UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Diego Mantoanelli Silva

Do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto [*interpretado*]: uma análise da relação entre os fundamentos das geometrias e o conhecimento da realidade empírica

Versão original

São Paulo

2023

Diego Mantoanelli Silva

Do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto [*interpretado*]: uma análise da relação entre os fundamentos das geometrias e o conhecimento da realidade empírica

Versão original

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Valter Alnis Bezerra

São Paulo

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo

Silva, Diego Mantoanelli
S586c Do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto [interpretado]: uma análise da relação entre os fundamentos das geometrias e o conhecimento da realidade empírica / Diego Mantoanelli Silva; orientador Valter Alnis Bezerra - São Paulo, 2023.
82 f.

Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo. Departamento de Filosofia. Área de concentração: Filosofia.

1. Epistemologia. 2. A priori. 3. Experiência. 4. Intersubjetividade. 5. Fundamentos da Geometria I. Bezerra, Valter Alnis, orient. II. Título.

RESUMO

SILVA, D. M. **Do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto [*interpretado*]: uma análise da relação entre os fundamentos das geometrias e o conhecimento da realidade empírica.** Dissertação (Mestrado). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, 2023.

Desde a sistematização da geometria proposta por Euclides, duas perguntas emergiram e tentaram ser respondidas ao longo da história: “como se chega aos termos primitivos de uma teoria geométrica?” e “como uma geometria pode ser aplicável ao mundo concreto das experiências sensíveis?” Partindo dessas perguntas, objetiva-se oferecer uma análise da relação entre os fundamentos da geometria e o conhecimento da realidade empírica por meio da descrição de dois movimentos: um ascendente, que parte daquilo que é concreto (ou não-linguístico) até ao que é abstrato (linguístico) e, outro, descendente, que interpreta partes da realidade com os termos abstratos de uma teoria para criar modelos que descrevam a realidade empírica. Para delinear tais movimentos, busca-se expor a estrutura do pensamento geométrico, problematiza-se a distinção entre sintético e analítico no contexto das geometrias, avalia-se possibilidades da aplicabilidade das geometrias como coincidência e conveniência e propõe-se a interpretação intersubjetiva dos termos teóricos como caminho mais provável de aplicação de uma geometria à realidade empírica.

Palavras-chave: epistemologia, geometria, sintético, analítico, interpretação, concreto, abstrato, fundamentos, conveniência, estrutura, método dedutivo-axiomático

ABSTRACT

SILVA, D. M. **From the concrete to the abstract and from the abstract to the concrete [interpreted]: an analysis of the relation between the foundations of geometries and the knowledge of empirical reality.** Dissertação (Mestrado). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, 2023.

Since the systematization of geometry proposed by Euclid, two questions have emerged and attempted to be answered throughout history: "How do you reach the primitive terms of a geometric theory?" and "How can a geometry be applicable to the concrete world of sensible experiences?" Based on these questions, the aim is to offer an analysis of the relation between the foundations of geometry and knowledge of empirical reality through the description of two movements: one ascending, starting from what is concrete (or non-linguistic) to what is abstract (linguistic), and the other, descending, interpreting parts of reality with the abstract terms of a theory to create models that describe empirical reality. To outline these movements, an effort is made to expose the structure of geometric thinking, to question the distinction between synthetic and analytic in the context of geometries, to evaluate the possibilities of the applicability of geometries as coincidence and convenience and to propose the intersubjective interpretation of theoretical terms as the most likely path for applying a geometry to empirical reality.

Keywords: epistemology, geometry, synthetic, analytic, interpretation, concrete, abstract, foundations, convenience, structure, deductive-axiomatic method

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação está dividida em duas partes: na primeira, intitulada "Do Concreto ao Abstrato", tratarei de expor de que maneira algumas geometrias são possíveis epistemologicamente, buscando o fundamento dessas geometrias, tanto no método dedutivo-axiomático, como nos processos físicos, psíquicos e cerebrais associados à percepção e ainda nas noções de estrutura baseadas em grupos de transformação; na segunda, intitulada "Do Abstrato ao Concreto [*interpretado*]", tratarei da aplicabilidade de tais geometrias ao mundo concreto apresentando algumas possibilidades como coincidência, conveniência e interpretação. As partes desta dissertação, que se manifestam aqui como vias, se aproximam às etapas ascendente e descendente do conhecimento, apresentadas pelo filósofo Oswaldo Porchat em "Ciência e Dialética em Aristóteles". Na primeira parte, preocupo-me mais em revelar essa etapa ascendente, investigativa, prospectiva e heurística (cf. PORCHAT, 2001, p. 379) do processo de conhecimento dos princípios e objetos das geometrias. Nesta via, pretendo demonstrar que o fundamento epistêmico das geometrias está nas experiências sensoriais com o mundo concreto. Na segunda parte, pretendo apresentar explicações da aplicabilidade das geometrias ao mundo concreto. Ocupo-me, nesta parte, mais da investigação da etapa descendente que passa "do mais universal ao mais particular, do mais cognoscível, por natureza e em absoluto, ao menos cognoscível, da causa ao causado" (cf. PORCHAT, 2001, p. 124); etapa essa "em que a ciência exibe sua estrutura lógica que reproduz a estruturação causal pela qual o real mesmo se articula." (PORCHAT, 2001, p. 19) A conclusão esperada para esta via, e para este trabalho, é que as geometrias são aplicáveis ao mundo concreto mediante a interpretação de proposições geométricas para denotar partes da realidade empírica. Espera-se que haja uma inflexão na passagem de uma via a outra, e justamente ali, residirá boa parte desta pesquisa. Tal inflexão se dá com o conhecimento dos princípios "em que se consuma a inversão do processo de conhecimento." (PORCHAT, 2001, p. 379) Desse modo, apesar da divisão em duas partes, espero tornar claro esse "ponto de inflexão", ou ainda, esse "ponto de simetria", de modo a fornecer possibilidades que expliquem como se passa de uma via a outra no campo do conhecimento geométrico e o quanto de simétrico há nessa imagem abstrata formada a partir do concreto. Convém antecipar que esta pesquisa não defenderá uma correspondência entre o abstrato e o concreto, à maneira realista. A fim de marcar essa diferença, lancei mão de uma expressão que deve ressaltar o caráter de tal correspondência: o concreto [*interpretado*]. Pretendo, com isso, identificar que, na etapa descendente do conhecimento, o objeto linguístico - abstrato - corresponderá a um objeto concreto, que não é mais o objeto que deu origem ao processo de abstração, mas que agora é experienciado mediante a linguagem de uma teoria que o interpreta de acordo com seus conceitos. Tampouco defenderei que as etapas ascendente e descendente se manifestam de modo linear e constante. Esta dissertação tem como objetivo revelar que, tanto a construção de conceitos como a aplicação destes aos objetos concretos, se dá ao longo da História com contribuições de diversas correntes filosóficas e de diversas áreas do conhecimento, por meio de múltiplos debates e despertares, que conferem às vias de construção de significado das teorias geométricas uma forma sinuosa com muitas idas e vindas.

Sabe-se que este é um tema metodológico da ciência que perdurou por séculos. Por isso, nesta dissertação foram feitas escolhas para que *uma* análise seja possível dentre tantas que se poderia fazer. A primeira escolha é tomar a geometria sistematizada por Euclides como paradigma e, após ela, percorrer pelas geometrias de Lobachevsky, Riemann e Hilbert como sendo geometrias que desfrutaram de maior aplicabilidade às ciências empíricas nos últimos séculos. Reconheço que haja outras geometrias e que outras ainda haverão, também aplicáveis ao mundo concreto. Contudo, entendo que a sistematização de Euclides trouxe maior clareza aos fundamentos da geometria, que as outras geometrias mencionadas foram criadas tendo a geometria euclidiana como referência e que, mesmo tendo apresentado alguns problemas nos conceitos iniciais, esta geometria desfrutou de status epistemológico inconteste no ocidente até o final do século XIX. De modo análogo, escolhi Aristóteles como o ponto de partida para esta análise de uma série de autores que procuraram compreender essa etapa de gênese das abstrações. A escolha de Aristóteles se justificará nas próximas páginas pois não se defenderá aqui uma posição platônica do estatuto dos objetos geométricos, mas antes, interessa a este trabalho apresentar as geometrias como construções da razão humana ao operar por meio da abstração e da intuição na escolha de definições e conceitos primitivos sem que se atinja uma pureza analítica mas que também não trate dos objetos do mundo apenas de modo sintético e imediato. O leitor que estranhar os saltos temporais entre os autores escolhidos deve ser avisado que essa dissertação não se propõe a fazer uma abordagem histórica da construção de teorias geométricas. Desse modo, muitos filósofos e matemáticos que participaram do processo de criação de teorias geométricas ficarão de fora do presente texto, não por falta de relevância, mas por uma questão metodológica para atingir o objetivo exposto no parágrafo anterior.

Na primeira parte percorremos o caminho epistemológico que se inicia com as experiências com o mundo concreto para chegar à concepção de termos primitivos e conceitos iniciais das geometrias. Tendo adotado a geometria euclidiana como paradigma, aquilo que a torna possível enquanto sistema geométrico é o modelo lógico-dedutivo. Neste modelo, segundo Aristóteles, e em particular na geometria euclidiana, partimos das nossas experiências com o mundo concreto e abstraímos os termos primitivos que sustentarão o conjunto inicial de axiomas para dar início à cadeia dedutiva que resultará em teoremas válidos dentro da teoria. Tal processo de abstração deve ser, para o filósofo, de tipo indutivo e está baseado numa habilidade inata do ser humano que recebeu, de Kant e Poincaré, o nome de intuição. Sem a experiência com o mundo concreto não teríamos condições de criar qualquer geometria, e sem esta capacidade de intuir um conceito ou termo primitivo, seríamos incapazes de dar início à cadeia dedutiva de formação de teoremas. No entanto, esta sequência epistemológica de formação de conceitos iniciais foi colocada em suspenso quando outras geometrias válidas, que não a euclidiana, surgiram no século XVIII e que contrariavam a intuição - ou até mesmo a certeza - acerca dos termos primitivos e, por consequência, dos axiomas que sustentavam a geometria de Euclides. Por meio das novas geometrias de Lobatchevski e Riemann, conceitos e termos primitivos foram intuídos de outras formas sem, contudo, depender da experiência com o mundo concreto para validá-los. A abstração operava ali livremente e os resultados obtidos eram igualmente válidos dentro de cada teoria. Já no século XX, David Hilbert propôs uma geometria que deixava implícito em seus teoremas e axiomas o sentido dado aos conceitos iniciais e aos termos primitivos. Esta proposta acabou por revelar a estrutura de uma teoria geométrica que poderia assumir diferentes acepções de termos e conceitos, mantendo-se igualmente válida em todas elas. Por meio do trabalho de Hilbert, será possível concluir, de acordo com Quine, que proposições sintéticas e analíticas não são de naturezas distintas, mas que as proposições às quais atribuímos a propriedade de serem sintéticas estão mais próximas do mundo dos objetos concretos, sendo mais fácil reconhecer seus significados; enquanto que as proposições às quais atribuímos a propriedade de serem analíticas estão mais distantes das experiências com os objetos concretos, tornando-se mais difícil reconhecer seus significados. O que Albert Einstein disse sobre a física pode muito bem se aplicar às proposições das geometrias no contexto desta dissertação:

> A física constitui um sistema lógico de pensamento que se acha em um estado de evolução, cuja base não pode ser, por assim dizer, filtrada a partir da experiência, através de um método indutivo, mas somente pode ser atingida pela livre invenção. A justificação (conteúdo de verdade) do sistema se baseia na verificação, pelas experiências sensíveis, das proposições derivadas, por meio da qual, unicamente, as relações entre estas e aquelas podem ser compreendidas intuitivamente. A evolução está progredindo na direção de uma maior simplicidade da forma lógica. Para nos aproximarmos mais deste objetivo, devemos nos conformar com o fato de que a base lógica se afasta cada vez mais dos fatos da experiência, e que o caminho do nosso pensamento, da base fundamental àquelas proposições derivadas, as quais se correlacionam com as experiências sensíveis, torna-se constantemente mais longo e mais árduo. (EINSTEIN, s/d, p. 322)

Apesar de terem os mesmos objetos do mundo concreto como referência, as geometrias enquanto sistemas, diferentemente da física, não tratam de fenômenos do mundo empírico mas tratam daquilo que se apresenta à razão como forma, grandeza e medida. Segundo a concepção aristotélica, o matemático estuda volumes, superfícies, comprimentos e pontos de modo isolado dos objetos do mundo concreto porque ele é capaz de separá-los no pensamento (cf. LEAR, 1988, p. 232). Esta dissertação irá defender que mesmo as estruturas que se apresentam com alto grau de abstração têm sua gênese nas experiências sensíveis e são passíveis de aplicação empírica, ainda que não propriamente se atribua a elas um grau de verossimilhança no sentido realista.

A primeira parte tem três capítulos. No capítulo 1, apresento a base do pensamento geométrico euclidiano que é o método dedutivo-axiomático tendo como foco verificar o que entendemos por termos ou conceitos primitivos, que são o fundamento de tal método. A referência para esta apresentação será a concepção aristotélica de conhecimento pela relação íntima que há entre a obra deste autor e os Elementos de Euclides, como ficará evidente nas próximas páginas. No capítulo 2, verifico qual o papel que os processos físicos, psíquicos e cerebrais, na experiência humana com os objetos da realidade concreta, têm na construção das geometrias, em particular, na geometria euclidiana. A referência será a obra de Henri Poincaré acerca dos fundamentos da geometria, sua análise a respeito da gênese das geometrias e suas reflexões sobre a aplicabilidade das geometrias. Além disso, seu trabalho foi muito relevante no reconhecimento da existência e possibilidade de outras geometrias válidas para além das que existiam até o final do século XIX. No capítulo 3, resta explorar como outras geometrias além da euclidiana foram possíveis pelo puro exercício da razão. Neste capítulo, evidencio como se chegou a estrutura comum a todas as geometrias na tentativa de expor aquilo que Bourbaki chamou de "Arquitetura das Matemáticas". Neste capítulo, trago como referências David Lewis, Quine, Hilbert e Frege.

Na segunda parte, iniciaremos o caminho em sentido inverso, destacando que as geometrias não-euclidianas, mesmo estando mais próximas do que chamamos de analítico, encontram ampla aplicação no mundo concreto sendo empregadas pelas ciências naturais para realizar cálculos e fazer predições que vão do mundo quântico ao universo observável. Como isto foi possível e que implicações isto tem para a epistemologia da geometria é o que será discutido nesta parte. A segunda parte tem dois capítulos. No capítulo 4, apresento duas possibilidades contrastantes da aplicabilidade das geometrias à realidade concreta: coincidência, proposta por Eugene Wigner e conveniência, defendida principalmente por Henri Poincaré. Analiso, neste capítulo, quais são as implicações epistêmicas em se adotar cada uma dessas possibilidades, para no capítulo 5, propor que o modo de escolha de uma geometria pelas ciências naturais se baseia no caráter interpretativo que estas ciências possuem e procuro aproximar as geometrias dessas ciências quando aplicadas à realidade concreta. Nesse último capítulo, trarei para exposição da aplicabilidade das geometrias por meio da interpretação, Einstein e Helmholtz, que apresentam a soma - ou fusão - entre geometria e física, e Donald Davidson e Gabriele Contessa, que trarão a esta dissertação os termos através dos quais entenderemos o que vem a ser interpretação, representação epistêmica e raciocínio sucedâneo. O leitor não deverá se surpreender com a concepção de definições coordenativas dada por Hans Reichenbach neste último capítulo. Apesar dos textos deste autor terem sido usados como fundamento para justificar a ideia de uma tradutibilidade entre os termos de uma linguagem abstrata e os termos descritivos da realidade concreta, pode-se fazer uma leitura mais cuidadosa com o fim de identificar os elementos de arbitrariedade, convenção e relativização da geometria propostos pelo autor para evidenciar o caráter interpretativo que uma teoria geométrica tem sobre partes da realidade empírica.

Cabe ainda, nesta introdução, expor o que se entenderá, nas próximas páginas, por concreto e abstrato. Entende-se por concreto aquilo que é sensível, perceptível, experienciável pelo sujeito, que pode ser localizado no tempo-espaço - mesmo de um mundo possível - e que possui eficácia causal. Assim, até mesmo processos mentais, como a formação de imagens mentais, podem ser compreendidos como concretos nos termos desta dissertação. Por abstrato, entende-se aquilo que é o *produto* da atividade de um sujeito cognoscente por meio de raciocínio lógico, como operação da imaginação-intuição ou outros processos cognitivos, que não possui eficácia causal, nem poderia ser localizado no tempo-espaço de qualquer mundo possível e que codifica propriedades na forma de *alguma linguagem*. Este caráter abstrato da linguagem apresenta as características de ser não-observável e imutável, como é exposto pelo filósofo Donald Davidson em seu texto “The Second Person”: “[...] uma linguagem é abstrata no sentido óbvio de que ela é não-observável e imutável, e seus componentes são também não-observáveis e imutáveis.” (DAVIDSON, 2001, p. 107) Trago aqui um exemplo da minha experiência como professor de geometria para deixar mais clara a distinção proposta. Quando apresento aos alunos a definição de ponto como sendo “aquilo que de nada é parte”, digo-lhes que isto jamais poderá ser reproduzido em uma lousa ou tela de computador. Não há nem nunca haverá nada parecido com um *ponto* no mundo da experiência sensível. Trata-se de algo *abstrato*, por ser apresentado por meio da linguagem e com alto grau de analiticidade, por não poder ser identificado ou reproduzido no mundo sensível. Quando faço uma pequena marca circular em uma lousa trata-se de algo *concreto*: está localizado no tempo e no espaço, tem dimensões calculáveis, é feito de giz ou tinta, etc. Quando, durante a aula, chamo a esta marca *ponto*, emprego o mesmo termo do objeto *abstrato* usando, contudo, proposições com menor grau de analiticidade, como por exemplo: "Vejam este ponto do lado esquerdo da lousa" ou "O ponto azul aqui na lousa é ponto médio desse segmento". Há, no entanto, duas instâncias concretas neste breve exemplo. Uma pequena marca circular na lousa é algo concreto, mas ao atribuí-la o nome *ponto*, apesar de manter sua concretude, ela torna-se, para o sujeito que a interpreta, um objeto concreto-abstrato ou um objeto concreto [*interpretado*]. Na etapa descendente, por meio da interpretação - à maneira como será exposta no capítulo 5 - os objetos concretos são revestidos de significado proveniente da teoria de modo que a experiência com eles adquire significância epistemológica. Não se trata, portanto, de percorrer o caminho no sentido inverso ao que foi do concreto ao abstrato e recair no mesmo ponto. Ao aplicar uma teoria geométrica ao mundo empírico, os objetos já não são experienciados como eram antes da aplicação, possibilitando o domínio de formas e o avanço da ciência. Além disso, não se defenderá aqui que aquilo que é considerado abstrato tem existência em si para além da experiência sensível. O ponto enquanto definição abstrata só existe porque é possível fazermos marcas em lousas ou afundarmos o dedo na areia. Assim, percorremos o caminho do concreto ao abstrato e, então, do abstrato ao concreto para chamar uma marca na lousa de *ponto*. Concordando com Quine em seu texto "Dois Dogmas do Empirismo", não há distinção absoluta entre proposições analíticas e o sintéticas (cf. QUINE, 1975, p. 248) e, como nos exemplos acima, as proposições "O ponto é aquilo que de nada é parte" e "Observe este ponto na lousa" diferem-se apenas no grau de analiticidade, estando a primeira mais distante daquilo que é concreto e estando a última, no limite do sensível.

Não será o objetivo último deste trabalho, pesquisar a ontologia dos objetos geométricos; o interesse está em evidenciar a epistemologia de tais objetos. Em muitos momentos, noções como existência e verdade aparecerão num registro epistemológico. Não cabe a este trabalho seguir um viés antropológico, sociológico ou histórico; são vias perfeitamente plausíveis que surgem das questões aqui colocadas, mas que neste momento serão tangenciadas podendo futuramente serem percorridas.

PARTE I: Do concreto ao abstrato

CAPÍTULO 1: O método dedutivo-axiomático e o papel da indução-intuição na definição dos termos primitivos

Apesar da aplicação de noções geométricas que os povos antigos - destacando-se os egípcios e o fenícios - tiveram por muitos séculos, e da importância da etapa de análise, a geometria sistematizada que chegou até nós foi aquela exposta por Euclides em sua obra: “Os Elementos”.[1] Nesta obra de importância inestimável, Euclides concebe um sistema lógico-racional baseado no método dedutivo-axiomático que constrói a geometria que se estabeleceu por quase 2 000 anos como única geometria possível. Nos treze volumes, Euclides trata das relações entre objetos como pontos, retas e circunferências e, aparentemente, tais objetos desfrutam de alguma similaridade com os objetos da realidade concreta e da experiência que os humanos têm com tais objetos. No entanto, quando lemos as primeiras definições dadas por Euclides, não vemos ali nada comparável àquilo que experienciamos no mundo: objetos com comprimento, mas sem largura, como uma reta ou ainda, objetos sem comprimento nem largura, como pontos. Esses últimos, apesar de serem adimensionais, produziriam todos os demais objetos geométricos: retas, circunferências, planos e o espaço. É preciso entender, portanto, de que modo o método dedutivo-axiomático opera em um sistema geométrico para expor qual o fundamento epistêmico dessa geometria. Dessa forma, proponho investigar que relações possuem as definições e as demonstrações na construção dos objetos da geometria, e para isso, trarei aqui a visão aristotélica desse método, principalmente encontrada na obra Segundos Analíticos. Esta escolha se deu pela relação inspiradora desta obra com os Elementos de Euclides, como aponta Porchat:

[1] Há relatos feitos por Eudemo e Proclus que Euclides tenha sido o responsável por organizar e apresentar de forma mais clara outras versões dos “Elementos” elaboradas desde Tales até Teeteto (cf. BICUDO, 2009, p. 41). Ainda, a própria ideia de organizar alguns teoremas da geometria em torno de poucas ideias geométricas remete a Pitágoras e à escola pitagórica. Para eles, esta organização revelaria a harmonia da natureza tão cara aos pitagóricos (cf. LEAR, 1988, p. 215).

> a Ciência que o tratado descreve e caracteriza é um saber construído *more geometrico* com o rigor, a exatidão e a necessidade que o filósofo reconhece nas ciências matemáticas. Escritos algumas décadas mais tarde mas como resultado, também, de compilações anteriores (sabe-se que *Elementos de Geometria* se escreveram e conheceram anteriormente a Aristóteles), os *Elementos* de Euclides ter-se-ão inspirado da doutrina aristotélica da ciência, segundo os *Analíticos*, e darão aos princípios da geometria um tratamento intimamente aparentado à teoria aristotélica dos princípios da ciência. (PORCHAT, 2001, p.60)

Não interessa a esta dissertação verificar se Euclides buscava com seu trabalho encontrar princípios que fossem estabelecidos para além da experiência sensível, aproximando-os das ideias tal como Platão as concebia. As diferenças entre as filosofias da geometria platônica e aristotélica são bem descritas por Jonathan Lear em sua obra "Aristóteles: o desejo de entender" e aqui vemos a principal discordância:

> (Para Platão) há um domínio à parte da realidade dos objetos matemáticos ideais - números puros e formas - e a matemática seria o estudo de tais objetos. Duas questões surgem imediatamente desta resposta de Platão. A primeira é como podemos ter acesso a este domínio matemático? Não pode ser com nenhum de nossos sentidos, pois eles nos dão acesso somente ao mundo físico. A segunda é como a matemática pode ser aplicável ao mundo físico? Se a matemática é sobre um domínio à parte de objetos puros e imutáveis, como ela pode ser empregada no mundo natural em constante mudança? (...) A matemática, Aristóteles argumenta, é diretamente sobre os objetos mutáveis do mundo natural. Não há um domínio à parte formado por números e objetos geométricos. (LEAR, 1988, p. 231)

Este é um longo e difícil debate da história da geometria e, apesar de ser legítimo, a opção feita para este trabalho é a de verificar qual a natureza e qual a origem das definições dos objetos da geometria para Aristóteles, e como isto se relaciona à intuição e ao método indutivo para se obter os princípios e termos iniciais. Dessa forma, concordamos com o argumento aristotélico de que os objetos geométricos não formam um domínio à parte da realidade e que a geometria euclidiana se propõe versar sobre os objetos do mundo concreto. Com isso, nos livramos das duas questões levantadas por Lear e podemos nos focar na epistemologia dos objetos geométricos (cf. LEAR, 1988, p. 232).

Aristóteles, no livro II dos Segundos Analíticos (SA II), decide investigar quatro coisas sobre tudo o que conhecemos: o "que", o "por que", "se é" e "o que é" (SA II, 89b24). Ao iniciar sua investigação, o filósofo levanta a seguinte questão: "é possível conhecer o mesmo item, conforme o mesmo aspecto, por definição e por demonstração, ou é impossível?” (SA II, 90a40-41) Se for possível conhecer o mesmo item por definição e por demonstração, por que a necessidade de o demonstrar? Bastaria a definição. Se for impossível, que informações a respeito da natureza do item obtemos com a definição? E com a demonstração? Sendo a definição não-demonstrável, como podemos chegar a ela? De que modo “o que é” – a existência – se relaciona ao “que” – a essência - de um item?

Aristóteles rejeita imediatamente que algo possa ser ao mesmo tempo demonstração e definição pois

> conhecer o demonstrável é possuir demonstração, de tal modo que, visto que há demonstração de tais itens, é evidente que não poderia haver dos mesmos também definição; pois, neste caso, alguém poderia conhecê-lo também conforme a definição, sem possuir a demonstração; pois nada impede que alguém as possua não ao mesmo tempo. (SA II, 90b9-b12)

Vemos aqui que definição e demonstração, para o filósofo, são conhecimentos distintos a respeito do que é conhecido e que o conhecimento do que é demonstrável se dá exclusivamente por meio da demonstração. Resta óbvio que a definição não pode fornecer o conhecimento do que é demonstrável. No entanto, o caminho em sentido contrário é possível? Conhecer a demonstração implica em conhecer a definição? A resposta a essa pergunta evidencia o caráter mais intrínseco da demonstração. A demonstração é uma cadeia de silogismos baseada em princípios que são deduzidos uns dos outros. Tal cadeia deve iniciar-se num conjunto de princípios primeiros que são definições indemonstráveis, pois caso contrário seguiríamos numa regressão infinita sem jamais chegar em premissas imediatas (cf. SA II, 90b24-b27). Desse modo, as definições ou princípios não são passíveis de prova, mas, uma vez assumidos, tudo *o que é o caso* é passível de prova por meio da demonstração. No campo da matemática, os princípios da aritmética e da geometria devem ser assumidos para que o que decorre desses princípios seja provado, como vemos no livro I dos Segundos Analíticos (SA I):

> Chamo de princípios em cada gênero os itens em que não é possível provar *que são o caso*. Assim, assume-se *o que significam* tanto os itens primeiros, como os que decorrem deles; por outro lado, é necessário quanto aos princípios, assumir *que são o caso*, mas quanto aos demais, provar *que são o caso*. Por exemplo: é necessário assumir o que é a unidade, ou o que é retilíneo e o triângulo, e *que são o caso* a unidade e a grandeza; mas, quanto ao restante, é necessário provar *que são o caso.* (SA I, 76a31-36)

Aristóteles pode então separar a natureza das definições e das demonstrações pelo critério da demonstrabilidade. O que é demonstrável deve ter um fundamento não-demonstrável e ambas as coisas não podem ser o mesmo em consonância ao próprio princípio aristotélico do terceiro excluído. Ele conclui:

> Assim, é manifesto que não há demonstração de tudo aquilo de que há definição, e que não há definição de tudo aquilo de que há demonstração, de modo que, em geral, tampouco é possível haver ambas de um mesmo item. Por conseguinte, é evidente que definição e demonstração não são o mesmo, e que tampouco uma está na outra. (SA II, 91a7-11)

Resta saber, como conhecemos essa essência, esse "o que" das definições, pois como visto, não podemos sabê-lo por meio das demonstrações nem tampouco podemos prová-las. Conhecer o "o que" de algo ficaria então limitado explicar o que esse termo significa? Como saber, nesse caso, se a definição escolhida é a mais apropriada? Seria essa definição única? Ou, ainda, haveria a necessidade de, a partir de exemplos, revelar a essência desse algo? Como ocorreria esse processo de fundamentar a essência a partir da existência? Para Aristóteles, aquilo *que é o caso* pode ser demonstrado e, sendo demonstrável, como isso serviria de fundamento para a essência? Vemos nessa passagem como essência e existência estão relacionadas, para o filósofo:

> Além disso, afirmamos que é necessário provar por demonstração *que é o caso* todo e qualquer item, se não for essência. Mas *o ser o caso* não é essência para nenhum item; pois o ente não é gênero. Logo, pode haver demonstração do '*que é o caso*'. Tal como presentemente fazem as ciências. Pois o geômetra assume o *que significa* o triângulo, mas, *que é o caso*, ele prova. Assim sendo, o que poderia provar quem define, a não ser '*o que é* o triângulo'? Assim, conhecendo pela definição o '*o que é*', ele não saberia se é o caso. Mas isso é impossível. (SA II, 92b12-b18)

De acordo com o argumento acima, é possível provar que uma determinada figura é um triângulo. Neste processo, se estaria postulando que se saiba *o que é* um triângulo e que, a partir dessa definição, se prove se essa figura é ou não *o caso* (de ser um triângulo). Ou seja, provar que uma determinada figura é um triângulo, não prova *o que é* um triângulo, justamente porque *o que é* um triângulo está sendo usado na prova. Se não é possível haver prova da essência e, se a existência de um ente é provada a partir da essência, como chegamos às definições simplesmente assumindo o significado de algo? E ao assumir o que algo significa não ficaríamos limitados a uma adequação linguística mais ou menos arbitrária?

Aristóteles problematiza essa adequação linguística em relação aos objetos da geometria com a seguinte pergunta: “E por que isso é círculo? Pois seria possível dizer que ele é *latão*.” (SA II, 92b23) A resposta a essa pergunta nos remete à definição do que é um círculo, e tal definição nos possibilita construir um círculo e não uma figura arbitrária, como vemos na definição 15 dos Elementos de Euclides:

> Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferência), em relação à qual todas as retas que a encontram (até a circunferência do círculo), a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si. (EUCLIDES, p. 97)

Sabemos, desse modo, como empregar a palavra círculo sem que haja confusão se ela se refere a outra coisa, por exemplo, ao latão. No entanto, ao empregarmos a palavra “latão”, não condicionamos esse uso à existência do que chamamos latão. O que chamamos latão já existe, independentemente da definição, e lhe atribuímos esse nome, convencionalmente ou arbitrariamente. Não parece ser o caso, para Aristóteles, em relação aos objetos geométricos. Há, nas definições da geometria, uma certa consistência que seria uma condição para a existência de seus objetos evidenciada por meio da construção do objeto geométrico. Haveria, dessa forma, uma distinção entre categorias de definições, ou seja, há definições que nomeiam os objetos da realidade e há definições, como as da geometria, que, além de nomear, condicionam a existência de tais objetos. Temos ainda que, para Aristóteles, as definições da geometria gozam de um caráter distinto de outras definições usadas até mesmo na aritmética (pois essas não servem de fundamento a construções propriamente ditas). No entanto, mediante essa distinção, o problema apresentado anteriormente seria agravado pois a essência (a definição do objeto da geometria) serviria então de fundamento à existência (a possibilidade de construção do objeto geométrico). Mas isso não parece uma leitura aristotélica da realidade, pois se o objeto geométrico só existe após sua construção não se pode jamais chegar à sua essência e sem a essência não haveria sequer a possibilidade de construção. Haveria então uma existência dos objetos da geometria diferente da existência vinculada à construção do objeto geométrico? Veremos agora as visões de Jonathan Barnes e Thomas Heath para investigarmos qual é a origem, para Aristóteles, da essência dos objetos geométricos e de quais modos podemos dizer sobre a existência de tais objetos.

Jonathan Barnes, a esse respeito, comenta:

> Para outros objetos matemáticos, e.g. triângulos, nós temos que provar que 'eles são' (AP I, 76a36). É geralmente suposto que tal prova deverá ter a forma de uma construção (Isto se encaixa com a prática de Euclides: e.g. Elementos I def. 10 assume-se a definição de ângulo reto e em I.11 constrói-se ângulos retos. Por outro lado, tanto o significado quanto a construtibilidade dos e.g. círculos são tomados como axiomáticos (Elementos I, def. 15; post. 3)). Não há, contudo, evidência direta deste ponto de vista nos textos aristotélicos; e é difícil reconciliar isto com o caráter abstracionista dos objetos matemáticos em Metafísica M3. *De Caelis* A 10, 279b32-280a10, mostra que Aristóteles não acreditava que os objetos matemáticos existam somente se eles forem realmente construídos. (BARNES, 2002, p. 85)

Barnes defende que, para Aristóteles, os objetos geométricos têm existência prévia à construção e que eles possuem um caráter abstrato. A prática de Euclides, acima mencionada, consiste em que ele somente utiliza o resultado de um postulado ou definição após a construção do objeto, ou seja, somente após ter dado uma forma concreta ao objeto definido.

Como contraponto, eis o que diz Thomas Heath:

> Eu notei, em outro lugar, que uma luz foi acesa, sobre o ponto de vista de Aristóteles, pela antiga distinção das chamadas definições *nominais* e *reais*. Gerolamo Saccheri distinguiu entre o que ele chama *definitiones quid nominis* e *definitiones quid rei* ou *reales;* as primeiras são, ele diz, apenas intentadas para explicar o significado que deve ser atribuído a um dado termo, enquanto as últimas, além de declarar o significado de uma palavra, afirmam ao mesmo tempo a existência da coisa definida ou, em geometria, a possibilidade de construí-la. Uma *definitio quid nominis* torna-se uma *definitio quid rei* por meio de um postulado ou quando surge a questão se essa coisa existe e ela é respondida afirmativamente. *Definitiones quid nominis* são por elas mesmas bastante arbitrárias e tampouco requerem ou são capazes de provar; elas são provisórias e são apenas intentadas em se tornar tão rápido quanto possível em *definitiones quid rei*, tanto (1) por meio de um postulado em que é afirmado ou concedido que o que é definido existe ou pode ser construído, por exemplo, no caso de linhas retas e círculos, suas construções estão postuladas nos postulados 1-3 de Euclides, ou (2) por meio de uma demonstração reduzindo a construção de uma figura às sucessivas execuções de um certo número de construções elementares que estão postuladas. (...) A prática de Euclides é consistente com o ponto de vista de Aristóteles. Ele não usa linhas retas formando ângulos retos antes de construir uma perpendicular a uma linha reta (1.11,12), nem usa a figura que ele descreve como um quadrado em I, Def. 22, antes de ter construído um (1.46), e assim por diante. (HEATH,1970, p. 70-71)

Para Heath, a prática de Euclides é consistente com a visão aristotélica ao afirmar que para ambos a existência do objeto geométrico se dá por meio e após a construção deste. O problema que emerge com os comentários conflitantes de Barnes e Heath pode ser colocado dessa forma: a existência dos objetos da geometria está condicionada às definições de tais objetos? Se respondermos afirmativamente a essa questão, não estaríamos postulando que a essência dos objetos geométricos desfruta de um caráter abstrato puro? Isto certamente estaria em conformidade com a visão platônica, mas estaria em conformidade com a visão aristotélica? Se respondermos negativamente, onde estaria o fundamento da essência dos objetos da geometria? Para responder a essas perguntas será necessário vermos que relação há entre os objetos da geometria e os objetos da realidade na perspectiva aristotélica. Destaco aqui uma passagem do livro I dos Segundos Analíticos:

> as matemáticas dizem respeito a formas, visto que não dizem respeito a algo subjacente; pois, ainda que os itens da geometria pertençam a algo subjacente, não obstante, a geometria não diz respeito a esses itens enquanto eles pertencem a algo subjacente. (SA I, 79a6-9)

Uma leitura apressada dessa passagem nos faria interpretar Aristóteles como um platônico, ou seja, que haveria existência dos objetos da geometria para além dos objetos físicos e à revelia destes. Este não é o caso, pelo comentário de Barnes:

> O argumento de Aristóteles de que ‘as matemáticas estão relacionadas às formas’ parece parafrasear o seguinte: ‘Objetos matemáticos são formas, porque eles são auto subsistentes. Os objetos geométricos, talvez, não sejam auto subsistentes, mesmo assim a geometria os estuda como se fossem’. Isto *parece* creditar a Aristóteles uma visão platonista dos objetos da matemática - e no caso deveríamos supor que o parágrafo representa uma recente (ou temporária) fase do seu pensamento. Mas uma interpretação melhor é possível. A sentença chave é: ‘ainda que...’: Aristóteles presumivelmente quer dizer que as ciências matemáticas são ‘sobre formas’ somente no sentido de que tratam seus objetos como se fossem formas auto subsistentes. Os geômetras produzem teoremas do tipo ‘Todo triângulo é...’: eles usam o termo ‘triângulo’ como se fosse uma substância. Mas de fato, triângulos não são substâncias - e a realidade detrás dos teoremas dos geômetras está no mundo ordinário dos objetos físicos. (BARNES, 1985, p. 161-162)

Para refutar a interpretação errônea de que Aristóteles acreditava na autossubsistência dos objetos geométricos, Barnes concentra seu comentário naquilo que sustenta a existência dos conceitos geométricos, os objetos físicos, mas escapa-lhe que o cerne dessa passagem está em que Aristóteles afirma que os objetos da geometria não podem ser descritos *enquanto* eles pertencem aos objetos físicos. Se assim fosse, seria possível identificar no mundo dos objetos físicos uma reta que tocasse uma circunferência em um único ponto. E sabemos que isto não ocorre, porque na verdade, é até mesmo impossível identificar uma só reta ou um único ponto *enquanto* pertencentes aos objetos do mundo sensível. Como conciliar a existência dos objetos da geometria para além do mundo dos objetos físicos com a visão aristotélica de que os primeiros objetos não existiriam se não houvesse os últimos? Se os objetos da geometria não são substâncias, nem são auto subsistentes, deve haver alguma forma de abstração operando para além dos sentidos. Sobre essa existência dos objetos da geometria para além do mundo dos sentidos, temos o comentário de Johansen:

> Para que uma forma matemática exista ela deve ser a propriedade de alguma matéria, mas qual matéria não importa. Nada sobre o caráter da matéria é revelado ao dizer que uma linha toca um círculo em um ponto. Nós não podemos dizer então que se a linha irá tocar o círculo em um ponto a matéria de cada um deve ser esta ou aquela. Aristóteles trata as verdades matemáticas como caracterizadas por um tipo diferente de necessidade. (JOHANSEN, 2012, p. 154)

As definições dos objetos da geometria têm, para Aristóteles, um caráter de existência abstrata, mas nunca *a priori*. A partir da percepção dos objetos da realidade, se pode abstrair determinadas formas passíveis de definição. As definições dadas a essas formas abstratas trariam à existência tais objetos por meio de construção. No entanto, essa existência pós-definição não é a mesma que outorgou a essência desses objetos, pois a existência pré-definição está nos objetos físicos. Essa leitura reforça a visão aristotélica da existência das coisas *qua* - enquanto – algo. Ela inclusive parece desfazer o conflito dos comentários de Heath e Barnes. A construção dos objetos geométricos, como aponta Heath, após as *definitiones quid rei*, referem-se a um tipo particular de existência, diferente da existência dos objetos da realidade; enquanto que a existência mencionada por Barnes está no que fundamenta a existência dos objetos da geometria, os objetos físicos, pois sem eles não haveria sequer a abstração que possibilita dizer desses objetos *qua* algo[2]. De fato, para Aristóteles, a existência dos objetos da geometria

---

[2] A visão de Barnes a esse respeito é reforçada em outro texto de sua autoria chamado Aritmética Aristotélica. Ele diz: “O geômetra que diz ‘Seja ABC um triângulo equilátero’ não está postulando a existência de um triângulo equilátero abstrato; ao invés, ele está considerando algo - qualquer coisa -

depende de um processo de abstração a partir da percepção dos objetos físicos. Temos uma descrição desse processo no *De Anima*:

> Mas como não há nada que exista separadamente das grandezas perceptíveis (ao que parece), são nas formas perceptíveis que os objetos do pensamento existem, tanto aqueles que são ditos em abstração quanto aqueles que são estados e afetos das coisas perceptíveis. E por essa razão alguém não pode aprender ou compreender nada sem perceber algo; e enquanto esse alguém contempla algo, ele deve ao mesmo tempo contemplar um tipo de imagem; porque as imagens são como perceptíveis, exceto que elas não possuem matéria. (DA III, 432a3-10)

Nessa passagem, Aristóteles está afirmando duas coisas complementares: (i) há alguma forma de existência de objetos abstratos do pensamento e (ii) essa existência está condicionada a alguma forma perceptível que lhe forneça uma "imagem". A imaginação desempenha um papel fundamental nesse processo, pois é ela que permite a formação de imagens recordáveis que darão origem à definição. A esse respeito temos o comentário de Johansen:

> *Phantasia*, como imagens da memória, preserva o que é percebido de modo que na ausência dos triângulos perceptíveis no ambiente e nós as utilizamos como base das nossas considerações do que um triângulo é. De fato, enquanto base da abstração, os triângulos relembrados podem ser mais úteis que os triângulos percebidos atualmente, pois eles nos possibilitam comparar e contrastar um conjunto maior de triângulos diferentes. Isto parece muito consistente com o papel que Aristóteles atribui à memória na definição das essências em PA II.19. Nós devemos, então, pensar no papel da *phantasmata* enquanto base da abstração, na qual o atributo abstraído é pensado por si mesmo e não como um atributo deste ou daquele objeto relembrado. (JOHANSEN, 2012, p. 233)

Ao perceber instâncias semelhantes, os objetos do pensamento podem ser formados num processo descrito no final do livro II dos Analíticos Posteriores, mencionado acima:

> Assim, a partir da sensação, surge recordação – como dizemos – e, a partir da recordação que ocorre frequentemente a respeito do mesmo fato, surge experiência; pois recordações numericamente múltiplas são uma única experiência. E a partir da experiência, ou a partir de todo universal que repousa na alma – um único concernente a muitos, que seja um só e o mesmo em todos eles – surge princípio de técnica ou de ciência. (SA II, 100a3-8)

Aqui, acredito, encontra-se a chave para relacionar as duas formas de existências mencionadas: uma pré-definição, evidenciada por Barnes, e outra pós-definição,

---

qua triângulo equilátero, ele está, portanto, considerando uma característica isolada (a triangularidade equilátera) que não existe de fato em isolamento." (BARNES, 1985, p. 111) evidenciada por Heath. Ao perceber os objetos físicos do mundo, algumas formas semelhantes passam a popular a memória por meio de imagens: pontos, retas e curvas; e com eles outras formas, como triângulos e circunferências. Uma vez abstraída do mundo material, por meio da imaginação e da memória, uma forma é universalizada na alma, de tal modo que se é possível pensá-la por si mesma. Aí se dá o surgimento da essência ou definição dessa forma, que, por se diferenciar de outras formas, pode ser nomeada[3]. A partir de então, essa definição recebe um novo modo de existência que se dá por meio da prova ou da construção. Da prova, quando se quer verificar que algo é o caso. Da construção, quando por meio de passos definidos rigorosamente após a definição, se chega a uma forma sensível semelhante àquela que fora abstraída previamente do mundo dos sentidos.

Com base no que foi apresentado, penso ser possível conciliar a visão aristotélica apresentada nos trechos citados e os comentários feitos por Heath e Barnes sobre o assunto. Os objetos da geometria não existiriam sem a percepção dos objetos físicos do mundo. A partir da percepção, algumas formas vão se acumulando na memória, tornam-se um universal por meio da abstração e possibilitam a construção de uma definição. Essa definição não deve ser arbitrária, mas deve fornecer de modo único e não-contraditório a possibilidade de construção – ou identificação - do objeto a que se refere. Além disso, tanto a definição quanto sua construção, de algum modo trazem à existência um determinado objeto da geometria, contudo que, novamente, não há sobre ele nenhum conhecimento *a priori*, mas tampouco precisa da matéria para existir. Aristóteles, para que não se contradiga, deve ter apontado para esses dois tipos de existência dos objetos da geometria: uma que se manifesta nos objetos perceptíveis e que, por meio da abstração, possibilita a definição; e outra que é o resultado da construção de um objeto geométrico, ou da prova de um determinado objeto ser ou não o caso, a partir da definição de um objeto geométrico.

---

[3] Esta visão concorda com o modo como Porchat explica o *universal* aristotélico: "o universal não é senão o aspecto quantitativo de que o 'por si' se reveste para um sujeito que se individua numa multiplicidade de manifestações numericamente distintas, que 'enforma' sua mesma qüididade: o universal pertence ao sujeito 'segundo a forma'". (PORCHAT, 2001, p. 154)

Resta ainda saber de que forma essa abstração opera na construção de uma definição. No livro II, capítulo 19, o último capítulo dos Segundos Analíticos, Aristóteles deseja responder a duas questões referentes aos princípios de uma demonstração: (i) de que modo eles se tornam conhecidos e (ii) qual é a disposição que vêm a reconhecê-los. (SA. II, 99b17-19) Essas questões emergem no contexto da explanação da natureza da demonstração – ou ciência demonstrativa – que havia iniciado no Livro I dos Segundos Analíticos:

> Toda ciência demonstrativa envolve três itens: aquilo que se estabelece que é o caso (e isto é o gênero, cujas afecções que se lhe atribuem por si mesmo ela estuda), os chamados axiomas comuns (a partir do quais, como primeiros, demonstram), e, em terceiro lugar, as afecções (a respeito de cada uma das quais se assume *o que significa*). (...) Não obstante, ao menos por natureza, estes itens são três: aquilo *a respeito de que* se prova; aqueles *que* se prova e aqueles *a partir dos quais* se prova. (SA I, 76b12-22)

Aristóteles se ocupa, neste último capítulo, com esses itens dos quais uma demonstração, pelo método dedutivo-axiomático, procede: os axiomas comuns. Como vimos, dedução é uma espécie de método de prova que produz sentenças infalíveis predicadas de sentenças válidas anteriores numa cadeia de provas que começa de um grupo de sentenças que não podem ser provadas ou demonstradas. O axioma – também premissa primária ou simplesmente ponto-de-partida – é uma premissa imediata, i.e., uma proposição que não tem outra proposição anterior a ela (SA I, 72a8). Essas premissas imediatas podem ser comuns a todas as ciências – do tipo, *a partir das quais* - ou peculiares a uma ciência particular[4] – do tipo, *a respeito de que* (SA I, 88b27-29). Aristóteles considera que as premissas comuns a todas as ciências são extremamente relevantes para investigar como podemos conhecer algo.

---

[4] A respeito dessa diferença entre premissas comuns e particulares, há uma passagem interessante da obra “Matemática em Aristóteles” escrita por Thomas Heath: Os princípios comuns a todas as ciências são axiomas, mais comumente exemplificados por “se iguais forem subtraídos de iguais, os restantes serão iguais” ou “de dois contraditórios, um deve ser verdadeiro”. (...) Quando falamos de princípios peculiares a uma ciência particular, nós temos, primeiramente, o genus ou o assunto, a existência daquilo que deve ser assumido, por exemplo, a magnitude no caso da geometria ou a unidade no caso da aritmética. Debaixo disso nós devemos assumir definições de manifestações, formas ou atributos do genus, por exemplo, na geometria, linhas retas, triângulos, “deflecções”, etc. (HEATH, 1970, p. 53-54)

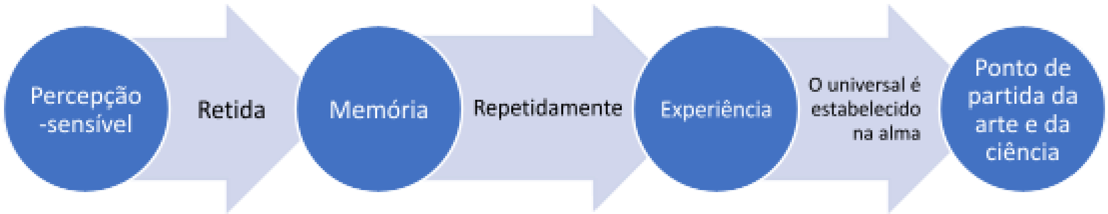
> Visto que é preciso ter crença e conhecer a coisa por possuir um silogismo de tal tipo, que chamamos "demonstração", e visto que este é o caso quando os itens a partir dos quais procede o silogismo são *tais* e *tais*, é necessário não apenas conhecer previamente os primeiros (ou todos eles, ou alguns), mas também conhecê-los mais. Pois, em todos os casos, algo se atribui mais àquilo em virtude de que se atribui a cada coisa; por exemplo, é mais estimável aquilo em virtude de que estimamos. Por conseguinte, visto que conhecemos e temos crença devida aos itens primeiros, também os conhecemos mais e cremos mais neles, porque é devido a eles que conhecemos também os itens posteriores. (SA I, 72a25-31)

Então, que tipo de conhecimento é este se, para Aristóteles, é impossível obter qualquer conhecimento científico se não se pode estar certo sobre as premissas imediatas? Ele argumenta que se nós devemos sempre haver possuídas faculdades cognitivas que tornam possível apreender as premissas primárias, então nós possuímos poderes de apreensão que são mais acurados que a demonstração, mas sem sabê-lo. Por outro lado, se nós os adquirimos, não havendo os possuído antes, é impossível que ganhemos conhecimento a aprendamos algo sem algum poder de apreensão que seja preexistente (cf. SA II, 99b26-30) Dessas duas possibilidades, ele conclui que ambas as opções dadas estão erradas e, uma coisa deve ser o caso: (1) nós não podemos conhecer as premissas primárias ou (2) nós, de fato, possuímos algum conhecimento *a priori* de onde essas premissas podem se originar. (BRONSTEIN, 2012, p. 39) Aristóteles concorda com a segunda opção, i.e., que nós devemos ter alguma capacidade inata de discriminação ou de percepção – inferior em acurácia às faculdades cognitivas de demonstração e conhecimento científico – de onde o conhecimento científico pode se originar. Pode-se argumentar, neste ponto, que se esta capacidade é anterior a todas as capacidades cognitivas humanas, então nós devemos conhecê-las melhor do que as demais. Sobre isso, há esse comentário elucidativo de Jonathan Barnes:

> A conclusão de Aristóteles de que nós temos uma *capacidade* cognitiva inata nada tem a ver com o princípio de SA I 1. O fato é que SA I 1, que lida com "aprendizagem intelectual" de proposições derivadas, é inaplicável em SA II 19, que está preocupado com uma aquisição não-intelectual de princípios não deriváveis. (BARNES, 1985, p. 262)

O filósofo admite que tal capacidade está presente nos animais, mas de um modo diferente quando comparado com humanos. Para ele, para obter cognição deve-se reter as percepções na alma, e isto não ocorre nos animais. Uma vez que as percepções persistem na alma, a percepção-sensível dá origem à memória. Memórias repetidas dão origem à experiência, que é o universal estabelecido com um todo na alma. Então, é da experiência que surge um princípio de entendimento. (SA II, 100a1-8)

Diagrama 1: Como adquirimos conhecimento científico



Estas conclusões levam a essas (a) a compreensão é mais exata que o entendimento; (b) as premissas primárias são mais familiares que as demonstrações; e (c) o entendimento envolve algo a ser levado em conta. O que Aristóteles quer dizer com (c) é que qualquer entendimento deve ter seus fundamentos fora desse entendimento e, isto porque, “o princípio da demonstração não é demonstração, de modo que nem o princípio da ciência é ciência.” (SA II, 100b13-14). Na primeira frase do livro I dos Segundos Analíticos, Aristóteles afirma que “todo ensinamento e todo aprendizado racional surge a partir de conhecimento previamente disponível.” (SA I, 71a1). No último capítulo do livro II, ele completa o quebra-cabeças de onde esse conhecimento pré-existente começa: na percepção. Mas se esse conhecimento for construído de acordo com um método dedutivo então ele deve ter seus fundamentos em algum conhecimento anterior, e isto formaria uma cadeia interminável, como já vimos acima. Para interromper essa “cadeia eterna” e encontrar os fundamentos do conhecimento científico, o conhecimento das premissas primárias deve estar baseado em outro método que não o dedutivo. Portanto, o método segundo o qual conhecemos as premissas primárias é a indução – o progresso dos particulares aos universais – e que, segundo Aristóteles, é mais convincente, mais clara, mais facilmente adquirida pela percepção sensível e é compartilhada pela maior parte das pessoas do que a razão que opera por meio da dedução. (TOPICA, 105a13-14) A conclusão a que se chega é que a origem do conhecimento das premissas primárias é a inteligência porque é dessa forma que os conceitos gerais são formados em nós pela percepção-sensível. A inteligência opera por um método que não requer a razão, no sentido mostrado acima, mas por um método que nos capacita a estabelecer universais a partir de particulares, que é a indução. Assim, a resposta à questão (i) é que eles nos tornam familiares por uma capacidade indutiva de discriminação ou percepção-sensível; e à questão (ii) é *νους* ou inteligência ou. possivelmente, intuição. Tal conclusão é exposta de maneira exímia por Porchat:

> Assim, a inteligência vem coroar, em apreendendo os princípios indemonstráveis, o trabalho propedêutico de natureza indutivo-dialética; ao mesmo tempo, instaurando na alma um saber absoluto e infalível, vem proporcionar-lhe a faculdade de percorrer, numa marcha descendente em direção do particular, as mesmas articulações por que o real se ordena, levando-a a conhecer, cientificamente agora, aquelas mesmas coisas entre as quais reconhecerá o ponto de partida do qual, em obscuramente conhecendo-o, precariamente partira para aquela investigação preliminar. E o processo total do conhecimento cumpre desse modo o seu ciclo. (PORCHAT, 2001, p. 392)

Veremos adiante qual é a natureza dessa inteligência e de que modo ela opera na divisão dos perceptíveis para a obtenção dos universais visando a formação de conceitos e definições que servirão de fundamento para a cadeia do raciocínio dedutivo que acabará por identificar nos particulares os atributos dos universais, que, para a geometria, seriam os conceitos ou termos primitivos.

CAPÍTULO 2: A fundamentação das geometrias por processos físicos, psíquicos e cerebrais

Como vimos no capítulo 1, o fundamento dos termos primitivos e dos axiomas da geometria está, segundo Aristóteles, num processo indutivo, baseado na inteligência que se apresenta como intuição, mas que tem como origem a percepção dos objetos do mundo concreto[5]. Neste capítulo, procuro explorar de que modo essa percepção ocorre no caso específico da criação dos objetos geométricos. Como a geometria trata, tradicionalmente, das nossas representações do mundo sensível, poucos irão discordar que ao abordarmos este tema trataremos também de processos mentais associados ao que chamamos de consciência. Será de extrema relevância verificar se tais formas presentes na consciência são inatas ou se são formadas somente pelas sensações experienciadas com as qualidades primárias dos objetos, principalmente aquelas que são mais diretamente vinculadas à concepção dos objetos da geometria como comprimento, figura e número. Para isso, usarei como base o texto “Dos fundamentos da geometria”, do matemático e filósofo Henri Poincaré, publicado em 1898. Apesar de Poincaré defender que não haja existência ontológica *a priori* dos objetos geométricos - e isto - o aproxime de Aristóteles - ele defenderá a existência epistemológica de uma faculdade mental *a priori* que torna possível a criação das geometrias. Se isto, por um lado, pode ser visto como um platonismo epistemológico, por outro lado, esta faculdade descrita por Poincaré parece estar muito próxima a *νους*, ou inteligência, descrita por Aristóteles como sendo a disposição que nos possibilita conhecer os princípios de

[5] Com isto também concorda Hermann von Helmholtz em seu texto “The Origin and Meaning of Geometrical Axioms” do qual reproduzo um trecho abaixo, mas que não trarei para a discussão pela visão bastante próxima dos autores escolhidos para este capítulo: “De resto, eu não quero, é claro, supor que primeiro a humanidade atingiu as intuições espaciais em concordância com os axiomas de Euclides por meio de qualquer sistema de medição exata que tenha sido executado. Foi, preferencialmente, a sucessão das experiências cotidianas, especialmente a percepção da similaridade geométrica entre os objetos grandes e pequenos, somente possível no espaço plano que levou à rejeição, como impossível, de toda representação geométrica em discrepância com esse fato. Para isso, nenhum conhecimento da conexão lógica necessária entre o fato observado da similaridade geométrica e os axiomas era necessário, mas somente uma apreensão intuitiva das relações típicas entre pontos, retas e ângulos, obtida por meio de numerosas e atentas observações. [...] É verdade que não temos outra palavra senão intuição para marcar isto; mas este é o conhecimento obtido empiricamente por meio da agregação e reforço de impressões similares recorrentes na memória, e não uma forma transcendental dada antes de qualquer experiência.” (HELMHOLTZ, 2007, p. 68)

uma ciência baseada no método lógico-dedutivo. Irei, ainda, apresentar uma leitura para a posição de Poincaré em relação à existência de várias geometrias igualmente válidas e como isso se dá em contraste entre a forma da sensibilidade e a forma do entendimento. Para contextualizar tais questões no debate filosófico sobre os temas aqui apresentados, apresentarei as divergências e convergências de Poincaré com John Locke e Immanuel Kant, pois ambos deixaram imenso legado sobre esse debate no século XVIII, e que certamente era conhecido por Poincaré ao final do século XIX.

No início de seu texto, Poincaré declara a respeito das nossas sensações, do espaço sensível e do espaço das nossas representações:

> Nossas sensações não podem nos dar a noção de espaço. Essa noção é construída na mente a partir dos elementos que pré-existem nela e a experiência exterior é simplesmente a ocasião para exercitar este poder ou, no máximo, um meio de determinar a melhor maneira de exercitá-lo. As sensações, por elas mesmas, não têm caráter espacial. (POINCARÉ, 2007, p. 1)

Já nessa breve citação, temos algumas posições de Poincaré bastante marcadas. Primeiramente, o filósofo assume que exista um mundo exterior que possui elementos de natureza distinta dos elementos da mente; e esta, por sua vez, é capaz de criar ideias próprias a partir das sensações. Assim, podemos dizer que ele assume uma posição realista em relação ao mundo exterior à mente e, parece estar em acordo com as duas fontes das ideias, na mente, formulada por Locke: a sensação e a reflexão. (LOCKE, 1999, p. 108) Além disso, essa passagem corrobora a visão de Locke sobre a distinção entre ideia e qualidade, como vemos aqui:

> Chamo ideia a tudo aquilo que a mente percebe em si mesma, tudo o que é objeto imediato de percepção, de pensamento ou de entendimento; e à potência de produzir qualquer ideia na nossa mente, chamo qualidade do objeto em que reside essa capacidade. (LOCKE, 1999, p. 156)

Posteriormente, Poincaré considera que haja elementos pré-existentes na mente que possibilitam o exercício da razão para construção do espaço geométrico. Tais elementos não podem aqui ser entendidos como ideias, da maneira apresentada acima, mas como alguma noção ou capacidade que independem do mundo externo. Isto ainda será verificado, no presente trabalho, se está em conformidade com Locke, pois, para ele, não há princípios inatos na mente, conforme o Livro I do ensaio citado. Finalmente - e aqui surgirá a divergência com Locke - para Poincaré, as sensações causadas pela experiência com o mundo exterior, apesar de serem conscientes em algum nível, não são representadas de modo semelhante pela mente. É a mente quem constrói a noção de espaço, e aqui, espaço geométrico, a partir das sensações, mas com caráter *absolutamente diferente* do espaço da realidade externa à mente. A experiência com os objetos do mundo exterior compõe nossa experiência subjetiva, mas tais experiências com o mundo material são apenas a causa das ideias formadas na mente com elementos já existentes nela e que dependem desse contato com o mundo exterior para se construírem. Dessa forma, mesmo as ideias formadas a partir das qualidades primárias não se assemelham em nada com a causa externa de nossas sensações, contrariando a posição de Locke a esse respeito:

> As ideias das qualidades primárias dos corpos são semelhanças das ditas qualidades e os seus modelos existem realmente nos próprios corpos; mas as ideias causadas em nós pelas qualidades secundárias em nada se assemelham. (LOCKE, 1999, p. 160)

Poincaré, assim, assume uma posição contrária ao mecanicismo pois rejeita a tese de que as qualidades primárias e as representações geométricas sejam semelhantes. Nisto - mas também em muitos outros aspectos - ele se aproxima da visão de Kant a respeito da possibilidade e do caráter da geometria como lemos nessa passagem dos Prolegômenos:

> A matemática pura e principalmente a geometria pura não podem ter realidade objetiva a não ser sob a condição de dizerem respeito apenas aos objetos dos sentidos, em relação aos quais vale o princípio: nossa representação sensível não é, de modo algum, uma representação das coisas em si mesmas, mas somente de como elas nos aparecem. (KANT, 1974, p. 123)

Mas se não há semelhança entre qualidades primárias e as ideias geométricas mais elementares, haveria alguma distinção possível entre qualidades primárias e secundárias? Estariam tais qualidades reduzidas à experiência subjetiva e portanto desfrutariam de igual *status*? Para responder a essas perguntas, Poincaré distingue sensibilidade de entendimento, como vemos aqui:

> Nossas sensações diferem umas das outras qualitativamente e, portanto, elas não podem ter uma medida comum, não mais do que podem o grama e o metro. Ainda que comparemos somente as sensações geradas pelo mesmo nervo, haverá um esforço considerável da mente para reconhecer que a sensação de hoje foi do mesmo tipo que a sensação de ontem, se maior ou menor. (...) Tal classificação não pode ser completada sem a intervenção ativa da mente e é objeto dessa intervenção referir-se a nossas sensações a um certo tipo de rubrica ou categoria pré-existente em nós. Essa categoria deve ser entendida como uma 'forma da nossa sensibilidade'? Não, não no sentido que nossas sensações, consideradas individualmente, não poderiam existir sem ela. Ela torna-se necessária a nós somente para comparar nossas sensações, para raciocinar sobre elas. Ela é, portanto, uma forma do nosso entendimento. (POINCARÉ, 2007, p. 2-3)

Poincaré não se preocupa, nessa passagem, em diferenciar as sensações que nos causam as ideias de comprimento, figura ou número daquelas que nos causam as ideias de cor, cheiro ou gosto ecoando, assim, a admissão kantiana de que "todas as propriedades que constituem a intuição de um corpo pertencem apenas ao seu fenômeno" (KANT, 1974, p. 125) . Desse modo, mesmo as sensações causadas pelas qualidades primárias são diferentes qualitativamente e é pelo exercício do entendimento que conseguimos compará-las, identificar sensações similares e então postular alguma medida comum a elas. Isto, no entanto, não leva o filósofo a acreditar que, não fosse o nosso raciocínio, nós deixaríamos de sentir. A sensibilidade existe para além do exercício da razão, e ainda assim é uma forma de consciência[6]. Contudo, essa sensibilidade, por si só, seria incapaz de nos permitir falar coisas como: "Essas duas pessoas têm alturas iguais" ou "O tampo desta mesa tem a forma retangular". Para dizer coisas desse tipo, é necessário que a mente intervenha ativamente a partir de uma forma pré-existente em nosso entendimento numa forma de consciência que envolve o raciocínio[7]. Tal categoria do nosso entendimento difere totalmente do mundo externo. O espaço geométrico tem três eixos coordenados, intercambiáveis e mensuráveis, é homogêneo e isotrópico, enquanto que o espaço sensível é absolutamente distinto do espaço geométrico. Ele se apresenta de forma tripla: é visual, tátil e motor. Em nenhuma das formas ele é

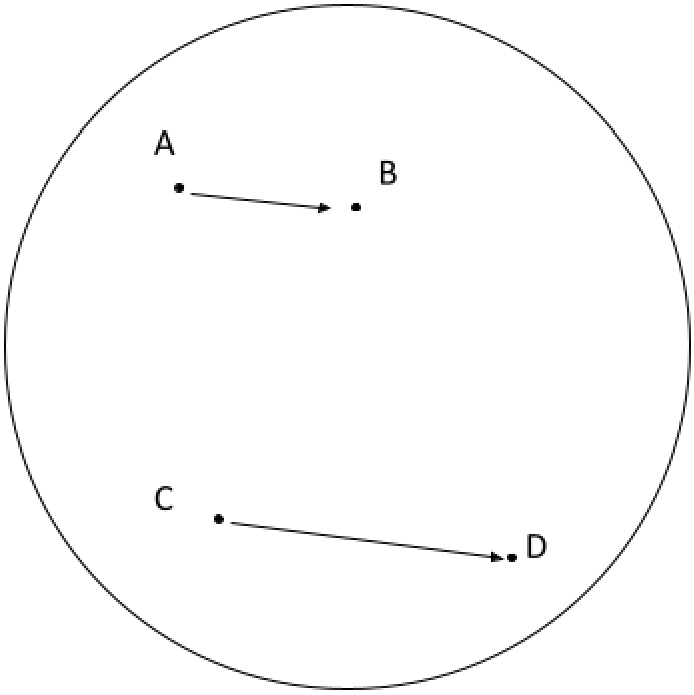
[6] A consciência, dita aqui, deve ser entendida como senciência, em um sentido mais próximo do N3 da lista proposta por Thomas Natsoulas que é um '"estado de estar ciente de algo, tanto de um objeto externo quanto de um interno, quanto de que algo é o caso." (PESSOA, p. 23)

[7] Nesse caso, consciência estaria mais próxima do sentido N4 proposto por Natsoulas ou uma auto-consciência com componente racional ou linguístico. (PESSOA, p. 23)

homogêneo pois as cores na retina ou as sensações musculares não desempenham um mesmo papel na percepção; tampouco é isotrópico pois as dimensões sensíveis não são intercambiáveis, ou seja, há dimensões que se apresentam a nós de maneira diferente de outras dimensões. Por exemplo, o espaço visual se apresenta para nós como tendo apenas duas dimensões, e que, apenas por um esforço de convergência ou acomodação visual (podendo inclusive serem distintos) a um objeto é que criamos a sensação de uma terceira dimensão (cf. POINCARÉ, 1921, p. 67). Sobretudo, o espaço sensível não possui apenas três dimensões. Poincaré afirma que no caso da forma motora do espaço, há tantas dimensões quantas forem as fibras nervosas (cf. POINCARÉ, 1921, p. 69). Acerca desse tema, William Clifford (1845 - 1879) traz grande contribuição. Para ele, a tridimensionalidade do espaço não é um postulado da ciência do espaço (cf. CLIFFORD, 2007, p. 77). Ele propõe quatro postulados da ciência do espaço que estariam em acordo com algumas de nossas experiências sensíveis e também com a construção do espaço geométrico euclidiano (CLIFFORD, 2007, pp. 79 - 84): i) o postulado da continuidade; ii) o postulado da planicidade elementar; iii) o postulado da superposição; e iv) o postulado da similaridade. Em poucas linhas, vamos analisar os postulados acima. O postulado da continuidade nos dá que todos os pontos do espaço geométrico têm a mesma delimitação, de modo que, não é possível identificar a fronteira que separa um ponto de outro. No mundo concreto, quando despejamos água em um copo, não somos capazes de perceber as diferentes moléculas de água se chocando com as paredes do copo. Se, contudo, entrarmos no mundo quântico, é plausível imaginar que possamos experimentar alguns espaços vazios, tornando, nesse caso, o que se apresentava como contínuo, como discreto. O postulado da planicidade elementar nos dá que, mesmo aquilo que se apresenta como curvo, quando ampliado um número significativo de vezes, pode se apresentar como plano (ou como reto, no caso de duas dimensões). É o que ocorre com pequenas distâncias sobre a superfície terrestre. Em nossa experiência, quase que em todas as vezes, não é possível percebermos a curvatura da Terra, mesmo sabendo que ela existe. O postulado da superposição nos dá que qualquer forma pode ser deslocada pelo espaço geométrico sem que sua forma seja alterada. Em outras palavras, formas congruentes podem ser sobrepostas em qualquer região do espaço, garantindo-se que todos os pontos coincidam. Se este postulado não for verificado, diferentes regiões do espaço podem ter diferentes distâncias entre pontos previamente escolhidos. É interessante que este postulado não é verificado em distâncias astronômicas, em virtude da ação da gravidade que altera a trajetória da luz, tornando as distâncias diferentes daquelas que existiriam se o espaço sideral fosse euclidiano. O último postulado, o da similaridade, se vale da mesma propriedade do espaço que o anterior. Qualquer figura, de acordo com este postulado, pode ser ampliada ou reduzida, sem que sua forma, ou distâncias e ângulos, sejam alterados. Se isto não for verificado, por exemplo em escala astronômica, temos um espaço de natureza diferente do euclidiano. A conclusão de Clifford é que os dois primeiros postulados podem ser questionados quando se trata daquilo que é muito pequeno e, os dois últimos, daquilo que é muito grande (cf. CLIFFORD, 2007, p. 84) Diferentes experiências, em diferentes escalas, portanto, requerem diferentes noções de espaço daquelas concebidas por Euclides. Desse modo, grandeza, número e movimento não seriam universais, mas um produto da intervenção da mente sobre sensações qualitativas e subjetivas. Em nossa experiência cotidiana, as qualidades primárias somente aparecem após uma intervenção visual-muscular dos nossos corpos, ou seja, se não tivéssemos esses corpos, tais qualidades não seriam discerníveis a nós. Para ilustrar esse fato, Poincaré se vale de um experimento mental: o olho imóvel.

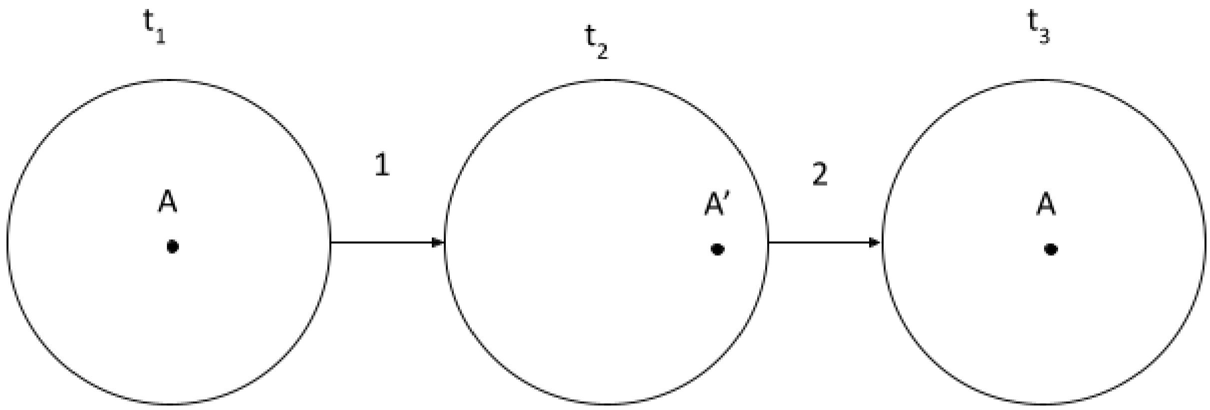
Imagine um indivíduo que não pudesse mover seus olhos e apenas visse o mundo dos objetos passar diante dele. Dois objetos posicionados nos pontos A e C se deslocam para os pontos B e D, como mostra a figura abaixo:

Fig. 1 - O Olho Imóvel



Esse indivíduo teria como saber se a distância de A até B é maior ou menor do que a distância de C até D? Segundo Poincaré, não. Para que ele soubesse comparar essas distâncias, ele deveria raciocinar a partir de memórias musculares geradas pelo movimento dos olhos. Ele propõe, então, que analisemos o que ocorre quando seguimos um objeto com os olhos. Um objeto está posicionado no ponto A do campo de visão de um indivíduo. Esse objeto se desloca até um ponto A' enquanto os olhos permanecem imóveis (1). Os olhos são deslocados de modo voluntário, acompanhado de sensações musculares, até que o objeto volte ao ponto original do campo de visão (2).

Fig. 2 - Modelo: Seguir um objeto com o olho



O que ocorre em 1 independe do nosso desejo e não é acompanhado de sensações musculares. Trata-se de uma mudança *externa* a qual o filósofo designa *deslocamento*, pois ela pode ser corrigida por uma mudança *interna*, que ocorre em 2. Para ele, sem as mudanças internas seria impossível criarmos a geometria. O que esses cenários podem nos dizer sobre as qualidades primárias presentes nos objetos do mundo exterior? Primeiramente, caso essas qualidades estivessem dadas nos objetos do mundo exterior, elas deveriam ser percebidas pelo olho imóvel. Mas não é o caso, para o filósofo. Tais qualidades somente aparecem após uma intervenção sensorial do tipo muscular, que então é assimilada como uma distância através do raciocínio, e portanto, de alguma forma ativa de consciência. A partir disso, Poincaré traz algumas conclusões interessantes: i) A qualidade "distância", que podemos chamar também de comprimento ou grandeza, somente aparece após uma compensação muscular que insere os dados brutos da experiência numa forma pré-existente da mente. A mente, por sua vez, só pode executar essa ação por meio da experiência, porque só ela pode ensinar se a compensação foi aproximadamente realizada (POINCARÉ, 2007, p. 122). ii) Como tal deslocamento pode ser repetido inúmeras vezes ao longo da experiência com o mundo sensível, a mente introduz o número que permite medições, onde só há propriedades qualitativas (POINCARÉ, 2007, p. 122). iii) É impossível para nós desenhar o espaço geométrico. Como ele existe apenas na mente, ele não é uma forma da nossa sensibilidade, mas do nosso entendimento. Assim, ao desenhar uma circunferência sobre o papel, estaríamos representando algo de outra natureza em relação àquela circunferência representada pela consciência. O papel não é, em absoluto, o plano idealizado; e os pontos que compõem essa circunferência não são os pontos criados pelas formas pré-existentes na mente. Tais ideias, então, provém da nossa mente e não do mundo material como supuseram muitos filósofos ao longo da história? O que me parece distinguir os posicionamentos de Poincaré, em relação aos posicionamentos de Locke, é que, para ele, aquilo que chamamos de comprimento, figura e número, apesar de serem causados pela experiência com os objetos do mundo exterior à mente e a partir das memórias sensoriais, são ideias criadas por meio de uma intervenção ativa da mente, sem que isto signifique representação exata do mundo sensível. Vejamos um exemplo relacionado ao ensino da geometria. Uma criança antes do início do seu curso de geometria no ensino formal é capaz de desenhar quadrados, triângulos e circunferências, associando tais formas aos objetos do mundo sensível que se assemelha a elas, mesmo que grosseiramente. Com o passar dos anos, à medida que aprende as propriedades dos objetos geométricos, passa a realizar construções geométricas mais próximas das definições dadas pela linguagem, nas quais, inclusive, é possível identificar propriedades e resolver problemas geométricos. No entanto, enquanto faz tais construções acaba por se distanciar da representação de objetos do mundo sensível, ainda que esteja resolvendo uma situação-problema encontrada no cotidiano. Com base no que foi exposto até aqui, é inegável que Poincaré rejeita qualquer semelhança entre a forma da sensibilidade e a forma do entendimento, por mais simples que seja a forma da sensibilidade. Por assim dizer, ele não poderia dizer que objetos tenham a forma retangular porque eles têm a qualidade primária “retangular” neles mesmos que é percebida pela mente. A mente tem a capacidade de estabelecer a semelhança entre alguns objetos e assim criar uma propriedade “retangular” que pode ser atribuída aos objetos numa linguagem corrente, mas que jamais será encontrada no mundo exterior e jamais poderá ser reproduzida exteriormente ao entendimento. Se a forma do nosso entendimento já pré-existe em nós e se o mundo exterior tem uma existência independente de nós, haveria distinção na formação das propriedades como comprimento, figura e número relacionada ao modo como obtemos as sensações? Por exemplo, as sensações provenientes do tato e da visão produzem em nós diferentes concepções das qualidades primárias? Acredito que o problema proposto por Molyneux, que reproduzo a seguir, pode contribuir para continuarmos nessa investigação:

> Suponha que um Homem tenha nascido cego e agora é adulto, tendo sido ensinado pelo seu tato a distinguir entre um Cubo e uma Esfera do mesmo metal, e aproximadamente do mesmo tamanho, de maneira a dizer, quando ele sentisse um e a outra, qual é o Cubo e qual é a Esfera. Suponha então que o Cubo e a Esfera são colocados em uma Mesa, e que Cego passasse a ver. Pergunto: se pela sua visão, antes de tocá-los, ele conseguiria agora distingui-los e dizer qual é o Globo e qual é o Cubo? (PESSOA, 2019, p. 31)

A pergunta que subjaz a esse experimento mental é: se as qualidades primárias como comprimento, forma e número têm um caráter distinto das qualidades secundárias como cheiro, sabor e cor, a saber, que as primeiras qualidades têm semelhança com as nossas representações mentais delas enquanto que as últimas não, elas não deveriam se apresentar a um sentido (tato) como elas se apresentam à outro (visão)? O desenrolar dessa discussão através da história, apesar de ainda não ser conclusivo, aponta para a não-obviedade de que algo apreendido pela consciência através do tato seja igualmente apreendido pela consciência através da visão. Uma mesma qualidade primária, então, causaria ideias distintas, *qualitativamente*, na consciência, invalidando qualquer semelhança entre as formas do mundo exterior e as formas da representação da mente? Para investigar essas formas de representação da mente a partir dos dados provenientes de diferentes sentidos, Poincaré formula outro experimento mental que visa tornar evidente tal diferença. O experimento é dividido em duas situações: na primeira, imagina-se uma pessoa que não está movendo seu corpo, nem seu braço, nem seus olhos e a imagem de um objeto B afeta as mesmas fibras nervosas da retina que um objeto A havia afetado anteriormente; na segunda, imagina-se uma pessoa, completamente imóvel como no cenário anterior, e que tem a ponta do seu dedo tocada por um objeto B causando a mesma impressão sensorial que um objeto A causara ao tocar o mesmo local na ponta do dedo. A conclusão a que Poincaré chega com esse experimento é que dizemos que o objeto B ocupa o lugar que antes fora ocupado pelo objeto A, se as duas situações forem realizadas. (POINCARÉ, 2007, p. 133) A primeira situação, então, evidencia uma condição necessária, mas não suficiente, segundo o filósofo, pois não sabemos a distância real das coisas por meio da visão. Quando posicionamos um objeto diante de outro fazendo coincidir suas extremidades no campo visual, temos a impressão de que eles ocupam o mesmo lugar. Por exemplo, se posicionarmos uma moeda diante dos olhos fazendo-a coincidir com o sol, temos a ilusão de que ambos ocupam o mesmo lugar. Desse modo, a visão não nos fornece dados suficientes para decidirmos se um objeto ocupa o mesmo lugar que outro objeto havia ocupado. No entanto, se um objeto ocupa o mesmo lugar que outro objeto havia ocupado, isto será acompanhado necessariamente de um efeito visual característico. A segunda situação evidencia uma condição necessária e suficiente, justamente pela ausência da distância ao empregarmos o tato. Há, portanto, diferenças qualitativas entre as ideias formadas pela visão e pelo tato, pois ambas fornecem dados diferentes em relação a um mesmo objeto e que "não podemos saber *a priori*, mas que somente a experiência é capaz de nos demonstrar." (POINCARÉ, 2007, p.134) A conclusão a que Poincaré chega deixa claro que ele reconhece a importância da experiência dos sentidos para criação do espaço geométrico, mas resta, ainda, responder a duas perguntas que surgem dessa conclusão: i) se não há semelhança entre o espaço geométrico e o espaço sensível, como é possível aplicar a geometria aos objetos do mundo exterior com alguma confiabilidade? ii) se as ideias dos objetos da geometria não têm a forma dos objetos sensíveis, que forma elas teriam? A resposta à primeira pergunta, dada por Poincaré, admite que sendo a geometria uma forma do nosso entendimento, ainda que seja formada pela experiência com o mundo sensível, ela deve adquirir um caráter ontológico próprio, impossível de refutação, como vemos aqui:

> A geometria está a salvo de toda revisão; nenhuma experiência, por mais precisa que seja, pode derrubá-la. Se pudesse fazê-lo, já teria feito há muito tempo atrás. Nós já sabemos há muito tempo que todas as chamadas leis experimentais são aproximações, e aproximações rudes. (...) essas leis não foram impostas pela natureza a nós, mas nós as impusemos à natureza. Se ela oferecer muita resistência, devemos buscar em nosso arsenal por alguma outra forma que seja mais aceitável a ela. (POINCARÉ, 2007, p. 124)

Anula-se, desse modo, a premissa de que as ideias formadas a partir das qualidades primárias devam ser representações do mundo, como está implícito nas conclusões de Locke e valida-se a noção kantiana de que “o conhecimento sensível não representa as coisas como elas são, mas somente o modo como afetam nossos sentidos” (KANT, 1974, p. 126). Há liberdade para se criarem novas geometrias que não necessariamente sejam representações do mundo exterior e que desfrutam do mesmo caráter das geometrias que descrevem mais proximamente as qualidades presentes nos objetos do mundo exterior. Talvez nesse ponto, Poincaré se distancie de Kant, para quem a geometria seria válida aos objetos do mundo sensível por ser aplicável aos fenômenos - e não aos objetos eles mesmos. Mas como tudo o que podemos experimentar em relação ao mundo sensível são fenômenos, a geometria seria totalmente válida para o espaço dos sentidos. (cf. KANT, 1974, p. 127) Kant eleva, desse modo, o nível de certeza que se pode obter com a geometria ao mais próximo da exatidão:

> como o espaço, da maneira como pensa o geômetra, é exatamente a forma da intuição sensível, que encontramos *a priori* em nós, e que contém o fundo da possibilidade de todas as aparições externas (de acordo com sua forma), estes devem concordar necessariamente e da maneira mais exata com as proposições do geômetra, que ele próprio tira não de um conceito fictício, mas do fundamento de todos os fenômenos externos, quer dizer, da própria sensibilidade. (KANT, 1974, p. 124)

Poincaré reconhece, entretanto, que há mais de uma geometria possível e aplicável ao mundo dos sentidos pois fala de aceitação de uma tal geometria aos objetos do mundo sensível, e que, levando-se ao limite a noção kantiana, se houvesse uma geometria exata ela deveria ser única. A resposta à segunda pergunta[8] revela a forma que tais geometrias devem ter para que sejam assim entendidas:

> O que chamamos de geometria nada mais é que o estudo de propriedades formais de um certo grupo contínuo; então podemos dizer que o espaço é um grupo. A noção desse grupo contínuo existe em nossa mente antes de qualquer experiência. (POINCARÉ, 2007, p. 145)

O que Poincaré conclui, é que já temos previamente, na mente, a noção de grupo contínuo, ou seja, temos a capacidade de formar conjuntos em que seus elementos executam uma determinada operação entre si. Para isso, essa operação deve ser associativa, o conjunto deve possuir um elemento neutro e cada elemento desse

[8] Caberá ao próximo capítulo explicitar como Poincaré chega à noção de grupo contínuo.

conjunto deve possuir um simétrico em relação à operação definida. É assim que as diferentes experiências sensoriais a partir das qualidades primárias são agrupadas e um espaço geométrico é criado de modo intrínseco à consciência. Por isso, qualquer geometria que esteja fundamentada na noção de grupo contínuo, para o filósofo, é válida.

Com isso podemos concluir que Poincaré entende que a forma do entendimento precede a forma da sensibilidade e, portanto, contraria a tese de Locke de que não há princípios inatos na mente. Esta visão, no entanto, se aproxima sobremaneira de Kant para quem a matemática é a ciência "que embasa sua cognição na construção de conceitos por meio da apresentação do objeto em uma intuição *a priori*" (KANT, 1974, p. 146). Essa forma, uma vez que tem existência própria na mente, pode ser usada pela razão para criar diferentes geometrias a partir das experiências com as qualidades primárias dos objetos e que podem variar de acordo com os sentidos aplicados. Essas diferentes geometrias não têm caráter representacional da realidade, pois operam de acordo com a forma do entendimento e, só expressam a realidade de modo aproximado e da forma mais conveniente para o que se propõem.

CAPÍTULO 3: A estrutura do pensamento geométrico

Basicamente, tudo o que foi dito nos capítulos 1 e 2, se aplica adequadamente aos fundamentos e noções basilares da geometria euclidiana. Isto porque esta geometria empregou de maneira cuidadosa os princípios lógicos do método dedutivo-axiomático e também é ela quem se aproxima de modo mais trivial da nossa experiência com o mundo concreto por intermédio dos sentidos. A partir da leitura de Aristóteles apresentada no capítulo 1, obtivemos respostas às perguntas de que modo os princípios de uma teoria dedutiva se tornam conhecidos e qual é a disposição que vêm a reconhecê-los. No capítulo 2, a partir da leitura apresentada de Poincaré, tal disposição é revelada mais facilmente na escolha dos princípios da geometria euclidiana, mas esta mesma disposição pode ser empregada para fundamentar outros princípios que darão origem a novas geometrias. A pergunta que norteará este capítulo é: Como foi possível a criação de outras geometrias, se compartilhamos de experiências similares em relação ao mundo concreto? Depois de se tentar, em vão, provar o postulado das paralelas da geometria euclidiana a partir dos outros quatro postulados, outras geometrias só foram criadas quando este postulado foi substituído por meio de novas concepções sobre o significado dos conceitos primitivos como *reta* e *plano*. A criação de outras geometrias não se deu por uma nova percepção da realidade, mas por novas interpretações dos termos primitivos. Ao final do século XIX havia três geometrias, com mesmo status lógico, mas que afirmavam três coisas absolutamente incompatíveis em relação ao paralelismo de retas: na geometria euclidiana, há apenas uma reta paralela a uma reta dada; nas geometrias de Lobatchevski e Bolyai, há infinitas retas paralelas a uma reta dada; e na geometria de Riemann, não há nenhuma reta paralela a uma reta dada. Será o caso, então, de buscar meios de verificar a verdade dessas geometrias tentando encontrar a verdadeira geometria e, portanto, tornar as outras falsas? Não será esse o caminho que este trabalho irá percorrer. Proponho, neste capítulo, analisar qual é o assunto (*subject-matter*) das proposições da geometria e, em particular, qual é o assunto do postulado das paralelas de Euclides, ou seja, qual é o assunto de uma proposição que emprega termos como *reta* e *plano*. Pretendo verificar se tais termos empregados na geometria de Euclides, referem-se aos mesmos objetos oriundos dos termos correspondentes nas geometrias não-euclidianas de Lobatchevski, Bolyai e Riemann. Para isso, será relevante destacar qual é a importância da observação do mundo concreto na verificação das proposições da geometria e qual a natureza dessa verificação: se metafísica ou semântica. Será relevante apresentar a distinção entre a geometria proposta por David Hilbert em sua obra "Fundamentos da Geometria" e a concepção de geometria assumida por Gottlob Frege. Os conceitos de assunto, verificação e verdade empregados neste trabalho serão aproximadamente aqueles usados por David Lewis e Stephen Yablo.

Comecemos com uma pergunta: Quantas retas paralelas existem em relação a uma reta dada? Esta pergunta pode ser respondida, por exemplo, como "não há nenhuma", "há uma única" ou "há infinitas". Mas essas respostas dizem respeito ao mesmo assunto? São respostas equivalentes às respostas que podem ser dadas à pergunta "Quantas luas orbitam a Terra?" Parece-me que não. Não se trata de, como no exemplo acima, criar mundos que concordam entre si em relação ao *número* de possibilidades. Suponhamos que existam três tipos de mundo: m_0 – mundos em que não existem retas paralelas, m_1 – mundos em que existem uma única paralela e m_∞ - mundos em que existem infinitas paralelas. Assim, os mundos m_0 concordariam com a geometria de Riemann, os mundos m_1 concordariam com a geometria euclidiana e os mundos m_∞ concordariam com a geometria de Lobatchevski? Posso admitir isso em algum nível, mas a razão dessa admissão não seria meramente numérica. Isto porque, se assumirmos o postulado das paralelas tal qual enunciado por Euclides, não haveria nenhuma possibilidade de um mundo com infinitas paralelas ou com nenhuma. Cada um dos mundos sob concepções de *reta* e *plano* que concordam entre si não permitiriam a existência de outro mundo. Para identificarmos o assunto dessas proposições vejamos a definição de assunto proposta por David Lewis:

> Dois mundos possíveis, que são exatamente iguais enquanto um tal assunto é considerado, devem ambos fazer uma mesma proposição verdadeira ou falsa. Por outro lado, se um mundo faz uma proposição verdadeira e o outro a faz falsa, isto deve ter sido porque eles diferem em relação ao assunto. (LEWIS, 1988, p. 11)

O assunto aqui não é o número de retas paralelas a uma reta dada, mas sim o que é entendido por *reta* e *plano* e o número de paralelas seria uma consequência disso. Assim, já não é o número de paralelas que importa, mas a definição do que é *reta* ou *plano*. Como explica Gray (2007), essa contradição aparece no final do século XIX em virtude das grandes mudanças ocorridas na visão do que é matemática (ou geometria) nesse período. O surgimento e a disseminação de geometrias não-euclidianas, logicamente válidas, levaram matemáticos e filósofos do século XIX a duas conclusões: (i) é uma questão empírica decidir qual geometria é verdadeira e (ii) a geometria perde com isso seu *status* de conhecimento certo. (cf. GRAY, 2007, p. 326) Verdade e certeza entraram, assim, no centro do debate a respeito do que é geometria. A visão kantiana de que o conhecimento matemático é um juízo sintético *a priori* parece não fazer mais sentido nessa conjuntura.

Lembremos o que Kant diz a respeito disso:

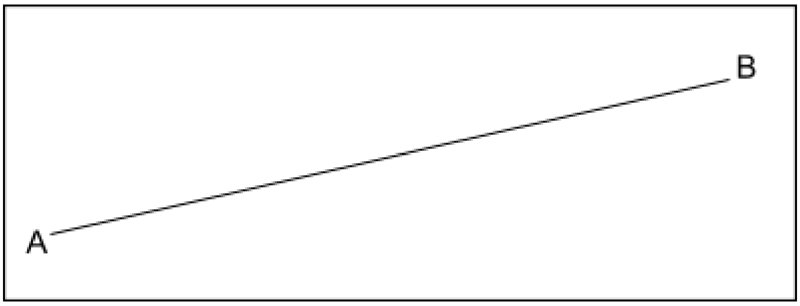
> Tampouco é analítico qualquer princípio da geometria pura. Que a linha reta seja a mais curta entre dois pontos, é uma proposição sintética, pois o meu conceito de *reto* não contém nada de grandeza, mas somente uma qualidade. O conceito de mais curto é, portanto, acrescentado inteiramente e não pode ser extraído por nenhum desmembramento com base no conceito da linha reta. Deve-se, portanto, recorrer aqui à ajuda da intuição, pela qual apenas é possível a síntese. (KANT, 1974, p. 29)

Como é possível ter mais de uma geometria em pleno acordo com o método axiomático-dedutivo, mas com resultados diferentes? Se ambas geometrias, euclidiana e não-euclidiana, preservam o caráter *a priori*, como podem emitir juízos sintéticos distintos? Pode-se concluir, apressadamente, que as proposições da geometria seriam, então, analíticas e que o assunto de tais proposições só pode ser encontrado dentro do próprio conjunto de definições, axiomas e teoremas. Essa conclusão excluiria qualquer conteúdo empírico-observacional dos teoremas geométricos. No entanto, vou me empenhar em mostrar daqui em diante que as proposições de diferentes geometrias podem ser consideradas sintéticas, mesmo contradizendo-se aparentemente, por serem sentenças que diferem entre si em relação ao assunto de que falam. Isto estará em acordo com a visão de Quine a respeito da distinção entre o que é analítico e o que sintético, como será apresentado adiante neste capítulo. Para fins didáticos, vamos separar a análise das diferentes definições de *reta* e *plano*, até mesmo porque as geometrias não-euclidianas diferem da euclidiana, principalmente na concepção do que é *plano*. A divergência da concepção do que é uma *reta*, em relação tanto às geometrias não-euclidianas quanto à geometria euclidiana, traz para análise outra geometria: a projetiva. Comecemos pelo assunto *reta*.

Por ser uma definição baseada na intuição, a reta pode ser entendida de, pelo menos, duas maneiras: como a curva que aponta sempre para a mesma direção ou como a menor curva que une dois pontos. Se dissermos que a proposição que define o que é reta é sobre aquilo que é retilíneo, então, de algum modo, deixamos de lado o ser sobre aquilo que dista de algo. O contrário também ocorre. A partir desse ponto, passamos a falar de objetos diferentes: a reta-enquanto-direção-constante, concepção empregada pela geometria projetiva; e a reta-enquanto-menor-distância, concepção empregada pela geometria euclidiana, mas também pelas geometrias não-euclidianas. Vemos, no entanto, que não se trata aqui de estabelecer mudanças no método axiomático-dedutivo. Ambas definições estão de acordo com o rigor lógico imposto pelo método. A questão é delimitar o assunto de tais definições que abrirá possibilidades de comparação entre mundos sob tal e tal definição e fechará a possibilidade de comparação entre mundos que não compartilham de uma mesma definição. No entanto, essa divergência em relação ao assunto parece colocar em xeque o caráter *a priori* dessas proposições, não o caráter sintético. Assim, a concepção do que é reto parte da observação do mundo concreto e não de algo intrínseco à razão. Sobre uma sentença ser totalmente baseada sobre a observação, Lewis afirma: “Uma sentença é totalmente baseada sobre a observação sse ambos dois mundos observacionalmente equivalentes derem a ela o mesmo valor de verdade.” (LEWIS, 1988, p. 14) Mas uma mesma observação forneceria apenas uma concepção de reta? Vejamos como isto pode ocorrer.

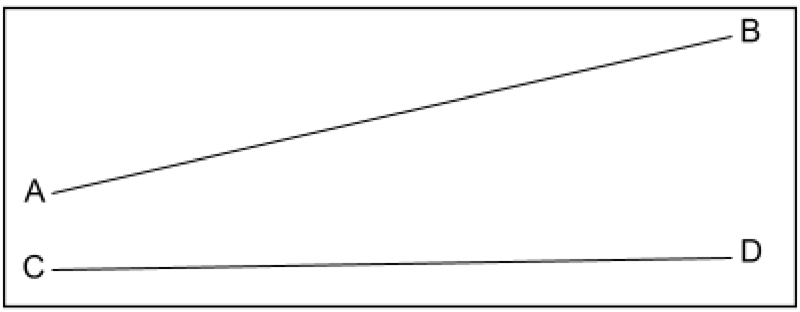
Observe a figura abaixo:

Figura 3



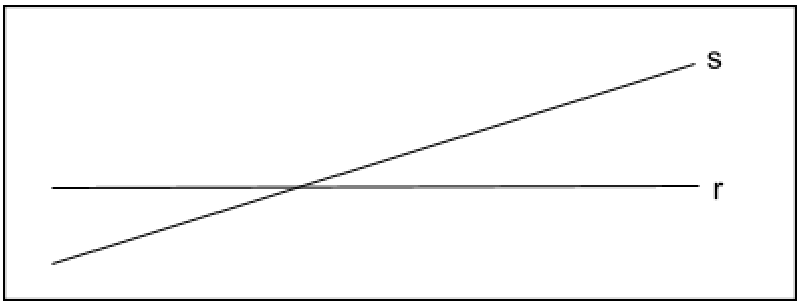
O conteúdo observacional dessa figura pode ser enunciado de inúmeras maneiras. Proponho algumas: i) Há, na figura, mais espaços brancos que pretos. ii) Alguns pingos de tinta preta estão mais próximos da letra A e outros estão mais próximos da letra B. iii) Há um extremo da linha que se encontra mais próximo de A (ou B). Apesar de poder continuar criando novos enunciados a partir dessa figura, dificilmente concluirei que **p**: a linha traçada é a menor distância entre A e B; ou **q**: a linha traçada segue sempre a mesma direção; sem que eu me valha de outros princípios, mais ou menos intuitivos, como distância e direção. Se eu afirmar que, no plano, não há outra forma de ir de A até B por um caminho mais curto do que pela linha que está representada na figura, vou encontrar respaldo observacional nessa figura para tal afirmação. Mas, se eu afirmar que a linha que vai de A até B é a projeção de uma curva, digamos uma parábola, sobre um plano, então a observação da figura acima também trará validade à minha afirmação. Ambas proposições, **p** e **q**, são dessa forma totalmente sobre a observação porque eu terei respaldo observacional para afirmar as duas. Vejamos outro exemplo, observando a figura abaixo:.

Figura 4



Enunciado: A distância entre A e B é igual à distância entre C e D. Se eu considerar a concepção de reta-enquanto-menor-distância, então trata-se apenas de uma questão de medir as linhas para atestar a veracidade dessa proposição. No entanto, se eu considerar a concepção de reta-enquanto-direção-constante, não posso decidir sobre essa proposição. Nesse último caso, ambas as linhas poderiam ser projeções de curvas que, ao serem projetadas, subtraiu-se do conteúdo original justamente a distância entre as extremidades. Vejamos um último exemplo:

Figura 5



Enunciado: A reta r tem um ponto em comum com a reta s. Se eu considerar a concepção de reta-enquanto-menor-distância, então não é difícil ver que há um pingo de tinta preta que é comum às duas linhas formadas por pingos de tinta preta. A observação corrobora o enunciado. No entanto, se eu considerar a concepção de reta-enquanto-direção-constante, poderia enunciar: As retas r e s são reversas e, portanto, não possuem nenhum ponto em comum. A observação também corrobora esse enunciado, pois estaria vendo apenas a projeção dessas retas em um plano. Os exemplos poderiam se seguir, mas acredito que isto já seja suficiente para mostrar que, por meio de uma mesma observação, eu posso verificar a veracidade de enunciados contraditórios ou indecidíveis. Sobre isso, Lewis afirma: “De qualquer modo, nós teremos sentenças que não podem ser rapidamente e decisivamente testadas pela observação e ainda assim são totalmente sobre a observação.” (LEWIS, 1988, p. 16) A observação, pura e simples, não me dá o fundamento necessário para decidir a veracidade entre uma ou outra proposição, isto porque ambas podem ser verificadas pela observação apesar de possuírem conteúdos absolutamente distintos.

Como a observação poderia contribuir para decidir entre a geometria euclidiana e as não-euclidianas, se ambas se valem da mesma concepção da reta-enquanto-menor-distância? Nesse caso, devemos distinguir as concepções de plano. Mais uma vez, a observação não será decisiva, apesar de possível. Tomemos como exemplo a superfície de uma esfera. A menor distância entre dois pontos nessa superfície será um arco de uma circunferência máxima sobre a superfície dessa esfera. Isto não parece, no entanto, com o que Euclides entendia por linha reta e plano. A questão é que se observarmos distâncias relativamente pequenas sobre essa superfície esférica, teremos um aproximadamente um plano euclidiano. A observação, então, poderá afirmar ambas as geometrias, neste caso. Ambos sistemas são logicamente válidos e ambos encontram respaldo observacional porque cada um deles, a seu modo, está se valendo de conteúdos parciais a respeito da observação. Ocorre aqui o que Lewis chamou de superveniência parcial: “uma sentença é parcialmente sobre um assunto sse seu valor de verdade parcialmente sobrevém, de um modo adequadamente não-trivial, daquele assunto.” (LEWIS, 1988, p. 22) A abstração opera, por meio da intuição, extraindo e selecionando partes da experiência com os objetos da realidade e, assim, fundamenta as noções primitivas que criaram essas geometrias. A superveniência é parcial, justamente porque não há na realidade nenhum ponto, reta ou plano, qualquer que seja a concepção empregada. Tais noções encontram algum respaldo na realidade, mas somente de modo parcial, pois em última instância são objetos da abstração. Por esse motivo, a geometria de Lobatchevski ficou em descrédito por mais de um século[9]. Não havia, quando da sua criação, nenhuma experiência empírica que atestasse a curvatura negativa do plano na realidade. Nesse sentido, as sentenças dessa geometria não eram sequer parcialmente sobre a observação, eram tão somente possíveis logicamente, num sentido forte ou, analiticamente, num sentido mais fraco. Com o avanço da astronomia e com a teoria da relatividade geral, tais proposições adquiriram valor de verdade e puderam ser verificadas pela observação de fenômenos da realidade. Mas ainda assim, Lobatchevski não estava postulando o modo como a luz percorre o espaço quando propôs sua geometria.

[9] Pelo mesmo motivo, Gauss não quis se comprometer publicamente com essa geometria apesar de concordar com sua validade. (cf. GRAY, 2007, p. 128)

Desse modo, o assunto das proposições dessas geometrias é apenas *parcialmente sobre* conteúdos observacionais como pingos de tinta num papel ou a trajetória de um feixe de luz no espaço. Como se trata de um *sobre-parcial*, mais de uma geometria foi possível como fica claro na distinção entre as geometrias métricas[10] e a geometria projetiva[11], pois cada uma privilegiou alguns conteúdos observacionais em detrimento de outros. No caso das diferentes geometrias métricas, a parcialidade dos conteúdos se dá na escala da experiência com os objetos da realidade.

Pelo que foi apresentado até agora, se a veracidade das proposições matemáticas parece não ser algo em que se pode fiar, o mesmo não pode ser dito em relação à certeza que se pode obter de tais proposições. Assim, no início do século XX restava ainda a confiança no aspecto lógico da matemática e o objetivo seria, então, não elaborar sentenças verdadeiras, mas sentenças provadas (GRAY, 2007, p. 327). É isto que leva David Hilbert a escrever a obra “Fundamentos da Geometria”. Seu objetivo é o de

> escolher para a geometria um conjunto simples e completo de axiomas independentes e deduzir deles os mais importantes teoremas geométricos de tal maneira que revele com maior clareza possível a significância dos diferentes grupos de axiomas e o escopo das conclusões derivados dos axiomas individualmente. (HILBERT, 1950, p.1)

É notável aqui que Hilbert não deseja seguir pelo caminho axiomático tradicional de iniciar pelos termos (ou conceitos) primitivos para daí criar o conjunto de axiomas. Seu foco está na construção de um conjunto de axiomas dos quais se poderá apreender o que se entende por *ponto*, *reta* ou *plano*. O preço que se paga com tal proposta é que sua geometria será passível de múltiplas interpretações[12], ou seja, não será automático identificar o assunto das proposições descritas, se é que se pode encontrar algum assunto subjacente a elas. Mas esse é o preço que

---

[10]Euclidiana e não-euclidianas.

[11] À geometria projetiva interessa estudar as propriedades invariantes dos objetos geométricos quando estes são submetidos a transformações projetivas, como, por exemplo, olhá-los por diferentes ângulos. Nas geometrias métricas, tais projeções provocam distorções nas formas e, portanto, produzem alterações nas medidas e ângulos das figuras geométricas. Felix Klein considerou que as geometrias métricas seriam casos particulares da geometria projetiva e Arthur Cayley descreveu a geometria projetiva como aquela que contém todas as outras geometrias. (cf. PESIC, 2007, pp. 114-115)

[12] Este tema será trabalhado mais detidamente ainda nesta dissertação. Pensa-se aqui em interpretação enquanto um modelo como realização possível de uma estrutura que obedece às relações previstas naquela estrutura.

justamente Hilbert está disposto a pagar para obter um sistema consistente logicamente e que poderá conter em si tanto a geometria de Euclides quanto as não-euclidianas e até mesmo a projetiva. Se Hilbert criasse uma outra geometria baseada em uma nova interpretação dos termos primitivos, ele estaria candidatando sua geometria a concorrer à posição de geometria verdadeira. Ao focar-se na independência dos axiomas e no caráter puramente lógico das relações, ele acaba evidenciando a *estrutura* que sustenta uma geometria válida. Cabe aqui notar que a concepção de Quine a respeito do que se entende por significância empírica aproxima-se da proposta de Hilbert. Para Quine, nenhum termo ou afirmação, tomados isoladamente, poderiam ter seus significados confirmados ou inferidos por algo do mundo concreto. A significância empírica advém do *todo* da ciência. (cf. QUINE, 1975, p. 245) Desse modo, a geometria proposta por Hilbert só teria valor empírico, ou seja, os termos primitivos e os axiomas só seriam melhor interpretados quando o todo da teoria fosse considerado. Isto implica, evidentemente, que as relações entre termos - ou a estrutura - teriam maior relevância do que o significado dos termos isolados.

A crítica de Frege a Hilbert consiste em afirmar que os axiomas não podem fornecer uma definição, porque eles adquirem sentido somente por meio dela. Sem a definição, os axiomas são proposições sem sentido e, por isso, não se contradizem, mas tampouco contém algum conhecimento real (FREGE, 1984, p. 277). Se o assunto de uma geometria não estiver relacionado ao mundo concreto, ainda que parcialmente como já vimos, mas tão somente seja um conjunto consistente de operações lógicas sobre termos indefinidos, esta ainda poderá ser considerada uma geometria existente e verificável? Aqui vemos as posições contrárias de Hilbert e Frege:

> Hilbert era da opinião radical de que consistência implica existência. (...) Tanto a geometria euclidiana como as não-euclidianas existem, na matemática, porque cada uma tem um conjunto consistente de axiomas. Frege, contrariamente, acreditava que existência é primeiramente uma questão de objetos que estão no mundo e sistemas axiomáticos sem objetos são vazios. Na visão dele, só há um mundo e só há uma geometria, portanto, uma geometria não-euclidiana seria simplesmente sem significado. (GRAY, 2007, p. 329)

A divergência que surge entre Frege e Hilbert parece ser uma divergência na natureza da verificação, como colocado por Yablo: uma verificação é de natureza metafísica e outra, de natureza semântica (cf. YABLO, 2014, p. 57). Para Frege, a verificação de uma geometria é metafísica no sentido clássico, ou seja, a verdade de uma proposição é metafisicamente necessitada pela existência de objetos, fatos ou estados da realidade; enquanto que, para Hilbert, a verificação de sua geometria seria semântica, ou seja, a verdade de uma proposição é logicamente necessitada pelos modos pelos quais os objetos, fatos ou estados podem ser na realidade. Essa divergência foi apontada por Hilbert na introdução dos “Fundamentos da Geometria” publicado em 1934. Ali ele faz a distinção entre uma teoria concreta, referida por Frege; e uma teoria abstrata, referida por ele mesmo. A distinção entre teorias concreta e abstrata foi explicada por Jesús Mosterín em seu texto “A polêmica entre Frege e Hilbert”:

> uma teoria concreta é um determinado objeto, a saber, um conjunto de ideias (verdadeiras ou falsas) sobre um certo sistema. Uma teoria abstrata, ao contrário, não seria um objeto, senão uma função, a saber, uma função que tem como domínio de definição o conjunto dos sistemas homólogos a ela e tal que a cada sistema homólogo aplica-se uma teoria concreta determinada. À teoria concreta que aplica a teoria abstrata a um sistema dado se chama também a interpretação dessa teoria abstrata a esse sistema. (MOSTERÍN, 1984, p. 129)

Conforme me distancio da realidade objetiva cotidiana e incluo como assunto as evidências astronômicas ou subatômicas, maior se torna o assunto e, portanto, os termos e conceitos que emprego se tornam mais frouxos. Por outro lado, quando aumento a precisão dos termos, restrinjo cada vez mais o assunto de tais proposições e passo a falar de partes de conteúdos observacionais cada vez menores. Daí que, se desejo falar da luz, galáxias, buracos-negros, aproximadamente devo empregar a geometria de Lobatchevski. Se desejo falar das navegações ou voos pelo planeta Terra, aproximadamente devo empregar a geometria de Riemann. Quando um estudante da educação básica resolve um problema de geometria, ele usa aproximadamente a geometria euclidiana. Contudo, se desejo falar de tudo isso ao mesmo tempo, preciso reconhecer que os termos não podem ser os mesmos porque o assunto já não é mais o mesmo. Com isso, quanto maior a analiticidade de uma afirmação, ou seja, quanto menor for o componente factual necessário para verificá-la ou para sustentar sua verdade, mais distante da experiência com o mundo sensível ela está. Por outro lado, as afirmações *mais* sintéticas, estariam mais próximas da experiência. A este respeito, Quine afirma:

> A totalidade daquilo a que chamamos de nossos conhecimentos ou crenças, das mais casuais questões de geografia e história, às mais profundas leis da física atômica ou mesmo da matemática pura ou da lógica, é uma construção humana que está em contato com a experiência apenas em suas extremidades. (QUINE, 1975, p. 246)

Com isto, ele assume que não há um *corte* entre o que é analítico ou sintético, ou entre aquilo que seja próprio para uma verificação semântica ou metafísica. Ele concorda que a realidade sensível é epistemologicamente superior e mais eficaz que as demais no que se refere à experiência, mas que a distinção desta para a lógica pura, por exemplo, não se dá pela natureza ou tipo de uma ou outra, mas pelo grau de proximidade com as experiências sensíveis (cf. QUINE, 1975, p. 247). Portanto, em conformidade com Quine, a divergência entre Hilbert e Frege está em que o primeiro, ao propor uma estrutura para as geometrias, faz afirmações que estariam mais distantes das "bordas", ou seja, da experiência sensível, enquanto que o último, ao buscar uma geometria menos abrangente e, portanto, mais específica, mantém-se mais próximo da experiência sensível, e pode, desse modo, sofrer maior impacto ao colidir com esta. Isto foi o que ocorreu com a geometria euclidiana quando tentou-se aplicá-la à luz percorrida no espaço em grandes distâncias.

Mas se a realidade sensível possui uma única geometria própria, nós nunca conseguiremos sistematizá-la, pois isso implicaria que pudéssemos experimentar a realidade em sua totalidade e, não apenas, parcialmente. Quanto mais voltamos na cadeia que se inicia com um conteúdo observacional e passamos para conteúdos da intuição, abstraídos da observação, e ainda para conteúdos formados pela dedução a partir de tais abstrações, mais distantes ficamos do assunto de tais proposições. Se ainda, queremos continuar nesse processo buscando encontrar uma estrutura comum a todas proposições das diferentes geometrias possíveis, ainda mais distantes do assunto estaremos e menor será nossa capacidade de verificação dessas proposições. É o que ocorre, por exemplo, com o programa de Erlanger de

Felix Klein[13], no qual todas as geometrias são compreendidas como grupos de transformação. Isto por um lado revela a estrutura que fundamenta qualquer geometria, mas por outro lado, torna praticamente inacessível qualquer vínculo com a realidade objetiva, ainda que parcialmente. Ainda assim, a possibilidade lógica não exclui a possibilidade material. Pode ocorrer que, como com as geometrias de Lobatchevski e Bolyai, em algum tempo sejamos capazes de experimentar partes da realidade que estejam de acordo com outras geometrias hoje existentes na esfera puramente lógico-racional. Caberá a uma determinada teoria concreta, na terminologia hilbertiana, aplicar uma determinada teoria abstrata por meio da interpretação dos seus termos primitivos.

Concluindo, a pluralidade de diferentes concepções em relação aos conceitos primitivos como *reta* e *plano* existe porque há divergência no assunto quando esses termos são empregados em diferentes geometrias. Essa divergência se dá porque tais termos são criados por meio de superveniência parcial dos conteúdos da realidade através da intuição e abstração. A tentativa de se livrar dessa divergência ao propor uma geometria baseada em relações e estruturas faz com que haja um deslocamento na concepção de verificação dessa geometria que passa de uma verificação metafísica para uma verificação semântica sem, contudo, que isto signifique distinção de natureza, mas tão somente de grau, em relação às experiências sensíveis.

[13] “A comparative review of recent researches in geometry”, 1872.

PARTE II: Do Abstrato ao Concreto [interpretado]

CAPÍTULO 4: A aplicabilidade das geometrias: Coincidência e conveniência

Ninguém deve duvidar que as geometrias são aplicáveis ao mundo concreto desde a resolução de um exercício de geometria por meio da construção de uma figura com régua e compasso até o lançamento de satélites pelo espaço. Muitos filósofos tentaram explicar por que as geometrias são aplicáveis ao mundo dos objetos concretos e oferecem ferramentas úteis ao desenvolvimento das ciências naturais como a Física, a Química e a Biologia. Neste capítulo, vou analisar duas possíveis respostas a essa aplicabilidade e, ao analisá-las, vou introduzir uma terceira possível resposta a esse problema que estará em acordo com o que vem sendo exposto ao longo desta dissertação. Inicialmente, vou analisar a sugestão proposta por Eugene Wigner em seu texto "The Unreasonable Effectiveness Of Mathematics In The Natural Sciences" de que a aplicabilidade da matemática (geometrias inclusive) às ciências naturais é resultado de uma coincidência. Irei refutar essa visão, mas nem por isso ela deixará de ser útil. Pretendo, ao refutá-la, revelar que a aplicabilidade das geometrias só reforça a tese de que elas são resultado do processo de abstração a partir das experiências sensíveis. O texto de Wigner ressalta ainda a proposta kantiana de que a geometria fornece juízos sintéticos *a priori*, sem contudo responder a pergunta de como seria possível existir mais de uma geometria válida se as proposições da geometria euclidiana tivessem caráter *a priori*. Não pareceria razoável existirem *a priori* múltiplas geometrias distintas entre si naquilo que afirmavam sobre retas paralelas ou sobre a natureza do plano. Para contrapor a visão de Wigner, sem contudo concordar totalmente com ela, trarei neste capítulo a visão de Poincaré a respeito da aplicabilidade das geometrias ao mundo concreto. Na tentativa de salvaguardar algo da perspectiva kantiana de que as proposições da geometria seriam juízos sintéticos *a priori*, Poincaré buscou demonstrar que as geometrias diferem-se em relação às proposições empregadas mas que, ao fim, relacionam-se aos mesmos objetos do mundo concreto, sendo apenas uma questão de conveniência qual geometria usar num determinado contexto. Para expor essas diferentes explicações a respeito da aplicabilidade das geometrias, irei aprofundar o estudo sobre a distinção entre analítico e sintético e, também, verificar o que se pode chamar de *a priori* quando tratamos das geometrias. A proposta é identificar a sinteticidade das proposições das geometrias (que muitos autores chamam de geometria aplicada) à etapa descendente do conhecimento, à maneira de Porchat, como exposto na introdução deste trabalho. Nesta etapa, a sinteticidade das proposições é revelada por meio da interpretação dos objetos do mundo concreto nos termos da teoria geométrica. Esta é a solução que devo apresentar neste capítulo e trabalhar mais profundamente na conclusão desta dissertação. De modo análogo e complementar, a analiticidade das proposições das geometrias (que muitos autores chamam de geometria pura) ocuparia a etapa ascendente do conhecimento, ou seja, na etapa da criação - ou escolha - dos axiomas e dos termos primitivos da teoria geométrica. Como já exposto em outras partes deste trabalho, concordo com Kant em que as proposições da geometria euclidiana sejam sintéticas - ou que tenham algum grau de sinteticidade ao dizer algo sobre o mundo dos objetos concretos - porque se assim não fosse, não seria possível aplicá-la às ciências naturais, por exemplo. Ao mesmo tempo, é inegável que possam surgir - e surgiram - geometrias igualmente válidas logicamente sem qualquer conteúdo empírico relacionado a elas quando de sua criação. Isto não significa que tais proposições não possam, futuramente, assumir algum grau de sinteticidade por meio da interpretação dos objetos do mundo concreto nos termos desta ou daquela teoria. Defenderei ainda que há nos seres humanos um aparato mental-cerebral, *a priori* e não-linguístico, capaz de abstrair as formas do mundo sensível e criar sistemas de proposições por meio de operações elementares, como as que ocorrem nos grupos de transformação de Lie.

Em seu texto, Wigner levanta dois pontos principais: i) os conceitos matemáticos conectam-se de modo inesperado e, por meio de tais conexões, geralmente permitem uma descrição acurada de fenômenos e ii) justamente por (i), nós não temos como garantir que as teorias formuladas por meio de conceitos matemáticos são únicas na explicação dos fenômenos. (WIGNER, 1960, p.1) O filósofo entende que as matemáticas ocupam-se da invenção de conceitos e que a geometria elementar foi formulada para descrever entes diretamente sugeridos pelo mundo real. (WIGNER, 1960, p. 2) Contudo, para ele, as matemáticas não desempenham seu papel mais importante enquanto meras ferramentas das ciências naturais, mais especificamente, a Física. (WIGNER, 1960, p. 5) Concordando com Galileu, Wigner afirma que "as leis da natureza devem ter sido formuladas com a linguagem das matemáticas para que sejam objeto de uso das matemáticas aplicadas." (WIGNER, 1960, p. 5) Dessa maneira, as matemáticas não teriam uma linguagem dentre tantas possíveis, mas compartilhariam, *coincidentemente*, a mesma linguagem estruturante da natureza. Circunscrevendo as posições de Wigner apenas às geometrias, e sob tal ponto de vista, as proposições da geometria seriam de natureza sintética, necessariamente. Ainda, por ter a linguagem *correta* em que a natureza exprime suas leis, ela seria infalível, e portanto, *a priori*. Isto parece concordar com a posição kantiana das proposições da geometria serem sintéticas e *a priori*. Contudo, afirmar estas coisas, como o próprio Kant observou, não resolve o problema da aplicabilidade da geometria. Como aponta Sklar, Kant ainda deve responder a seguinte pergunta: "Como pode a geometria ser aplicável a todas nossas experiências empíricas apesar do fato de suas proposições básicas serem totalmente imunes à possibilidade de revisão diante desses experimentos?" (SKLAR, 1974, p. 84) A aplicação de uma teoria à realidade pressupõe, de modo geral, que os fundamentos sejam descobertos por meio da experiência e os teoremas ou leis sejam testados para serem afirmados ou refutados. Se uma geometria não pode ser refutada por mais que se realizem experiências, como sustentar seu caráter sintético? Se a experiência com o mundo concreto é fundamental para a descoberta dos seus princípios, como sustentar o caráter *a priori*? Sklar nos dá um belo resumo da resposta kantiana a tais indagações. Kant reconhece que toda experiência sensível é feita a partir de fora da coisa-em-si e que tudo o que dizemos a respeito deste mundo sensível é sobre nossa experiência com este mundo. Além disso, o que há de *a priori* na criação das geometrias é o aparato mental da percepção dado previamente a todos os humanos. Dessa forma, para Kant, o espaço não é algo relativo à coisa-em-si, mas é uma estrutura organizadora da mente para ordenar sistematicamente os dados sensíveis. (cf. SKLAR, 1974, p. 84) Kant, então pode responder à pergunta colocada, como exposto por Sklar:

as verdades geométricas são verdades sobre o espaço. Por isso, não é de se admirar que sejam *a priori* e sintéticas. Elas são sintéticas porque a estruturação do mundo perceptual não é mero assunto da lógica pura e do significado de palavras, mas uma característica genuína de descobrir o mundo conhecido por meio das sensações. Elas são *a priori* porque a noção de espaço é igualada à experiência pelo mecanismo organizador da mente que é imutável e é dado antecipadamente a qualquer experiência e ainda porque a geometria é a verdade sobre a experiência. Nós não devemos ter reservas ao falar sobre a irrefutabilidade "em princípio" de qualquer proposição geométrica por qualquer experiência sensível possível. Ao passo que uma experiência é uma experiência sensível do mundo físico, ela é uma experiência organizada em uma percepção feita pela estrutura "espacializadora" da mente. E ao passo que as leis da geometria são a descrição verdadeira do que esta estrutura organizadora faz, nós devemos ter total segurança de que as características espaciais da experiência estarão em conformidade com os princípios da geometria. (SKLAR, 1974, p. 85)

Tudo isso parece estar em acordo com a visão de Wigner a respeito da aplicabilidade da geometria, mas o problema permanece e desloca-se para outra instância. Se não podemos falar de aplicabilidade das geometrias à coisa-em-si, mas apenas aos objetos da nossa experiência mediada pela estrutura mental obtida *a priori*, quando concordamos com o postulado das paralelas de Euclides e verificamos sua validade por meio de construções e experimentos, estamos necessariamente postulando a estrutura do mundo do modo como o experimentamos? De modo análogo, quando encontramos dificuldades em aplicar o mesmo postulado a distâncias astronômicas, devemos concluir que a teoria foi refutada para parte do mundo experimentado por nós? Com base no que foi exposto até aqui, a resposta a essas perguntas é: não; tratam-se apenas de aplicações a diferentes contextos que interpretaram diferentes objetos do mundo concreto, mediados pela nossa experiência ou não, da mesma maneira. É notável que a ontologia desses objetos não tem relevância para as questões levantadas e isto porque a aplicação de uma teoria à realidade experimentada encontra-se na etapa descendente de um processo *epistemológico*, não ontológico. Vejamos, agora, de que modo Poincaré propõe a resolução deste problema por meio do que ele chamou de conveniência. A esse respeito, diz o filósofo:

Uma vez que diversas geometrias são possíveis, é certo que possuímos a geometria verdadeira? A experiência, sem dúvida, nos ensina que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°; mas isto somente porque os triângulos que lidamos são muito pequenos. A diferença [em relação a 180°], de acordo com Lobachevsky, é proporcional à superfície do triângulo; será que, provavelmente, não tornaremos tal diferença mais expressiva quando lidarmos com triângulos maiores ou quando nossas medições forem mais

> precisas? A geometria euclidiana se tornaria, assim, apenas uma geometria provisória. (...) Devemos concluir que os axiomas da geometria são verdades experimentais? Mas nós não experimentamos retas ou circunferências ideais; isto só pode ser feito em objetos materiais. No que então devem se basear os experimentos que servem de fundamentos a geometria? A resposta é fácil. (...) nós raciocinamos constantemente como se as figuras geométricas se comportassem como sólidos. (...) Mas uma dificuldade permanece e é intransponível. Se a geometria fosse uma ciência experimental, ela não seria uma ciência exata, pois estaria sujeita a constante revisão. E mais, desde o seu nascedouro, estaria errada pois não há nada que seja rigorosamente um sólido geométrico. (...) Os axiomas da geometria, portanto, não são juízos sintéticos *a priori* nem são fatos experimentais. São convenções e nossa escolha dentre todas as convenções é guiada pelos fatos experimentais; no entanto, [os axiomas] permanecem livres e são limitados apenas pela necessidade de se evitar contradição entre eles. Por isso, os postulados permanecem rigorosamente verdadeiros ainda que as leis experimentais que determinam seu uso sejam meras aproximações. Em outras palavras, os axiomas da geometria são definições disfarçadas. (POINCARÉ, 1921, pp. 63-65)

A partir do que lemos acima, podemos afirmar que uma geometria é aplicável a determinada situação quando interpretamos os objetos da experiência concreta com os termos ou definições dados por aquela teoria de modo satisfatório, ainda que aproximadamente. Não se trata de afirmar que uma linha desenhada no papel *seja* uma reta, mas que, deixando a ontologia de lado, ao chamá-la dessa forma, podemos empregar todas as partes da teoria referentes a este objeto sem que se comprometa com a natureza do objeto concreto nem com a aprioricidade da descoberta. Essa visão coaduna-se parcialmente com a conclusão de Sklar sobre o assunto:

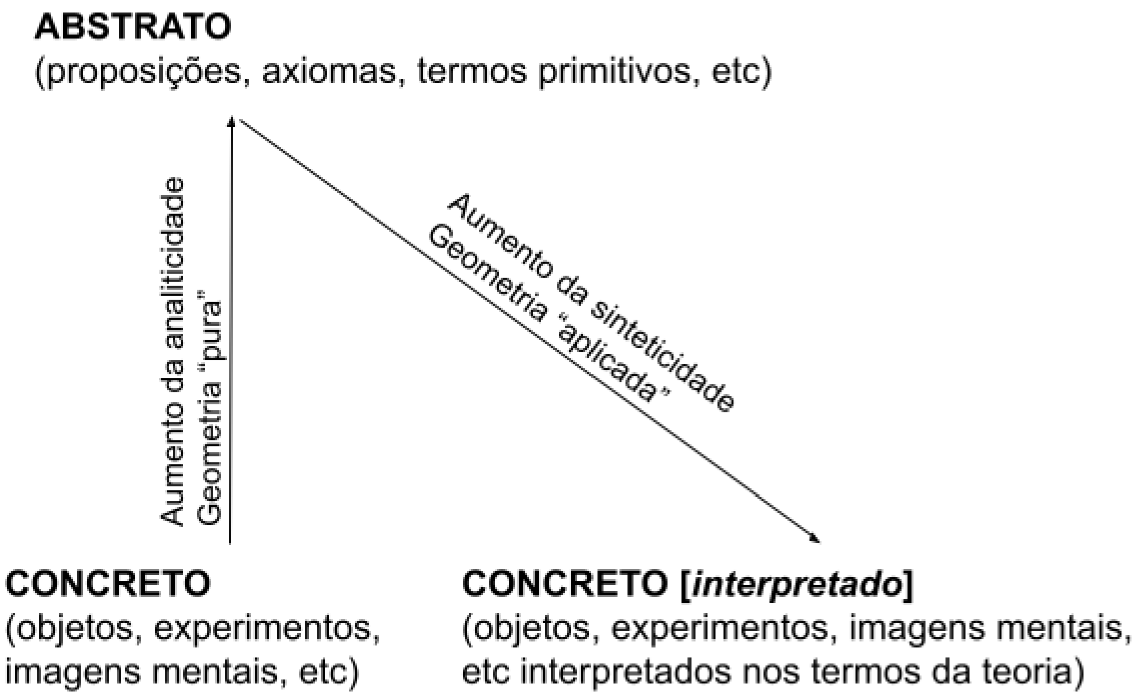
> Na medida em que a geometria é uma teoria cuja descrição do mundo é útil para predição e controle e em que suas proposições têm conteúdo empírico genuíno, as proposições da geometria são, todas elas - até mesmo as mais fundamentais e intuitivamente autoevidentes - sujeitas à dúvida pela experiência. E todas elas estão sujeitas à possibilidade de se verem refutadas pela prova do experimento. Por isso, enquanto a geometria é sintética, ela falha em ser *a priori*. (SKLAR, 1974, p.87)

Vemos, em Poincaré e Sklar, uma divergência do uso do sintético e do analítico. Sklar admite ser a geometria sintética, ou seja, que suas proposições são sintéticas. Poincaré parece assumir maior liberdade em relação a tais proposições pois não considera os axiomas nem juízos sintéticos *a priori* nem verdades experimentais. O que é curioso, em Poincaré, é que os axiomas e postulados da geometria não são passíveis de revisão - que é uma característica do que é analítico - mas que, quando aproximados de modo conveniente pelas ciências experimentais, assumem conteúdo empírico - que é uma característica do que é sintético. Isto se aproxima sobremaneira ao que foi proposto por Quine, podendo conferir às proposições da geometria algum grau de analiticidade e, ao mesmo tempo, sinteticidade. Na etapa ascendente, quando da criação da teoria, os axiomas e os termos primitivos não podem se contradizer e desfrutam de um caráter analítico. Na etapa descendente, quando os termos serão interpretados com os dados empíricos, é que tais proposições assumem caráter sintético. Quando Sklar coloca até mesmo os axiomas sujeitos à dúvida pela experiência, ele deve estar olhando para a etapa descendente, não para a criação de tais proposições. Se assim fosse, as geometrias não-euclidianas sequer existiriam em meados do século XVIII, porque teriam falhado completamente quando colocadas à prova pela experiência à época. Por serem criadas a partir da experiência, num processo já mencionado nos três primeiros capítulos desta dissertação, as proposições da geometria poderão ter sinteticidade em alto grau porque a aproximação do objeto e do conceito pode ser bastante evidente, como foi no caso da geometria euclidiana. Cabe, neste ponto, rever a distinção radical entre geometria pura e aplicada, bastante comum nos textos sobre epistemologia das geometrias. Aqui ela é bem resumida por Michael Friedman em seu texto "Kant and the exact sciences":

> Geometria pura é o estudo das relações formais ou lógicas entre proposições num sistema axiomático particular, por exemplo o sistema axiomático euclidiano. Como tal, ela é *a priori* e certa (como a lógica o é) mas não envolve nenhum apelo à intuição espacial ou qualquer outro tipo de experiência. A geometria aplicada, por sua vez, concerne à verdade ou falsidade de tal sistema de axiomas sob uma interpretação particular do mundo real. E, nesta conexão, é de menor importância se os axiomas estão sendo interpretados no mundo físico (...) ou no mundo psicológico (...). Em qualquer dos casos, a verdade (ou verdade aproximada) de qualquer sistema axiomático particular não é nem *a priori* nem certa, mas uma questão de investigação empírica tanto na física quanto na psicologia. (FRIEDMAN, 1998, p. 55)

Não penso que haja dois tipos de geometria que se possam chamar uma como pura e outra aplicada, como exposto acima. O que tento apresentar aqui é que tais características pertencem a etapas distintas da criação e aplicação de uma teoria geométrica, como vemos no diagrama abaixo:

Diagrama 2 - As etapas de criação e aplicação de uma teoria geométrica



Como vemos acima, não há impedimentos de que, durante o processo de escolha dos axiomas e termos primitivos, haja alto grau de analiticidade de tais proposições de tal forma que não se possa refutá-las pela experiência, pois, nesta etapa, sequer pode haver o intuito de que elas digam algo a respeito do mundo dos objetos concretos, apesar de manterem ainda o status de geometria possível. Isto ocorreu com Lobachevsky ou Riemann quando propuseram geometrias em que o plano deveria ter curvatura negativa, para o primeiro e positiva, para o último; ou com Hilbert quando deliberadamente não descreveu os termos primitivos de sua teoria, mas aguardou que eles fossem deduzidos a partir dos axiomas e teoremas. Em nenhum dos casos pode-se refutá-los empiricamente.

À medida em que se aumenta a analiticidade dessas proposições, atinge-se também aquilo que temos de mais *a priori* em nosso aparato mental-cerebral, que Poincaré identificou como sendo os grupos de transformação e que, segundo ele, sem essa ideia não haveria a possibilidade de se criar qualquer geometria. A esse respeito, Poincaré afirma que

> O objeto de estudo da geometria é um grupo particular, mas o conceito mais geral de grupo pré-existe, pelo menos potencialmente, em nossas mentes. Ele é imposto a nós, não como uma forma do sentido, mas como uma forma do entendimento". (POINCARÉ, 1921, p. 79).

E ainda:

> Em nossas mentes pré-existe a ideia latente de um certo número de grupos - aqueles que Lie desenvolveu por meio de sua teoria. Que grupo devemos escolher para torná-lo uma espécie de padrão com o qual nós comparamos os fenômenos naturais? E, tendo escolhido esse grupo, quais dos seus subgrupos devemos tomar para caracterizar um ponto no espaço? A experiência nos guia para nos mostrar qual é a opção que se adapta melhor às propriedades do nosso corpo. Mas seu papel limita-se a isto. (POINCARÉ, 1921, p. 91)

Acredito que o "conceito mais geral" da ideia preexistente em nossas mentes a que Poincaré se refere sejam as condições que devem ser satisfeitas para que um conjunto e uma operação elementar sejam considerados como grupo, a saber: associatividade, identidade e inversão. A diferença entre o empirismo de Wigner e o convencionalismo de Poincaré é justamente no papel da experiência (ou observação) em nossa crença nos axiomas e, portanto, em todo o sistema que se origina a partir deles. Para Poincaré, a experiência apenas nos sugere o sistema mais conveniente, enquanto que para um empirista, ela é capaz de nos dar a geometria correta (cf. SKLAR, 1974, p. 106). É neste ponto que a coincidência proposta por Wigner contrasta com a conveniência de Poincaré. Para mim, no entanto, não se pode distinguir entre uma geometria pura e uma aplicada. Trata-se de uma só que pode ser vista em duas etapas: ascendente e descendente. As geometrias só são aplicáveis ao mundo dos objetos concretos porque interpretamos seus objetos como os do mundo da experiência sensível, mas tal interpretação só é possível porque é a própria experiência que está na origem de toda construção das geometrias, que enunciam proposições sintéticas (abstrações de parte dos conteúdos observacionais da realidade concreta por meio da experiência sensível) e *a priori* (a noção de grupos de transformação que já está no aparato mental-cerebral dos humanos). Dessa forma, a noção de grupo é *a priori*, mas não adiciona conteúdo algum à teoria. As definições são *a posteriori* e adicionam conteúdo, permitindo que haja interpretação dos objetos da realidade para tornar uma geometria aplicável. Ambas se complementam e fornecem, enquanto teoria, proposições eficazes na modelagem de fenômenos observáveis nos objetos concretos. No próximo - e último - capítulo, darei seguimento à visão convencionalista de Poincaré, na tentativa de encontrar o mecanismo epistemológico de atribuição de significado às proposições geométricas quando empregadas com maior sinteticidade para explicar fenômenos físicos, por exemplo.

CAPÍTULO 5: Interpretação

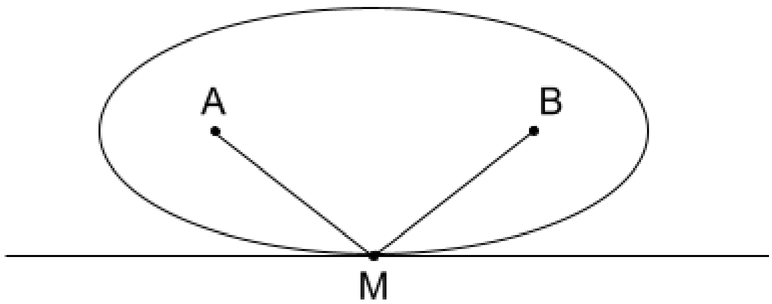
Neste capítulo conclusivo pretendo mostrar de que maneira uma geometria pode ser aplicada à realidade por meio da interpretação dos termos de uma teoria geométrica para denotar os objetos concretos. Para atingir esse objetivo, usarei como paradigma a física - mecânica ou óptica - pois ela aplica de modo mais explícito - até mesmo didático - aquilo que pretendo evidenciar. Usarei como autores de referência Albert Einstein, Hermann von Helmholtz e George Polya, para fazer esta aproximação entre física e geometria, por entender que eles deram enorme contribuição para elucidar a aplicabilidade das geometrias na construção de modelos da física. Trago também, a este capítulo, a contribuição de Hans Reichenbach para a criação de significados na geometria a partir de definições - arbitrárias e coletivas - que fundamentam a aplicação de uma teoria geométrica à realidade; a noção de construção coletiva de significado proposta por Donald Davidson; e ainda, apresento os termos necessários para uma representação epistêmica da realidade, por meio da interpretação dos objetos abstratos nos termos dos objetos concretos do modo como propõe Gabriele Contessa. A pluralidade entre os autores trazidos para este capítulo deve apontar para algo ainda em construção. Como em um quebra-cabeça, em que se pode começar a montagem dos mais variados lugares da imagem, procurei trazer para este capítulo os contornos que julguei mais seguros na tentativa de colaborar na construção dessa “imagem” da aplicabilidade das geometrias à realidade empírica. O próprio tema ainda é causa de muitos debates e reconheço que, uma vez que não há consenso em muitos pontos, a tarefa de realizar alguns encaixes torna-se mais árdua e arriscada. Desse modo, ao fazer as conexões entre as ideias de diferentes autores, não reconstruirei a história das ideias, tampouco seguirei a linha do tempo histórica. Segue-se, nas próximas páginas, uma linha mais *didática* daquilo que pretendo expor: parte-se de problematizações, busca-se explicações sob vários prismas e faz-se uma síntese que visa contribuir ao menos com parte da imagem que se deverá formar com maior aprofundamento em outras pesquisas.

Para iniciarmos a explicação do que vem a ser interpretação como o modo de aplicar a geometria ao mundo dos objetos concretos, vejamos um problema levantado por George Polya, em seu livro “Mathematics and Plausible Reasoning”. Polya coloca o problema dessa forma:

> A linha reta é o caminho mais curto entre dois pontos. A luz, viajando pelo ar de um ponto a outro, escolhe o caminho mais curto, como nos mostra a experiência. Mas o que acontece quando a luz viaja de um ponto a outro, não diretamente, mas por meio da reflexão de um espelho? A luz irá novamente seguir pelo caminho mais curto? Qual será o caminho mais curto nessas circunstâncias? (POLYA, 1954, p. 142)

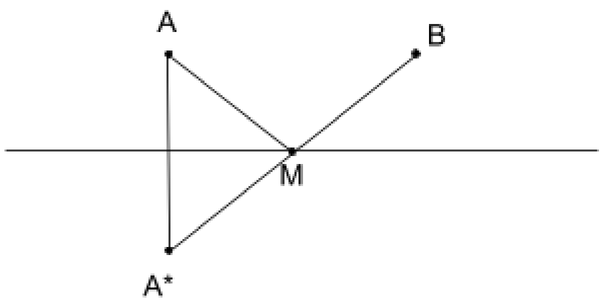
Polya resolve o problema de duas formas distintas: uma puramente geométrica e outra, “natural” ou mais “informativa” (cf. POLYA, 1954, p. 143). A solução puramente geométrica é que o “mínimo desejado é encontrado no ponto de intersecção entre uma reta ℓ e uma elipse cujos focos estão nos pontos A e B.” (POLYA, 1954, p. 143) Chamando esse ponto de M, teríamos que o caminho mais curto seria dado por AM+MB. Como mostra a figura abaixo:

Figura 6



A outra solução - a natural - foi descoberta por Herão de Alexandria. Cria-se um ponto A* simétrico a A em relação à linha ℓ e tem-se que o ponto M, pertencente à linha ℓ, deve estar alinhado com A* e B, como mostra a figura a seguir:

Figura 7



Desse modo, Polya conclui que “podemos obter o ponto M, a solução do problema do caminho mais curto, por meio de uma elipse tangente à reta ℓ ou por meio de dois raios [de luz] com mesma inclinação em relação à ℓ.” (POLYA, 1954, p. 145) Neste exemplo, nos parece que o simples fato de ter *interpretado* o foco de luz e o observador como pontos (euclidianos) e o espelho como uma reta (também euclidiana), foi suficiente para que um problema da realidade empírica fosse resolvido pela geometria, de modo que, ao final, é possível afirmar que “qualquer raio de luz proveniente de um dos focos de um espelho elíptico será refletido no outro foco.” (POLYA, 1954, p. 145). É notável que a afirmação acima contém as palavras *elipse* e *foco*, provenientes da geometria e *espelho* e *luz*, provenientes do cotidiano e da física. Esta afirmação seria analítica ou sintética? Teria uma parte analítica e uma parte sintética? Como ela se vale de conceitos geométricos para ser validada como verdadeira na experiência com o mundo empírico, e por tudo que já foi apresentado até aqui, esta proposição tem algum grau de analiticidade e sinteticidade, ao mesmo tempo. Como pode ser isso? Vejamos mais um exemplo. Se esse espelho fosse a superfície de um lago sem movimento, a luz sofreria uma refração e, então, os pontos A* e B não pertenceriam à mesma reta. Isto porque a luz viaja pelo caminho mais curto, mas com a maior velocidade possível (cf. POLYA, 1954, p. 149). E por viajar em meios diferentes (ar e água), a luz possui velocidades diferentes. O problema deve ser posto de outra maneira: “Dados dois pontos A e B, uma reta ℓ separando A e B e duas velocidades u e v, encontre o tempo mínimo necessário para ir de A a B.” (POLYA, 1954, p. 149) A solução para este problema é dada pela fórmula $\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{u}{v}$, em que α é o ângulo de incidência da luz na superfície da água e β é o ângulo de refração. Tal solução pode ser expressa de outra maneira: “Os senos dos ângulos de incidência e refração estão em razão constante dependendo apenas dos meios [em que a luz viaja].” (POLYA, 1954, p. 151) Temos aqui, novamente, uma conclusão que emprega termos geométricos como *senos* e *ângulos*, bem como termos físicos como *refração*, *meios* e *luz*. Neste segundo exemplo, há ainda algo a ser evidenciado. Velocidade não é uma propriedade geométrica, mas é a alteração dela que produz alteração no ângulo de incidência da luz ao mudar de meio[14]. Desse modo, para que uma proposição da física seja relevante para o mundo dos objetos concretos e, ao mesmo tempo, possa se valer das relações entre os teoremas de uma teoria geométrica, há uma seleção de parte da realidade que possa ser denotada pelos termos geométricos. Isto possibilita raciocinar internamente em uma teoria, mas de modo sucedâneo[15], para que os resultados ali obtidos sejam devolvidos aos experimentos com os objetos concretos.

Essa relação entre geometria e física foi empregada pelo físico Albert Einstein quando da criação da teoria da relatividade geral. Para o físico, tal criação só foi possível mediante uma nova concepção acerca da natureza dos objetos geométricos (cf. EINSTEIN, 2007, p. 149). Einstein nos apresenta duas diferentes interpretações acerca da natureza dos objetos geométricos: uma antiga e uma nova. Na interpretação antiga, todos sabem o que é uma reta ou um ponto e, baseado nesta interpretação, os axiomas que contém esses termos são auto evidentes porque são parte de um conhecimento *a priori* (cf. EINSTEIN, 2007, p. 147). Na nova interpretação, a

> geometria trata de objetos denotados pelas palavras reta, ponto, etc. Nenhum conhecimento ou intuição qualquer desses objetos é assumido, mas somente a validade dos axiomas [...] os quais devem ser utilizados num sentido puramente formal, ou seja, esvaziados de qualquer conteúdo da intuição ou experiência. Estes axiomas são criações livres da mente humana. (EINSTEIN, 2007, p. 148)

Einstein então propõe uma diferenciação entre duas geometrias, uma *axiomática pura* e uma *prática*. Na geometria axiomática pura, “as palavras ponto, reta, etc. são entendidas tão somente como esquemas conceituais vazios. O que as dá conteúdo não pertence à matemática.” (EINSTEIN, 2007, p. 148) Na geometria prática, “as asserções repousam essencialmente na indução a partir da experiência e não apenas em inferências lógicas.” (EINSTEIN, 2007, p. 148) Para sistematizar sua visão acerca dessas diferentes geometrias, Einstein conclui:

---

[14] De modo análogo, a gravidade não é um conceito geométrico, mas ela é capaz de produzir alteração na curvatura do espaço em relação à luz.
[15] O caráter sucedâneo desse raciocínio será explicado mais à frente nesta dissertação.

> A Geometria (G) não predica nada acerca do comportamento das coisas reais, mas somente a Geometria juntamente com a totalidade (P) das leis físicas pode fazê-lo. Usando símbolos, podemos dizer que somente a soma (G) + (P) está sujeita ao teste pela experiência. Assim, (G) pode ser escolhida de maneira arbitrária, bem como partes de (P); todas essas leis são convenções. Tudo o que é necessário para evitar contradições é escolher a parte de (P) que, juntamente com (G), estejam em acordo com a experiência. De acordo com essa interpretação, a geometria axiomática e a parte das leis naturais às quais foi dada um status convencional, aparecem como epistemologicamente equivalentes. (EINSTEIN, 2007, p. 149)

O resultado dessa soma entre geometria axiomática e leis da física, como apresentado por Einstein, está bastante alinhado com o que esta dissertação apresentou até aqui. Na etapa ascendente do conhecimento as geometrias são criadas livremente, tendo vinculação com as experiências do mundo sensível menos ou mais explícitas - o que promove maior, ou menor, grau de analiticidade das proposições. O caminho inverso, em direção à aplicação das geometrias aos objetos concretos, se inicia com a escolha de partes das leis da física que, ao serem interpretadas pelos termos de uma teoria geométrica, podem operar de modo sucedâneo dentro da teoria e, posteriormente, serem testadas pela experiência. De acordo com Gabriele Contessa, o raciocínio sucedâneo "designa aqueles casos nos quais alguém usa um objeto, o veículo da representação, para aprender algo sobre outro objeto, o alvo da representação." (CONTESSA, 2007, p. 51)[16] No caso apresentado aqui, uma geometria é o veículo da representação e os objetos e fenômenos aos quais uma teoria geométrica é aplicada constituem o alvo da representação. É por intermédio do raciocínio sucedâneo que se pode operar internamente com os teoremas geométricos tendo em vista o emprego dos resultados obtidos às experiências com os objetos do mundo empírico que foram previamente interpretados nos termos da teoria geométrica. Assim, quando se ensina a geometria euclidiana plana a um aluno do Ensino Fundamental por meio das construções geométricas, o que se ensina não é puramente uma geometria axiomática, mas uma geometria somada a experiência tácita com objetos do mundo concreto. Possibilita-se, ao aluno, obter resultados nos termos próprios da teoria

[16] Este raciocínio sucedâneo, aplicado a teorias de fenômenos físicos, foi descrito na obra "*A estrutura das teorias científicas*" de Frederick Suppe com o nome de *sistemas físicos*. O filósofo defende que "o que uma teoria realmente caracteriza não é o fenômeno em seu escopo pretendido, mas réplicas idealizadas desses fenômenos. Tais réplicas idealizadas dos fenômenos são chamados *sistemas físicos*. Sistemas físicos são réplicas comportamentais idealizadas dos fenômenos que podem ser especificadas somente nos termos de parâmetros selecionados da teoria." (SUPPE, 1977, p. 224)

geométrica que, posteriormente, podem ser verificados em seu próprio caderno por meio de medições e construções. Traçar uma reta na lousa ou uma circunferência no caderno, consiste em aplicar a geometria axiomática a um contexto concreto por meio dessa fusão entre geometria e experiência, que para humanos convencionou-se, por sua facilidade e proximidade com os conceitos, ser a geometria euclidiana, como diz Einstein: “Nesta etapa do conhecimento, proposições acerca de pontos, retas e igualdade entre distâncias e ângulos foram ao mesmo tempo o conhecimento de proposições sobre certas experiências com objetos naturais.” (EINSTEIN, 2007, p. 159) Entretanto, com a melhoria dos instrumentos de experimentação e, de acordo com a ciência moderna, “a geometria não concorda mais com nenhuma experiência, estritamente falando, mas somente a geometria juntamente com a mecânica, óptica, etc.” (EINSTEIN, 2007, p. 160) O físico ainda apresenta o resultado da soma entre geometria e relatividade geral sob a perspectiva de Riemann:

> [Riemann] através de especulações puramente matemáticas chegou à ideia da inseparabilidade entre geometria e física, uma ideia que, setenta anos depois, ganhou aceitação exatamente na teoria da relatividade geral onde geometria e teoria gravitacional se fundiram em uma unidade. (EINSTEIN, 2007, p. 162)

Ao interpretar a luz como uma reta por elas compartilharem a propriedade - ou característica - de seguirem pelo caminho mais curto entre dois pontos, a geometria euclidiana teve que ser somada às leis da física para que fosse aplicável ao mundo empírico. No entanto, quando se expandiram as distâncias, mantendo-se ainda a mesma propriedade, notou-se que o espaço não se aproximava daquilo que era considerado por Euclides. Daí, a fusão com a geometria de Lobachevsky ser a mais apropriada, por ser mais simples para esse contexto (cf. EINSTEIN, 2007, p. 161). À medida que nossa experiência com o mundo dos objetos concretos foi se tornando menos capaz de decidir qual seria a geometria mais apropriada (como no caso do universo quântico[17]), as geometrias que possuíam conceitos mais abstratos tendiam a oferecer maior liberdade de interpretações - entenda-se, maior número de fusões entre os objetos puramente linguísticos da geometria e dados empíricos da

[17] Ressalta-se aqui que o problema da escolha da geometria mais apropriada não surge no final do século XIX e início do século XX mas agudiza-se nesse período.

realidade. Isto porque a geometria da etapa ascendente do conhecimento - geometria pura axiomática, para Einstein - deve preceder as leis da física, como Einstein afirma:

> porque a geometria deve preceder a física de modo que as leis dessa última não podem ser expressas sem as da primeira, a geometria aparenta ser a ciência que precede logicamente toda experiência e toda ciência experimental. (EINSTEIN, 2007, p. 160)

É notável que Einstein usa o termo *logicamente* para afirmar a precedência da geometria. Isto está em pleno acordo com essa dissertação pois não se trata de uma precedência ontológica. Reafirmo: a experiência precede a criação de qualquer geometria, mas, para aplicá-la à realidade, ela deve estar disponível *logicamente*. Para que não reste dúvidas, vejamos o que Einstein diz sobre as diferentes etapas da interpretação das geometrias:

> A geometria euclidiana - ou a geometria em geral - retém agora, como antes, o caráter de uma ciência matemática, em que a derivação de suas proposições a partir dos axiomas permanece puramente lógica; mas, ao mesmo tempo, ela se torna um ciência física em que seus axiomas incluem asserções sobre objetos da natureza, asserções cuja exatidão somente a experiência pode decidir. (EINSTEIN, 2007, p. 161)

A esse respeito, e concordando com Einstein, Helmholtz afirma:

> Os axiomas da geometria, tomados eles mesmos sem qualquer conexão com as proposições da mecânica, não representam nenhuma relação com os objetos da realidade. Quando são isolados, se nós os considerarmos, segundo Kant, como formas da intuição dadas transcendentalmente, eles constituem uma forma pela qual qualquer conteúdo empírico irá se acomodar e que, portanto, não limita ou determina de modo algum a natureza desse conteúdo. Isto é verdade, contudo, não apenas para os axiomas de Euclides, mas para os axiomas das geometrias esférica e pseudo esférica. Tão logo certos princípios da mecânica são combinados aos axiomas da geometria, nós obtemos um sistema de proposições que possui importância para o real, e que pode ser verificado ou refutado pelas observações empíricas bem como pode-se inferi-lo pela experiência. (HELMHOLTZ, 2007, p. 68)

Resta elucidar de que forma essas "asserções sobre os objetos da natureza" ou esses "sistemas de proposições que possuem importância para o real" são formados por meio de uma interpretação dos termos de uma teoria geométrica para denotar as partes do mundo real escolhidas para serem modeladas cientificamente e às quais se pretende que sejam aplicáveis as relações postuladas pela teoria. Escolhi o termo interpretação para descrever o processo de aplicação das geometrias à realidade empírica porque o termo pode ser usado tanto para o processo quanto para o resultado obtido. Interpretar, no caso específico das teorias geométricas, é equivalente a dar significado a proposições que mesclam termos de uma teoria e termos referentes a objetos do mundo empírico[18]. O resultado obtido por meio dessa interpretação - o concreto [*interpretado*] - é uma representação epistêmica dos objetos da realidade que evidencia partes do conteúdo desses objetos com o objetivo de criar modelos científicos que possibilitem fazer previsões e explicar fenômenos. Desse modo, não se trata de representar os objetos da realidade por meio dos termos linguísticos da teoria como se a soma das proposições da geometria com as leis da física possibilitasse uma representação realista dos objetos concretos. Como exposto acima, nos exemplos dados por Polya, e ainda em acordo com o que foi exposto no capítulo 3 acerca da superveniência parcial, aquilo que é abstrato - os termos e proposições de uma teoria geométrica - funde-se com partes intencionalmente destacadas da realidade para produzir um modelo por meio da interpretação desses objetos nos termos da teoria. Entretanto, esta dissertação não propõe resgatar a concepção realista. Não se postula aqui assegurar significado empírico a todos os termos da ciência, menos ainda que tenham significado único e pronto para ser descoberto. Um ponto de partida para se compreender a evolução dos pontos de vista a respeito da interpretação pode ser encontrado em Hans Reichenbach na obra “The Philosophy of Space and Time”. Reichenbach postula que as relações mais elementares entre conceitos e objetos estão baseadas no que ele chamou de “definições coordenativas”. Um sistema conceitual da física depende das escolhas destes definições preliminares (cf. REICHENBACH, 1958, p. 14). O exemplo dado por Reichenbach é o de assumir que um objeto usado para medir terá seu tamanho preservado quando transportado de um lugar para outro, qualquer que seja esse lugar. Para ele, esta é uma proposição que deve ser assumida e não pode ser provada. Isto seria, portanto, uma convenção independente, uma definição coordenativa (cf. REICHENBACH, 1958, pp. 16-17). A conclusão a que ele chega é que

[18] Não se exclui, com isso, o fato de que é possível haver interpretação entre termos e objetos de teorias distintas que não lidam com objetos do mundo empírico.

a forma geométrica de um corpo não é um dado absoluto da experiência, mas depende de uma definição coordenativa precedente; dependendo da definição, a mesma estrutura pode ser chamada de plano, esfera ou superfície curva.” (REICHENBACH, 1958, p. 18)

São essas definições que conferem significado empírico às asserções geométricas e com isso, ao invés de obter a geometria correta da realidade, promovem a relativização da geometria por meio das escolhas que são feitas. Desse modo, dizer que uma corda esticada é reta, ou que o chão é plano, ou que os cantos dos cômodos de uma casa são retangulares, não se trata de fazer afirmações empíricas; elas tão somente utilizam as definições mais convenientes de uma determinada teoria geométrica (cf. REICHENBACH, 1958, p. 21) Sobre relatividade e subjetividade nessas escolhas, vejamos o que Reichenbach ainda diz:

> Tomada isoladamente, a frase que diz que uma certa geometria suporta o espaço é sem sentido. Ela adquire significado somente se nós adicionarmos a definição coordenativa usada na comparação de comprimentos separados por grandes distâncias. A mesma regra vale para a forma geométrica dos corpos. A frase ‘A Terra é uma esfera’ é uma frase incompleta e se assemelha à frase ‘Esse quarto tem sete unidades de comprimento’. Ambas sentenças dizem sobre estados objetivos de algo se as definições coordenativas forem adicionadas e ambas sentenças seriam alteradas se outras definições coordenativas fossem usadas. Estas considerações indicam o que é entendido por *relatividade na geometria*. [...] A geometria escolhida para caracterizar a relação [entre objetos do mundo e objetos usados para medi-los] é meramente um modo de fala; contudo, nossa consciência da relatividade da geometria permite-nos formular o caráter objetivo de uma sentença sobre a geometria do mundo físico como uma sentença sobre relações. Nesse sentido nós nos permitimos falar de uma geometria física. A descrição da natureza não é despojada de arbitrariedade por uma ingenuidade absoluta, mas somente pelo reconhecimento e formulação dos pontos de arbitrariedade. O único caminho para o conhecimento objetivo aponta para a plena consciência do papel que a subjetividade desempenha em nossos métodos de pesquisa. (REICHENBACH, 1958, pp. 35 - 37)

Dessa forma, a geometria quando aplicada aos objetos da realidade passa a ser um conjunto de proposições que não só expressam relações internas à teoria geométrica como também, por intermédio de definições escolhidas de modo convencional, referem-se a propriedades dos objetos da realidade. Ao utilizar uma interpretação empírica dos termos de um teoria, emprega-se predicados observacionais e construtos empíricos para dizer dos objetos da realidade, enquanto que a teoria fornece as conclusões lógicas da cadeia de teoremas e inferências (cf. HEMPEL, 1960, p. 122). Com base no que foi exposto, não se busca encontrar a geometria correta como se essa fosse uma tarefa puramente objetiva, mas constrói-se uma geometria aplicada com escolhas subjetivas de um conjunto de usuários mediante critérios aceitos por esses mesmos usuários. Para Reichenbach, tais escolhas nem sempre são conscientes e ele considera que as definições coordenativas mais adequadas são aquelas que possuem maior simplicidade lógica e que acarretam a menor alteração possível nos resultados científicos (cf. REICHENBACH, 1958, p. 18).

Reichenbach reconhece que tais definições são estabelecidas como convenções humanas que permitem a interpretação e a aplicação da teoria no contexto empírico. O filósofo enfatiza o papel ativo dos seres humanos na construção destas e na determinação da relação entre teoria e experiência. Por intermédio de definições convencionais, interpretamos dados de partes da realidade empírica como apresentados a nós, seres humanos, que podem ser revistos e alterados para dar conta de outras partes da realidade possibilitando a descoberta de novas aplicações, como ocorreu com a teoria da relatividade de Einstein, conforme apresentado anteriormente.

A concepção de Reichenbach de definições coordenativas evoluiu e foi incorporada à visão ortodoxa de teorias na forma das regras de correspondência. Nesta visão, descreve Herbert Feigl,

> o sistema de postulados não-interpretados – “flutua” ou “paira” livremente acima do plano dos fatos empíricos. É somente através dos “elos de ligação”, isto é, das “definições coordenativas” [...] que o sistema de postulados adquire significado empírico. [...] os conceitos (“primitivos”) nos postulados, assim como os próprios postulados, não podem receber mais do que uma interpretação parcial. Isto pressupõe uma distinção nítida entre linguagem de observação (linguagem observacional; L.O.) e a linguagem de teorias (linguagem teórica; L.T.) (FEIGL, 2004, p. 267-269)

Schaffner, entretanto, reconhece que o vocabulário teórico de uma teoria possui uma interpretação semântica independente da realidade. Ainda assim, as regras de correspondência criam significados para os termos teóricos ao colocá-los em um contexto radicalmente novo, como quando dizemos que os elétrons podem ser entendidos como partículas extremamente pequenas eletricamente carregadas (cf. SUPPE, 1977, p. 104). Para Schaffner, geralmente as regras de correspondência não são parte da teoria que está sendo aplicada, pois aplicam teorias advindas de outras áreas da ciência chamadas por Frederick Suppe de hipóteses auxiliares (cf. SUPPE, 1977, p. 105). Por esta razão, o problema não está em reconhecer o uso das regras de correspondência - ou definições coordenativas - na aplicação de uma teoria aos fenômenos da realidade, mas em que o uso feito pela visão ortodoxa as empregou de modo muito simplificado e superficial, como aponta Patrick Suppes:

> O tipo de definições coordenativas (isto é, regras de correspondência) geralmente descrito pelos filósofos tem o seu lugar nas exposições de teorias filosóficas comuns, mas na prática científica real de testar teorias científicas é necessário um maquinário formal, mais elaborado e mais sofisticado, para relacionar uma teoria aos dados. (1967, p.57, apud SUPPE, 1977, p. 106)

Frederick Suppe considera que o tratamento das regras de correspondência pela visão ortodoxa de teorias é inadequado em três aspectos:

> primeiro, ela erroneamente considera [as regras de correspondência] como componentes das teorias ao invés de hipóteses auxiliares; segundo, ela ignora o fato de que as regras de correspondência geralmente constituem cadeias de explanação causal que empregam outras teorias como hipóteses auxiliares; terceiro, apesar das regras de correspondência caracterizarem as conexões experimentais entre o fenômeno e a teoria, a visão é muito simplificada e epistemologicamente enganosa. A visão ortodoxa de teorias a respeito das regras de correspondência é claramente insatisfatória. (SUPPE, 1977, p. 109)

Ainda, vemos também em Hempel que as regras de correspondência, sob a visão ortodoxa de teorias, assumem um caráter isolado, cindindo o formalismo da realidade, buscando estabelecer uma relação direta entre os objetos da realidade e os termos de uma teoria. Para o filósofo, no entanto, só é possível atingirmos o significado de uma hipótese interpretativa da realidade empírica sem essa separação e expandindo o significado de uma sentença a toda uma rede de significados que engloba toda a linguagem, com lemos aqui:

> Para compreendermos “o significado” de uma hipótese em uma linguagem empírica devemos saber não somente quais sentenças observacionais ela implica sozinha ou em conjunção com hipóteses auxiliares, mas também quais outras sentenças não-observacionais e empíricas são implicadas por ela; quais sentenças na linguagem corrente a confirmariam ou a refutariam; e para quais outras hipóteses ela seria confirmatória ou não-confirmatória. Em outras palavras, o significado cognitivo de uma sentença em uma linguagem empírica é refletido na totalidade de de suas relações lógicas a todas as demais sentenças naquela linguagem e não somente nas sentenças observacionais. (HEMPEL, 1960, p. 123)

A proposta neste ponto, então, é analisar o caráter holístico, comunitário e epistemologicamente significativo que as sentenças que interpretam partes da realidade por meio de teorias geométricas podem assumir.

Veremos, finalmente, como esse processo pode ser realizado. Para tanto, trago aqui a compreensão de Gabriele Contessa acerca de interpretação e representação científica. Para ele, a "interpretação é o que fundamenta tanto a representação científica quanto o raciocínio sucedâneo." (CONTESSA, 2007, p. 51) O caráter fundamental da interpretação também foi observado por Jan Faye. Para este filósofo, a interpretação é o ponto de partida para estabelecer o conhecimento de um fenômeno que, depois de aceito, dá lugar à explicação. A interpretação fornece uma hipótese relevante, uma resposta particular, para explicar o fenômeno posteriormente. Desse modo, a interpretação não é usada quando entendemos algo imediatamente, nem quando já temos conhecimento dos fatos envolvidos e das representações estabelecidas (cf. FAYE, 2009, p. 17-18). Por isso, ele afirma que o "papel funcional da interpretação é criar um signo convencional ou tornar um fenômeno natural significativo para o intérprete; é o seu papel fornecer maior compreensão do objeto em questão." (FAYE, 2009, p. 6) Sobre a representação científica, como proposta por Contessa, esta não se trata de uma representação real, mas de uma representação epistêmica, da mesma maneira que o mapa do metrô de Londres representa as linhas do metrô de Londres (cf. CONTESSA, 2007, p. 52). E essa representação epistêmica "não é uma relação diádica entre um veículo e um alvo, mas uma relação triádica entre um veículo, um alvo e um conjunto de usuários." (CONTESSA, 2007, p. 52) Como exposto acima, este trabalho não trata os objetos abstratos como representações reais dos objetos concretos e, alinhado com a visão convencionalista de Poincaré, a aplicação de uma teoria aos objetos concretos se dá por decisão de um conjunto de usuários que os interpretaram de maneira consensual por compartilharem de experiências similares com tais objetos. Como vimos, a interpretação antecede a explicação de um fenômeno, mas além disso, há ainda outra diferença entre elas. Conforme Jan Faye, "a interpretação não precisa ser mais provisória do que a explicação; ela simplesmente depende do consenso da comunidade interpretativa." (FAYE, 2009, p.

7) Já a explicação carece de testes e experimentos específicos podendo as explicações encontradas serem contestadas, criticadas e debatidas - pela comunidade que deseja explicar tal fenômeno - em virtude dos resultados de tais experimentos; daí vem seu caráter provisório. O que há de provisório na interpretação depende, portanto, exclusivamente da escolha do *conjunto de usuários* que a executa. A esse respeito, há enorme contribuição de Donald Davidson. Para ele, “a interação entre criaturas semelhantes é uma condição necessária para falar uma língua.” (DAVIDSON, 2001, p. 120) E não apenas uma língua, mas o pensamento, de modo geral, é fruto de interações sociais que atingem verdades intersubjetivas ao compartilharem o mesmo mundo entre si (cf. DAVIDSON, 2001, p. 121). Davidson defende que uma espécie de triangulação entre duas pessoas e um mundo comum a elas é condição necessária, mas não suficiente[19], para que haja pensamento e linguagem. Cada pessoa interage com objetos do mundo e observam o outro interagindo com esses objetos (cf. DAVIDSON, 2001, p 128). Ao perceberem reações similares a estímulos semelhantes, pode-se inferir que os objetos se apresentam da mesma forma a cada um. É o compartilhamento social das reações a estímulos que concede objetividade de conteúdo à realidade, mas esta objetividade só pode ser apreciada quando os indivíduos utilizam-se da linguagem para evidenciá-la (cf. DAVIDSON, 2001, p. 130). A conclusão desse processo é bem descrita por Faye:

> Fenômenos tornam-se inteligíveis e significativos porque ao atribuir identidade a eles ou ao prover uma explicação representacional deles, uma interpretação coloca-os em conexão com nossas teorias ou sistemas de crença. [...] No fim, uma interpretação é uma hipótese que é apresentada em um contexto de convenções aceitas e assunções ontológicas. (FAYE, 2009, p. 19)

Isto pode explicar a própria gênese da obra “Os Elementos”, pois o trabalho de Euclides foi o de sistematizar conceitos e termos a partir de verdades intersubjetivas construídas ao longo de séculos antes de sua obra. E tal deveria ser o grau de verdade compartilhado por esse conjunto de usuários que, ao ensinarem nas escolas a geometria com a terminologia euclidiana, sob o método dedutivo-axiomático, atribuíram a ela um caráter ontológico e até mesmo *a priori*, de

---

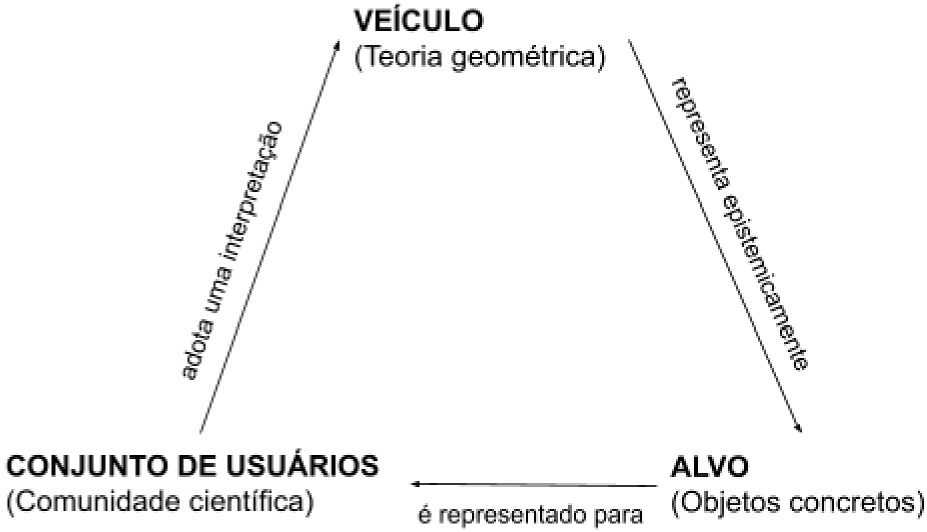
[19] Os animais também compartilham estímulos em um mundo comum, mas não desenvolvem pensamento e linguagem como os humanos (cf. DAVIDSON, 2001, p. 130)

acordo com a interpretação antiga, segundo Einstein. Foram necessários dois milênios para que um conjunto de seres humanos compartilhassem interpretações distintas dos termos primitivos e utilizassem os termos das novas geometrias intersubjetivamente aplicando-os aos novos fenômenos ora compartilhados. Da relação triádica exposta por Contessa e, adequando-a aos propósitos desta dissertação, temos que o conjunto de usuários são os seres humanos que empregam uma geometria para descrever objetos concretos (podem ser a comunidade científica ou alunos de geometria), o veículo é uma teoria geométrica com seus termos primitivos, axiomas e teoremas, e o alvo é uma parte da realidade escolhida para ser interpretada com os termos de uma determinada geometria. O resultado da interpretação é um modelo de representação epistêmica de partes da realidade que permite operar com os termos da teoria de modo sucedâneo, como esclarece Contessa:

> De acordo com o que proponho, um modelo representa um alvo e pode ser usado para performar inferências sucedâneas sobre o alvo em virtude do fato que o usuário interpreta o veículo nos termos do alvo. É a interpretação do usuário que transforma o objeto em uma representação de um certo alvo. (CONTESSA, 2007, p. 67)

Vejamos o diagrama abaixo em que se representa a relação triádica entre um conjunto de usuários, uma teoria geométrica e uma parte destacada dos objetos concretos para se criar um modelo científico válido e que possa ser testado pela experiência:

Diagrama 3 - Exemplo de relação triádica em um modelo científico



Tal representação epistêmica pode ainda variar em grau, segundo Contessa. Desde uma representação epistêmica completamente inexata, passando por uma parcialmente exata até uma completamente exata. A diferença entre elas está na quantidade de inferências notoriamente válidas entre o veículo e o alvo, variando de nenhuma a todas (cf. CONTESSA, 2007, pp. 54-55). Esta variação de grau relaciona-se com o que já foi exposto por Quine nesta dissertação. Ao receber alguma interpretação, as proposições de uma teoria geométrica passam a ter maior grau de sinteticidade, e iniciam a etapa descendente, como exposta aqui desde o início. Os modelos científicos que usam as geometrias como veículos funcionam dessa maneira. A geometria euclidiana se aproxima de uma representação epistêmica completamente exata dos objetos da experiência cotidiana, mas quando usada para explicar fenômenos com distâncias astronômicas, mostrou-se parcialmente exata. Nesse caso, a geometria hiperbólica mostrou-se mais exata por fornecer um veículo mais apropriado para lidar com este alvo. E na atual fronteira da ciência em explicar os fenômenos quânticos, as teorias geométricas, de Euclides a Riemann, não foram capazes de ser o veículo que forneça uma quantidade aceitável, pela comunidade científica, de inferências notoriamente válidas. Disso decorre a tentativa de se empregar teorias que tenham maior grau de analiticidade em seus termos iniciais e teoremas para atingir esse objetivo, como a geometria de Hilbert. Assim também, com novas experiências sendo compartilhadas pela comunidade científica pode-se escolher novas definições coordenativas que possibilitem novas interpretações acerca dos objetos em fenômenos recém-descobertos visando maior validade das inferências nas mais recentes experiências realizadas.

Espero ter conseguido, nas páginas anteriores, mostrar um percurso epistêmico, que parte da experiência sucessiva - e histórica - dos seres humanos com os objetos concretos da realidade para criar livremente objetos abstratos puramente linguísticos que são posteriormente empregados para denotar partes dos mesmos objetos concretos, por meio da interpretação intersubjetiva de um conjunto de seres humanos. Essa interpretação o possibilita aplicar os termos de uma teoria para representar epistemicamente os objetos concretos e, com isso, criar modelos que permitam raciocinar de modo sucedâneo em relação à realidade empírica. Os resultados obtidos por meio dessa relação veículo-alvo podem então ser testados pela experiência e aplicados ao mundo dos objetos concretos que já têm seus objetos denotados de uma nova maneira epistêmica e que recebeu, nos termos desta dissertação, o nome de concreto [*interpretado*]. Espero, também, ter tornado possível identificar a gênese epistêmica de uma geometria aplicável ao mundo empírico, como a euclidiana, por exemplo. Ao percorrermos o caminho epistemológico das experiências com o mundo dos objetos concretos até às aplicações aos objetos concretos [*interpretados*], notamos que é possível percorrermos este caminho em sentido inverso para aprendermos de que maneira uma geometria fornece os termos que, por meio da interpretação, denotam aproximadamente e convencionalmente os objetos concretos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES. **Segundos Analíticos - Livro I**. Tradução, introdução e notas por ANGIONI, Lucas. Clássicos da Filosofia: Cadernos de Tradução nº 7. IFCH/UNICAMP, 2004.

_____________. **Segundos Analíticos - Livro II**. Tradução, introdução e notas por ANGIONI, Lucas. Clássicos da Filosofia: Cadernos de Tradução nº 4. IFCH/UNICAMP, 2002.

_____________. **Topica**. Translated by E. S. FORSTER. William Heinemann LTD & Harvard University Press. London, 1960.

_____________. **Posterior Analytics**. Traduzido e comentado por BARNES, Jonathan. Oxford University Press. Oxford, 2002.

_____________. ***De Anima***. In: On the soul and other psychological works. Traduzido por MILLER, F. D. Oxford University Press. Oxford, 2018.

BARNES, Jonathan. **Aristotelian Arithmetic**. In: Revue de Philosophie Ancienne, vol. 3, nº 1, p. 97-133, 1985. Disponível em: www.jstor.org/stable/24353787

BRONSTEIN, David. **The origin and aim of Posterior Analytics II.19**. In: Phronesis 57 (pp. 29 - 62), 2012.

CLIFFORD, William K. **The postulates of the science of space.** (pp. 73 - 88) In: Beyond geometry: classic papers from Riemann to Einstein. Editado por Peter Pesic. Dover Publications, 2007.

CONTESSA, Gabriele. **Scientific Representation, Interpretation, and Surrogative Reasoning**. In: Philosophy of Science, Vol. 74, No. 1, pp. 48-68. The University of Chicago Press, 2007.

DAVIDSON, Donald. **The Second Person**. In: Subjective, Intersubjective, Objective. Clarendon Press. Oxford, 2001.

EINSTEIN, Albert. **Geometry and Experience.** In: Beyond geometry: classic papers from Riemann to Einstein. (pp. 147 - 158) Editado por Peter Pesic. Dover Publications, 2007.

______________. **Non-Euclidean Geometry and Physics.** In: Beyond geometry: classic papers from Riemann to Einstein. (pp. 159 - 162) Editado por Peter Pesic. Dover Publications, 2007.

______________. **Ideas and Opinions.** Ed. por Carl Seeling. Trad. por Sonja Bargmann. New York: Wings Books, s/d.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de BICUDO, Irineu. São Paulo, Editora UNESP, 2009.

FAYE, Jan. **Interpretation in the natural sciences.** In: EPSA Epistemology and Methodology of Science. Springer, 2009.

FEIGL, Herbert. **A visão "ortodoxa" de teorias:comentários para defesa assim como para crítica.** In: Scientiæ Studia, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 265-77, 2004.

FREGE, Gottlob. **On the Foundations of Geometry: First Series (1903)**. In: Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy. Editado por: Brian McGuiness. Traduzido por: Hans Kaal. Basil Blackweel, 1984.

FRIEDMAN, Michael. **Kant and the Exact Sciences.** Cambridge, Harvard University Press, 1998.

GRAY, Jeremy. **Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century.** Springer, 2007.

HEATH, Thomas. **Mathematics in Aristotle.** Oxford University Press. Oxford, 1970.

HELMHOLTZ, Hermann von. **The Origin and Meaning of Geometrical Axioms.** In: Beyond geometry: classic papers from Riemann to Einstein (pp. 53 - 70). Editado por Peter Pesic. Dover Publications, 2007.

HEMPEL, Carl G. **Problems and changes in the empiricist criterion of meaning.** In: Logical Positivism. Editado por A. J. Ayer. The Free Press, 1960.

HILBERT, David. **The foundations of geometry.** Traduzido por E. J. Townsend, La Salle, The Open Court Publishing Company, 1950.

JOHANSEN, Thomas Kjeller. **The Power's of Aristotle Soul.** Oxford University Press. Oxford, 2012.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura.** Tradução de Valério Rohden. In: Os pensadores - vol. XXV. São Paulo, Abril Cultural, 1974.

______________. **Prolegômenos.** Tradução de Tania Maria Bernkopf. In: Os pensadores - vol. XXV. São Paulo, Abril Cultural, 1974.

LEAR, Jonathan. **Aristotle: the desire to understand**. Cambridge University Press, 1988.

LEWIS, David. **Statements partly about observation.** In: Philosophical Papers, vol. XVII, nº 1, 1988.

LOCKE, John. **Ensaio sobre o entendimento humano.** Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

MOSTERÍN, Jesús. **La polémica entre Frege y Hilbert acerca del metodo axiomatico.** In: *Conceptos y teorías en la ciencia*. Alianza Editorial, 1984

PESSOA JUNIOR, Osvaldo. **Notas de aula para a disciplina FLF5256 - Filosofia e História da Ciência do Mentencéfalo.** 2019

POINCARÉ, Henri. **Science and Hypothesis.** In: The Foundations of Science, pp. 9-200. Traduzido por George Bruce Halsted. Nova Iorque, The Science Press, 1921.

_______________. **On the foundations of geometry.** In: Beyond geometry: classic papers from Riemann to Einstein (pp. 117 - 146). Editado por Peter Pesic. Dover Publications, 2007.

POLYA, G. **Mathematics And Plausible Reasoning - Vol. I. Induction And Analogy In Mathematics.** New Jersey: Princeton University Press, 1954.

PEREIRA, Oswaldo Porchat. **Ciência e dialética em Aristóteles.** São Paulo: Editora UNESP, 2001.

REICHENBACH, Hans. **The Philosophy of Space and Time.** Nova Iorque: Dover Publications, 1958.

SKLAR, Lawrence. **Space, Time, and Spacetime.** Los Angeles: University of California Press, 1974.

SUPPE, Frederick. **The Structure of Scientific Theories.** Chicago: University of Illinois Press, 1977.

QUINE, W. V. **Dois dogmas do empirismo.** In: Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

WIGNER, Eugene. **The unreasonable effectiveness of mathematics.** In: Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, No. I. New York: John Wiley & Sons, 1960.

YABLO, Stephen. **Aboutness.** Princeton U. P., 2014.