_t$ , diagonalizável para todo instante de tempo satisfazendo a equação de autovalores

$$H_t |\psi_n(t)\rangle = E_n(t) |\psi_n(t)\rangle \text{ onde } \langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{n,m}, \forall t. \quad (\text{A.1})$$

Uma solução geral para a equação de Schrödinger é pode ser expressa na base de autovetores  $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1,\dots,\dim_{\mathbb{C}} V}$  como

$$|\Psi\rangle = \sum_m q_m(t) \exp \left[ -i \int_0^t E_m dt' \right] |\psi_m\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Interessados nas implicações geométricas da aproximação adiabática, partimos da validade Cor. 1. Logo, temos que, no limite de evolução infinitesimalmente lenta do Hamiltoniano, a Eq. (1.8) se reduz a

$$\dot{q}_m = -q_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle. \quad (\text{A.3})$$

Desta maneira a solução para os coeficientes fica sendo

$$q_m = q_m(0) e^{i\phi_m(t)}, \text{ onde } \phi_m(t) := i \int_0^t \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle dt'. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, no regime de aproximação adiabática a solução geral para a equação de Schrödinger se escreve como

$$|\Psi\rangle = \sum_m q_m(0) \exp \left[ i\phi_m - i \int_0^t E_m dt' \right] |\psi_m\rangle. \quad (\text{A.5})$$

A fase  $\phi_m$ , definida na Eq. (A.4), foi ignorada por muito tempo com o argumento que bastava apenas reescolher a base dos autovetores como  $\{|\tilde{\psi}_m\rangle\}_{m=1,\dots,\dim_C V}$ , onde  $|\tilde{\psi}_m\rangle := e^{i\phi_m} |\psi_m\rangle$  tal que

$$\langle \tilde{\psi}_m | \dot{\tilde{\psi}}_m \rangle = 0, \quad (\text{A.6})$$

o chamado *gauge de Born-Fock*. Varrendo assim a explícita dependência da fase sem perder nenhuma informação na solução geral de  $|\Psi\rangle$  em regime adiabático, uma vez que que fase global não tem influência em medidas no laboratório. Porém, existem casos em que a fase  $\phi_m$  não pode ser ignorada com este argumento. (63)

Para analisarmos estes casos onde a fase se apresenta com relevância física, vamos então introduzir a dependência em  $t$  do Hamiltoniano via um conjunto de parâmetros externos

$$t \mapsto \vec{R}(t) \in M \mapsto H_{\vec{R}(t)}, \quad (\text{A.7})$$

tal que  $\vec{R}(t) = (R^1(t), \dots, R^{\dim M}(t))$ , onde  $M$  é espaço de parâmetros<sup>1</sup>. Agora nossa base  $\{|\psi_n\rangle\}$  também depende de  $t$  via parâmetros  $\vec{R}$  e denotamos esta dependência como  $\{|\psi_n(\vec{R})\rangle\}$ . Vamos então variar no tempo suavemente os parâmetros em  $M$  de forma cíclica não-trivial, ou seja,  $\vec{R}(0) = \vec{R}(t_f)$  implicando  $H_{\vec{R}(0)} = H_{\vec{R}(t_f)}$ . A fase  $\phi_m$  no instante  $t_f$  que completamos o ciclo pode ser então calculada como

$$\phi_m = i \int_0^{t_f} \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial R^\mu} \right. \right\rangle \frac{dR^\mu}{dt'} dt' = i \oint \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial R^\mu} \right. \right\rangle dR^\mu, \quad (\text{A.8})$$

onde aqui utilizamos a convenção da soma de Einstein para índices repetidos<sup>2</sup> e a integral de caminho fechado acima é realizada no espaço de parâmetros  $M^3$ . Notamos que  $\phi_m$  no instante  $t_f$  em que completa a volta no espaço de parâmetros surge como um diferença de fase mensurável interferindo com a base de autoestados no instante inicial  $t = 0$  do processo.

Vamos então nomear as fases que temos em mãos neste momento:

$$(\text{Fase de Berry}) \quad i\phi_m = - \oint \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial R^\mu} \right. \right\rangle dR^\mu \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{Fase dinâmica}) \quad -i \int_0^t E_m dt' \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{Fase geométrica}) \quad \text{Fase de Berry} + \text{Fase dinâmica} \quad (\text{A.11})$$

Na tentativa de interpretar a fase de Berry como holonomia de uma certa conexão em um fibrado apropriado (64), construímos um fibrado principal correspondente

<sup>1</sup>  $M$  sendo visto como variedade diferenciável leva  $\vec{R}$  desempenhar papel de coordenadas locais definidas num determinado aberto  $U \subset M$ .

<sup>2</sup>  $v^i u_i = \sum_i v^i u_i = v^1 u_1 + v^2 u_2 + \dots$

<sup>3</sup> Pedimos aqui  $\dim M \geq 2$ , pois para  $M$  unidimensional a integral da Eq. (A.8) é sempre nula, não produzindo fase.

ao  $n$ -ésimo autoestado  $|\psi_n(\vec{R})\rangle^4$  onde a base do fibrado é o espaço de parâmetros  $M$  correspondente a este  $|\psi_n(\vec{R})\rangle$ . As fibras  $\{g|\psi_n(\vec{R})\} | g \in U(1)\}$  são isomorfas a círculos unitários correspondendo a uma escolha arbitrária de fase na equação de autovalores<sup>5</sup>.

Temos então um  $U(1)$ -fibrado sobre o espaço de parâmetros  $M$  com sobrejeção suave dada por  $\pi(g|\psi_n(\vec{R})) := \vec{R}$ , com  $g \in U(1)$ , que vamos chamar de *fibrado de Berry-Simon*, Fig. 16.

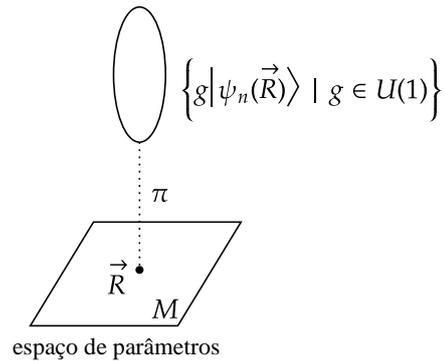


Figura 16 – Fibrado de Berry-Simon.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A estrutura do fibrado é definida escolhendo uma seção local fixando uma fase de  $|\psi_n(\vec{R})\rangle$ ,  $\forall \vec{R} \in M$ . Seja então  $\sigma(\vec{R}) = 1_{U(1)}|\psi_n(\vec{R})\rangle$  seção local sobre aberto  $U \subset M$  as funções de trivialização são definidas canonicamente por  $\Phi(1_{U(1)}|\psi_n(\vec{R})\rangle) := (\vec{R}, 1_{U(1)})$  e a ação à direita sobre fibras por  $\Phi(1_{U(1)}|\psi_n(\vec{R})\rangle g) = (\vec{R}, 1_{U(1)})g := (\vec{R}, g)$ ,  $\forall g \in U(1)$ .

Declaramos que um levantamento  $|h\rangle = g_t|\psi_n(\vec{R})\rangle$  é horizontal neste fibrado para escolhas de fase  $g_t$  tal que

$$\langle h|\dot{h}\rangle = 0 \quad \forall t \text{ com } g_t \in U(1). \quad (\text{A.12})$$

Por decomposição horizontal-vertical, temos uma conexão neste fibrado que recebe o nome de *conexão de Berry-Simon*. Note a semelhança da Eq. (A.12) com a Eq. (A.6) e com a Prop. 3.

Considerando uma curva fechada  $\gamma$  em  $M$ , tal que  $t' \mapsto \vec{R} \mapsto |\psi_n(\vec{R})\rangle$  e  $\vec{R}(0) = \vec{R}(t)$ , temos que a holonomia de  $\gamma$  é igual à  $e^{i\phi_n}$ , fator de fase de Berry da Eq. (A.9). Assim podemos escrever em coordenadas a 1-forma de conexão de Berry-Simon, utilizando

<sup>4</sup> Como estamos em condição de aproximação adiabática só precisamos nos preocupar em olhar para o  $n$ -ésimo autoestado individualmente, já que não há transição de níveis.

<sup>5</sup> Só temos autovetores unitários, qualquer escolha de autovetor multiplicada por um complexo unitário é autovetor unitário para o mesmo autovalor.

convenção da soma de Einstein, como

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_\mu dR^\mu \text{ tal que } \mathcal{A}_\mu = i \langle \psi_n | \partial_{R^\mu} | \psi_n \rangle, \quad (\text{A.13})$$

onde  $\partial_{R^\mu} := \partial / \partial R^\mu$ .

Com esta visão introduzida por Berry-Simon podemos ver a natureza geométrica não-trivial do espaço de estados puros se manifestando como fases geométricas acumuladas após variarmos ciclicamente sob regime adiabático nosso Hamiltoniano via parâmetros externos.

## A.2 Fibrado de Berry-Simon e o fibrado tautológico

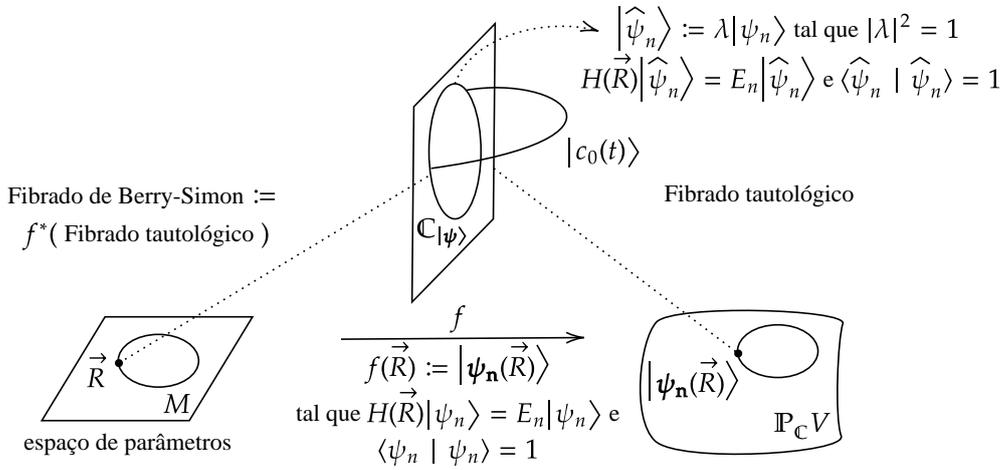


Figura 17 – Representação das constatações acerca do fibrado de Berry-Simon e sua relação com o levantamento normalizado  $|c_0\rangle$  e o fibrado tautológico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Fig. 17 irá nos auxiliar na discussão que segue.

No fibrado de Berry-Simon, dado o espaço de parâmetros  $M$ , escolhemos um  $\vec{R}$ , temos o Hamiltoniano  $H(\vec{R})$  e o  $|\psi_n(\vec{R})\rangle$  associado a esta escolha. Mais precisamente, temos uma família unidimensional de autoestados  $|\hat{\psi}_n(\vec{R})\rangle$ , pois só temos autovetores unitários associados ao Hamiltoniano e sobre cada  $\vec{R}$  existe uma circunferência que corresponde a todas as escolhas específica unitárias de  $|\psi_n\rangle$  naquele parâmetro.

Temos o fibrado tautológico sobre o projetivo, visto no Ex. 1. Recordando, o fibrado tautológico é o fibrado cujas fibras são os espaços que dão origem aos pontos sobre os quais a fibra está descrita.

Surge uma função natural entre o tautológico e o fibrado de Berry-Simon  $f(\vec{R}) := |\psi_n\rangle(\vec{R})$ , tal que  $H(\vec{R})|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$  e  $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$ . Na fibra do tautológico, a família  $|\hat{\psi}_n(\vec{R})\rangle$ , correspondente a imagem desta função, é uma circunferência de autovetores

dentro da correspondente reta complexa que é fibra sobre a classe  $|\psi_{\mathbf{n}}(\vec{R})\rangle$ . Visto que são escolhidos somente os unitários. Então redefinimos a fibra sobre o tautológico como sendo esta circunferência sobre o ponto projetivo correspondente a autoestados unitários.

Para enxergar a fibra do tautológico, agora redefinida para circunferência, como fibra sobre o espaço de parâmetros  $M$  fazemos o *pullback*  $f^*$  do tautológico pela função  $f$ , ou seja, a fibra sobre um ponto  $\vec{R}$  é a fibra que está na imagem  $|\psi_{\mathbf{n}}(\vec{R})\rangle$  deste ponto pela função  $f$ . Assim, recuperamos naturalmente o fibrado de Berry-Simon. Como observação, vale notar que também existe uma forma natural de descrever as funções de transição no fibrado de Berry-Simon aplicando para o tautológico, fazendo a transição no tautológico e voltando para o lado de Berry-Simon pela função  $f$ .

O levantamento  $|c_0\rangle$ , visto na Prop.3, fornece uma conexão no tautológico e, portanto, uma conexão no fibrado de Berry-Simon fazendo o *pullback da conexão*.  $|c_0\rangle$  fornece conexão por levantamento de curvas declarando-o horizontal no tautológico. Lembrando que dado um ponto inicial unitário do levantamento,  $|c_0\rangle$  existe e é única unitária com  $\langle c_0 | \dot{c}_0 \rangle = 0$ . Esta última condição em concordância com as Eqs. (A.6) e (A.12). Por ser unitário, cada ponto do levantamento horizontal está em uma das circunferências que são fibras do tautológico sobre o projetivo. Ao fazer o pullback você obtém o levantamento horizontal no fibrado Berry-Simon em concordância com a literatura de física. Nesse aspecto tanto faz se olha para uma curva de autoestados ou uma curva de parâmetros pelos quais o autoestado é determinado.

Por fim, a fase dinâmica da Eq. (A.10), como o nome sugere, vem de impor a dinâmica de Schrödinger ao estado  $|\psi_n\rangle$ . Basta colocarmos  $\beta \exp\left(\int_0^t \langle \psi_n | \dot{\psi}_n \rangle dt'\right) |\psi_n\rangle$  na equação de Schrödinger dependente do tempo e resolver para  $\beta$  encontrando  $\beta = -i \exp\left(\int_0^t E_n dt'\right)$ . Em outras palavras, a fase dinâmica não possui significado geométrico puro, ao contrário da fase de Berry, pois ela é fruto de escolha arbitrária da dinâmica.

Finalizando, vamos lembrar que a fibra do fibrado da isometria acompanhante, enunciado na Def. 9, é o estabilizador do ponto projetivo, que é composto por uma porção unitária e uma porção que estabiliza as direções perpendiculares. Ou seja, dado  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  temos  $\text{Stab}(|\mathbf{p}\rangle) = U(1) \times U(|\mathbf{p}^\perp\rangle)$ .

Temos uma hipótese que a porção  $U(1)$  do estabilizador do ponto corresponde às fibras do fibrado tautológico, conseqüentemente as fibrado de Berry-Simon. Logo, deveríamos ter o fibrado tautológico como um subfibrado do fibrado da isometria acompanhante. A conexão neste caso seria um produto da fase unitária presente no levantamento da curva  $|c_0\rangle$  com a  $\hat{\mathbf{c}}$ , matriz na algebra de Lie de  $SU(V)$ . Logo também teríamos holonomias no fibrado da isometria acompanhante que correspondem a parte  $U(|\mathbf{p}^\perp\rangle)$  do estabilizador, lançando a questão se elas teriam algum significado físico como a fase de Berry.

Essas colocações e questionamentos ficam para serem desenvolvidas em trabalhos

futuros, pois precisam de demonstrações rigorosas para poderem ser analisadas. Como elas se distanciavam muito do pretendido com o texto principal, deixamos essa perspectiva por aqui.

## APÊNDICE B – GEOMETRIAS CLÁSSICAS E ESTADOS MISTOS DE UM Q-BIT

Este apêndice é para aquele leitor que estava se perguntando se geometrias clássicas também poderiam ser aplicadas ao espaço de estados quânticos mistos. Queremos estudar via geometrias clássicas a estrutura métrica da esfera e da bola de Bloch, ou seja, vamos nos concentrar no espaço de estados mistos de um q-bit. Com esta abordagem veremos que a bola de Bloch possui uma estrutura hiperbólica natural. Já a esfera de Bloch não possui métrica a princípio, porém, está em bijeção com o projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  que tem métrica Fubini-Study. Com o auxílio de um ponto distinguido fisicamente, que maximiza a entropia de von Neumann, e de uma forma induzida para este caso iremos estabelecer uma compatibilidade entre as geometrias da casca e do interior da esfera de Bloch. A forma induzida ainda permitirá a compatibilidade entre a positividade algébrica no espaço vetorial e a positividade geométrica a nível do projetivo. Também iremos apresentar um fato curioso que constatamos via um invariante de dois pontos natural de geometrias clássicas.

### B.1 Um pouquinho mais de geometrias clássicas

Seja  $V$  espaço vetorial sobre os complexos de  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$  munido de forma hermitiana não-degenerada  $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  apresentando as mesmas propriedades vistas na Eq. (2.1).

Vamos agora descrever uma característica intrínseca da forma chamada assinatura. Como ela é hermitiana,  $V$  admite base ortonormal via processo de Gram-Schmidt<sup>1</sup>, assim segue a definição.

**Definição 10** (Assinatura da forma). Dada uma base ortonormal  $B = \{|b_i\rangle\}_{1,\dots,\dim V}$  de  $V$  temos que

$$\langle b_i | b_i \rangle \in \{-1, 0, 1\} \text{ e } \langle b_i | b_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j. \quad (\text{B.1})$$

A quantidade de menos uns, zeros e uns dos produtos  $\langle b_i | b_i \rangle \forall i$  define a *assinatura da forma*. Denotaremos a assinatura da forma como  $(n, m)$ , onde  $n$  é o número de uns e  $m$  o número de menos uns e o número de zeros é, portanto,  $\dim V - (n + m)$ . Quando a assinatura da forma é do tipo  $(\dim V, 0)$  chamamos a forma de assinatura *positivo definida*.

Assim, dizemos que a forma hermitiana não-degenerada  $\langle - | - \rangle$  tem assinatura bem definida<sup>2</sup>  $(n, m)$ .

<sup>1</sup> Caso um subespaço  $W \subset V$  for isotrópico basta você escolher a base para  $W$  apenas ortogonal, pois não existe conceito de comprimento neste lugar.

<sup>2</sup> A boa definição da assinatura é assegurada pelo *Teorema da inércia de Sylvester*, dizendo

**Definição 11** (Sinal de um ponto). Dado  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ , visto na Def. 3, o sinal de  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é definido por

$$\text{sgn}(|\mathbf{p}\rangle) := \text{sgn}(\langle p | p \rangle), \quad (\text{B.2})$$

onde  $|p\rangle \in V^{\times}$  é qualquer representante de  $|\mathbf{p}\rangle$ .

Isto quebra o espaço projetivo em três pedaços:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V = \begin{cases} BV, & \text{pontos negativos} \\ SV, & \text{pontos isotrópicos ou absoluto ou bordo ideal} \\ EV, & \text{pontos positivos} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Algumas mudanças acontecem agora que a forma de  $V$  não é necessariamente positivo definida. Para a porção dita *regular do projetivo*, denotada por  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \setminus \{SV\} = BV \sqcup EV$  ainda se mantém a estrutura suave e portanto valem os resultados acerca do espaço tangente ao projetivo, vistas no Teo. 1. A métrica de Fubini-Study, da Def. 4, ganha um sinal de menos na sua expressão quando a assinatura da forma em  $V$  não é positivo definida.

Feita esta introdução de novos conceitos matemáticos, podemos partir para as definições que irão construir nosso conjunto de operadores densidade  $V$ .

## B.2 Geometria de estados mistos de um q-bit

**Definição 12** (Operadores densidade). Seja  $V$  espaço vetorial com  $\dim V < \infty$ , munido de forma hermitiana não-degenerada de assinatura  $(n, m)$ . Defina o conjunto

$$\mathcal{D}(V) = \{\rho \in \text{Lin}(V, V) \mid \langle v | \rho v \rangle \geq 0 \forall |v\rangle \in V \text{ e } \text{Tr } \rho = 1\}. \quad (\text{B.4})$$

Chamamos  $\mathcal{D}(V)$  de *conjunto de operadores densidade* do espaço vetorial  $V$ .

**Proposição 7.**  $\langle v | \rho v \rangle \geq 0 \rightarrow \rho = \rho^{\dagger}, \forall \rho \in \text{Lin}(V, V)$ .

*Demonstração.* Antes de tudo, ser positivo semi-definido,  $\langle v | \rho v \rangle \geq 0$ , implica que  $\langle v | \rho v \rangle$  é real e portanto

$$\langle v | \rho v \rangle = \overline{\langle \rho v | v \rangle} = \langle \rho v | v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (\text{B.5})$$

Agora para  $\forall |v\rangle, |w\rangle \in V$

$$\begin{aligned} \langle v + w | \rho(v + w) \rangle &= \langle v | \rho v \rangle + 2\text{Re} \langle w | \rho v \rangle + \langle w | \rho w \rangle \\ &= \langle \rho v | v \rangle + 2\text{Re} \langle \rho w | v \rangle + \langle \rho w | w \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

---

este que a quantidade de elementos satisfazendo  $\langle b_i | b_i \rangle \in \{-1, 0, 1\}$  não depende da base, ou seja, a assinatura da forma é invariante por mudança de base.

$$\rightarrow \operatorname{Re} \langle w | \rho v \rangle = \operatorname{Re} \langle \rho w | v \rangle. \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \langle iv + w | \rho(iv + w) \rangle &= \langle iv | i\rho v \rangle + 2\operatorname{Re}[i \langle w | \rho v \rangle] + \langle w | \rho w \rangle \\ &= \langle i\rho v | iv \rangle + 2\operatorname{Re}[i \langle \rho w | v \rangle] + \langle \rho w | w \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\rightarrow \operatorname{Im} \langle w | \rho v \rangle = \operatorname{Im} \langle \rho w | v \rangle. \quad (\text{B.9})$$

Logo

$$\langle w | \rho v \rangle = \langle \rho w | v \rangle. \quad (\text{B.10})$$

□

**Definição 13** (Convexo).  $C \subset V$  é convexo se  $\forall |p_1\rangle, |p_2\rangle \in C$ ,

$$(1-t)|p_1\rangle + t|p_2\rangle \in C, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (\text{B.11})$$

**Definição 14** (Ponto extremal).  $|p\rangle \in C$  é ponto extremal se  $|p\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |p_i\rangle$  com  $|p_i\rangle \in C$  e  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  implica  $a_i = 0 \quad \forall i$  ou  $|p_i\rangle = |p\rangle$ <sup>3</sup>.

A título de exemplificação, podemos citar que os vértices de um quadrado são pontos extremais e todos os pontos da borda de uma circunferência são pontos extremais.

**Proposição 8.**  $\mathcal{D}(V)$  é convexo e seus pontos extremais são as projeções em sub-espacos unidimensionais.

*Demonstração.* (i)  $\mathcal{D}(V)$  é convexo:  $\rho = (1-t)\rho_1 + t\rho_2$ ,  $\rho_{i=1,2} \in \mathcal{D}(V)$  e  $t \in [0, 1]$ , logo

$$\langle v | \rho v \rangle = (1-t) \langle v | \rho_1 v \rangle + t \langle v | \rho_2 v \rangle \geq 0, \quad v \in V \text{ e} \quad (\text{B.12})$$

$$\operatorname{Tr} \rho = (1-t) \operatorname{Tr} \rho_1 + t \operatorname{Tr} \rho_2 = 1.$$

(ii) Pontos extremais  $\longleftrightarrow$  projeções em sub-espacos unidimensionais: Dado um vetor  $|\psi\rangle \in V$  com  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  defino  $P_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle \langle \psi| \in \mathcal{D}(V)$  projetor unidimensional no sub-espaco gerado por  $|\psi\rangle$ .

( $\leftarrow$ ): Suponha que  $P_{|\psi\rangle} = (1-t)\rho_1 + t\rho_2$  com  $t \in (0, 1)$  e  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Seja  $\forall |v\rangle \in |\psi^\perp\rangle$  então

$$0 = P_{|\psi\rangle}(|v\rangle) = (1-t) \langle v | \rho_1 v \rangle + t \langle v | \rho_2 v \rangle, \quad (\text{B.13})$$

que implica  $\langle v | \rho_i v \rangle_{i=1,2} = 0, \quad \forall |v\rangle \in |\psi^\perp\rangle$ .

<sup>3</sup> Note que na Def. 14 basta considerarmos apenas combinações convexas de 2 pontos. De fato,  $|p\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |p_i\rangle = (1-a_n) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} |p_i\rangle \right) + a_n |p_n\rangle$ , identificando  $\left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} |p_i\rangle \right) \equiv |p'\rangle$  temos que  $|p\rangle = (1-a_n) |p'\rangle + a_n |p_n\rangle$ , pois  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = \frac{1-a_n}{1-a_n} = 1$ .

Pelo teorema espectral  $\exists U_i$  auto-adjunto tal que  $U_i^2 = \rho_i$ , então

$$\langle v | \rho_i v \rangle = 0 \rightarrow \langle v | U_i^2 v \rangle = 0 \rightarrow \langle U_i v | U_i v \rangle = 0 \rightarrow U_i(|v\rangle) = 0 \rightarrow \rho_i(|v\rangle) = 0. \quad (\text{B.14})$$

Assim  $\rho_i(|\psi^\perp\rangle) = 0$ . Construindo a matriz de  $\rho_i$  na base ortonormal  $B = \{|\psi\rangle, |b_1\rangle, \dots, |b_{\dim V - 1}\rangle\}$ ,

sabendo que  $\rho_i$  é auto-adjunto de traço 1 temos que  $\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = P_{|\psi\rangle}$ , uma

contradição.

( $\rightarrow$ ):  $\rho \in \mathcal{D}(V)$  é auto-adjunto, então  $\exists$  base ortonormal  $B = \{|b_i\rangle\}_{1, \dots, \dim V}$  tal que  $\rho(|b_i\rangle) = a_i |b_i\rangle$ , com  $a_i \geq 0$  e  $\sum_i a_i = 1$  pelo requisito do traço. Logo, posso escrever  $\rho = \sum_i a_i P_{|b_i\rangle}$ , mas isto é impossível porque  $\rho$  é extremal, o que implica  $\rho = a_j P_{|b_j\rangle} = P_{|b_j\rangle}$ .  $\square$

Especificando para nosso caso de interesse, tomamos  $V = \mathbb{C}^2$  com forma hermitiana não-degenerada positiva definida. Temos que  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  é o conjunto de operadores densidade de um q-bit ou conjunto de estados mistos de um q-bit. (65) É conhecido que as matrizes de Pauli  $\{1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\} := \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  geram o  $\mathbb{R}$ -espaço de operadores auto-adjuntos de  $\mathbb{C}^2$ , denotado aqui como  $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ . Temos então que  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2) \subset \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ .

Seja então  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  e a parametrização

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{B.15})$$

onde  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) \in \mathbb{R}^3$  com  $|\vec{r}|_{\mathbb{R}^3} \leq 1$  e  $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . É dado o nome de *bola de Bloch* ao conjunto de operadores de  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  positivos definidos, ou seja,  $\langle v | \rho v \rangle > 0 \forall v \in \mathbb{C}^2$ , que na parametrização acima acontece para  $|\vec{r}|_{\mathbb{R}^3} < 1$ . É dado o nome de *esfera de Bloch* ao conjunto de pontos extremais de  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ , que na parametrização acima acontece para  $|\vec{r}|_{\mathbb{R}^3} = 1$ , vamos denotá-lo  $\partial\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ .

Duas observações notáveis podem ser feitas em relação a  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ :

i)  $\sigma_0/2$  é ponto distinguido em  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ , pois extremiza a entropia de von Neumann  $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$  onde  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ .

ii) Temos uma bijeção  $\partial\mathcal{D}(\mathbb{C}^2) \leftrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  fazendo <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} P_{|\psi\rangle} &\mapsto |\psi\rangle \\ |\psi\rangle &\mapsto P_{|\psi\rangle}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

onde,  $P_{|\psi\rangle}$  é projetor em sub-espaço unidimensional,  $|\psi\rangle$  é ponto projetivo,  $|\psi\rangle$  representante do ponto projetivo e  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  é a projetivização de  $\mathbb{C}^2$ . Esta bijeção identifica

<sup>4</sup> Denotamos o projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n+1} := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

o espaço de estados puros de um q-bit visto como  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  com a esfera de Bloch, conjunto de projetores em sub-espacos unidimensionais de  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ . A princípio  $\partial\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$  não tem métrica, porém  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tem métrica de Fubini-Study induzida pela forma  $\langle - | - \rangle$  de  $\mathbb{C}^2$ ,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{|\psi\rangle}^{FS} := \frac{\langle \phi_2 \psi | \phi_1 \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (\text{B.17})$$

onde  $|\psi\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ,  $|\psi\rangle$  representante do ponto projetivo e  $\phi_1, \phi_2 \in T_{|\psi\rangle}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

Dito isto, podemos começar a discutir a geometria a nível dos operadores. Sabemos que  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2) \subset \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ , precisamos então construir uma forma no  $\mathbb{R}$ -espaço de operadores auto-adjuntos. Em  $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  existe forma quadrática dada pelo determinante,

$$b(A) := \det A \begin{cases} \det A \geq 0 \\ b(\lambda A) = \lambda^2 b(A) \end{cases}, \quad A \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.18})$$

Da forma quadrática acima induzimos uma forma bilinear simétrica não-degenerada em  $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  dada por

$$\begin{aligned} \ll A, B \gg &:= \frac{1}{2}[b(A+B) - b(A) - b(B)] \\ &= \frac{1}{2}[\det(A+B) - \det(A) - \det(B)], \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

onde  $A, B \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ . Utilizando a base ortonormal  $\{\sigma_i\}_{i=0,1,2,3}$  vemos que a forma  $\ll -, - \gg$  tem assinatura  $(1, 3)$ , a saber  $\sigma_0 \rightarrow +$  e  $\sigma_{1,2,3} \rightarrow -$ .

Seguindo o protocolo de geometrias clássicas, projetivizamos o espaço de operadores auto-adjuntos ganhando  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ . Neste caso  $EV \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  é isomorfo ao espaço hiperbólico 3-dimensional  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  com ponto distinguido  $q := \sigma_0/2$  que extremiza a entropia de von Neumann. O conjunto de pontos extremais/isotrópicos  $SV$  não é métrico, mas com o ponto distinguido  $q$  podemos induzir uma métrica nele. Note, em geral sem o ponto distinguido  $q$  o grupo de isometrias  $SO(1, 3)$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  age em  $SV$  preservando assinatura de ponto e como grupo de isometria conforme, ou seja,  $SV$  já é bem parecido com a esfera complexa  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

Em  $EV$ , para  $\mathbf{p} \in EV$ ,  $p$  representante do ponto projetivo e  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Lin}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp) \simeq T_{\mathbf{p}}EV$ , temos outra vez métrica de Fubini-Study

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\mathbf{p}}^{FS} = - \frac{\ll \phi_1(p), \phi_2(p) \gg}{\ll p, p \gg}. \quad (\text{B.20})$$

Em  $SV$  temos que nos perguntar o que é um vetor tangente neste lugar. A equação que caracteriza  $SV$ , independente de representante e balanceada utilizando o ponto distinguido  $q$ , é dada por

$$\frac{\ll x, x \gg}{\ll x, q \gg \ll q, x \gg} = 0, \quad (\text{B.21})$$

com  $x$  representante de  $\mathbf{x} \in SV$ . Toda vez que se tem uma sub-variedade dada por uma equação o espaço tangente a ela é caracterizado pelo núcleo da diferencial da equação. Então, seja  $\phi \in T_{\mathbf{x}}SV$ ,

$$d_{\mathbf{x}} \frac{\ll x, x \gg}{\ll x, q \gg \ll q, x \gg}(\phi) = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\ll x + t\phi(x), x + t\phi(x) \gg}{\ll x + t\phi(x), q \gg \ll q, x + t\phi(x) \gg} = 0$$

$$2 \frac{\ll x, q \gg^2 (\ll x, \phi(x) \gg)}{\ll x, q \gg \ll q, x \gg} = 0,$$

logo, a equação que caracteriza  $T_{\mathbf{x}}SV$  é dada por<sup>5</sup>

$$\ll x, \phi(x) \gg = 0. \quad (\text{B.23})$$

Assim, definimos uma métrica em  $SV$ , com o auxílio do ponto distinguido  $q$ , como

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathbf{x}} := \frac{\ll \phi_1(x), \phi_2(x) \gg}{\ll x, q \gg \ll q, x \gg}, \quad (\text{B.24})$$

onde  $\phi_1, \phi_2 \in T_{\mathbf{x}}SV$ . Com a métrica acima temos um isomorfismo entre duas geometrias de curvatura positiva  $SV \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Rotações que preservam o ponto  $q$  são isometrias da métrica de  $SV$ , grupo  $SO(3)$  que por sua vez esta contido em  $SO(1, 3)$ .

Dito isto, vemos uma compatibilidade entre as geometrias de  $EV$  e  $SV$ . A métrica que é estendida pela estrutura hiperbólica no  $SV$  tem grupo de isometria contido em  $SO(1, 3)$  que preserva o ponto distinguido  $q$  no qual você baseia a métrica. Entretanto as geometrias de  $EV$  e  $SV$  são diferentes; no primeiro você tem uma geometria de curvatura negativa e no segundo você tem uma geometria de curvatura positiva, sendo que a métrica da segunda é estendida radialmente por um ponto distinguido presente na primeira. Com a abordagem das geometrias clássicas vemos que as coisas não são contínuas de fato, pois estamos lidando com porções distintas do projetivo que, mesmo tendo compatibilidade/ligação entre si, tem suas próprias estruturas.

Outro ponto a se destacar é que através do ponto distinguido  $q$  no centro de  $EV$  estendemos radialmente uma métrica na casca  $SV$  isomorfa ao espaço de estados puros  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

Por fim, vamos mostrar o que esta métrica induzida pelo determinante nos diz sobre quem são as transformações completamente positivas no caso estados mistos de spin-1/2.

**Proposição 9.** A menos de multiplicação por escalar real não nulo,  $\rho \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  é positivo  $\longleftrightarrow \boldsymbol{\rho} \in SV \sqcup EV$ .

<sup>5</sup> Note que esta equação também não depende de representante porque  $\ll x, x \gg = 0$  em  $SV$ , de fato,  $\ll x, \phi(x) + rx \gg = \ll x, \phi(x) \gg = 0$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ):  $\rho$  é positivo  $\rightarrow \rho$  é auto-adjunto e  $|v_i\rangle \in \mathbb{C}^2$  é seu autovetor ortonormal. Desta maneira

$$\langle \rho v_i | v_i \rangle = \langle v_i | \rho v_i \rangle \geq 0 \rightarrow \lambda_i \langle v_i | v_i \rangle \geq 0 \rightarrow \lambda_i \geq 0 \rightarrow \det \rho = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0. \quad (\text{B.25})$$

( $\leftarrow$ ):  $\det \rho \geq 0$ , logo  $\rho = a\sigma_0 + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i$  com  $\mathbb{R} \ni a \neq 0$  implica que  $\text{Tr} \rho = 2a > 0$ , assim  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  e  $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \rightarrow \lambda_i \geq 0$ .  $\square$

Em outras palavras, a Prop. 9 nos diz que a positividade algébrica em  $V$  é igual a positividade geométrica em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  com esta compatibilidade sendo gerada pela forma do determinante no espaço auto-adjunto. Note que  $SV \sqcup EV = \{A \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2) | \ll A, A \gg \geq 0\} = \{\text{esfera de Bloch}\} \sqcup \{\text{bola de Bloch}\}$ , bastando tomar o representante do ponto projetivo com traço unitário<sup>6</sup>.

O conjunto de operadores lineares  $\text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$  é espaço vetorial e possui forma hermitiana não-degenerada de Hilbert-Schmidt

$$\langle A, B \rangle^{HS} = \text{Tr}(AB^\dagger), \quad (\text{B.26})$$

onde  $A, B \in \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$  e o símbolo  $\dagger$  da expressão é relativo a forma  $\langle - | - \rangle$  de  $\mathbb{C}^2$ . Portanto, seja

$$S : \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \quad (\text{B.27})$$

operador de operadores linear. Tome  $S$  auto-adjunto no sentido da forma  $\langle -, - \rangle^{HS}$ , ele dá origem a um operador  $\mathbb{R}$ -linear  $\pi(S) : \text{Herm}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ . De fato,

$$\text{Herm}(\mathbb{C}^2) \ni \sum_{i=0}^3 x_i \sigma_i \xrightarrow{S \geq 0} \sum_{i=0}^3 x_i S(\sigma_i) = \sum_{i=0}^3 x_i \left( \sum_{j=0}^3 y_j \sigma_j \right) = \sum_{i,j=0}^3 x_i y_j \sigma_j = \sum_{i,j=0}^3 \pi_{ij} \sigma_j \quad (\text{B.28})$$

agora basta tomar as entradas da matriz do operador  $\pi(S)$  como  $[\pi(S)]_{ij} = \pi_{ij} = x_i y_j$ .

**Proposição 10.**  $S(A) \geq 0 \forall A \geq 0 \rightarrow \ll \pi(S)\rho, \pi(S)\rho \gg \geq 0 \forall \ll \rho, \rho \gg \geq 0$  tal que  $\rho \in SV \sqcup EV$ . (66–68)

Colocando em palavras a Prop. 10, se temos um operador de operadores  $S$  auto-adjunto em relação a  $\langle -, - \rangle^{HS}$ , ele dá origem a um operador  $\pi(S)$   $\mathbb{R}$ -linear sobre  $\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$  que tem a propriedade de preservar o cone hiperbólico, ou seja, preservar pontos positivos,  $\ll \rho, \rho \gg \geq 0 \rightarrow \ll \pi(S)\rho, \pi(S)\rho \gg \geq 0$ . Esta é uma versão superior da Prop. 9:

$$\begin{cases} \langle v | \rho v \rangle \geq 0 \rightarrow \ll \rho, \rho \gg \geq 0 \text{ com } |v\rangle \in \mathbb{C}^2 \\ S(A) \geq 0 \forall A \geq 0 \rightarrow \ll \pi(S)\rho, \pi(S)\rho \gg \geq 0 \forall \ll \rho, \rho \gg \geq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.29})$$

Estas transformações  $\pi(S)$  se expressam como isometrias hiperbólicas de  $SO(1, 3)$  ou ainda combinações convexas entre um elemento do grupo de simetrias hiperbólico e uma projeção de posto um que mandam todo  $EV$  para um ponto no absoluto.

<sup>6</sup> Na verdade podemos afirmar que  $EV$  já é a bola de Bloch e  $SV$  já é a esfera de Bloch, pois estamos no nível do projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}\text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ , escolher o valor do traço é só uma reescolha do representante do ponto fixando o coeficiente real que acompanha  $\sigma_0$  da base.

### B.3 Tância e estados mistos de um q-bit

Em geometrias clássicas existe o que chamamos o invariante de dois ponto projetivos mais simples que existe, a chamada tância entre dois pontos.

**Definição 15** (Tância). Dados  $|\mathbf{p}\rangle, |\mathbf{q}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  pontos projetivos não isotrópicos e seus respectivos representantes  $|p\rangle, |q\rangle$ , relativos a um espaço vetorial  $V$  com forma não degenerada  $\langle - | - \rangle$  de assinatura bem definida, defina

$$\text{ta}(|\mathbf{p}\rangle, |\mathbf{q}\rangle) := \frac{\langle q | p \rangle \langle p | q \rangle}{\langle p | p \rangle \langle q | q \rangle} \quad (\text{B.30})$$

é chamada *tância* entre  $|p\rangle, |q\rangle$ .

Funções da tância ( $\arccos \sqrt{\text{ta}}$ ,  $\text{arccosh} \sqrt{\text{ta}}$ ) dão noções de distância em geometrias clássicas: comprimento de geodésica, distância relativa ponto-geodésica ou geodésica-geodésica.

Vamos então calcular uma função da tância aplicada em pontos de  $EV \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ . A função que escolhemos é

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = 1 - \sqrt{\text{ta}(\rho_1, \rho_2)}, \quad \rho_1, \rho_2 \in EV. \quad (\text{B.31})$$

É razoável escolher uma função assim, pois ela tem por característica  $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = 0 \iff \rho_1 = \rho_2$ , já que  $\text{ta}(\rho_1, \rho_2) = 1$  se  $\rho_1 = \rho_2$ .

Tomamos representantes  $\rho_1, \rho_2$  dos pontos projetivos tal que  $\text{Tr} \rho_1 = \text{Tr} \rho_2 = 1$ . Neste caso, utilizando da Eq. (B.15), verificamos que

$$\ll \rho_1, \rho_2 \gg = 1 - \text{Tr}(\rho_1 \rho_2). \quad (\text{B.32})$$

Logo

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{(1 - \text{Tr} \rho_1^2) \sqrt{(1 - \text{Tr} \rho_2^2)} - (1 - \text{Tr}(\rho_1 \rho_2))}, \quad (\text{B.33})$$

que, a menos de uma constante, coincide com a expressão da *super fidelidade*<sup>7</sup> encontrada na literatura.(69, 70) Todavia, no nosso caso esta expressão de super fidelidade não é proposta, ela emerge utilizando apenas de entes geométricos naturais de  $EV$ , sendo eles a forma induzida pelo determinante e a tância.

Neste espírito geométrico, seria natural seguirmos estudando o que outros entes tradicionais de geometrias clássicas, como geodésicas e isometria acompanhante, tem a nos acrescentar na descrição do espaço de estados mistos de um q-bit e fazer paralelos com a literatura já conhecida de Física. Os resultados apresentados neste apêndice ficam como diretrizes para trabalhos futuros.

<sup>7</sup> Lembrando que para estados de um q-bit a fidelidade e a superfidelidade são iguais.

## APÊNDICE C – GEOMETRIAS CLÁSSICAS EM GRASSMANIANAS E A CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

No contexto de espaços lineares munidos de forma hermitiana não-degenerada com assinatura bem definida, vamos apresentar a geometria de grassmanianas permitindo estabelecer uma relação entre a geometria projetiva (pseudo-)riemanniana da porção regular e a estrutura conforme do absoluto. (71) Especificamente, iremos comentar sobre a estrutura conforme usual no absoluto do espaço de Sitter e a estrutura causal no absoluto do espaço anti-de Sitter. A intenção deste apêndice é manifestar a possibilidade de formular a correspondência AdS/CFT nesta linguagem com o objetivo de avaliar, para esta correspondência, o papel das ferramentas geométricas disponíveis na teoria de geometrias clássicas.

### C.1 Formalismo das grassmanianas

Seja  $V$  espaço vetorial com  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$  munido de forma  $\langle - | - \rangle$  hermitiana não-degenerada com assinatura<sup>1</sup> bem definida, apresentando as mesmas propriedades vistas na Eq.(2.1).  $\mathbb{K}$  denota o corpo sobre o qual o espaço vetorial é definido.

**Definição 16.** Como conjunto, definimos a *grassmaniana*

$$\text{Gr}(k, V) := \{W \leq V \mid \dim W = k\}. \quad (\text{C.1})$$

Queremos estudar geometria na grassmaniana, logo a primeira coisa a se fazer é discutir a estrutura suave de  $\text{Gr}(k, V)$ . Para isso, dado  $W$  espaço vetorial com  $\dim W = k$ , seja o aberto  $U \subset \text{Lin}(W, V)$  com

$$U := \{\varphi : W \rightarrow V, \text{ linear+injetora}\}. \quad (\text{C.2})$$

Visto que  $\varphi$  coloca  $W$  dentro de  $V$  como subespaço, nesse sentido  $\varphi$  representa o ponto  $\varphi(W) \leq V$  na grassmaniana com  $\dim \varphi(W) = k$ , pois  $\varphi$  é injetora.

Porém, existem diferentes mapas  $\varphi, \psi \in U$  injetores tal que  $\varphi(W) = \psi(W)$ . A solução é quocientar. Supondo  $\varphi(W) = \psi(W)$ , temos que  $\psi^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow W$  é isomorfismo linear, ou seja, está em  $\text{GL}(W)$ , onde entendemos  $\psi$  como função  $\psi : W \rightarrow \varphi(W)^2$ .

**Proposição 11.** Como conjunto, temos  $\text{Gr}(k, V) \simeq U/\text{GL}(W)$ , onde a ação à direita  $\text{GL}(W) \curvearrowright U$  é dada por

$$\varphi g(|v\rangle) := \varphi(g|v\rangle), \text{ com } |v\rangle \in W \text{ e } g \in \text{GL}(W). \quad (\text{C.3})$$

<sup>1</sup> Caso ainda não seja familiar com o conceito veja o enunciado da Def. 10.

<sup>2</sup> Note que  $\psi$  é injetora e portanto  $\psi : W \rightarrow \varphi(W)$  é isomorfismo, o mesmo vale para  $\varphi$ . Daí  $\psi^{-1} \circ \varphi$  também é isomorfismo, pois tem inversa  $\varphi^{-1} \circ \psi$

*Demonstração.* A linearidade é automática. Dado  $\varphi g \in U$  e  $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in W$  temos

$$\begin{aligned}\varphi g |v_1\rangle &= \varphi g |v_2\rangle \\ \varphi(g |v_1\rangle) &= \varphi(g |v_2\rangle) \\ g |v_1\rangle &= g |v_2\rangle \\ |v_1\rangle &= |v_2\rangle.\end{aligned}\tag{C.4}$$

À classe  $[\varphi] \in U/\text{GL}(W)$  associamos o subespaço  $\varphi(W)$ . Ela está bem definida pois, se  $[\varphi] = [\psi]$ , então  $\psi = \varphi g$  para algum  $g \in \text{GL}(W)$ . Logo,  $\psi(W) = \varphi g(W) = \varphi(gW) = \varphi(W)$ .

Seja  $X \leq V$  subespaço com  $\dim X = k$ . Então existe  $\varphi \in U$  tal que  $\varphi(W) = X$ . Basta tomar base  $\{|b_i\rangle\}_{i=1,\dots,k}$  de  $W$  e base  $\{|c_i\rangle\}_{i=1,\dots,k}$  de  $X$  e definir a transformação  $\varphi(|b_i\rangle) = |c_i\rangle \ \forall i$ .  $\square$

**Proposição 12.** A ação  $\text{GL}(W) \curvearrowright U$  é própria, ou seja, inverso de compacto é compacto, e suave.

*Demonstração.* Dado  $g \in \text{GL}(W)$ , temos a função

$$\begin{aligned}f_g : U &\longrightarrow U \\ \varphi &\longmapsto \varphi g.\end{aligned}\tag{C.5}$$

Basta provarmos que  $f_g$  é própria  $\forall g \in \text{GL}(W)$ .

Seja então  $X \subset U$  compacto, então  $f_g^{-1}(X) = f_{g^{-1}}(X)$  é compacto pois  $f_{g^{-1}}$  é função contínua e imagem de compacto por contínua é compacto.

A ação também é suave, pois, digamos, em uma base  $\{|b_i\rangle\}_{i=1,\dots,k}$  de  $W$ ,  $g \in \text{GL}(W)$  é da forma  $g |w\rangle = a_1 |b_1\rangle + \dots + a_k |b_k\rangle$   $\square$

Além disso temos que  $U$  é aberto em  $\text{Lin}(W, V)$ . De fato, seja  $\varphi \in U$ , a matriz  $k \times k$  de  $\varphi$ , em base qualquer, tem posto máximo  $k$ . A condição de posto máximo é aberta, pois caracteriza finitos determinantes não-nulos e a função determinante é contínua, logo se  $\det \varphi \neq 0$ , então  $\det \psi \neq 0$  para um  $\psi$  numa vizinhança pequena de  $\varphi$ .

Finalmente, pelo teorema de variedades quocientes ganhamos a estrutura suave da grassmaniana.

**Teorema 2** (Variedade quociente).  $G$  é grupo de Lie agindo suave, livre e propriamente na variedade suave  $M$ . Então  $M/G$  é variedade topológica de dimensão  $\dim M - \dim G$  com estrutura suave única dada a propriedade do mapa  $\pi : M \rightarrow M/G$  ser submersão suave. (72)

Portanto  $\text{Gr}(k, V)$  é variedade suave de dimensão  $\dim \text{Gr}(k, V) = k(n - k)$ . Fixo  $k = 1$  temos  $\text{Gr}(1, V) = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ .

É importante destacar que, seja  $p \in \text{Gr}(k, V)$ ,  $p$  pode ser visto como  $[p]$  onde  $p : W \rightarrow V$  ou  $p \simeq p(W)$ . Ou seja, um ponto na grassmaniana pode ser visto como o mapa que coloca  $W$  em  $V$  ou como um subespaço de  $V$  de dimensão  $k$ .

**Teorema 3** (Espaço tangente à grassmaniana).  $T_p\text{Gr}(k, V) \simeq \text{Lin}(pW, V/pW)$ . Além disso, se  $\langle - | - \rangle|_{pW}$  é não-degenerada, então  $V/pW \simeq (pW)^\perp$ .

*Demonstração.* Dado  $\varphi \in \text{Lin}(pW, V/pW)$  e  $t_\varphi \in T_p\text{Gr}(k, V)$ , definimos o mapa  $\varphi \xrightarrow{\Phi} t_\varphi$  como

$$t_\varphi(f) := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi}(p)), \quad (\text{C.6})$$

onde  $f : \text{Gr}(k, V) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{K}$  e  $\hat{\varphi} : V \rightarrow V$  são levantamentos das aplicações. Note que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno estamos em  $U$  pois ele é aberto.

(i)  $t_\varphi$  é independente da escolha de  $p$ : note que  $((\varphi \circ p)g | v) = (\hat{\varphi} \circ p)(g | v) = \hat{\varphi}(p(g | v))$ , com  $|v) \in V$ , pela definição de ação. Logo

$$\begin{aligned} \hat{f}(pg + \epsilon\hat{\varphi} \circ (pg)) &= \hat{f}(pg + \epsilon(\hat{\varphi} \circ p)g) \\ &= \hat{f}((p + \epsilon\hat{\varphi} \circ p)g) \\ &= \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi} \circ p), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

pois  $\hat{f}(\varphi g) = \hat{f}(\varphi)$ ,  $\forall \varphi \in \text{Lin}(pW, V/pW)$  e  $\forall g \in \text{GL}(W)$ .

(ii)  $t_\varphi$  é independente da escolha de  $\varphi$ : dado  $|w) \in W$  temos

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p + \epsilon(\hat{\varphi}(p) + p |w))) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p(\bullet + t |w)) + \epsilon\hat{\varphi}(p)). \quad (\text{C.8})$$

Identificamos  $(\bullet + t |w)) \equiv \psi_\epsilon(\bullet)$ . Note que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon \circ \psi_\epsilon^{-1} = 1, \text{ com } \psi_\epsilon^{-1}(|x)) = |x) - \epsilon |w) \text{ e } \psi_\epsilon^{-1}(|x))|_{\epsilon=0} = |x). \quad (\text{C.9})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p\psi_\epsilon + \epsilon\hat{\varphi}(p)) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}((p + \epsilon\hat{\varphi}p\psi_\epsilon^{-1})\psi_\epsilon) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi}p\psi_\epsilon^{-1}) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi}p). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

(ii) injetividade de  $\Phi$ : suponha  $t_\varphi \equiv 0$ , ou seja,  $t_\varphi f = 0 \forall f$ . Queremos mostrar que  $\varphi \equiv 0$ , isto significa que  $\hat{\varphi}(pW) \subset pW$ , ou seja,  $\hat{\varphi}(p(w)) = p(w')$ , com  $w, w' \in W$ .

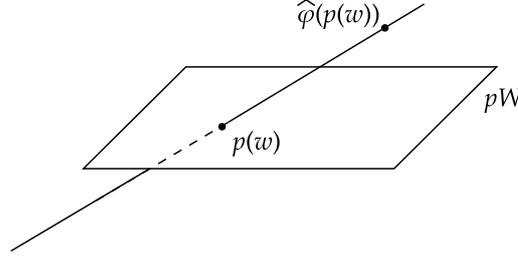


Figura 18 – A reta passando por  $p(w)$  e  $\hat{\varphi}(p(w))$  é uma curva e não um ponto da grassmanniana. Nem toda função é constante ao longo desta curva.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha  $\hat{\varphi}(pW)$  não está contido em  $pW$ , Fig. 18. Logo, existe  $f$ , que pode ser até local, tal que  $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi}p) \neq 0$ . Absurdo! Assim,  $\hat{\varphi} \circ p(W) \subset p(W) \rightarrow \varphi \equiv 0$ .

(iii) sobrejetividade de  $\Phi$ :  $\dim(\text{Lin}(pW, V/pW)) = k(n-k)$ . Sabemos que  $\text{Gr}(k, V) \simeq \text{Lin}(W, V)/\text{GL}(W)$ , onde  $U \subset \text{Lin}(W, V)$ , logo  $\dim \text{Gr}(k, V) = kn - k^2 = k(n-k)$ .

(iv)  $t_\varphi$  é derivação: Seja  $g : \text{Gr}(k, V) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\hat{g} : U \rightarrow \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} t_\varphi(fg) &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \widehat{fg}(p + \epsilon\hat{\varphi}p) \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \left( \hat{f}(p + \epsilon\hat{\varphi}p) \hat{g}(p + \epsilon\hat{\varphi}p) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

vemos que vale Leibniz para a expressão acima. Além disso, derivação é linear.

(v) Se  $\langle - | - \rangle|_{pW}$  é não degenerada então  $V/pW \simeq pW^\perp$ : Vamos mostrar dois resultados que irão implicar no resultado desejado.

**Proposição 13.** Seja  $W \leq V$  tal que  $\langle - | - \rangle|_W$  é não-degenerada. Então dado  $|v\rangle \in V$ ,  $\exists!$   $|v_1\rangle, |v_2\rangle$  tal que  $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$  com  $|v_1\rangle \in W$  e  $|v_2\rangle \in W^\perp$ . Em outras palavras  $V = W \oplus W^\perp$ .

*Demonstração.* Seja  $\{|w_i\rangle\}_{i=1, \dots, \dim W}$  base ortogonal não-degenerada para  $W$ . Definimos

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &:= \sum_i \frac{\langle w_i | v \rangle \langle w_i |}{\langle w_i | w_i \rangle} w_i \in W \text{ e} \\ |v_2\rangle &:= |v\rangle - |v_1\rangle \in W^\perp. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Logo,

$$\langle w_i | v_2 \rangle = \langle w_i | v - v_1 \rangle = \langle w_i | v \rangle - \left\langle w_i \left| \sum_j \frac{\langle w_j | v \rangle w_j}{\langle w_j | w_j \rangle} \right. \right\rangle = 0, \quad (\text{C.13})$$

então  $|v_2\rangle \in W^\perp$ . Agora só resta provar a unicidade da decomposição. Se  $|v_1\rangle := \sum_i \alpha_i |w_i\rangle \in W$ , segue que

$$\langle v_1 | w_j \rangle = \alpha_j \langle w_j, w_j \rangle \rightarrow \alpha_j = \frac{\langle v_1 | w_j \rangle}{\langle w_j | w_j \rangle}. \quad (\text{C.14})$$

□

**Proposição 14.** Seja  $W \leq V$  tal que  $\langle - | - \rangle|_W$  é não-degenerada,

$$V/W \simeq W^\perp \quad (\text{C.15})$$

$$[|v\rangle] \mapsto \pi[W]|v\rangle,$$

onde  $\pi[W]$  é o projetor ortogonal a  $W$  e  $|v\rangle$  representante da classe  $[|v\rangle]$ .

*Demonstração.* Primeiro, temos que a aplicação é bem definida. Seja  $|w\rangle \in W$ , de fato,

$$[|v+w\rangle] \mapsto \pi[W](|v\rangle + |w\rangle) = \pi[W]|v\rangle. \quad (\text{C.16})$$

Injetividade: dado  $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V$

$$\pi[W]|v_1\rangle = \pi[W]|v_2\rangle \quad (\text{C.17})$$

$$\pi[W](|v_1\rangle - |v_2\rangle) = 0,$$

que implica  $(|v_1\rangle - |v_2\rangle) \in W$ , logo  $[|v_1\rangle] = [|v_2\rangle]$ .

Linearidade segue por construção e sobrejetividade é direta,  $\dim V/W = \dim W^\perp$ .

□

Unindo Prop. 13 e Prop. 14, resta tomar  $W = pW$ .

□

**Definição 17** (Métrica na grassmaniana). Dados  $\phi_1, \phi_2 \in T_p \text{Gr}(k, V)$ , se a forma em  $pW$  é não-degenerada, definimos

$$\ll \phi_1, \phi_2 \gg_p := \pm \frac{\text{Tr}(\phi_1 \circ \phi_2^*)}{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}}. \quad (\text{C.18})$$

A Def. 17 para a porção regular do caso projetivo,  $\text{Gr}(1, V) = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ , deve se reduzir a métrica de Fubini-Study vista na Def. 4<sup>3</sup>. Desta forma, tome dois vetores tangentes  $\phi_1, \phi_2 \in T_p \text{Gr}(1, V)$ , onde  $\phi_1 = |v_1\rangle \langle p|$  e  $\phi_2 = |v_2\rangle \langle p|$ , com  $|v_{i=1,2}\rangle \in |\mathbf{p}^\perp\rangle$ , que implica  $\phi_2^* = |p\rangle \langle v_2|$ . Logo<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \pm \text{Tr}(\phi_1 \circ \phi_2^*) &= \pm \text{Tr}(|v_1\rangle \langle p| \circ |p\rangle \langle v_2|) \\ &= \pm \text{Tr}(\langle v_2 | v_1 \rangle |p\rangle \langle p|) \\ &= \pm \langle p | p \rangle \langle v_2 | v_1 \rangle \\ &= \pm \frac{\langle \phi_2 p | \phi_1 p \rangle}{\langle p | p \rangle}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

<sup>3</sup> A menos de um fator constante multiplicativo e o sinal  $\pm$  pois aqui estamos com assinatura qualquer.

<sup>4</sup> Aqui utilizamos a definição sem coordenadas de traço. Se  $\varphi = \sum_i |v_i\rangle \langle p_i|$ , então  $\text{Tr} \varphi = \sum_i \langle p_i | v_i \rangle$ .

O absoluto  $SV$  do caso projetivo é simples de ser tratado, um ponto  $|\mathbf{p}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  está no absoluto se  $\langle p | p \rangle = 0$ , onde  $|p\rangle$  é representante do ponto projetivo. No caso da grassmaniana, o absoluto são os subespaços onde a forma restrita a eles é degenerada.

$$SV |_{\text{Gr}(k,V)} = \{p \in \text{Gr}(k, V) \mid \langle - | - \rangle |_{pW} \text{ é degenerada} \}. \quad (\text{C.20})$$

O fato de  $pW$  poder ter até  $k$  direções degeneradas estratifica o absoluto da grassmaniana.

**Definição 18** (Estratos do absoluto da grassmaniana). O conjunto

$$\text{Gr}^d(k, V) := \{p \in \text{Gr}(k, V) \mid \dim(pW \cap (pW)^\perp) = d\} \quad (\text{C.21})$$

contém os pontos no absoluto da grassmaniana com exatas  $d$ -direções degeneradas. Assim  $SV |_{\text{Gr}(k,V)} := \sqcup_{d \neq 0} \text{Gr}^d(k, V)$ . Note que,  $\text{Gr}^0(k, V)$  é formado dos *pontos regulares* e  $\text{Gr}^1(k, V)$  é o *SV do projetivo*.

**Definição 19** (Fibrado em  $\text{Gr}^d(k, V)$ ). Fixo um valor  $d$ , temos o fibrado

$$\begin{aligned} \pi_d: \text{Gr}^d(k, V) &\rightarrow \text{Gr}^d(d, V) \\ pW &\mapsto pW \cap (pW)^\perp. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

O fato de  $pW \in \text{Gr}^d(k, V)$  significa que  $\dim(pW \cap (pW)^\perp) = d$ , portanto  $pW \cap (pW)^\perp$  produz um ponto na base  $\text{Gr}^d(d, V)$  do fibrado.  $\text{Gr}^d(d, V)$  é o conjunto de subespaços de dimensão  $d$  que compõem o núcleo da forma em  $V$ .

A pergunta natural que surge então é: Dado  $q \in \text{Gr}^d(d, V)$ , quem é a fibra sobre o ponto?

**Proposição 15.** A fibra  $\pi_d^{-1}(q)$  é naturalmente identificada com  $\text{Gr}^0(k-d, V_q)$ , onde  $V_q := q^\perp/q$  é equipado com forma hermitiana não-degenerada de dimensão  $\dim_{\mathbb{K}} V_q = n-2d$ .

*Demonstração.* Se  $q$  é ponto na base do fibrado, queremos descrever a fibra  $\pi_d^{-1}(q)$  sobre  $q$ . Um ponto na fibra nada mais é que um  $k$ -subespaço  $p$  que contém  $q$  como núcleo da forma, ou seja,  $p \supset q$  e, mais ainda,  $p \cap p^\perp = q$ . O fato de  $p \supset q$  como núcleo da forma implica que  $p \subset q^\perp$ . Logo, queremos descrever todos os subespaços  $p$  de  $q^\perp$  que contém  $q$  como núcleo. Em outras palavras, buscamos subespaços  $p$  de  $q^\perp$  tais que a forma induzida em  $p/q$  é não-degenerada. Isto corresponde a porção regular da grassmaniana  $\text{Gr}(k-d, V_q = q^\perp/q)$ .  $\square$

O caso de interesse para nossa discussão é quando  $d = 1$ . Nesta circunstância o fibrado fibra sobre o absoluto  $SV$  de uma geometria projetiva. Temos que  $T_q SV = \text{Lin}(q, V_q = q^\perp/q)$  e como  $\dim q = 1$  temos uma identificação  $T_q SV \simeq V_q$ . Logo a fibra é a parte não-degenerada da grassmaniana  $\text{Gr}(k-1, V_q) = \text{Gr}(k-1, T_q SV)$ . Em particular, se  $k = 2$  a *fibra é projetiva*

**Proposição 16.** Seja  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , o fibrado  $\pi_1: \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(k, V) \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(1, V)$  é a parte não degenerada da grassmanização do fibrado tangente do  $SV$  do projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ . Em particular, se  $k = 2$  a fibra é a parte regular do projetivo.

*Demonstração.* Tome  $q \in \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(1, V) = SV$  e defina  $V_q = q^\perp/q$ . Uma vez que a fibra  $\pi_1^{-1}(q)$  é naturalmente identificada com  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}^0(k-1, V_q)$  e o subespaço  $q \in V$  é unidimensional, é suficiente provar que o espaço tangente a  $SV$  em  $q$  tem a forma  $T_qSV = \text{Lin}_{\mathbb{R}}(q, V_q)$ .

Tome  $|u\rangle \in V$  tal que  $SV \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  é localmente descrito por uma equação do tipo  $f(|x\rangle) = 0$  numa vizinhança de  $q$ , onde  $f(|x\rangle) := \frac{\langle x | x \rangle}{\langle u | x \rangle \langle x | u \rangle}$ . Seja  $t \in \text{Lin}(q, V/q)$  vetor tangente no ponto  $q$  e  $\hat{t} \in \text{Lin}(V, V)$  levantamento de  $t$ . Então  $t$  é tangente a  $SV$  se, e só se,  $tf = 0$ . Logo

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\langle q + \epsilon \hat{t}q | q + \epsilon \hat{t}q \rangle}{\langle u | q + \epsilon \hat{t}q \rangle \langle q + \epsilon \hat{t}q | u \rangle} = \frac{2\text{Re} \langle q | \hat{t}q \rangle}{\langle u | q \rangle \langle q | u \rangle} = \frac{2\text{Re} \langle q | tq \rangle}{\langle u | q \rangle \langle q | u \rangle} = 0, \quad (\text{C.23})$$

onde  $|q\rangle \in V$  denota um elemento representante do subespaço  $q$ . □

## C.2 Exemplos paradigmáticos

### C.2.1 Hiperbólico, de Sitter

Sejam  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$  e forma com assinatura  $(3, 1)$ . Aqui vamos denotar pictoricamente a assinatura da forma como  $-+++$ .

A nível do projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ , pontos negativos formam o hiperbólico real  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ , pontos positivos formam o espaço de de Sitter  $d\mathbf{S}^3$  e o absoluto  $SV = \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(1, V) = \mathbf{S}^2$ . A métrica da Eq. (C.18) é riemanniana em  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  e lorentziana em  $d\mathbf{S}^3$  com curvatura constante em ambos os casos.

Fixo  $k = 2$  e tomo  $q \in SV$ , a fibra  $\pi_1^{-1}(q)$  é o espaço projetivo  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}(1, V_q = T_q\mathbf{S}^2)$ . Visto que a assinatura em  $V_q$  é positivo definida  $++^5$ , uma vez que a assinatura em  $q^\perp$  é  $0++$ , temos uma métrica de curvatura constante riemanniana em cada fibra  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ <sup>6</sup>.

Cada ponto deste  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  corresponde a uma reta tangente à  $\mathbf{S}^2$  no ponto  $q$ . A distância entre pontos em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  é exatamente o ângulo entre as retas que correspondem a estes pontos, vide Fig. 19. Ou seja, a métrica na fibra é a estrutura conforme usual na esfera.

<sup>5</sup> Ortogonal com direção 0 na assinatura tem assinatura  $++$  quando o ambiente é  $-+++$ .

<sup>6</sup> Denotamos o projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{n+1} := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

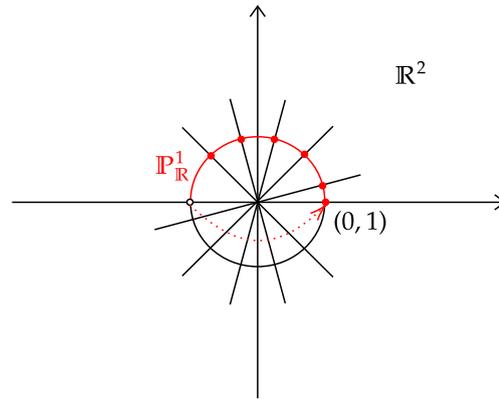


Figura 19 – Cada reta passando pela origem em  $\mathbb{R}^2$  marca dois pontos antípodos na circunferência de raio 1 centrada na origem. Desta forma, todas as retas passando pela origem estão mapeadas na semi-circunferência superior. Identificando os pontos antípodos correspondentes ao eixo  $x$ , temos  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  como uma circunferência de raio  $1/2$ . A métrica de Fubini-Study mede exatamente o ângulo entre estas retas passando pela origem em  $\mathbb{R}^2$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em suma, o fibrado  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(2, V) \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(1, V)$  é a projetivização do fibrado tangente do absoluto  $\mathbf{S}^2$ . Distâncias nas fibras são ângulos na estrutura conforme usual da esfera.

### C.2.2 Anti-de Sitter

Sejam  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} V = 5$ , fixo  $k = 2$  e forma com assinatura  $- - + + +$ .

A nível do projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ , pontos negativos formam o espaço de anti-de Sitter  $ad\mathbf{S}^4$  que é variedade lorentziana.

Tomamos  $q \in \text{Gr}_{\mathbb{R}}^1(1, V) = SV$ , a fibra  $\pi_1^{-1}(q)$  identificada com  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}^0(1, V_q)$  é a porção regular da geometria clássica  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ <sup>7</sup>.

A forma em  $V_q$  tem assinatura  $- + +$ , uma vez que a assinatura em  $q^{\perp}$  é  $0 - + +$ . Assim as fibras carregam a métrica do plano hiperbólico estendido da Sec. C.2.1 anterior, ou seja, cada fibra é um plano hiperbólico estendido menos seu absoluto.

Tal estrutura Anti de Sitter-conforme recebe o nome de estrutura *causal*. Ela desempenha na geometria anti-de Sitter o mesmo papel da estrutura conforme usual no absoluto do hiperbólico real. Mediante este exemplo vemos a correspondência entre uma geometria anti-de Sitter e sua casca conforme, assim fazemos a ligação com um grande resultado da literatura de física.

<sup>7</sup> Nessa dimensão, a parte regular do plano projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  corresponde ao disco  $\sqcup$  fita de Möbius, conjunto aberto e denso em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ .

O físico Juan Maldacena propôs a correspondência AdS/CFT, que consiste em uma dualidade entre um tipo de teoria de cordas oscilando no interior de um ambiente de fundo anti-de Sitter compactificado em uma esfera 5-dimensional através de  $adS^5 \times S^5$  e uma teoria  $N = 4$  Super-Yang-Mills no limite 4-dimensional. (73) Vale comentar que são conhecidas soluções para *instatons* neste contexto. (74)

Dado o interesse físico na correspondência AdS/CFT, a perspectiva de trabalho que fica é a possibilidade de formular a correspondência na linguagem de geometrias clássicas e observar se as ferramentas e a abordagem deste formalismo permitiriam algum ganho de compreensão ou até novos resultados de interesse físico.