



INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

Autarquia associada à Universidade de São Paulo

Caracterização de Estruturas de Ondas Lentas Helicoidais para Utilização em TWT de Potência

DANIEL TEIXEIRA LOPES

**Dissertação apresentada como
parte dos requisitos para a
obtenção do Grau de Mestre
em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear – Materiais.**

**Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta**

**SÃO PAULO
2007**



INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

Autarquia associada à Universidade de São Paulo

Caracterização de Estruturas de Ondas Lentas Helicoidais para Utilização em TWT de Potência

DANIEL TEIXEIRA LOPES

**Dissertação apresentada como
parte dos requisitos para a
obtenção do Grau de Mestre
em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear – Materiais.**

**Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta**

**SÃO PAULO
2007**

*Dedico este trabalho a meus pais, Isaque e
Rosemeire, que tanto se empenharam na minha
educação e apoiaram os meus estudos.*

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão e sucesso deste trabalho:

Em primeiro lugar, ao Dr. Cláudio Motta pela orientação e pelas valiosas discussões sobre, mas não somente, o escopo deste trabalho;

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo auxílio financeiro por meio da bolsa de mestrado referente ao processo 05/3612-0;

Ao Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, CTMSP, pela utilização das instalações e materiais, e a todo o pessoal do Laboratório de Microondas de Potência, pela ajuda durante a realização deste trabalho;

Ao Sr. Valdir Raimundo Jacob por sua essencial participação no processo de trazer o aparato experimental do mundo virtual para o real;

À comissão de pós-graduação do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN, e à Universidade de São Paulo, USP, pelo suporte acadêmico;

Àqueles que compreenderam que, por diversas vezes, a minha ausência em certas ocasiões foi consequência do empenho neste trabalho;

E, acima de tudo, a Deus, pela oportunidade, pela saúde e pela capacitação durante este trabalho.

E disse Deus:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J},$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \quad e$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0.$$

E houve luz.

Gênesis 1:3

Caracterização de Estruturas de Ondas Lentas Helicoidais para Utilização em TWT de Potência

Daniel Teixeira Lopes

Resumo

Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo matemático e um aparato de medidas, que têm como objetivo auxiliar no projeto e na caracterização de estruturas de ondas lentas para válvulas de ondas progressivas.

O objetivo é obter as características de velocidade de fase e de impedância de interação de uma dada estrutura de ondas lentas.

Modelou-se matematicamente uma estrutura de ondas lentas do tipo ring-bar como uma hélice dupla contraposta, de forma que se obteve uma série de resultados teóricos já publicados e outros inéditos.

Desenvolveu-se um aparato de medida em microondas para a caracterização experimental da estrutura de ondas lentas sob análise. Apresentam-se os procedimentos de medida e os resultados experimentais obtidos, comparando-os com as previsões do modelo matemático. Os resultados experimentais apresentaram boa reprodutibilidade e distaram dos teóricos de acordo com o esperado.

Considerou-se que o modelo matemático e o aparato de medida, bem como as técnicas experimentais, já constituem uma importante ferramenta que será de fundamental importância no projeto e fabricação de válvulas de ondas progressivas.

Helical Slow-Wave Structures Characterization for Power TWT Applications

Daniel Teixeira Lopes

Abstract

In this work, a mathematical model and a measurement apparatus for aiding in the project and characterization of slow-wave structures for high-power traveling-wave tubes were developed.

The objective is to obtain the phase velocity and the interaction impedance characteristics of a given slow-wave structure.

A ring-bar slow-wave structure was mathematically modeled as a contra-wound helix in a such way that several published and still unpublished results could be achieved.

A microwave measurement apparatus was developed for the experimental characterization of the slow-wave structure under analysis. The measurement procedures are presented and the experimental results are compared to the theoretical predictions. The experimental results presented good reproducibility and differed from the theoretical ones in an expected way.

It was considered that the mathematical model and the measurement apparatus, as well experimental procedures, already constitute a very important tool, which will have fundamental role in the design and manufacture of traveling-wave tubes.

Sumário

	Página
Capítulo 1 – Introdução ao Problema e Revisão Bibliográfica.....	17
1.1 Introdução.....	17
1.2 Justificativa do Trabalho	18
1.3 A Válvula de Ondas Progressivas	19
1.4 A Estrutura de Ondas Lentas	21
1.5 Revisão da Literatura	24
1.5.1 Revisão Histórica do Problema	24
1.5.2 O Modelo da Falsa Hélice	26
1.5.3 O Modelo da Hélice de Fita	29
1.5.4 O Modelo da Hélice de Fita Dupla Contraposta	33
1.5.5 Carregamento da Hélice com guias circulares metálicas e Suportes dielétricos.....	38
1.6 Objetivo do Trabalho.....	41
1.7 Principais Conceitos e Organização do Texto	42
Capítulo 2 – Modelo Matemático	44
2.1 Introdução.....	44
2.2 Obtenção de Expressões para as Componentes de Campo	46
2.3 Modelamento da Estrutura de Ondas Lentas.....	56
2.4 Condições de Contorno na Superfície da Hélice	59
2.5 Propriedades de Simetria	65
2.6 Considerações Sobre as Correntes	66
2.7 Equação de Dispersão	71
2.8 Impedância de Interação	77
2.9 Resultados Teóricos	81
2.10 Conclusão.....	97
Capítulo 3 – Teoria da Medida e Aparato Experimental	98
3.1 Introdução.....	98
3.2 A Medida da Velocidade de Fase.....	99
3.2.1 Método do Coeficiente Angular da Curva de Fase.....	99
3.2.2 Método do Comprimento de Onda Guiado	101
3.3 Medida da Impedância de Interação	102
3.3.1 Expressão Para Perturbação Não Ressonante	102
3.3.2 A Perturbação de um Bastão Dielétrico.....	107
3.3.3 A Influência dos Parâmetros do Bastão na Perturbação	111

3.3.4	Estimativa dos Parâmetros do Bastão Perturbador	112
3.3.5	O Efeito dos Harmônicos Espaciais e dos Campos TE	114
3.4	O Aparato Experimental.....	115
3.5	Procedimento de medida.....	119
3.5.1	Procedimento de Medida da Velocidade de Fase.....	119
3.5.2	Procedimento de Medida da Impedância de Interação	120
3.6	Resultados das Medidas e Discussão	121
3.7	Conclusão.....	128
Capítulo 4 – Conclusão		130
Referências Bibliográficas		134
Apêndice A1 - Cálculo do Determinante do Sistema Linear (2.4.9).....		137
Apêndice A2 - Cálculo do Coeficiente $A_{1l,m}$		139
Apêndice A3 - Cálculo do Coeficiente $C_{1l,m}$		140
Apêndice A4 - Cálculo do Coeficiente $A_{2l,m}$		142
Apêndice A5 - Cálculo do Coeficiente $C_{2l,m}$		143
Apêndice A6 - Cálculo das Integrais (2.7.24) e (2.7.25).....		144
Apêndice A7 - Obtenção da Equação de Dispersão a Partir de (2.7.19)		146
Apêndice A8 - Equação de Dispersão para a Hélice Simples.....		148
Apêndice A9 - Cálculo da Potência Propagada na SWS.....		150
Apêndice A10 - Resumo de uma Técnica Alternativa para a Medida da Variação na Constante de Propagação.....		155

Lista de Símbolos

a, a_i, a_e	Raios médio, interno e externo estrutura de ondas lentas helicoidal.
$\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$	Vetores unitários do sistema de coordenadas cilíndricas.
$A, A_i, A_{i,l,m}$	Coefficiente de amplitude de campo elétrico genérico, para a região i e referente ao harmônico espacial de ordem l,m .
b	Raio interno da guia de ondas de secção circular que envolve a estrutura de ondas lentas.
\mathcal{B}, \mathbf{B}	Valor instantâneo e fasor complexo da densidade de fluxo magnético.
$B, B_i, B_{i,l,m}$	Coefficiente de amplitude de campo elétrico genérico, para a região i e referente ao harmônico espacial de ordem l,m .
c	Velocidade da luz no espaço livre.
$C, C_i, C_{i,l,m}$	Coefficiente de amplitude de campo magnético genérico, para a região i e referente ao harmônico espacial de ordem l,m .
\mathcal{D}, \mathbf{D}	Valor instantâneo e fasor complexo do deslocamento elétrico.
$D, D_i, D_{i,l,m}$	Coefficiente de amplitude de campo magnético genérico, para a região i e referente ao harmônico espacial de ordem l,m .
\mathcal{E}, \mathbf{E}	Valor instantâneo e fasor complexo do campo elétrico
E_ρ, E_φ, E_z	Componentes radial, azimutal e axial do campo elétrico no sistema de coordenadas cilíndrico.
F_i	Função auxiliar oriunda das condições de contorno em $\rho = a$.
$G_i(\)$	Combinação das funções modificadas de Bessel.
\mathcal{H}, \mathbf{H}	Valor instantâneo e fasor complexo do campo elétrico
H_ρ, H_φ, H_z	Componentes radial, azimutal e axial do campo magnético no sistema de coordenadas cilíndrico.
$I_l(\)$	Função modificada de Bessel do primeiro tipo de ordem l .
$\mathbf{J}, J_\varphi, J_z, J_{ l,m}$	Vetor densidade de corrente superficial na hélice e suas componentes azimutal, axial e paralela à fita para o harmônico espacial de ordem l,m .
j	Raiz quadrada de -1 .
k_0	Constante de propagação do espaço livre.
$K_l(\)$	Função modificada de Bessel do segundo tipo de ordem l .
$\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_{-1}$	Impedância de interação do modo fundamental e do primeiro modo reverso.
L, L_r	Expressão lagrangeana para o problema eletromagnético e sua versão reduzida.

p	Período ou passo da estrutura de ondas lentas.
P, P_T, P_i	Potência eletromagnética total propagada pela estrutura de ondas lentas e parcela referente à região i .
r	Razão entre o raio da guia circular e o raio da hélice.
\mathbf{S}	Vetor de Poynting.
S_z	Vetor de Poynting na direção de propagação z .
t	Variável temporal.
v_p, v_g, v_s	Velocidades de fase, de grupo e de sinal.
Z_0	Impedância do espaço livre.
α	Parte real da constante de propagação axial.
$\beta, \beta_0, \beta_{l,m}$	Constante de propagação de fase axial genérica, para o harmônico fundamental e para o harmônico de ordem l,m .
$\gamma, \gamma_0, \gamma_{l,m}$	Constante de propagação de fase radial genérica, para o harmônico fundamental e para o harmônico de ordem l,m na região i .
Γ	Constante de propagação axial, composta pelo termo de atenuação mais o termo de fase.
η	Quantidade que relaciona a largura da fita ao seu período.
δ	Largura da fita metálica que forma a estrutura helicoidal.
δ'	Largura do gap, ou seja, período da fita menos sua largura.
δ	Expressa uma variação infinitesimal.
$\delta(\)$	Função delta de Kronecker.
Δ	Expressa a variação de uma grandeza qualquer.
$\Delta_{l,m}$	Determinante do sistema linear.
$\varepsilon_0, \varepsilon_i, \varepsilon_p, \varepsilon_r$	Permissividade do espaço livre, permissividade relativa da região i , permissividade relativa do objeto perturbador e permissividade relativa.
λ_0, λ_g	Comprimento de onda no espaço livre e comprimento de onda guiado.
μ_0, μ_r	Permeabilidade magnética do espaço livre e permeabilidade magnética relativa.
τ_{TE}, τ_{TM}	Fatores de correção devido aos campos TE e TM.
ω, ω_c	Frequência angular e frequência angular de corte.
ξ	Constante de fase genérica.
ψ	Ângulo de passo da estrutura helicoidal.
ζ	Fator de correção devido ao efeito dos harmônicos espaciais.
*	Utilizado para denotar o complexo conjugado de uma grandeza.
!	Utilizado para denotar uma grandeza em estado perturbado.

Lista de Figuras

	Página
Figura 1.3.1 – Ilustração esquemática do circuito básico de uma TWT	19
Figura 1.4.1 – Ilustração das estruturas de ondas lentas de fita dupla contraposta (a) e ring-bar (b)	21
Figura 1.4.2 – Curvas de dispersão para uma guia de onda circular de raio a e para uma SWS helicoidal de raio a	22
Figura 1.5.1 – Ilustração da concepção da falsa hélice (a) e sua vista planar (b)	26
Figura 1.5.2 – Gráfico das soluções da equação de dispersão para a falsa hélice	28
Figura 1.5.3 – Ilustração de uma hélice de fita em coordenadas cartesianas (a) e no plano das coordenadas cilíndricas φ e z (b)	30
Figura 1.5.4 – Solução da equação de dispersão para uma dada SWS. Apenas o harmônico fundamental ($l = 0$) e o primeiro reverso ($l = -1$) são mostrados.....	32
Figura 1.5.5 – Solução da equação de dispersão para a hélice de fita dupla e de fita simples com os mesmos parâmetros geométricos.....	37
Figura 1.5.6 – Ilustração da secção transversal da estrutura helicoidal carregada com uma guia metálica e 3 suportes dielétricos (a) e seu modelo de 2 regiões com diferentes permissividades (b).....	38
Figura 2.2.1 – Ilustração da secção transversal da estrutura de ondas lentas real (a) em comparação com o modelo simplificado de duas regiões (b). a_i e a_e são os raios interno e externo da hélice, respectivamente, e b é o raio interno da guia. O raio médio da hélice é $a = (a_i + a_e)/2$	56
Figura 2.6.1 – Ilustração do esquema de correntes na hélice dupla contraposta. Considerando o eixo z positivo orientado para a direita, as densidades de corrente que fluem na fita têm	

	índice $-$. As densidades de corrente que fluem na hélice envolta para a direita têm índice $+$	66
Figura 2.7.1 –	Ilustração do volume de integração, que consiste da superfície cilíndrica $\rho = b$, $0 \leq z \leq p$ e das superfícies circulares planas $z = 0$, $0 \leq \rho \leq b$ e $z = p$, $0 \leq \rho \leq b$	72
Figura 2.9.1 –	Velocidade de fase normalizada em função da frequência para os modos fundamental ($l = 0$), primeiro reverso ($l = -1$), segundo reverso ($l = -2$), primeiro progressivo ($l = +1$) e segundo progressivo ($l = +2$).....	81
Figura 2.9.2 –	Curva $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$ para uma dada TWT com voltagem de aceleração de 30 kV. A curva do modo reverso aparece rebatida em relação ao eixo das ordenadas	83
Figura 2.9.3 –	Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de $\cot \psi$. Em (a) tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$, em (b) tem-se as curvas de velocidade fase em função da frequência e, em (c) tem-se as curvas de impedância de interação em função da frequência	86
Figura 2.9.4 –	Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de η . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência	87
Figura 2.9.5 –	Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de r . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência	88
Figura 2.9.6 –	Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de ε_2 . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência	89
Figura 2.9.7 –	Gráficos das curvas de dispersão (a) e (b) e impedância de interação (c) para uma hélice dupla e outra simples com os	

	mesmos parâmetros, que são aqueles mostrados na Tabela 2.9.1.....	91
Figura 2.9.8 –	Gráficos das curvas de dispersão (a) e (b) e impedância de interação (c) para uma hélice dupla e outra simples. Ambas têm a mesma velocidade de fase na frequência de 8 GHz, que é $0,25c$	92
Figura 2.9.9 –	Gráficos das curvas de velocidade de fase e impedância de interação considerando as equações de dispersão apresentadas por Sensiper e por Chodorow para (a) a hélice simples e (b) a hélice dupla.....	93
Figura 2.9.10 –	Gráficos das curvas de (a) velocidade de fase e (b) impedância de interação para os modos fundamental e primeiro reverso considerando a hélice simples e a hélice dupla. Ambas as estruturas foram ajustadas para apresentarem velocidade de fase de $0,25c$ em 8 GHz.....	94
Figura 2.9.11 –	Gráfico da Impedância de interação em função da posição radial da SWS com hélice dupla para o modo fundamental e o modo reverso nas frequências de 8 GHz e em f_{π} . a é o raio da hélice e b é o raio da guia circular.....	95
Figura 3.2.1 –	Deslocamento do curto helicoidal, cuja forma e dimensões discutir-se-á posteriormente, no eixo da estrutura de ondas lentas. Para cada posição z do curto tem-se uma respectiva fase φ do coeficiente de reflexão.	99
Figura 3.2.2 –	Curvas de fase em função da posição do curto helicoidal para utilização no método do coeficiente angular (a) e no método do comprimento de onda guiado (b).....	101
Figura 3.3.1 –	Ilustração do volume de integração, que consiste na superfície cilíndrica $\rho = b$, $0 \leq z \leq p$ e nas superfícies circulares planas $z = 0$, $0 \leq \rho \leq b$ e $z = p$, $0 \leq \rho \leq b$. No eixo, tem-se o objeto perturbador que é um bastão dielétrico com raio r_p e permissividade relativa ε_p . Na superfície $\rho = a$, $0 \leq z \leq p$ são atribuídas as condições de contorno da estrutura de ondas lentas.....	105
Figura 3.3.3 –	Gráfico da razão entre os coeficientes de correção dos campos TE e TM em função do raio do bastão perturbador. A permissividade relativa do bastão tem	

	influência desprezível na curva e, por isso, seu efeito não é mostrado. O raio do bastão perturbador é expresso em frações do raio da hélice	112
Figura 3.3.4 –	Gráfico da curva da perturbação realizada em função do raio do bastão dielétrico e de sua permissividade relativa. O raio do bastão r_p é expresso em frações do raio da hélice a	113
Figura 3.4.1 –	Fotografia do aparato de medida construído.....	116
Figura 3.4.2 –	Detalhe da montagem da estrutura de testes na plataforma móvel do aparato experimental.....	116
Figura 3.4.3 –	Ilustração com corte (a) e fotografia (b) da estrutura de testes desmontada.....	117
Figura 3.4.4 –	Fotografia e detalhe da estrutura de ondas lentas ring-bar caracterizada neste trabalho.....	118
Figura 3.4.5 –	Fotografia do curto helicoidal utilizado na medida de velocidade de fase para a estrutura de ondas lentas em questão no estado não perturbado.....	118
Figura 3.5.1 –	Seqüência de calibração do VNA para medida da curva de fase em função da posição do curto: (a) medida do curto; (b) medida do aberto; e (c) medida da carga casada.....	119
Figura 3.5.2 –	Curto helicoidal fixado em torno de uma vareta de PVC com diâmetros de 2,1 mm, que é utilizada para medir a constante de propagação no estado perturbado.....	120
Figura 3.6.1 –	Gráfico das curvas teóricas e experimentais de velocidade de fase normalizada para a estrutura carregada e não-carregada.....	121
Figura 3.6.2 –	Gráfico da velocidade de fase normalizada em função da frequência normalizada ka ($= k_0 a$) para hélices (a) simples, (b) ring-bar e (c) dupla contraposta. Resultado reportado por Birdsall e Everhart em [1].....	122
Figura 3.6.3 –	Gráfico do porcentual de redução da velocidade de fase em virtude do carregamento da estrutura.....	123
Figura 3.6.4 –	Gráfico da Impedância de Interação em função da frequência para a SWS ring-bar em estudo. Apresenta-se a	

	curva teórica e as experimentais com e sem correção de harmônicos espaciais para perturbação realizada com varetas de PVC e de fibra de vidro (FV)	124
Figura 3.6.5 –	Exemplo de curva de fase em função da posição, $\varphi(z)$, fora dos padrões de uma medida adequada.	125
Figura 3.6.6 –	Gráfico da Impedância de interação em função da frequência. Este resultado foi obtido por meio da técnica alternativa em que se mede as matrizes de espalhamento nos estados perturbado e não perturbado para a realização da correção sobre as oscilações	127
Figura A10.1 –	Gráficos da variação na curva de fase devido a perturbações por um fio metálico (a) e por uma vareta de PVC (c). As respectivas curvas de impedância de interação são (b) e (d)	156

Lista de Tabelas

Página

Tabela 2.9.1 – Parâmetros geométricos da SWS sob estudo e parâmetros a ser variados e seus respectivos intervalos	83
---	----

Capítulo 1

Introdução ao Problema e Revisão Bibliográfica

1.1 Introdução

Este primeiro capítulo tem por objetivo situar o leitor no contexto do trabalho, fornecendo um panorama geral sobre o mesmo. Primeiramente, apresenta-se uma justificativa para a realização do trabalho, destacando sua importância tecnológica. Em seguida, descreve-se resumidamente o princípio de funcionamento do dispositivo em questão, a válvula de ondas progressivas, direcionando o leitor para o ponto de interesse deste trabalho, que é o estudo da estrutura de ondas lentas helicoidal, uma parte do dispositivo. Tendo então situado o leitor no contexto do trabalho, apresenta-se uma revisão bibliográfica resumida da teoria desenvolvida para estudo das estruturas de ondas lentas helicoidais. Esta revisão tem por objetivo estabelecer um arcabouço teórico básico para que o leitor se sinta mais familiarizado com a teoria exposta no capítulo 2. Finaliza-se este capítulo expondo os objetivos deste trabalho, a metodologia para alcançá-los e a organização deste texto.

1.2 Justificativa do Trabalho

A partir de 1999, iniciou-se nas instalações do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo (CTMSP), um projeto temático de pesquisa e desenvolvimento tecnológicos visando a obtenção da tecnologia para o projeto, construção e caracterização de dispositivos de potência para amplificação de microondas do tipo válvulas de ondas progressivas (do inglês: traveling-wave tube - TWT). Empregam-se estes dispositivos comumente nos radares de fragatas da Marinha do Brasil, além de dispositivos de guerra eletrônica como os aparelhos de contramedidas eletrônicas ECM (do inglês: Electronic Counter Measures) e ECCM (do inglês: Electronic Counter-Counter Measures). Por causa disso, há interesse da instituição militar no desenvolvimento de tal dispositivo. Porém, a utilização das TWT abrange muitos dispositivos em telecomunicações de longa distância, como satélites e sondas espaciais, nos quais são utilizados potentes amplificadores na faixa de microondas.

As TWT são dispositivos complexos e, para a sua construção, é necessário conhecimento multidisciplinar, que abrange desde o domínio da tecnologia de ultra-alto vácuo, técnicas de brasagem metal-metal e metal-cerâmica realizada em fornos de hidrogênio e em fornos de alto vácuo, projeto de catodos termoiônicos emissores de elétrons, metalurgia do pó, sistemas de focalização magnética, descrição do fenômeno da interação eletromagnética com feixe de elétrons, técnicas numéricas, construção de moduladores pulsados de alta voltagem, além das técnicas para o projeto e medidas em microondas.

Tendo em vista que nossa nação ainda não domina completamente essa tecnologia, um dos objetivos fundamentais deste projeto é a independência tecnológica nessa área, de forma que o mercado interno de telecomunicações, tanto o militar quanto o comercial, possa ser atendido por tecnologia nacional em menos de uma década.

1.3 A Válvula de Ondas Progressivas

Desde o fim da segunda guerra mundial, quando os radares começaram a ser desenvolvidos e se tornaram equipamentos de suma importância nas forças de defesa, os dispositivos de amplificação de sinais na faixa de microondas acompanharam essa corrida tecnológica. Juntamente com outros dispositivos de feixe eletrônico, como as válvulas klystrons e magnetrons, as TWT foram motivo de intensos estudos naquela época. Hoje em dia, estes estudos ainda prosseguem em caráter de aprimoramento da eficiência do dispositivo. Evidentemente, novos dispositivos foram surgindo com o passar do tempo. Entre estes, estão as klystrons multi-feixe, os gyrotrons, os gyro-klystrons, as gyro-TWT, etc.

A principal aplicação da TWT é como amplificador em circuitos de microondas. O princípio de amplificação da TWT, cujo circuito básico é mostrado na Figura 1.3.1, baseia-se na conversão da energia cinética de um feixe de elétrons em energia eletromagnética. A TWT é composta, basicamente, de um canhão eletrônico, uma região de deriva, uma estrutura de ondas lentas, um colimador magnético e um coletor. Após deixar o canhão, onde é acelerado por uma certa diferença de potencial, o feixe viaja pela região de deriva e é coletado no coletor. Quando a estrutura de ondas lentas está presente na região de deriva, ela tem condições de sustentar a propagação de um campo eletromagnético capaz de interagir com o feixe de elétrons. Em uma certa condição, denominada *sincronismo*, a interação entre o feixe de elétrons e o campo sustentado pela estrutura de ondas lentas ocorre de tal forma que a energia cinética do feixe é convertida em energia eletromagnética, aumentando a potência do sinal de entrada, em detrimento da velocidade do feixe de elétrons.

A condição de sincronismo, necessária para que haja uma eficiente conversão de energia cinética do feixe em energia eletromagnética, é obtida quando a velocidade de fase da onda é próxima da velocidade dos elétrons no feixe. Essa condição é atingida mediante a ação da estrutura de ondas lentas (do

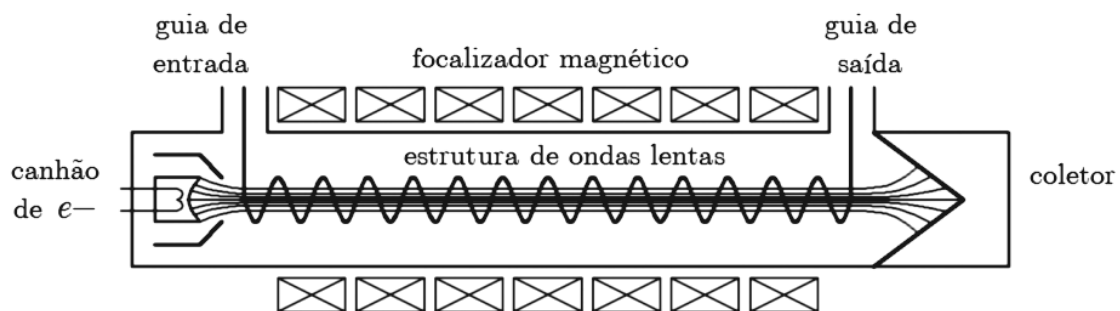


Figura 1.3.1 - Ilustração esquemática do circuito básico de uma TWT.

inglês: slow-wave structure - SWS) sobre o campo eletromagnético. A condição de sincronismo é necessária, mas não suficiente, para que haja uma eficiente transferência de energia do feixe para o campo. Na seção seguinte, comentam-se as condições necessárias e suficientes para que a transferência de energia citada ocorra da maneira mais eficiente.

1.4 A Estrutura de Ondas Lentas

A estrutura de ondas lentas é a estrutura de guiagem eletromagnética responsável por promover a condição de sincronismo, isto é, reduzir a velocidade de fase da onda sustentada até um valor próximo da velocidade de deriva do feixe de elétrons. Este tipo de estrutura de guiagem tem essa propriedade porque impõe condições de contorno sobre o campo eletromagnético que o obrigam a percorrer, entre dois pontos na direção de propagação, um caminho maior do que aquele na ausência de tal estrutura. Como exemplo, pode-se comparar um guia de seção circular e uma hélice.

Existem vários tipos de estruturas de ondas lentas. Neste trabalho, analisar-se-ão estruturas helicoidais denominadas *ring-bar*. Este tipo de SWS foi inventada por Birdsall e Everhart [1] e é largamente utilizada em TWT de alta potência devido à sua característica de atenuação do modo reverso de propagação, o que será alvo de discussão mais adiante. Essa SWS é, na verdade, uma reformulação espacial de uma outra, denominada hélice de fita dupla contraposta (do inglês: contra-wound helix) e concebida por Chodorow e Chu [2]. A segunda é de difícil construção, o que deu margem ao surgimento da primeira, que é de construção bem mais simples. Ambas as SWS são ilustradas na Fig.1.4.1.

Para uma onda eletromagnética que se propaga em uma estrutura de guiagem periódica, cuja fase é, por hipótese, descrita por uma dependência harmônica do tipo $e^{j(\omega t - \beta z)}$, a velocidade de fase v_p é definida como a velocidade que um observador deve se movimentar de maneira a enxergar sempre a mesma fase da onda, ou seja, enxergar a fase constante. Se a fase é constante ao longo do eixo de propagação z , conforme o tempo t evolui, pode-se escrever $0 = \omega dt - \beta dz$, que resulta em $v_p = dz / dt = \omega / \beta$.

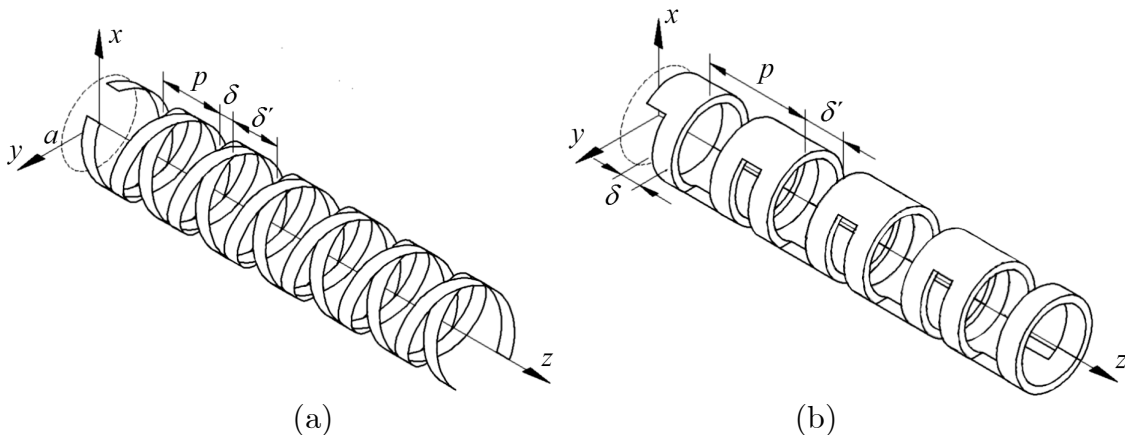


Figura 1.4.1 – Ilustração das estruturas de ondas lentas de fita dupla contraposta (a) e ring-bar (b).

Para observar a propagação de ondas lentas na estrutura helicoidal é conveniente comparar sua curva de dispersão com a de uma estrutura denominada *de ondas rápidas*, em que v_p é maior que a velocidade da luz c . Na Figura 1.4.2, apresenta-se um gráfico comparando as características de dispersão de uma guia de onda circular de raio a e de uma SWS helicoidal genérica. Este gráfico, que relaciona a frequência angular ω com a constante de fase β , é de grande relevância para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda. Mais ainda, as curvas exibidas por ele são as próprias soluções do problema eletromagnético de valor de contorno. A partir dele, obtém-se informações relativas à frequência de corte ω_c , à velocidade de fase $v_p = \tan(\alpha_p) = \omega/\beta$ e à velocidade de grupo $v_g = \tan(\alpha_g) = d\omega/d\beta$, que é definida como a velocidade com a qual um sinal composto de uma estreita banda de frequências se propaga.

Pode-se notar na Figura 1.4.2 que, para a guia de onda circular, obtém-se uma velocidade de fase maior que a velocidade da luz. Contudo, a velocidade de grupo é menor, de modo que $v_p v_g = c^2$. A partir da curva referente à SWS, obtém-se $v_p < c$, o que aponta o caráter de ondas lentas da estrutura helicoidal. Nota-se, também, que, devido ao comportamento aproximadamente linear da curva $k_0 a(\beta a)$ para a SWS, v_g é muito próxima de v_p . Nesse caso, o sinal se propaga sem distorção harmônica, pelo menos apreciável. Em outras palavras, as componentes de frequência que formam o sinal guiado têm a mesma velocidade de propagação e chegam ao fim do circuito de interação simultaneamente. Dessa forma é possível recuperar o sinal original com fidelidade. Se a banda de frequências em que o dispositivo apresenta tal comportamento for considerada grande, o dispositivo recebe a denominação *banda larga*. Esta característica é um dos principais atrativos da SWS helicoidal para as TWT.

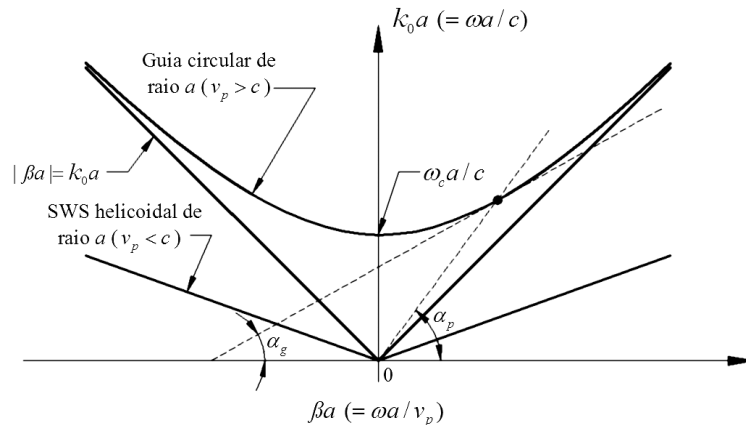


Figura 1.4.2 – Curvas de dispersão para uma guia de onda circular de raio a e para uma SWS helicoidal de raio a .

Além das características de dispersão, outro parâmetro de suma importância no estudo e projeto de uma SWS é a sua impedância de interação. Esta grandeza, cuja unidade é o ohm (Ω), expressa o quão eficiente a SWS é em promover a interação onda-feixe em determinada frequência. Resumidamente, quanto maior for a impedância de interação da SWS, a distribuição dos campos se dará de forma que a transferência de energia do feixe para a onda (naquela frequência) poderá ser mais eficiente, aumentando o ganho do dispositivo. Adianta-se que esta distribuição de campo preferencial contém uma intensa componente de campo elétrico axial. Este parâmetro é proporcional ao ganho da TWT, conforme a definição de ganho de Pierce [3].

Um aspecto que enfatiza a importância da determinação da velocidade de fase e da impedância de interação de uma estrutura de ondas lentas é que, estes, são dois parâmetros de entrada para as simulações em grandes sinais das TWT. Com isso, pode-se prever as características de saída do dispositivo, possibilitando realimentar o projeto inicial de forma que se obtenha um dispositivo mais eficiente.

1.5 Revisão da Literatura

Nesta seção, apresenta-se um rápido resumo da teoria desenvolvida sobre as estruturas de ondas lentas helicoidais, que servirá de base teórica para a discussão do capítulo seguinte.

1.5.1 Revisão Histórica do Problema

Com o intuito de situar os avanços recentes em uma perspectiva adequada, torna-se necessária uma discussão dos trabalhos iniciais.

Menciona-se, aqui, somente um pequeno número de trabalhos publicados antes de 1950. Para uma revisão mais extensa, o leitor é recomendado a se reportar a Sensiper [4].

Até por volta de 1940, o primeiro trabalho no problema da hélice parece ter sido realizado por Pocklington [5]. Em sua análise, considerou-se, por hipótese, que uma hélice monofilar era muito fina e perfeitamente condutora. Não se considerou o efeito da carga espacial devido ao feixe de elétrons, o que é conhecido como modelo frio. Obteve-se, então, uma equação integral para um modelo frio, bem como uma solução aproximada que predisse a existência de uma onda progressiva, cuja velocidade de fase axial é próxima da velocidade da luz, c , para baixas frequências e é reduzida a $c \operatorname{sen} \psi$, onde ψ é o ângulo de passo da hélice, para altas frequências. Este último caso é equivalente a uma onda com uma velocidade de fase c viajando ao longo do fio. A abordagem de Pocklington é representativa do que se pode chamar de aproximação de fio fino. Embora simplista, essa abordagem pôde proporcionar resultados consistentes.

Ollendorf [6] analisou o chamado modelo da falsa hélice, que modela matematicamente a hélice por um tubo anisotropicamente condutor, e obteve soluções para o modo de propagação fundamental. Este modelo se tornou um dos mais utilizados para uma primeira análise dos problemas de dispersão e impedância de interação, devido à sua simplicidade matemática aliada a resultados bastante consistentes. Analisar-se-á esse modelo mais à frente com algum detalhe.

Nicholson [7] procurou resolver o problema da hélice encontrando um sistema de coordenadas próprio para definir a superfície da hélice, mas não obteve resultados úteis. Sua análise é representativa do que pode ser chamado de abordagem exata.

Entre os muitos primeiros experimentais, Hertz mediu a velocidade de propagação ao longo de uma hélice e, como notado por Kornhauser [8], obteve

um valor que é bastante preciso. Experimentos também foram realizados mais tarde por Hofmeier, como notado por Roubine [9].

De 1940 a 1950, aproximadamente, os resultados de uma análise do modo fundamental da falsa hélice por Schelkunoff foram dados por Pierce e revisados em seu livro [3]. Schulman e Heagy [10] discutiram o modelo da falsa hélice e consideraram o modo fundamental, bem como modos de ordens mais altas, em que as componentes de campo variam com o ângulo. Phillips e Malin [11] também analisaram o problema dos modos de ordem mais alta com algum detalhe.

Esforços adicionais em resolver o problema da hélice por meio de uma abordagem exata foram reportados por Bagby [12] e Sollfrey [13]. Entretanto, por não se conseguir tratar as equações de Maxwell no sistema de coordenadas proposto, drásticas aproximações foram necessárias, contribuindo apenas com resultados de utilidade limitada.

Adicionalmente a mais trabalhos analíticos, medidas mais extensivas eram realizadas nesse período. Cutler [14] reportou medidas da velocidade de fase que se aproximaram bastante de predições feitas a partir do modelo da falsa hélice para uma gama de frequências relativamente grande. Cutler notou que a impedância de interação, como definida por Pierce, era menor do que aquela prevista pelo modelo da falsa hélice, e Pierce indicou como essa redução poderia ser computada. Kraus [15] e seus colaboradores notaram que, embora para baixas frequências a velocidade de fase medida das únicas ondas observáveis na hélice correspondesse àquelas preditas pelo modelo da falsa hélice, para frequências acima do ponto em que o raio médio da hélice é aproximadamente um comprimento de onda, uma mudança anômala ocorria na velocidade de fase.

De 1950 até o presente, um número cada vez maior de trabalhos apareceram e, melhor do que continuar uma abordagem histórica, parece mais útil descrever os principais modelos desenvolvidos, apresentando suas vantagens e desvantagens. Começa-se descrevendo o modelo da falsa hélice. Posteriormente, analisa-se a hélice de fita e, então, discute-se a hélice de fitas contrapostas, que é o modelo para a estrutura de interesse desse trabalho. Além desses modelos, não surgiu nada de muito diferente para modelar a estrutura helicoidal, mas os esforços foram direcionados a considerar outros fatores e parâmetros da estrutura, tais como, o carregamento com cilindros dielétricos e metálicos, a espessura da hélice, os suportes dielétricos que sustentam a hélice no eixo do cilindro guia, etc.

1.5.2 O Modelo da Falsa Hélice

Muito embora as propriedades do modelo da falsa hélice, mais particularmente para o modo fundamental, já tenham sido bastante discutidas na literatura, muitas características merecem considerações adicionais. Não somente porque estas considerações servem como introdução ao modelo explorado no capítulo 2, mas também porque ao menos uma das soluções de ordem mais alta tenha se tornado importante no desenvolvimento do oscilador de modo reverso (do inglês: backward-wave oscillator - BWO).

Condições de Contorno da Falsa Hélice

Considere uma hélice formada por um fio perfeitamente condutor, como mostrado na Figura 1.5.2.1(a), com seu eixo coincidindo com o eixo da coordenada z do sistema de coordenadas. Uma vista planar é mostrada na Figura 1.5.2.1(b), onde os versores \mathbf{a}_φ e \mathbf{a}_z são representados em termos dos versores paralelo, \mathbf{a}_\parallel , e perpendicular, \mathbf{a}_\perp , ao fio. Considera-se que a hélice é imersa no espaço livre. No entanto, se outras regiões externas forem consideradas, por exemplo, um tubo dielétrico rodeando a hélice, o método utilizado para obter soluções pode ser o mesmo. Considerar-se-á o caso mais simples, por enquanto, para evitar complicações desnecessárias. Adicionalmente, define-se as quantidades passo (ou período) da hélice p , raio da hélice a e ângulo de passo $\psi = \arccot(2\pi a/p)$. Utiliza-se, ainda, o módulo do vetor número de onda $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ e considera-se dependência temporal harmônica do tipo $e^{j\omega t}$.

Agora, considera-se que uma segunda hélice idêntica é envolta paralelamente à primeira, mas ligeiramente espaçada na direção z . Considera-se que há um número tal de hélices paralelas que possam cobrir todo um período de hélice e a distância entre elas se torne infinitesimal por causa do número infinito de hélices paralelas. Deste modo, obtém-se o modelo da falsa hélice. Este modelo também pode ser entendido como um tubo cilíndrico de raio a com uma

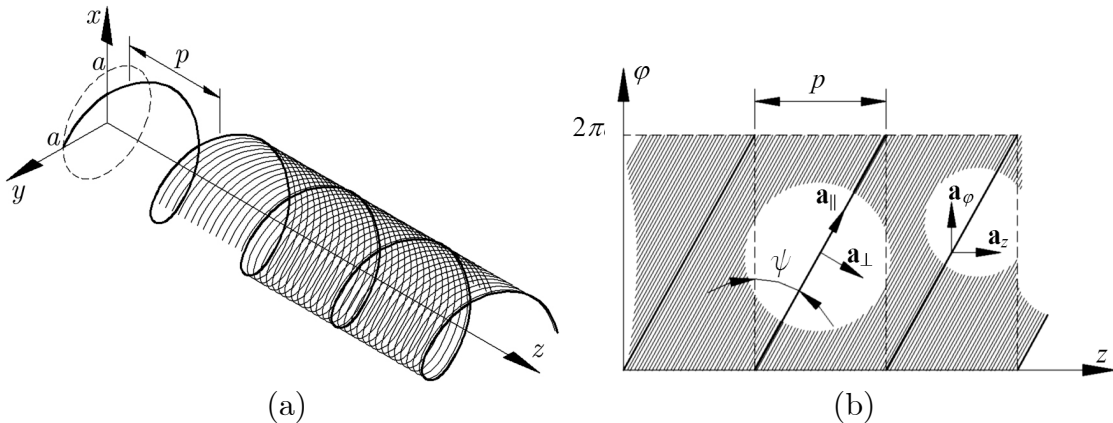


Figura 1.5.2.1 – Ilustração da concepção da falsa hélice (a) e sua vista planar (b).

condutividade elétrica anisotrópica. As condições de contorno dizem que o campo magnético tangencial e o campo elétrico perpendicular são ambos contínuos através da superfície $\rho = a$ e, adicionalmente, o campo elétrico tangencial paralelo à direção da hélice é contínuo e nulo. Evidentemente, o modelo ignora a periodicidade da estrutura real, bem como o diâmetro do fio.

Antes de prosseguir matematicamente, é importante considerar quais resultados podem ser esperados a partir do modelo da falsa hélice. Já que há simetria cilíndrica, é de se esperar que existam ondas com dependência harmônica com a coordenada z . Por causa da homogeneidade das condições de contorno, também se pode esperar que exista um conjunto infinito de modos caracterizados pelas variações angulares. Adicionalmente, pode-se antecipar, em vista da natureza peculiar das condições de contorno, que as soluções consistem em uma mistura de ondas TE (transversal elétrica) e TM (transversal magnética).

Resolvendo o problema da falsa hélice, assim como em outros modelos, pode-se considerar o caso homogêneo ou o caso não homogêneo. O primeiro é mais simples e produz informações consideráveis sobre os modos livres. O segundo, embora mais difícil, produz mais informação, particularmente no que diz respeito às amplitudes dos modos livres, e é especialmente útil na determinação da significância das várias ondas de ordem mais altas que existem na falsa hélice. Considerar-se-á aqui somente o caso homogêneo com algum detalhe.

A Equação de Dispersão Para a Falsa Hélice

O detalhamento matemático sobre a obtenção das soluções de ondas que se propagam com velocidade de fase menor que a da luz será apresentado no capítulo 2, quando discutir-se-á o modelo desenvolvido neste trabalho. Por enquanto, partir-se-á da solução de ondas lentas para o campo elétrico axial, que é

$$E_z = \begin{cases} A_l I_l(\gamma\rho) & \rho \leq a \\ B_l K_l(\gamma\rho) e^{-j\beta z} e^{jl\varphi}, & \rho \geq a \end{cases}, \quad (1.5.2.1)$$

onde

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 \quad (1.5.2.2)$$

é a constante de fase radial.

Para a componente TE, isto é, H_z a solução é idêntica a menos das constantes A_l e B_l , que são substituídas por C_l e D_l , respectivamente. I_l e K_l são as funções modificadas de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e de ordem inteira l . Estas funções são escolhidas de forma que as soluções se

comportem apropriadamente nas regiões interna e externa à hélice. Determinando as demais componentes do campo eletromagnético por meio de (1.5.2.1) e aplicando as condições de contorno em $\rho = a$, chega-se a um sistema linear homogêneo de quarta ordem, cuja solução não trivial resulta na equação de dispersão, também chamada de equação determinante, que é

$$\frac{I_l'(\gamma a)K_l'(\gamma a)}{I_l(\gamma a)K_l(\gamma a)} = -\frac{(\gamma^2 a^2 + l\beta a \cot \psi)^2}{k_0^2 a^2 \gamma^2 a^2 \cot^2 \psi}, \quad (1.5.2.3)$$

onde $I_l'(\gamma a)$ e $K_l'(\gamma a)$ são as derivadas das respectivas funções modificadas de Bessel em relação ao argumento. É importante notar que as soluções de (1.5.2.3) podem ocorrer somente para $|\beta| > k_0$. Portanto, se existir um par k_0 - β que satisfaça (1.5.2.3), ele corresponderá, necessariamente, a uma onda lenta.

Para resolver (1.5.2.3) para γa , e então βa como função de $k_0 a$ e $\cot \psi$, utiliza-se uma combinação de métodos analíticos, numéricos e gráficos. Os resultados para $l=0$ e $l=-1$ são mostrados nas curvas da Figura 1.5.2.2. Nessas curvas, a velocidade de fase da onda é dada pela inclinação de uma linha reta que passa pela origem e pelo ponto de interesse na curva. Já a velocidade de grupo pela inclinação da curva no ponto de interesse, isto é,

$$\frac{v_p}{c} = \frac{k_0 a}{\beta a} \quad \text{e} \quad (1.5.2.4)$$

$$\frac{v_g}{c} = \frac{d(k_0 a)}{d(\beta a)}. \quad (1.5.2.5)$$

Os resultados para o caso $l=0$ são bem conhecidos. A onda tem grande dispersão para pequenos valores de $k_0 a$, mas a dispersão se torna menor para grandes valores de $k_0 a$, quando a velocidade de fase tende para $v_p = c \sin \psi$. Para $|l| \geq 1$, os resultados são consideravelmente mais complicados e podem ser caracterizados notando que varias ondas ocorrem por modo, das quais as velocidades de grupo e de fase podem ter direções opostas. Na Figura 1.5.2.2, as

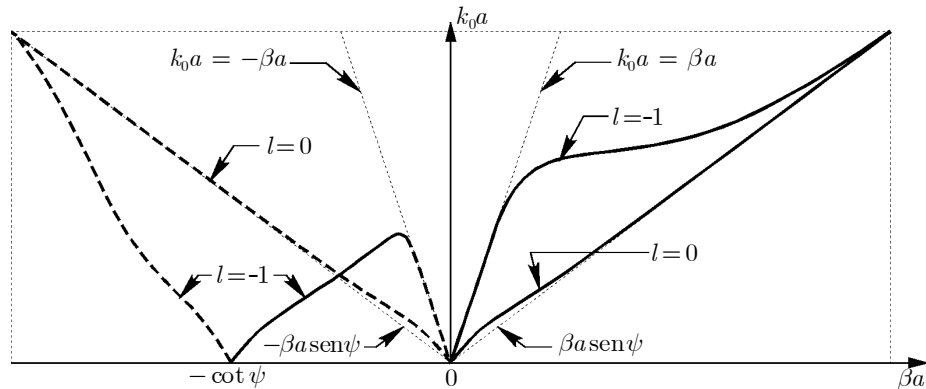


Figura 1.5.2.2 – Gráfico das soluções da equação de dispersão para a falsa hélice.

soluções com velocidade de grupo positiva são mostradas com linhas sólidas, enquanto aquelas com velocidade de grupo negativa são mostradas com linhas seccionadas.

Impedância de Interação para a Falsa Hélice

Utilizando as componentes de campo deduzidas a partir de (1.5.2.1), obtém-se a potência média P aplicando o teorema de Poynting complexo, isto é,

$$P = \frac{1}{2} \Re \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.5.2.6)$$

onde o asterisco indica o conjugado complexo do campo.

Na direção de propagação do campo, (1.5.2.6) é dada por

$$P = \frac{1}{2} \Re \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (E_{\rho,i} H_{\varphi,i}^* - E_{\varphi,i} H_{\rho,i}^*) \rho d\rho d\varphi. \quad (1.5.2.7)$$

P é a potência propagada através da estrutura helicoidal. Com este resultado, é possível calcular a impedância de interação,

$$\mathcal{K}_l = \frac{|E_{z,l}(\rho=0)|^2}{2\beta_l^2 P}, \quad (1.5.2.8)$$

como definida por Pierce em [3], onde ele apresenta resultados completos para o modo fundamental. Sensiper também apresenta resultados para modos de ordem mais alta em seu trabalho [16].

1.5.3 O Modelo da Hélice de Fita

Embora a falsa hélice produza muita informação útil, a limitação resultantes da omissão do caráter periódico da estrutura, bem como a consideração do fio infinitesimal é uma séria deficiência. Pode-se eliminar essa limitação utilizando o modelo da hélice de fita, introduzido por Sensiper e descrito em [16]. A partir desse modelo, o papel dos harmônicos espaciais e as, assim chamadas, regiões de propagação proibida, ou simplesmente regiões proibidas, ficaram evidentes, bem como outros aspectos importantes.

A hélice de fita é constituída de uma fita perfeitamente condutora de espessura desprezível, mas com largura δ . Uma ilustração da hélice de fita em coordenadas cartesianas e planares é mostrada na Figura 1.5.3.1. Os parâmetros p , a e ψ são definidos como antes, porém agora tem-se a largura da fita δ e do espaçamento δ' , como mostrado. A hélice é novamente considerada imersa no espaço livre. Embora a análise seja bem parecida com o modelo da falsa hélice, agora, se deve considerar a largura da fita. Considera-se, também, o modelo frio e que a hélice tenha comprimento infinito.

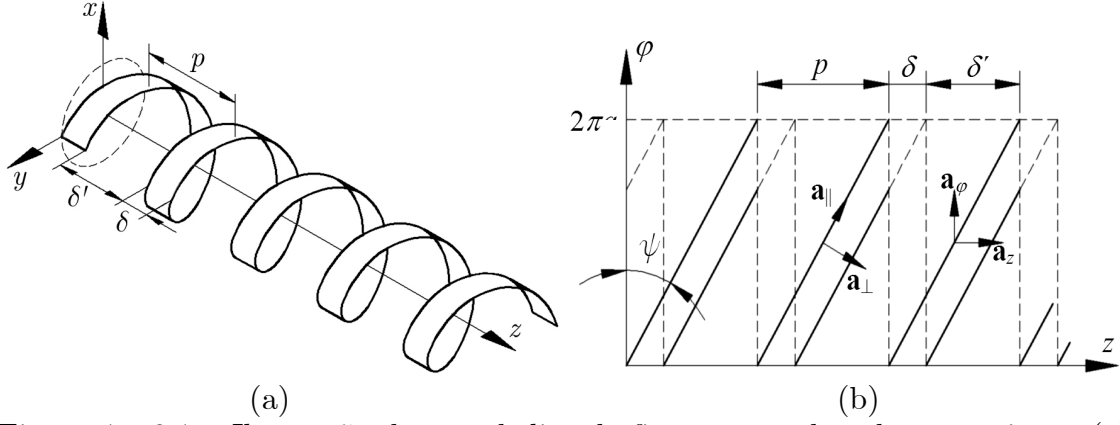


Figura 1.5.3.1 – Ilustração de uma hélice de fita em coordenadas cartesianas (a) e no plano das coordenadas cilíndricas φ e z (b).

Como a hélice é uma estrutura periódica, os campos devem diferir apenas de alguma constante complexa quando eles se movem ao longo da mesma de uma distância p . Isto é claro, já que, deslocando a hélice de uma distância igual ao seu período, ela coincide propriamente. Portanto, após viajar um período p , os campos devem diferir apenas de uma constante de fase.

Esta dependência harmônica com a coordenada z é satisfeita com

$$e^{-j\beta_0 z} e^{-j\frac{2l\pi}{p}z} = e^{-j\beta_l z}, \quad (1.5.3.1)$$

onde

$$\beta_l = \beta_0 + \frac{2l\pi}{p}, \quad (1.5.3.2)$$

e l é um número inteiro. Visto que E_z e H_z devem satisfazer à equação de Helmholtz homogênea, a dependência com a coordenada φ é dada por $e^{jm\varphi}$, e a dependência radial é dada pelas funções modificadas de Bessel. Adicionalmente à periodicidade sobre o eixo z , é óbvio que, se a hélice for transladada ao longo do seu eixo de uma distância menor que p , ela deve também ser rotacionada de forma a coincidir consigo mesma. Esta invariância em relação a rotações tem como consequência que l deve ser igual a m . Como resultado, as componentes axiais de campo, que satisfazem à equação de onda, são dadas por

$$E_z = \sum_l \begin{cases} A_l I_l(\gamma_l \rho) & \rho \leq a \\ B_l K_l(\gamma_l \rho) & \rho \geq a \end{cases} e^{j(l\varphi - \beta_l z)}, \quad (1.5.3.3)$$

$$H_z = \sum_l \begin{cases} C_l I_l(\gamma_l \rho) & \rho \leq a \\ D_l K_l(\gamma_l \rho) & \rho \geq a \end{cases} e^{j(l\varphi - \beta_l z)}, \quad (1.5.3.4)$$

onde o auto valor radial γ_l é dado por

$$\gamma_l^2 = \beta_l^2 - k_0^2. \quad (1.5.3.5)$$

A representação da densidade de corrente \mathbf{J} sobre a superfície da hélice deve ter a mesma forma que as componentes de campo, isto é,

$$\mathbf{J} \cdot \begin{matrix} \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{matrix} = \begin{matrix} J_\varphi \\ J_z \end{matrix} = \sum_l \begin{matrix} J_{\varphi,l} \\ J_{z,l} \end{matrix} e^{j(l\varphi - \beta_l z)} = \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \sum_l J_{||l} e^{j(l\varphi - \beta_l z)}, \quad \rho = a, \quad (1.5.3.6)$$

onde $J_{||l}$ é o coeficiente da série de Fourier na qual a densidade de corrente deve ser expandida. Utilizando (1.5.3.3) e (1.5.3.4) para determinar as outras componentes de campo e, então, utilizando as condições de contorno que elas devem satisfazer em $\rho = a$, pode-se expressar as componentes de campo juntamente com a densidade superficial de corrente paralela à fita. Essas condições de contorno dizem que o campo elétrico tangencial é contínuo sobre a superfície $\rho = a$ e que a descontinuidade do campo magnético tangencial é igual à densidade de corrente na superfície da hélice.

Equação de Dispersão para a Hélice de Fita

Para obter a equação de dispersão, necessita-se da aplicação de mais condições de contorno. Estas, dizem que o campo elétrico tangencial é nulo sobre a superfície da hélice e que o campo magnético é contínuo sobre o espaçamento (gap). Essa última condição é equivalente à imposição de que exista corrente somente sobre a superfície da hélice.

Um bom procedimento de aproximação para casar as condições de contorno e que produz bons resultados é admitir que o fluxo de corrente ocorra somente na direção da fita, isto é, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_{||} = J_{||} \neq 0$ e $\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_\perp = J_\perp = 0$ e o campo elétrico paralelo seja nulo sobre a fita, isto é, $E_{||}(\rho = a) = 0$. Reciprocamente, admite-se que o campo elétrico na região do gap em $\rho = a$ seja composto apenas de uma componente perpendicular às margens da fita, e a densidade de corrente perpendicular J_\perp em $\rho = a$ seja nula. Esta é uma boa aproximação para hélices de fitas finas, ou seja, hélices em que a relação δ/p é um número pequeno. Desenvolvendo este procedimento, chega-se à seguinte equação de dispersão aproximada

$$0 \approx \sum_l J_{||l} \left\{ \left[\beta_0^2 a^2 - k_0^2 a^2 \left(1 - \frac{l^2}{\gamma_l^2 a^2} \cot^2 \psi \right) \right] I_l(\gamma_l a) K_l(\gamma_l a) + k_0^2 a^2 I_l'(\gamma_l a) K_l'(\gamma_l a) \cot^2 \psi \right\}, \quad (1.5.3.7)$$

onde

$$J_{||l} = J_0 \frac{\delta \sin(l\pi\delta/p)}{p \ l\pi\delta/p}. \quad (1.5.3.8)$$

O coeficiente da série de Fourier para a densidade de corrente superficial, expresso em (1.5.3.8), é utilizado em virtude da aproximação de que a magnitude da densidade de corrente superficial é considerada uniformemente distribuída sobre a fita. Outras formas mais realistas de distribuição de corrente podem ser a quadrática ou ainda a hiperbólica, como mostrado por Tsutaki em [17]. Porém, nesta abordagem considerar-se-á o primeiro caso, que é mais simples.

Regiões Proibidas

Se β_0 é real, então γ_l deve ser real e positivo. Isto leva à existência de regiões proibidas no diagrama $k_0 a(\beta_0 a)$, nas quais não são permitidas soluções de ondas lentas. Esta restrição é bastante análoga àquela da falsa hélice, ou em outro sistema de condições de contorno homogêneas, onde somente $|\beta_0| > k_0$ seja permitido. No caso da hélice de fita, é preciso que $|\beta_l| > k_0$ ou, em outras palavras, que a velocidade de fase de todos os harmônicos seja menor do que a velocidade da luz.

Soluções da Equação de Dispersão para a Hélice de Fita

A Figura 1.5.3.2 mostra as soluções da equação de dispersão para o caso particular em que $\psi = 10^\circ$ e $\delta/p = 0,1$. Pode-se notar diferentes ramos da curva, relativos a diferentes modos. Os que são mostrados em linha sólida têm velocidade de grupo positiva e aqueles com velocidade de grupo negativa são mostrados em linha seccionada. Nota-se ainda que para alguns valores de $k_0 a$, existem vários modos de propagação, isto é, várias ondas. A interpretação é a mesma que na falsa hélice, ou seja, se a hélice é excitada por uma fonte em $z = 0$, então, para $z > 0$, ocorrerão ondas com velocidade de grupo positiva. Em contrapartida, para $z < 0$, ocorrerão ondas com velocidade de grupo negativa.

Ao contrário do que ocorre no caso da falsa hélice, em que, embora possa haver várias ondas por modo l , os l modos sendo independentes, na hélice de fita não somente pode haver várias ondas por modo, mas também cada modo deve

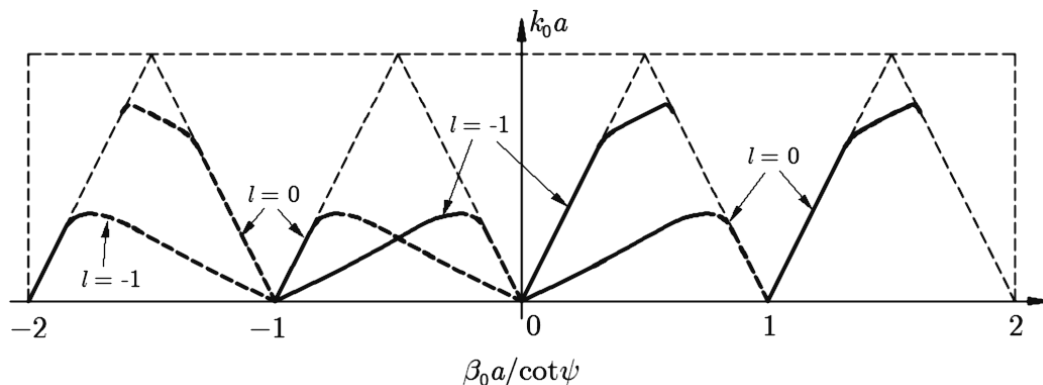


Figura 1.5.3.2 – Solução da equação de dispersão para uma dada SWS. Apenas o harmônico fundamental ($l = 0$) e o primeiro reverso ($l = -1$) são mostrados.

conter o conjunto inteiro de harmônicos espaciais para casar as condições de contorno. A partir de (1.5.3.4) e (1.5.3.5), as velocidades de fase e de grupo normalizadas para o l -ésimo harmônico são dadas por

$$\frac{v_{p,l}}{c} = \frac{k_0 a}{\beta_l a} = \frac{k_0 a / \cot \psi}{l + \beta_0 a / \cot \psi}, \text{ e} \quad (1.5.3.9)$$

$$\frac{v_{g,l}}{c} = \frac{v_{g,0}}{c} = \frac{d(k_0 a)}{d(\beta_0 a)}. \quad (1.5.3.10)$$

Nota-se que as velocidades de grupo dos harmônicos espaciais de um dado modo são idênticas, já que eles são todos associados à mesma onda. A partir de (1.5.3.9), deslocando a origem l unidades ao longo da abscissa $\beta_0 a / \cot \psi$, pode-se obter a velocidade de fase do l -ésimo harmônico espacial.

Visto que as velocidades de fase e de grupo do primeiro harmônico espacial negativo ($l = -1$) têm direções opostas, a hélice é uma estrutura muito útil em osciladores de modo reverso (do inglês: backward-wave oscillators - BWO) do tipo descrito por Kompfner e Williams [18]. Entretanto, esta característica também é uma desvantagem em amplificadores TWT, a menos que alguma providência seja tomada para evitar ou suprimir as oscilações resultantes da interação do feixe de elétrons com o modo reverso.

Impedância de Interação para a Hélice de Fita

A partir das expressões das componentes de campo, o fluxo de potência axial médio pode ser computado da mesma maneira como no caso da falsa hélice. A potência propagada por cada modo pode ser calculada separadamente e a potência total é a soma de todas as contribuições de cada modo. Pelo modelo da hélice de fita, verificou-se que uma considerável fração da potência total é carregada pelos harmônicos espaciais. Portanto, a impedância de interação (1.5.2.8) é reduzida em relação ao valor obtido pelo modelo da falsa hélice, como é mostrado por Sensiper em [4]. Por outro lado, embora os harmônicos espaciais carreguem potência, esta não corresponde a campo que possa interagir com o feixe de elétrons, já que este está em sincronismo com apenas um único harmônico espacial (o fundamental no caso dos amplificadores TWT ou o primeiro reverso no caso dos osciladores BWO).

1.5.4 O Modelo da Hélice de Fita Dupla Contraposta

A utilização das hélices de fita simples em dispositivos TWT de altas potências e, conseqüentemente, altas voltagens, encontra um sério desafio no problema da relação de impedâncias de interação entre o modo fundamental e os harmônicos. Descobriu-se que, não somente a impedância do modo fundamental

é reduzida por causa do aumento da potência dos harmônicos, mas também a impedância do primeiro modo reverso ($l = -1$) também sofre aumento. Embora o primeiro efeito seja uma séria limitação, o segundo o é ainda mais, visto que ele resulta em oscilações devidas ao modo reverso. Esta limitação é particularmente crítica para amplificadores de alta potência, pois, nesses casos, geralmente tem-se um feixe eletrônico de grande diâmetro, de forma que quase preencha o interior da hélice e é, justamente, perto da hélice (e longe do eixo) que o campo axial do modo reverso é mais intenso.

Chodorow e Chu [2] analisaram uma estrutura helicoidal que sobrepuja ambas as limitações descritas acima, porém que é de difícil construção. Então, Birdsall e Everhart [1] propuseram uma forma de construção mais prática. Estas duas estruturas são, respectivamente, a hélice de fita dupla contraposta (do inglês: *cross-wound* ou *contra-wound helix*), também conhecida por hélice gêmea, e a estrutura *ring-bar*, ambas ilustradas na Figura 1.4.1.

A hélice dupla contraposta consiste em duas hélices envoltas em direções opostas, como ilustrado da Figura 1.4.1(a). A modificação proposta por Birdsall e Everhart, ilustrada na Figura 1.4.1(b), consiste em uma distorção espacial da hélice dupla, tornado-a de construção mais fácil. Enquanto na primeira, as duas hélices não se tocam, na segunda, toda a estrutura é uma única peça.

As vantagens dessas duas estruturas são resultado das implicações eletromagnéticas da simetria que possuem. Considerando a superposição dos campos correspondentes às hélices operando no *modo simétrico* de propagação, isto é, operando de tal forma que os campos elétricos axiais da componente fundamental se somam. Então, o campo magnético axial resultante é identicamente nulo, bem como a energia armazenada associada a essa componente. Analisando detalhadamente, pode-se concluir que, na hélice de fita simples, o modo fundamental propaga, aproximadamente, quantidades iguais de energia elétrica e magnética, ou seja, energia contida nas porções TM e TE do campo. Na hélice dupla, em virtude da simetria, a componente fundamental da porção TE do campo não existe, de forma que os harmônicos de ordem mais alta devem ter a maior parte de sua energia na parte magnética (ou TE) do campo. Isto implica que os harmônicos de ordem mais alta têm pequena componente axial de campo elétrico e, conseqüentemente, esse tipo de SWS apresenta pequena impedância de interação para as ondas reversas. Da mesma forma, o argumento acima pode ser utilizado para explicar o *modo anti-simétrico*, no qual a componente fundamental de campo elétrico axial é nula, resultando em alta impedância para os harmônicos de ordem superior.

Esses argumentos qualitativos, foram verificados numericamente por Chodorow e Chu em seu trabalho, procedendo de uma forma semelhante a de Sensiper. Porém, os primeiros utilizaram uma abordagem variacional para obtenção da equação de dispersão por meio de uma Lagrangeana, e mostraram que o fluxo de potência complexa na superfície da hélice tem caráter variacional. Essa abordagem não é somente mais fisicamente satisfatória do que a de Sensiper, mas tem a vantagem de conduzir a uma equação de dispersão mais rapidamente convergente. Chodorow e Chu obtiveram, para a hélice de fita simples, uma equação de dispersão muito semelhante a de Sensiper (1.5.3.7), porém o termo da corrente aparece ao quadrado. A diferença produzida nos resultados devido à utilização das duas equações de dispersão será mostrada na seção 2.9.

Para a hélice de fita dupla, por causa da simetria, as componentes de campo tomam a seguinte forma

$$E_z = \sum_{l,m} \begin{cases} A_{l,m} I_l(\gamma_{l,m} \rho) & \rho \leq a \\ B_{l,m} K_l(\gamma_{l,m} \rho) & \rho \geq a \end{cases} e^{j(l\varphi - \beta_{l,m} z)}, \quad (1.5.4.1)$$

$$H_z = \sum_{l,m} \begin{cases} C_{l,m} I_l(\gamma_{l,m} \rho) & \rho \leq a \\ D_{l,m} K_l(\gamma_{l,m} \rho) & \rho \geq a \end{cases} e^{j(l\varphi - \beta_{l,m} z)}, \quad (1.5.4.2)$$

onde

$$\gamma_{l,m}^2 = \beta_{l,m}^2 - k_0^2, \quad (1.5.4.3)$$

com

$$\beta_{l,m} = \beta_{0,0} + (l + 2m) \frac{2\pi}{p}, \quad (1.5.4.4)$$

e a densidade de corrente assume a forma

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \sum_{l,m} J_{\varphi,l,m} e^{j(l\varphi - \beta_{l,m} z)} = \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \sum_{l,m} J_{||,l,m} e^{j(l\varphi - \beta_{l,m} z)}, \\ J_z &= \sum_{l,m} J_{z,l,m} e^{j(l\varphi - \beta_{l,m} z)}, \end{aligned} \quad \rho = a. \quad (1.5.4.5)$$

Para a obtenção da equação de dispersão, prossegue-se da seguinte forma. Considera-se o caso de espessura infinitesimal, e expressam-se os campos em termos das correntes. Utilizam-se as propriedades de simetria das correntes das fitas utilizando a aproximação de fita fina, isto é, existe apenas a componente paralela da corrente. O fluxo de potência complexa é calculado utilizando a expressão obtida por meio de uma lagrangeana, isto é,

$$I = jk_0 Z_0 \oint_{\rho=a} \mathbf{E}^* \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e)] dS. \quad (1.5.4.6)$$

Os índices i e e , neste caso, indicam os campos na região interna e externa da superfície $\rho = a$, respectivamente. Expressando (1.5.4.6) em termos das componentes do sistema de coordenadas, obtém-se

$$I = jk_0 Z_0 \int_0^{2\pi} \int_0^p (E_\varphi^* J_\varphi + E_z^* J_z) a dz d\varphi. \quad (1.5.4.7)$$

A solução do problema é dada por $\delta I = 0$. Por motivo de simplificação, faz-se a expansão de um termo para a densidade de corrente. Chodorow e Chu verificaram que esta aproximação produz resultados quantitativos muito consistentes em vista de expansões de três termos. Nessas condições, a solução de (1.5.4.7) é dada simplesmente por $I = 0$. A equação de dispersão resultante é dada por

$$0 = 2U_{0,0} + \sum_{l=1}^{\infty} J_{||l,0}^2 (Y_{l,0} + Y_{-l,0}), \quad (1.5.4.8)$$

onde

$$U_{0,m} = (\gamma_{0,m} a)^2 K_0(\gamma_{0,m} a) I_0(\gamma_{0,m} a) \text{sen}^2 \psi, \quad (1.5.4.9)$$

$$Y_{l,m} = (\gamma_{l,m} a)^2 I_l(\gamma_{l,m} a) K_l(\gamma_{l,m} a) \text{sen}^2 \psi + \left[\left(\frac{l\beta_{l,m} a}{\gamma_{l,m} a} \right)^2 I_l(\gamma_{l,m} a) K_l(\gamma_{l,m} a) + I_l'(\gamma_{l,m} a) K_l'(\gamma_{l,m} a) \right] \cos^2 \psi, \text{ e} \quad (1.5.4.10)$$

$$- l\beta_{l,m} a I_l(\gamma_{l,m} a) K_l(\gamma_{l,m} a) \text{sen}(2\psi)$$

$$J_{||l,0} = J_0 \frac{\delta \text{sen}(l\pi\delta/p)}{p \quad l\pi\delta/p}. \quad (1.5.4.11)$$

Na Figura 1.5.4, é apresentada a solução da equação de dispersão para um caso particular, onde as linhas sólidas e seccionadas têm o mesmo significado de antes. A solução para a hélice de fita simples também é mostrada para comparação. Nota-se que a hélice dupla apresenta maior velocidade de fase em relação à hélice simples, para um dado valor de $k_0 a$, além de maior dispersão, isto é, a velocidade de fase varia mais rapidamente. Em geral, a hélice de fita simples apresenta menor dispersão e maior largura de banda do que aquela de fita dupla contraposta.

Chodorow e Chu mostraram que, na faixa adequada de velocidades de fase e da razão circunferência por comprimento de onda, a impedância de interação associada ao modo fundamental na hélice dupla é, aproximadamente, o dobro daquela para a hélice simples, e a impedância de interação dos harmônicos é reduzida por um fator de 5 a 10. Este resultado é uma notável característica da hélice dupla em relação à hélice simples para TWT de alta potência. As medidas

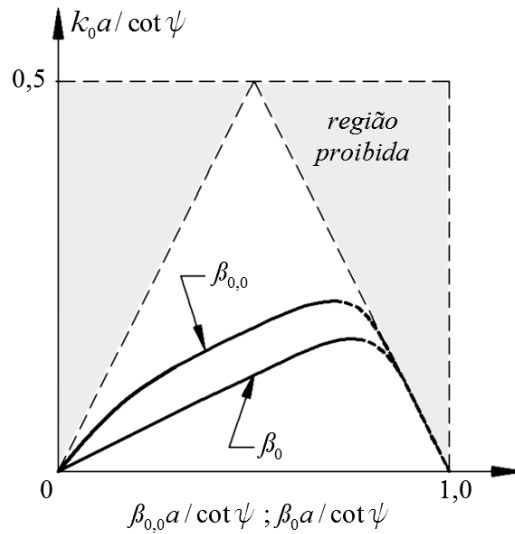


Figura 1.5.4 – Solução da equação de dispersão para a hélice de fita dupla e de fita simples com os mesmos parâmetros geométricos.

realizadas em hélices duplas mostraram muita consistência com a teoria, particularmente os casos de hélice com fitas finas que se tocam ou fitas largas isoladas, para os quais a teoria melhor se adequa.

Birdsall e Everhart reportaram em seu trabalho os resultados de extensivas medidas para determinar a velocidade de fase na estrutura ring-bar, mostrada na Figura 1.4.1(b). Embora as características de propagação sejam relacionadas àquelas da hélice dupla convencional, elas variam consideravelmente em certos pontos. Em geral, a estrutura ring-bar apresenta maior dispersão e maior impedância de interação para o modo fundamental. Essa estrutura de ondas lentas apresenta impedância, aproximadamente, duas vezes maior que aquela prevista para a falsa hélice (que já era maior que a impedância da hélice de fita) mesmo sobre a variação de vários parâmetros. O grande problema em modelar a estrutura ring-bar, propriamente, está em encontrar uma forma de expressar a densidade de corrente nas fitas com geometria descontínua. Por isso, o que se tem feito é utilizar o modelo da hélice dupla contraposta para prever suas características de dispersão e impedância de interação, administrando uma margem de erro. Um estudo desse tipo foi realizado por Cain e Grow e reportado em [19]. Nesse trabalho eles utilizaram o modelo da hélice dupla contraposta para prever as características de dispersão para estruturas ring-bar e verificaram os efeitos do carregamento da estrutura com uma guia metálica e suportes dielétricos. Alguns de seus resultados são reproduzidos neste trabalho.

1.5.5 Carregamento da Hélice com guias circulares metálicas e Suportes dielétricos

Como o circuito de interação deve estar em vácuo, obviamente é necessário um invólucro para a hélice. Este pode ser tanto cerâmico quanto metálico. Estuda-se, neste trabalho, estruturas com invólucro metálico, formando uma guia de onda de secção circular ao redor da hélice e analisa-se sua influência, bem como a influência dos suportes dielétricos utilizados para centrar a hélice no eixo da guia. Uma ilustração da secção transversal deste tipo de estrutura e de seu modelo é vista na Figura 1.5.5.

A presença da guia circular modifica a distribuição espacial dos campos na região exterior à hélice, pois devem satisfazer a uma condição de contorno adicional. Esta nova condição é a nulidade da componente tangencial do campo elétrico e da componente perpendicular (radial) do campo magnético na parede interna da guia. Para tanto os campos axiais devem se expressos como

$$E_z = \sum_l \begin{matrix} A_l I_l(\gamma_{1l}\rho) & \rho \leq a \\ B_l G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) & a \geq \rho \geq b \end{matrix} e^{j(l\varphi - \beta_l z)}, \quad (1.5.5.1)$$

$$H_z = \sum_l \begin{matrix} C_l I_l(\gamma_{1l}\rho) & \rho \leq a \\ D_l G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) & a \geq \rho \geq b \end{matrix} e^{j(l\varphi - \beta_l z)}, \quad (1.5.5.2)$$

onde

$$G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) = I_l(\gamma_{2l}\rho) - \frac{I_l(\gamma_{2l}b)}{K_l(\gamma_{2l}b)} K_l(\gamma_{2l}\rho), \text{ e} \quad (1.5.5.3)$$

$$G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) = I_l(\gamma_{2l}\rho) - \frac{I_l'(\gamma_{2l}b)}{K_l'(\gamma_{2l}b)} K_l(\gamma_{2l}\rho) \quad (1.5.5.4)$$

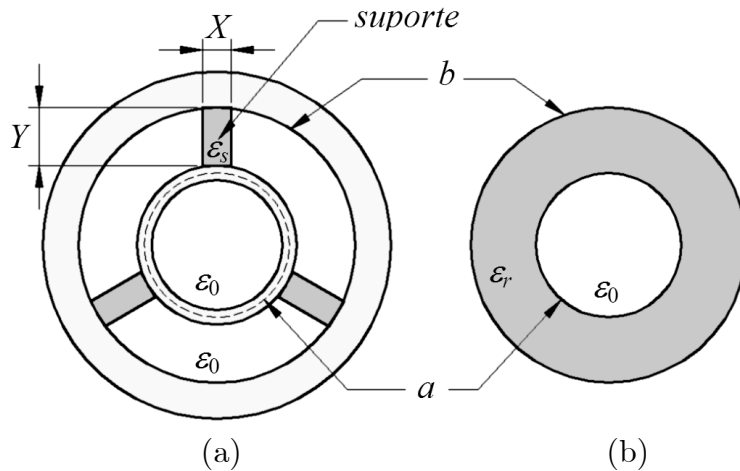


Figura 1.5.5 – Ilustração da secção transversal da estrutura helicoidal carregada com uma guia metálica e 3 suportes dielétricos (a) e seu modelo de 2 regiões com diferentes permissividades (b).

O restante da análise segue de maneira idêntica para cada um dos modelos de hélice já vistos, sendo que os resultados também são os mesmos em caráter qualitativo. O principal efeito do carregamento da hélice com uma guia metálica é a redução da velocidade de fase nas frequências mais baixas e, conseqüentemente, a redução da dispersão. Quanto à impedância de interação, ocorre a diminuição deste parâmetro como efeito do carregamento com uma guia metálica. Quanto mais próximo de 1 for a razão b/a , menor será a impedância de interação do modo fundamental e maior a largura de banda da SWS.

O efeito dos suportes dielétricos é considerado atribuindo à região entre a hélice e a guia, uma permissividade elétrica relativa efetiva, que é resultado de uma relação de áreas para estimar a contribuição da permissividade dos suportes dielétricos. Essa técnica é denominada homogeneização da região. Várias relações de área podem ser encontradas na literatura. Uma expressão bastante simples, mas que fornece bons resultados é apresentada por Basu [20]

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{N(\varepsilon_s - 1)XY}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad (1.5.33)$$

onde X e Y são, respectivamente, a largura e a altura dos suportes dielétricos e N o número de suportes. A diferença das permissividades em cada região resulta em diferentes constantes de propagação radial para cada uma delas, isto é,

$$\gamma_{1l}^2 = \beta_l^2 - k_0^2, \quad 0 \leq \rho \leq a \quad (1.5.34)$$

$$\gamma_{2l}^2 = \beta_l^2 - \varepsilon_2 k_0^2, \quad a \leq \rho \leq b. \quad (1.5.35)$$

Um outro método, neste caso, não homogêneo, para considerar o efeito do dielétrico é acrescentar ao modelo mais uma região. Esta deve ficar entre a hélice e a guia, porém, em contato com a interface referente ao raio externo da hélice. Esta região deve ser também cilíndrica e ter área da secção transversal igual à soma das áreas das secções transversais dos suportes dielétricos, como indica a Figura 1.5.5. A nova região deve ter ainda permissividade igual à do material dos suportes, ou seja, não se utiliza a homogeneização pela relação de áreas como descrito anteriormente, até porque as áreas são iguais.

O ponto chave desta abordagem é saber em que posição radial deve ser colocada esta região para que represente o fenômeno com maior fidelidade. Estudos mostraram que se esta região estiver em contato com a guia circular, o efeito é subestimado. No caso de esta região estar em contato com a superfície cujo raio é igual ao raio médio da hélice real, o efeito é superestimado. Os melhores resultados aparecem quando esta superfície está em contato com a superfície cujo raio é igual ao raio externo da hélice real, como mostrado na

Figura 1.5.5(b). Esta abordagem, portanto, é muito útil quando se considera a espessura da hélice.

Os principais efeitos do carregamento da região exterior à hélice com dielétricos são a diminuição da velocidade de fase e da impedância de interação em relação ao caso sem carregamento. Isto se deve ao aumento de energia elétrica armazenada na região exterior à hélice devido ao dielétrico.

1.6 Objetivo do Trabalho

O objetivo do trabalho é, portanto, desenvolver uma plataforma composta de um modelo matemático e um aparato de medida que possibilite projetar estruturas de ondas lentas com as características de dispersão e impedância desejadas, além de verificar, por meio de medidas, se essas características foram alcançadas.

O modelo matemático desenvolvido deve ser baseado no modelo da hélice dupla contraposta, considerando o carregamento com uma guia metálica de seção circular e o efeito dos suportes dielétricos utilizando a técnica de homogeneização. O modelo deve fornecer expressões que possibilitem obter a velocidade de fase e a impedância de interação em função da variação dos principais parâmetros de construção da SWS e da frequência.

Paralelamente, deve-se construir um aparato de medida em microondas para a realização das medidas de velocidade de fase e impedância de interação, de modo a validar o modelo desenvolvido por meio da caracterização das estruturas de ondas lentas.

Como resultado deste trabalho, apresentar-se-á um estudo teórico das características de dispersão e impedância de interação de uma determinada estrutura de ondas lentas, sob a variação de vários parâmetros. Apresentar-se-ão, também, as medidas de velocidade de fase e impedância de interação em função da frequência, comparando-as com os valores calculados teoricamente e criticando o modelo a luz dos resultados.

1.7 Principais Conceitos e Organização do Texto

Esta última seção tem o objetivo de relembrar o leitor, de forma resumida, os principais conceitos vistos neste capítulo de introdução, de forma a prepará-lo para a exposição do capítulo seguinte. Os conceitos fundamentais abordados neste capítulo introdutório foram:

Estrutura de ondas lentas: É a estrutura de guiagem eletromagnética responsável por sincronizar um modo de propagação com o feixe eletrônico e promover a distribuição de campo em que a transferência de energia do feixe para a onda ocorra de forma eficiente. Este tipo de estrutura de guiagem tem essa propriedade porque impõe condições de contorno sobre o campo eletromagnético que o obrigam a percorrer, entre dois pontos na direção de propagação, um caminho maior do que aquele na ausência de tal estrutura.

Sincronismo: É a condição em que a velocidade de fase da onda que se propaga pela estrutura de ondas lentas é próxima da velocidade do feixe eletrônico. Nesta condição a onda é capaz de receber energia do feixe de elétrons. Porém, a condição de sincronismo não garante que a transferência de energia seja eficiente.

Impedância de interação: É uma grandeza, cuja unidade é o ohm, que expressa a eficiência da estrutura de ondas lentas em promover a distribuição de campo em que a transferência de energia do feixe eletrônico para a onda ocorre de maneira mais eficiente. Resumidamente, quanto maior for a impedância de interação da SWS, a distribuição dos campos se dará de forma que a transferência de energia do feixe para a onda (naquela frequência) será mais eficiente. A raiz cúbica da impedância de interação é proporcional ao ganho da TWT, conforme a definição de ganho de Pierce [3].

Estrutura de ondas lentas helicoidal: É um tipo de estrutura de ondas lentas, dentre os vários tipos existentes, que tem características muito interessantes para a construção de válvulas amplificadoras de baixa e média potência para telecomunicações. Elas apresentam a maior largura de banda em comparação com os outros tipos e impedância de interação bastante satisfatória para o modo fundamental sobre esta banda.

Modelo da falsa hélice: É um modelo matemático para a estrutura de ondas lentas helicoidal bastante simples, mas que produz informações consistentes e úteis para uma abordagem preliminar. Nesse modelo, a hélice é considerada como um tubo cilíndrico com espessura infinitesimal e condutividade infinita na direção do ângulo de passo da hélice real.

Modelo da hélice de fita simples: É um modelo matemático para a estrutura de ondas lentas helicoidal que considera a periodicidade axial da hélice e, conseqüentemente, o efeito dos harmônicos espaciais.

Modelo da hélice de fita dupla contraposta: É um modelo para a estrutura helicoidal utilizada em válvulas de alta potência. A principal diferença entre este modelo é o da hélice de fita simples está na consideração do modo simétrico de propagação, no qual ocorre a supressão dos harmônicos ímpares devido às implicações da simetria da estrutura de ondas lentas.

Organização do Texto

O texto está organizado, basicamente, em 4 capítulos mais apêndices. Este primeiro é um capítulo de introdução. Portanto, foi exposto o problema e a forma como ele será tratado, no decorrer do texto. Por conta disso, foi apresentado um resumo da teoria sobre o assunto, de forma a familiarizar o leitor com o método de tratamento do problema.

No capítulo 2, descreve-se o desenvolvimento do modelo matemático para a estrutura de ondas lentas. Apresenta-se, ao final do capítulo, as predições teóricas sobre o comportamento eletromagnético de uma estrutura de ondas lentas específica utilizando o modelo construído. Com isto, procura-se reproduzir resultados conhecidos e passíveis de comparação com medidas.

No capítulo 3, descreve-se o desenvolvimento de um aparato experimental para a realização das medidas de velocidade de fase e impedância de interação. Descreve-se, também, a teoria que fundamenta essas medidas. Apresentam-se os resultados das medidas realizadas em uma determinada estrutura construída para teste, comparando-os com as predições teóricas.

No capítulo 4, apresenta-se a conclusão do trabalho, que contém uma discussão comparativa dos resultados teóricos e experimentais. Critica-se o modelo matemático à luz dos resultados experimentais e expõem-se algumas possíveis melhorias no modelo.

Na parte final do texto, apresentam-se as referências bibliográficas e os apêndices, que são de consulta optativa para o acompanhamento do texto.

Capítulo 2

Modelo Matemático

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta um formalismo matemático para a descrição do fenômeno de propagação de ondas lentas em uma estrutura helicoidal dupla infinita. O objetivo é obter expressões que possibilitem prever as curvas de dispersão e da impedância de interação para esse tipo de estrutura de ondas lentas. Os cálculos considerados mais como exercícios algébricos que argumentações físicas foram colocadas em apêndices, de forma a facilitar a fluência do texto. O restante deste capítulo está subdividido nas seguintes seções:

2.2 – Obtenção de expressões para as componentes de campo, em que se discute o desenvolvimento das Equações de Maxwell em geometria cilíndrica, de forma a obter uma equação de onda, bem como uma solução adequada para a mesma, de acordo com as necessidades do problema;

2.3 – Modelamento da estrutura de ondas lentas, em que se discute a particularização das expressões para as componentes de campo, obtidas na seção anterior, para a estrutura de ondas lentas segundo as condições de contorno de uma geometria simplificada;

2.4 – Condições de contorno na superfície da hélice, em que se discutem as condições de contorno na superfície da hélice. Utiliza-se o modelo da hélice dupla contraposta e obtém-se as expressões para os coeficientes de amplitude de campo;

2.5 – Estudo das propriedades de simetria, em que se discutem as propriedades de simetria inerentes à estrutura, bem como sua implicação em cada objeto matemático que compõe o modelo em desenvolvido;

2.6 – Considerações sobre as correntes, em que se discute a maneira como são tratadas as correntes induzidas na superfície da hélice pelo campo magnético;

2.7 – A equação de dispersão, em que se discute a forma de obtenção da mesma. O método utilizado se baseia em uma técnica variacional, utilizando uma expressão derivada de uma lagrangeana para o campo eletromagnético;

2.8 – A impedância de interação, em que se discute o método de obtenção de uma expressão para a impedância de interação da hélice dupla;

2.9 – Resultados teóricos e discussão, em que se apresentam os resultados das análises teóricas do comportamento eletromagnético da estrutura. Discutem-se vários aspectos, tais quais as curvas de dispersão e impedância de interação em função dos parâmetros geométricos da estrutura, relação entre os modos fundamental e reverso, etc; e

2.10 – Conclusão, em que se apresenta um sumário das idéias apresentadas neste capítulo e discutem-se os principais resultados obtidos teoricamente.

2.2 Obtenção de Expressões para as Componentes de Campo

As equações de Maxwell, relacionando os campos elétrico e magnético dependentes do tempo, possibilitam descrever os fenômenos de propagação de ondas eletromagnéticas. Embora as ondas eletromagnéticas sejam produzidas pelo movimento de cargas, uma vez iniciada a propagação, elas se tornam independentes da fonte que as produzem, de acordo com o princípio de Huyghens. Portanto, as características de propagação das ondas eletromagnéticas são determinadas a partir das características elétricas dos meios nos quais se propagam.

As equações de Maxwell são equações diferenciais parciais de primeira ordem. Porém, quando combinadas, conduzem a uma equação diferencial de segunda ordem denominada equação de onda, que descreve o fenômeno de propagação. Nesta seção, desenvolve-se a equação de onda para uma geometria cilíndrica livre de perdas, que é a mais apropriada para a estrutura de ondas lentas em estudo.

Partindo das equações de Maxwell em sua forma diferencial e na ausência de fontes e perdas, tem-se a lei de Faraday

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad (2.2.1)$$

a lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad (2.2.2)$$

a lei de Gauss para a eletrostática

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = 0, \quad (2.2.3)$$

e a lei de Gauss do magnetismo

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0. \quad (2.2.4)$$

A partir das relações constitutivas dos meios materiais, tem-se que

$$\mathcal{B} = \mu_r \mu_0 \mathcal{H}, \text{ e} \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}. \quad (2.2.6)$$

Em (2.2.1)-(2.2.6), os símbolos \mathcal{E} e \mathcal{D} denotam os vetores campo elétrico e deslocamento elétrico, respectivamente, em seus valores instantâneos. Da mesma forma, os símbolos \mathcal{H} e \mathcal{B} denotam os vetores campo e densidade de fluxo magnético, respectivamente. O meio material que constitui a região entre a hélice e a guia é caracterizado utilizando sua permissividade elétrica relativa

$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$. As quantidades ε_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. A permissividade elétrica do meio em questão é ε . Todo meio dielétrico será considerado, por hipótese, não dispersivo (ou seja, ε_r não variará com a frequência) e sem perdas.

Considerando o sistema de coordenadas cilíndricas, ρ , φ e z representam as dependências radial, azimutal e axial, respectivamente. Admitindo-se, por hipótese, que a propagação eletromagnética ocorrerá ao longo da direção z positiva, sob uma dependência harmônica do tipo $e^{j\omega t}$, pode-se implicitar a dependência temporal por meio da representação fasorial complexa dos campos, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho, \varphi, z, t) \\ \mathcal{H}(\rho, \varphi, z, t) \end{aligned} = \Re \mathbf{e} \left(\begin{array}{c} \mathbf{E}(\rho, \varphi) \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi) \end{array} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right), \quad (2.2.7)$$

onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular e β é a constante de propagação axial. Os vetores \mathbf{E} e \mathbf{H} são os fasores complexos de \mathcal{E} e \mathcal{H} , respectivamente. Adicionalmente, representar-se-ão as componentes escalares dos mesmos campos por E e H , respectivamente.

Para facilitar o desenvolvimento, escrever-se-ão os campos elétrico e magnético como a soma de suas componentes projetadas nas bases do sistema de coordenadas.

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = E_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_\rho + E_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_\varphi + E_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_z, \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \varphi, z) = H_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_\rho + H_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_\varphi + H_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{a}_z. \quad (2.2.9)$$

Os símbolos \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_φ e \mathbf{a}_z denotam os versores da base do sistema de coordenadas. Substituindo (2.2.8) e (2.2.9) nas Equações de Maxwell (2.2.1)-(2.2.4), obtém-se um conjunto de expressões de campo para cada direção.

Segundo a lei de Faraday (2.2.1), obtém-se

$$\text{na direção } \mathbf{a}_\rho: \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\beta E_\varphi = -j\omega\mu_0 H_\rho, \quad (2.2.10)$$

$$\text{na direção } \mathbf{a}_\varphi: \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + j\beta E_\rho = j\omega\mu_0 H_\varphi, \quad (2.2.11)$$

$$\text{na direção } \mathbf{a}_z: \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = -j\omega\mu_0 H_z. \quad (2.2.12)$$

Realizando o mesmo procedimento para a lei de Ampère-Maxwell (2.2.2), obtém-se

$$\text{na direção } \mathbf{a}_\rho: \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j\beta H_\varphi = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_\rho, \quad (2.2.13)$$

na direção \mathbf{a}_φ : $\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + j\beta H_\rho = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_\varphi$, (2.2.14)

na direção \mathbf{a}_z : $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z$. (2.2.15)

Segundo a lei de Gauss da eletrostática (2.2.3), obtém-se

$$\frac{1}{\rho} E_\rho + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = j\beta E_z. \quad (2.2.16)$$

E, de acordo com a lei de Gauss da magnetostática (2.2.4), obtém-se

$$\frac{1}{\rho} H_\rho + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = j\beta H_z. \quad (2.2.17)$$

Com o objetivo de se chegar à equação de onda, realiza-se o seguinte procedimento algébrico com as expressões já obtidas. Primeiramente, deriva-se (2.2.10) em relação a ρ e divide-se toda a expressão por ρ , cujo resultado é

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + j\beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = -j\omega\mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi}. \quad (2.2.18)$$

Multiplica-se e divide-se (2.2.11) por ρ , deriva-se em relação a ρ e divide-se o resultado por ρ . Isto resulta em

$$\frac{1}{\rho} j\beta E_\rho + j\beta \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} j\omega\mu_0 H_\rho + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho}. \quad (2.2.19)$$

Somando (2.2.18) com (2.2.19) e reordenando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + j\beta \left(\frac{1}{\rho} E_\rho + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \\ = j\omega\mu_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Pode-se observar que os termos entre parênteses em (2.2.20) são dados por (2.2.16) e (2.2.15), respectivamente. Fazendo as devidas substituições, chega-se à equação de onda em coordenadas cilíndricas para a componente E_z do campo incógnita, que é

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + (\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2) E_z = 0. \quad (2.2.21)$$

Em (2.2.21), $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ é o número de onda do espaço livre. A equação dual para H_z é obtida segundo desenvolvimento similar. Pode-se, então, escrever as duas equações de onda em uma notação condensada, isto é,

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + (\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2.22)$$

Uma vez que as componentes de campo E_z e H_z forem determinadas, por meio da solução de (2.2.22), as demais componentes de campo poderão ser obtidas por meio das primeiras. As componentes E_φ e H_ρ são obtidas resolvendo-se o sistema formado por (2.2.10) e (2.2.14), que resulta em

$$E_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{j}{\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - k_0 Z_0 \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) e \quad (2.2.23)$$

$$H_\rho(\rho, \varphi, z) = -\frac{j}{\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2} \left(\frac{\varepsilon_r k_0}{Z_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right). \quad (2.2.24)$$

De maneira similar, as componentes E_ρ e H_φ são obtidas resolvendo-se o sistema de equações constituído por (2.2.11) e (2.2.13), que resulta em

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = \frac{j}{\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + k_0 Z_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) e \quad (2.2.25)$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{j}{\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2} \left(\frac{\varepsilon_r k_0}{Z_0} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right). \quad (2.2.26)$$

No desenvolvimento de (2.2.23)-(2.2.26), utilizaram-se as relações $\omega\mu_0 = k_0 Z_0$ e $\omega\varepsilon_0 = k_0 / Z_0$, onde $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ é a impedância do espaço livre.

Tem-se, agora, um conjunto de expressões de componentes de campo que têm como base o sistema do coordenadas cilíndricas. As equações de Maxwell (2.2.1)-(2.2.6) foram combinadas e escritas nesse sistema de coordenadas, de forma que se obteve uma equação de onda (2.2.22) para a determinação das componentes do campo elétrico e do campo magnético que estão na direção de propagação (E_z e H_z). Uma vez determinadas as componentes E_z e H_z , as demais podem ser obtidas a partir delas utilizando (2.2.23)-(2.2.26).

Uma consideração de fundamental importância deve ser feita sobre o caráter periódico da estrutura de ondas lentas em estudo. Em uma estrutura periódica de propagação, tal qual a SWS, os campos se repetem a cada comprimento de período p percorrido, a menos de uma fase, $e^{-j\xi p}$, por exemplo, onde ξ é uma constante de fase genérica. Decorre disso que o campo num ponto qualquer de um determinado ponto, em um período da estrutura, terá o mesmo valor que no ponto equivalente no período vizinho. Na verdade, terá o mesmo valor que no ponto equivalente de qualquer período de uma estrutura periódica infinita. Conseqüentemente, a dependência axial do campo em tais estruturas pode ser descrita por uma solução da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z_2) &= \mathbf{E}(\rho, \varphi, z_1) \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z_2) &= \mathbf{H}(\rho, \varphi, z_1) e^{-j\xi p}, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} são funções periódicas em z com período p . Assim, por exemplo, tem-se

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z_1 + mp) = \mathbf{E}(\rho, \varphi, z_m), \quad (2.2.28)$$

onde m é um inteiro. A representação do campo de uma estrutura periódica na forma (2.2.28) é uma aplicação do teorema de Floquet [21]. Sabe-se, ainda, que uma função periódica, tal qual $\mathbf{E}(\rho, \varphi, z)$, pode ser representada por uma série de Fourier, obtendo-se

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z)e^{-\xi z} = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho, \varphi) e^{-j\frac{2m\pi}{p}z} e^{-\xi z} \quad (2.2.29)$$

Considere-se que toda somatória não definida explicitamente tem seus índices variando de $-\infty$ a $+\infty$. Para encontrar $\mathbf{E}_m(\rho, \varphi)$, que é o coeficiente da série, multiplica-se (2.2.29) por $e^{j(2m\pi/p)z} e^{\xi z}$ e, integrando o resultado ao longo de um período, obtém-se

$$\mathbf{E}_m(\rho, \varphi) = \frac{1}{p} \int_0^p \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) e^{j\frac{2m\pi}{p}z} dz. \quad (2.2.30)$$

Esta expressão pode ser utilizada para calcular as amplitudes coeficientes dos termos da série. Portanto, o campo em uma estrutura periódica pode, então, ser representado por

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho, \varphi) e^{-j\beta_0 z} e^{-j2m\pi z/p} = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho, \varphi) e^{-j\beta_m z}, \quad (2.2.31)$$

onde

$$\beta_m = \beta_0 + \frac{2m\pi}{p}. \quad (2.2.32)$$

Cada termo de (2.2.31) é denominado harmônico espacial (ou harmônico de Hartree), cuja constante de fase axial β_m se relaciona com a constante de fase axial do harmônico fundamental β_0 por meio de (2.2.32).

Retornando ao problema da equação de onda, verifica-se que resolver (2.2.22) implica em, na verdade, resolver um problema de autovalores do tipo (Operador + autovalor)(f) = 0, onde o autovalor ($= \varepsilon_r k_0^2 - \beta_m^2$) pode ser positivo, nulo ou negativo. A primeira hipótese, $\varepsilon_r k_0^2 - \beta_m^2 > 0$, não interessa a este trabalho, pois implica em ondas rápidas. A segunda hipótese, $\varepsilon_r k_0^2 - \beta_m^2 = 0$, implica no caso estacionário, no qual não há propagação de ondas e, portanto, não interessa. Porém, a terceira hipótese é consistente com o fenômeno de propagação de ondas lentas, pois, se $\varepsilon_r k_0^2 - \beta_m^2 < 0$, tem-se que

$$\beta_m^2 > \varepsilon_r k_0^2 \geq k_0^2. \quad (2.2.33)$$

Visto que $\beta_m = \omega / v_{pm}$ e $k_0 = \omega / c$, optar por um autovalor negativo em (2.2.22) significa admitir a propagação de ondas lentas. Note-se que (2.2.33) deve ser verdadeira para todos os harmônicos. Se for possível encontrar solução para as Equações de Maxwell sob esta hipótese, então é possível a propagação de ondas lentas através da SWS e pode-se determinar suas velocidades de fase.

Como optou-se por um autovalor negativo, convém defini-lo como $-\gamma_m^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta_m^2$, de forma que

$$\gamma_m^2 = \beta_m^2 - \varepsilon_r k_0^2, \quad (2.2.34)$$

onde γ_m é um número real.

Sob a hipótese de propagação de ondas lentas, a equação da onda (2.2.22) passa a ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} - \gamma_m^2 \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2.35)$$

Resta agora encontrar solução para (2.2.35). No desenvolvimento subsequente, Φ denotará tanto E_z quanto H_z , já que ambos são escalares. A equação da onda (2.2.35) assume, então, a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \gamma_m^2 \Phi = 0. \quad (2.2.36)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, pode-se escrever (2.2.36) como o produto de duas outras funções dependentes de uma única variável cada, isto é,

$$\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho)g(\varphi). \quad (2.1.37)$$

Substituindo (2.2.37) em (2.2.36) e realizando as derivadas parciais, obtém-se

$$g \frac{d^2 f}{d\rho^2} + g \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + f \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} - \gamma_m^2 fg = 0. \quad (2.2.38)$$

Dividindo (2.2.38) por fg e multiplicando o resultado por ρ^2 , obtém-se

$$\frac{\rho^2}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} - \rho^2 \gamma_m^2 = 0. \quad (2.2.39)$$

Separando os termos dependentes de ρ e de φ em lados diferentes da igualdade, obtém-se

$$\frac{\rho^2}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f} \frac{df}{d\rho} - \rho^2 \gamma_m^2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2}. \quad (2.2.40)$$

O lado direito de (2.2.40) depende somente da variável ρ , enquanto o lado esquerdo depende somente de φ . Para que a igualdade seja verdadeira, é necessário ambos os lados sejam iguais a uma constante, que é denominada constante de separação. Fazendo uma hipótese adicional que a função incógnita seja invariável por rotações de $\varphi = 2\pi$, o que é perfeitamente consistente com o problema em questão, o lado direito de (2.2.40) deve ser, necessariamente, igual a um número inteiro. Portanto, para o lado direito de (2.2.40), pode-se escrever

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -l^2. \quad (2.2.35)$$

A solução para a equação diferencial ordinária (2.2.35) é da forma

$$g(\varphi) = \sum_l g_l(\varphi) = \sum_l e^{j l \varphi}. \quad (2.2.36)$$

Considerando o lado esquerdo de (2.2.40) também igual a $-l^2$, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \left(\gamma_m^2 + \frac{l^2}{\rho^2} \right) f = 0. \quad (2.2.37)$$

Efetuando a mudança de variáveis $x = \gamma_m \rho$, a expressão (2.2.37) torna-se a equação de Bessel modificada de ordem l , isto é,

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - (x^2 + l^2) f(x) = 0, \quad (2.2.38)$$

cujas soluções são

$$f(x) = \sum_l f_l(x) = \sum_l [A_l I_l(x) + B_l K_l(x)]. \quad (2.2.39)$$

$I_l(x)$ e $K_l(x)$ são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. A_l e B_l são as constantes de amplitude de campo e devem ser determinadas a partir das condições de contorno.

Uma maneira alternativa de proceder a partir de (2.2.37) é fazer a mudança de variável $x = j\gamma_m \rho$. Neste caso, obtém-se a equação de Bessel ordinária de ordem l , porém, com argumento imaginário, cuja solução conduz às funções de Bessel modificadas com argumento real já mencionadas.

A solução geral de (2.2.30) é, então, escrita em termos das funções de base (ou autofunções de problema), isto é,

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{l,m} [A_l I_l(\gamma_m \rho) + B_l K_l(\gamma_m \rho)] e^{j l \varphi}. \quad (2.2.40)$$

Em (2.2.40), γ_m^2 ($= \beta_m^2 - \varepsilon_r k_0^2$) é o m -ésimo autovalor do problema, que é dependente da constante de propagação de fase β_m do m -ésimo harmônico. Em termos das componentes de campo, a solução geral do problema tem a forma

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) \\ H_z(\rho, \varphi, z) \end{aligned} = \sum_{l,m} \left(\begin{array}{c} A_{l,m} \\ C_{l,m} \end{array} I_l(\gamma_m \rho) + \begin{array}{c} B_{l,m} \\ D_{l,m} \end{array} K_l(\gamma_m \rho) \right) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_m z}, \quad (2.2.41)$$

onde $C_{l,m}$ e $D_{l,m}$ são as constantes de amplitude de campo relativas ao campo magnético.

A consideração dos graus de simetria das estruturas de propagação periódicas é muito importante e pode levar a simplificações nas expressões. Como este trabalho trata de estruturas helicoidais, considere-se uma hélice simples infinita, primeiramente.

Verifica-se que uma estrutura helicoidal simples permanece inalterada sob as seguintes transformações

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z + p), \text{ e} \quad (2.2.42)$$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow \left(\rho, \varphi + \frac{2\pi \Delta_z}{p}, z + \Delta_z \right), \quad (2.2.43)$$

onde Δ_z é um incremento na posição axial z .

Na verdade, (2.2.43) é uma generalização de (2.2.42), portanto esta não acrescenta informação, pelo que considerar-se-á apenas a primeira. Suponha-se um campo E_z , por exemplo, em um ponto definido por (ρ, φ_1, z_1) , tal que

$$E_{z,1} = e^{-j\beta_0 z_1} \sum_{l,m} R_{l,m}(\rho) e^{j l \varphi_1} e^{-j(2m\pi/p)z_1}, \quad (2.2.44)$$

onde $R_{l,m}(\rho)$ é a solução de ondas lentas para a dependência radial.

Observe-se, agora, o campo em uma posição z_2 deslocada uma distância Δ_z no eixo z e posição angular $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi \Delta_z / p$. O campo na posição 2 é dado por

$$E_{z,2} = e^{-j\beta_0 z_2} e^{-j\beta_0 \Delta_z} \sum_{l,m} R_{l,m}(\rho) e^{j l \varphi_1} e^{-j 2m\pi z_1 / p} e^{j 2(l-m)\pi \Delta_z / p}. \quad (2.2.45)$$

Note-se que, para que o teorema de Floquet seja válido, é necessário que $l = m$. Desta forma, o campo na posição 2 é igual ao campo na posição 1, a menos de uma fase $e^{-j\beta_0 \Delta_z}$. Conclui-se que, para os campos de uma hélice simples, é necessário apenas um somatório simples. A solução para os campos que se propagam através de uma hélice simples é, então, expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) \\ H_z(\rho, \varphi, z) \end{aligned} = \sum_l \left(\begin{array}{c} A_l \\ C_l \end{array} I_l(\gamma_l \rho) + \begin{array}{c} B_l \\ D_l \end{array} K_l(\gamma_l \rho) \right) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_l z}. \quad (2.2.46)$$

Esta demonstração é apenas uma prova matemática de algo que se poderia admitir fisicamente, visto que, segundo (2.2.43), a propriedade de simetria não

existe se as coordenadas azimutal e axial forem independentes. Em outras palavras, se houver um deslocamento $n\Delta_z$ no eixo z , existirá somente um deslocamento azimutal que satisfará a simetria, que é dado por $2\pi n\Delta_z/p$. Logo, é esperado que os índices dessas dependências devam ser os mesmos.

Considere-se, agora, a hélice dupla contraposta. Analisando suas propriedades de simetria pode-se verificar que ela é invariante sob as seguintes transformações

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \varphi, -z), \quad (2.2.47)$$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, -\varphi, z), \quad (2.2.48)$$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z + p), \quad (2.2.49)$$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow \left(\rho, \varphi \pm \pi, z + \frac{p}{2} \right). \quad (2.2.50)$$

As transformações (2.2.47) e (2.2.48) convertem a hélice envolta para a direita naquela envolta para a esquerda e vice-versa, mas não alteram a estrutura como um todo. A transformação (2.2.49) é comum a todas as estruturas periódicas em z . A transformação (2.2.50) é uma característica particular da hélice dupla contraposta. Verifica-se que não é para qualquer deslocamento no eixo z que se pode satisfazer a propriedade de simetria, mas apenas para $\Delta_z = p/2$, considerando (2.2.43). Nesta condição, somente um deslocamento azimutal de $\varphi = \pm\pi$ satisfaz a simetria. Em virtude deste tipo de simetria, as componentes de campo para a hélice dupla devem ser expressas como uma soma duplamente infinita, diferentemente do caso da hélice simples. Desta forma, as componentes axiais do campo eletromagnéticos são escritas da seguinte forma.

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) \\ H_z(\rho, \varphi, z) \end{aligned} = \sum_{l,m} \left(\begin{array}{c} A_{l,m} \\ C_{l,m} \end{array} I_l(\gamma_{l,m}\rho) + \begin{array}{c} B_{l,m} \\ D_{l,m} \end{array} K_l(\gamma_{l,m}\rho) \right) e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}, \quad (2.2.51)$$

onde

$$\beta_{l,m} = \beta_{0,0} + (l + 2m) \frac{2\pi}{p}. \quad (2.2.52)$$

As demais componentes de campo, são obtidas substituindo (2.2.51) em (2.2.23)-(2.2.26), o que resulta em

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left\{ \frac{j\beta_{l,m}}{\gamma_{l,m}} [A_{l,m} I_l'(\gamma_{l,m}\rho) + B_{l,m} K_l'(\gamma_{l,m}\rho)] \right. \\ \left. - \frac{lk_0 Z_0}{\gamma_{l,m}^2} \frac{1}{\rho} [C_{l,m} I_l(\gamma_{l,m}\rho) + D_{l,m} K_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right\} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}, \quad (2.2.53) \end{aligned}$$

$$E_\varphi(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left\{ -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{l,m}^2} \frac{1}{\rho} [A_{l,m}I_l(\gamma_{l,m}\rho) + B_{l,m}K_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right. \\ \left. - \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{l,m}} [C_{l,m}I'_l(\gamma_{l,m}\rho) + D_{l,m}K'_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right\} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}, \quad (2.2.54)$$

$$H_\rho(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left\{ \frac{l\varepsilon_r k_0}{\gamma_{l,m}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} [A_{l,m}I_l(\gamma_{l,m}\rho) + B_{l,m}K_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right. \\ \left. + \frac{j\beta_{l,m}}{\gamma_{l,m}} [C_{l,m}I'_l(\gamma_{l,m}\rho) + D_{l,m}K'_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right\} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}, \quad (2.2.55)$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left\{ \frac{j\varepsilon_r k_0}{\gamma_{l,m} Z_0} [A_{l,m}I'_l(\gamma_{l,m}\rho) + B_{l,m}K'_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right. \\ \left. - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{l,m}^2} \frac{1}{\rho} [C_{l,m}I_l(\gamma_{l,m}\rho) + D_{l,m}K_l(\gamma_{l,m}\rho)] \right\} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.1.56)$$

Obteve-se, então, um conjunto de equações para as componentes de campo, que são capazes de descrever o fenômeno de ondas lentas, caso existam, para uma estrutura com geometria cilíndrica. Isto foi feito admitindo a hipótese de haver a propagação de ondas lentas (2.2.27). A partir dessa hipótese, foi escolhido o autovalor apropriado (2.2.28) para a hipótese de ondas lentas. O problema de autovalores em questão foi conduzido de forma que resultou na equação de Bessel modificada, que tem solução conhecida. A partir dessa solução, as expressões para as componentes de campo puderam ser reformuladas, passando a descrever o fenômeno de propagação de ondas lentas em uma estrutura de geometria cilíndrica. Adicionalmente, discutiu-se uma justificativa matemática para o fato das expressões de campo para hélices simples apresentarem somatório simples, enquanto a hélice dupla necessita de somatório duplo.

2.3 Modelamento da Estrutura de Ondas Lentas

O modelo simplificado da estrutura de ondas lentas é composto de duas regiões, como ilustrado na Figura 2.3.1. A região 1 é definida por $\rho \leq a$ e é caracterizada pela sua permissividade elétrica, que é igual à do vácuo. A região 2 é definida por $a \leq \rho \leq b$ e tem uma permissividade elétrica relativa efetiva igual a ε_2 . Essa permissividade relativa efetiva é calculada por uma relação das áreas das secções transversais dos suportes dielétricos e da região 2. Algumas formas para obter este parâmetro são discutidas em [20], mas, para a presente análise, será suficiente atribuir um valor de permissividade relativa ε_2 para a região 2. Posteriormente, na seção de resultados, discutir-se-á uma forma de obter este parâmetros a partir da permissividade real dos suportes de sua geometria.

As expressões das componentes de campo obtidas na seção 2.2 são gerais para uma estrutura cilíndrica que sustenta a propagação de ondas lentas. Contudo, o modelo construído possui duas regiões com condições de contorno diferentes, o que implicará em uma distinção nas componentes de campo de cada região, que terão diferentes constantes de fase radiais. Portanto, as expressões e seus elementos relativos à região 1 terão um índice 1, enquanto identificar-se-á os elementos relativos à região 2 pelo índice 2.

A condição de campo finito em $\rho = 0$ impõe para as expressões de campo da região 1 que $B_{1l,m} = 0$ e $D_{1l,m} = 0$. Isto se deve ao fato da função K_l tender ao infinito na origem. Isto é uma solução matemática, mas não física e, por isso, esses termos são descartados nas expressões de campo relativas à região 1 pela

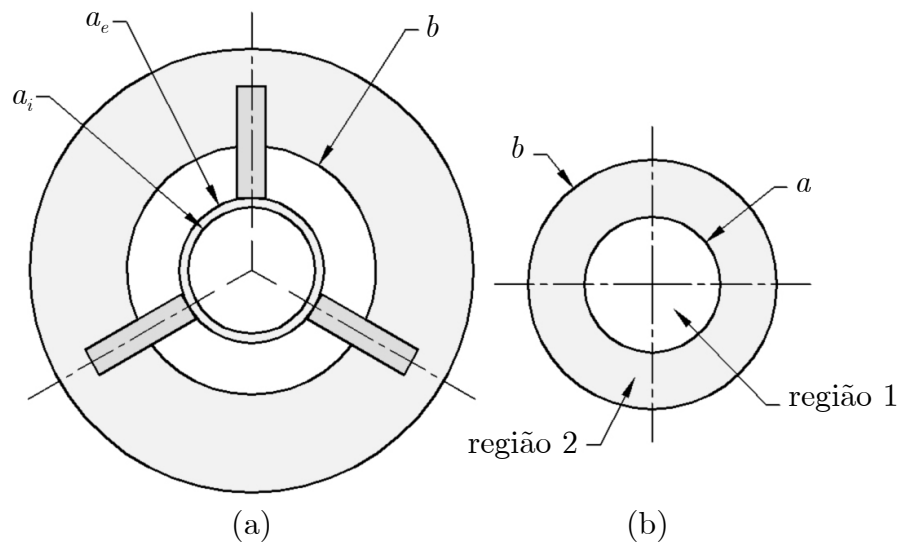


Figura 2.2.1 – Ilustração da secção transversal da estrutura de ondas lentas real (a) em comparação com o modelo simplificado de duas regiões (b). a_i e a_e são os raios interno e externo da hélice, respectivamente, e b é o raio interno da guia. O raio médio da hélice é $a = (a_i + a_e)/2$.

anulação de $B_{1l,m}$ e $D_{1l,m}$.

As condições de contorno de campo elétrico tangencial e campo magnético normal nulos na parede interna da guia circular impõe às expressões de campo da região 2 que $B_{2l,m} = -A_{2l,m}I_l(\gamma_{2l,m}b)/K_l(\gamma_{2l,m}b)$ e $D_{2l,m} = -C_{2l,m}I'_l(\gamma_{2l,m}b)/K'_l(\gamma_{2l,m}b)$. Tendo em vista estas condições de contorno, pode-se particularizar as expressões das componentes de campo (2.2.51)-(2.2.56) para cada região, como segue.

Para a região 1:

$$E_{1z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.1)$$

$$E_{1\rho}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{j \beta_{1,m}}{\gamma_{1l,m}} A_{1l,m} I'_l(\gamma_{1l,m} \rho) - \frac{l k_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.2)$$

$$E_{1\varphi}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[-\frac{l \beta_{1,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) - \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}} C_{1l,m} I'_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.3)$$

$$H_{1z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.4)$$

$$H_{1\rho}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{l k_0}{\gamma_{1l,m}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) + \frac{j \beta_{1,m}}{\gamma_{1l,m}} C_{1l,m} I'_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.5)$$

$$H_{1\varphi}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{j k_0}{\gamma_{1l,m} Z_0} A_{1l,m} I'_l(\gamma_{1l,m} \rho) - \frac{l \beta_{1,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}. \quad (2.3.6)$$

Para a região 2:

$$E_{2z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.7)$$

$$E_{2\rho}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{j \beta_{1,m}}{\gamma_{2l,m}} A_{2l,m} G_{3l}(\gamma_{2l,m} \rho) - \frac{l k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.8)$$

$$E_{2\varphi}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[-\frac{l \beta_{1,m}}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) - \frac{l k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} C_{2l,m} G_{4l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.9)$$

$$H_{2z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.10)$$

$$H_{2\rho}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{l \varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) + \frac{j \beta_{1,m}}{\gamma_{2l,m}} C_{2l,m} G_{4l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.11)$$

$$H_{2\varphi}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \left[\frac{j \varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m} Z_0} A_{2l,m} G_{3l}(\gamma_{2l,m} \rho) - \frac{l \beta_{1,m}}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] e^{j l \varphi} e^{-j \beta_{1,m} z}, \quad (2.3.12)$$

onde

$$G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) = I_l(\gamma_{2l,m} \rho) - \frac{I_l(\gamma_{2l,m} b)}{K_l(\gamma_{2l,m} b)} K_l(\gamma_{2l,m} \rho), \quad (2.3.13)$$

$$G_{2l}(\gamma_{2l,m}\rho) = I_l(\gamma_{2l,m}\rho) - \frac{I_l'(\gamma_{2l,m}b)}{K_l'(\gamma_{2l,m}b)} K_l(\gamma_{2l,m}\rho), \quad (2.3.14)$$

$$G_{3l}(\gamma_{2l,m}\rho) = I_l'(\gamma_{2l,m}\rho) - \frac{I_l(\gamma_{2l,m}b)}{K_l(\gamma_{2l,m}b)} K_l'(\gamma_{2l,m}\rho), \quad (2.3.15)$$

$$G_{4l}(\gamma_{2l,m}\rho) = I_l'(\gamma_{2l,m}\rho) - \frac{I_l'(\gamma_{2l,m}b)}{K_l'(\gamma_{2l,m}b)} K_l'(\gamma_{2l,m}\rho), \quad (2.3.16)$$

e

$$\gamma_{1l,m} = \sqrt{\beta_{l,m}^2 - k_0^2} \quad e \quad (2.3.17)$$

$$\gamma_{2l,m} = \sqrt{\beta_{l,m}^2 - \varepsilon_2 k_0^2}. \quad (2.3.18)$$

As funções $G_{il}(\gamma_{2l,m}\rho)$ são combinações das funções de Bessel modificadas e foram introduzidas para simplificar a notação dos campos na região 2.

Com isso, as expressões de campo gerais apresentadas da seção 2.2 foram particularizadas para o modelo proposto para a estrutura de ondas lentas. O modelo possui duas regiões cilíndricas concêntricas em que a interface representa a superfície da hélice. Os suportes que sustentam a hélice no centro axial da guia não são modelados fisicamente, mas seu efeito é contabilizado na permissividade efetiva da região externa à hélice, ou seja, região 2.

2.4 Condições de Contorno na Superfície da Hélice

As condições de contorno em $\rho = a$ descrevem o comportamento dos campos na superfície da hélice. Elas fazem, propriamente, o modelamento físico-matemático da estrutura de ondas lentas. Cabe ressaltar que, até este ponto, nada indica, matematicamente, que se tenha uma estrutura helicoidal como dispositivo de propagação de ondas lentas. Apesar de todo o desenvolvimento seguir de forma que seja adequado para uma estrutura helicoidal, tudo que se tem, matematicamente, é uma estrutura de ondas lentas cilíndrica e periódica. Embora as propriedades de simetria da hélice dupla tenham sido levadas em conta, elas apenas serviram para a escolha do tipo mais adequado de solução a procurar. O que vai dizer que tipo de estrutura de onda lentas é utilizada são as condições de contorno na interface das regiões 1 e 2. Nesta análise, o objetivo é modelar matematicamente a estrutura ring-bar por meio das condições de contorno referentes à estrutura que lhe deu origem, a hélice dupla contraposta.

As condições de contorno em $\rho = a$ para a hélice dupla contraposta são:

1 – A componente tangencial do campo elétrico deve ser contínua em toda a superfície $\rho = a$;

2 – A componente tangencial do campo elétrico deve ser contínua e nula sobre as fitas da hélice, isto é,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\text{fitas}) = \mathbf{0}. \quad (2.4.1)$$

3 – A componente tangencial do campo magnético é contínua em $\rho = a$, onde não há fitas. Sob as fitas, a sua descontinuidade é igual à densidade de corrente induzida, ou seja,

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}(\text{fitas}) = \mathbf{J}. \quad (2.4.2)$$

Escrevendo (2.4.1) em termos das componentes tangenciais do campo elétrico na interface das duas regiões, isto é, $E_{1z}(\rho = a)$, $E_{2z}(\rho = a)$, $E_{1\varphi}(\rho = a)$ e $E_{2\varphi}(\rho = a)$, tem-se as seguintes equações.

$$A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} a) - A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) = 0 \quad \text{e} \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} a) - \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}} C_{1l,m} I_l'(\gamma_{1l,m} a) \\ + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} C_{2l,m} G_{4l}(\gamma_{2l,m} a) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Escrevendo (2.4.2) em termos das componentes tangenciais do campo magnético na interface das duas regiões, tem-se

$$H_{1z}(\rho = a) - H_{z2}(\rho = a) = J_\varphi \quad \text{e} \quad (2.4.5)$$

$$H_{2\varphi}(\rho = a) - H_{1\varphi}(\rho = a) = J_z, \quad (2.4.6)$$

onde J_φ e J_z são as componentes azimutal e axial, respectivamente, do vetor densidade de corrente. Substituindo as expressões das componentes de campo em (2.4.5) e (2.4.6), obtém-se

$$C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} a) - C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} a) = J_{\varphi l,m} \quad \text{e} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{jk_0}{\gamma_{1l,m} Z_0} A_{1l,m} I'_l(\gamma_{1l,m} a) + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} a) \\ + \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m} Z_0} A_{2l,m} G_{3l}(\gamma_{2l,m} a) - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} a) = J_{zl,m} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Expressando o sistema linear formado por (2.4.3), (2.4.4), (2.4.7) e (2.4.8) na forma matricial $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_l(\gamma_{1l,m} a) & 0 & -G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) & 0 \\ -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} I_l(\gamma_{1l,m} a) & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}} I'_l(\gamma_{1l,m} a) & \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} G_{4l}(\gamma_{2l,m} a) \\ 0 & I_l(\gamma_{1l,m} a) & 0 & -G_{2l}(\gamma_{2l,m} a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_{1l,m} Z_0} I'_l(\gamma_{1l,m} a) & \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} I_l(\gamma_{1l,m} a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m} Z_0} G_{3l}(\gamma_{2l,m} a) & -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} G_{2l}(\gamma_{2l,m} a) \end{bmatrix}, \quad (2.4.9)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} A_{1l,m} & C_{1l,m} & A_{2l,m} & C_{2l,m} \end{bmatrix}^T, \quad \text{e} \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{\varphi l,m} & J_{zl,m} \end{bmatrix}^T. \quad (2.4.11)$$

Pode-se obter o vetor incógnita, \mathbf{x} , por meio de métodos usuais para solução de sistemas lineares. No apêndice A1, é apresentada a obtenção do determinante $\Delta_{l,m}$ de (2.4.9), que é dado por

$$\begin{aligned} \Delta_{l,m} = I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a) \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} F_{1l,m} F_{2l,m} \right. \\ \left. + l^2 \frac{\beta_{l,m}^2}{\gamma_{1l,m}^4 a^2} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

onde

$$F_{1l,m} = 1 - \frac{\gamma_{2l,m}}{\gamma_{1l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}, \quad \text{e} \quad (2.4.13)$$

$$F_{2l,m} = 1 - \varepsilon_2 \frac{\gamma_{1l,m}}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{I'_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{3l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{1l}(\gamma_{2l,m} a)}. \quad (2.4.14)$$

são funções auxiliares que foram definidas para simplificar a notação, visto que se repetem durante o desenvolvimento subsequente. Define-se ainda, em (A2.5), uma terceira função auxiliar, dada por

$$F_{3l,m} = 1 - \frac{\gamma_{1l,m}}{\gamma_{2l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m}a)}{I_l(\gamma_{1l,m}a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m}a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}. \quad (2.4.15)$$

Resolvendo o sistema linear para os coeficientes de amplitude de campo (apêndices A2, A3, A4 e A5, respectivamente), tem-se

$$A_{1l,m} = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a) G_{1l}(\gamma_{2l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} \left(F_{1l,m} J_{z,l,m} - F_{3l,m} \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} J_{\varphi,l,m} \right), \quad (2.4.16)$$

$$C_{1l,m} = \frac{I'_l(\gamma_{1l,m}a) G_{1l}(\gamma_{2l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} \left[J_{\varphi,l,m} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a)}{I'_l(\gamma_{1l,m}a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m}a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)} \left(J_{z,l,m} - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2} J_{\varphi,l,m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right], \quad (2.4.17)$$

$$A_{2l,m} = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} \left(J_{z,l,m} F_{1l,m} - J_{\varphi T} \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} F_{3l,m} \right), \text{ e} \quad (2.4.18)$$

$$C_{2l,m} = \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a) I'_l(\gamma_{1l,m}a) G_{1l}(\gamma_{2l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{G_{2l}(\gamma_{2l,m}a) \Delta_{l,m}} \left[J_{\varphi,l,m} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a)}{I'_l(\gamma_{1l,m}a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m}a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)} \left(J_{z,l,m} - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2} J_{\varphi,l,m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right] - \frac{J_{\varphi,l,m}}{G_{2l}(\gamma_{2l,m}a)}. \quad (2.4.19)$$

Então, obtiveram-se, por meio da aplicação das condições de contorno na superfície da estrutura de ondas lentas, as expressões para os coeficientes de amplitude de campo. Com isso, as expressões das componentes de campo estão bem definidas, a menos das densidades de corrente, que serão discutidas posteriormente. Isto porque, antes de analisar as correntes, um estudo das propriedades de simetria da estrutura de ondas lentas em questão é de grande importância.

2.5 Propriedades de Simetria

O teorema de Floquet, expresso por (2.3.19) e utilizado para relacionar as constantes de propagação do modo fundamental e dos harmônicos, implica em uma série de propriedades de simetria para os objetos matemáticos constituintes do modelo. As propriedades de simetria são importantes porque são elas que garantem a propagação pelo modo simétrico. A propriedade de simetria fundamental é que a constante de propagação axial é uma função par em relação à troca do sinal do índice ordinal, isto é,

$$\beta_{l,m} = \beta_{-l,m+l}. \quad (2.5.1)$$

A demonstração é feita substituindo os índices em (2.3.19) da seguinte forma

$$\beta_{-l,m+l} = \beta_{0,0} + [-l + 2(m+l)] \frac{2\pi}{p} = \beta_{0,0} + (l+2m) \frac{2\pi}{p} = \beta_{l,m}. \quad (2.5.2)$$

A primeira implicação deste fato é que as constantes de propagação radial também apresentam a propriedade de simetria, ou seja,

$$\gamma_{1(-l,m+l)}^2 = \beta_{(-l,m+l)}^2 - k_0^2 = \beta_{l,m}^2 - k_0^2 = \gamma_{1l,m}^2, \quad (2.5.3)$$

$$\gamma_{2(-l,m+l)}^2 = \beta_{(-l,m+l)}^2 - \varepsilon_2 k_0^2 = \beta_{l,m}^2 - \varepsilon_2 k_0^2 = \gamma_{2l,m}^2. \quad (2.5.4)$$

Por outro lado, as funções modificadas de Bessel possuem paridade par em relação à troca dos índices ordinais, isto é,

$$I_{-l}(x) = I_l(x) \text{ e} \quad (2.5.5)$$

$$K_{-l}(x) = K_l(x). \quad (2.5.6)$$

Portanto,

$$I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)}\rho) = I_{-l}(\gamma_{1l,m}\rho) = I_l(\gamma_{1l,m}\rho) \text{ e} \quad (2.5.7)$$

$$K_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)}\rho) = K_{-l}(\gamma_{1l,m}\rho) = K_l(\gamma_{1l,m}\rho). \quad (2.5.8)$$

Para tornar rigorosa esta análise, convém verificar ainda a paridade das derivadas das funções modificadas de Bessel. Isto é feito utilizando (2.5.7) e (2.5.8) em conjunto com as seguintes relações de recorrência

$$I_l'(x) = I_{l-1}(x) - \frac{l}{x} I_l(x) = I_{l+1}(x) + \frac{l}{x} I_l(x), \quad (2.4.9)$$

$$K_l'(x) = -K_{l-1}(x) - \frac{l}{x} K_l(x) = -K_{l+1}(x) + \frac{l}{x} K_l(x). \quad (2.4.10)$$

A verificação revela que as derivadas das funções modificadas de Bessel também possuem simetria par, como é demonstrado a seguir substituindo os índices em (2.5.9) e (2.5.10).

$$\begin{aligned} I'_{-l}(x) &= I_{-l-1}(x) + \frac{l}{x} I_{-l}(x) = I_{-(l+1)}(x) + \frac{l}{x} I_{-l}(x) \\ &= I_{l+1}(x) + \frac{l}{x} I_l(x) = I'_l(x) \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$$\begin{aligned} K'_{-l}(x) &= -K_{-l-1}(x) + \frac{l}{x} K_{-l}(x) = -K_{-(l+1)}(x) + \frac{l}{x} K_{-l}(x) \\ &= -K_{l+1}(x) + \frac{l}{x} K_l(x) = K'_l(x) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Se as funções modificadas de Bessel e suas derivadas têm simetria par em relação à troca do sinal dos índices ordinais, conseqüentemente, as funções auxiliares G_{il} e $F_{il,m}$ também apresentam a mesma simetria, isto é,

$$G_{i(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)}a) = G_{i(-l)}(\gamma_{2l,m}a) = G_{il}(\gamma_{2l,m}a), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.5.13)$$

$$F_{i(-l,m+l)} = F_{il,m}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5.14)$$

o que pode ser verificado da mesma maneira utilizada em (2.5.11) e (2.5.12).

Obviamente, todos os objetos matemáticos dependentes das funções de Bessel, constantes de propagação axial e radial e funções auxiliares apresentam alguma propriedade de simetria. O determinante (2.4.12) possui simetria par, facilmente verificável

$$\begin{aligned} \Delta_{-l,m+l} &= I_{-l}^2(\gamma_{1(-l,m+l)}a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)}a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)}a) \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1(-l,m+l)}\gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I'_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)}a)}{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)}a)} F_{1(-l,m+l)} F_{2(-l,m+l)} \right. \\ &\quad \left. + (-l)^2 \frac{\beta_{(-l,m+l)}^2}{\gamma_{1(-l,m+l)}^4 a^2} \frac{G_{2(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)}a)}{G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)}a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1(-l,m+l)}^2}{\gamma_{2(-l,m+l)}^2} \right)^2 \right] = \Delta_{l,m} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Os coeficientes das amplitudes de campo, obviamente, também apresentam alguma propriedade de simetria. Porém, precisam de uma análise mais cautelosa, pois apresentam, dentro das expressões, termos que multiplicam apenas l . Por isso faz-se a introdução de sub-coeficientes, como se segue. O coeficiente $A_{1l,m}$ é redefinido como

$$A_{1l,m} = j(A_{1l,m}^z J_{z,l,m} + A_{1l,m}^\varphi J_{\varphi,l,m}), \quad (2.5.16)$$

onde os sub-coeficientes são

$$A_{1l,m}^z = \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a) G_{1l}(\gamma_{2l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} F_{1l,m}, \quad (2.5.17)$$

$$A_{1l,m}^\varphi = -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} F_{3l,m}, \quad (2.5.18)$$

Verificando a simetria dos sub-coeficientes $A_{1l,m}^z$ e $A_{1l,m}^\varphi$, tem-se

$$\begin{aligned} A_{1(-l,m+l)}^z &= \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} F_{1(-l,m+l)}, \\ &= A_{1l,m}^z, \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

$$\begin{aligned} A_{1(-l,m+l)}^\varphi &= \frac{l\beta_{-l,m+l}}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 a} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} F_{3(-l,m+l)}, \\ &= -A_{1l,m}^\varphi, \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

Verifica-se, então, simetria ímpar para o sub-coeficiente $A_{1l,m}^\varphi$ e par para $A_{1l,m}^z$. Este resultado será importante mais adiante, mas por enquanto é necessário verificar a simetria dos coeficientes restantes. Fazendo o mesmo tipo de análise para $C_{1l,m}$, tem-se

$$C_{1l,m} = C_{1l,m}^z J_{z,l,m} + C_{1l,m}^\varphi J_{\varphi,l,m}, \quad (2.5.21)$$

onde

$$C_{1l,m}^z = \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right), \quad (2.5.22)$$

$$\begin{aligned} C_{1l,m}^\varphi &= \frac{I_l'(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^2 \beta_{l,m}^2}{\gamma_{1l,m}^2 \gamma_{2l,m}^2 a^2} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a) G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{I_l'(\gamma_{1l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Verificando a simetria de (2.5.22) e (2.5.23), obtém-se

$$\begin{aligned} C_{1(-l,m+l)}^z &= \frac{-l\beta_{(-l,m+l)}}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 a} \frac{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a) G_{2(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} \left(1 - \frac{\gamma_{1(-l,m+l)}^2}{\gamma_{2(-l,m+l)}^2} \right), \\ &= -C_{1l,m}^z, \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

$$\begin{aligned} C_{1(-l,m+l)}^\varphi &= \frac{I_{-l}'(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1(-l,m+l)} \gamma_{2(-l,m+l)}} F_{2(-l,m+l)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-l)^2 \beta_{(-l,m+l)}^2}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 \gamma_{2(-l,m+l)}^2 a^2} \frac{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{2(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{I_{-l}'(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1(-l,m+l)}^2}{\gamma_{2(-l,m+l)}^2} \right) \right] = C_{1l,m}^\varphi. \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Observa-se, então, simetria ímpar para $C_{1l,m}^z$ e simetria par para $C_{1l,m}^\varphi$. Procedendo da mesma forma para o coeficiente $A_{2l,m}$, tem-se

$$A_{2l,m} = j(A_{2l,m}^z J_{z,l,m} + A_{2l,m}^\varphi J_{\varphi,l,m}), \quad (2.5.26)$$

onde

$$A_{2l,m}^z = \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} F_{1l,m}, \text{ e} \quad (2.5.27)$$

$$A_{2l,m}^\varphi = -\frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} F_{3l,m}. \quad (2.5.28)$$

Verificando a simetria de (2.5.27) e (2.5.28), obtém-se

$$A_{2(-l,m+l)}^z = \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I_{-l}^2(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} F_{1(-l,m+l)} = A_{2l,m}^z \text{ e} \quad (2.5.29)$$

$$A_{2(-l,m+l)}^\varphi = \frac{l\beta_{(-l,m+l)}}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 a} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I_{-l}^2(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} F_{3(-l,m+l)} = -A_{2l,m}^\varphi. \quad (2.5.30)$$

Observa-se, então, simetria par para $A_{2l,m}^z$ e simetria ímpar para $A_{2l,m}^\varphi$.

Procedendo da mesma forma para o coeficiente $C_{2l,m}$, tem-se

$$C_{2l,m} = C_{2l,m}^z J_{2l,m} + C_{2l,m}^\varphi J_{\varphi l,m}, \quad (2.5.31)$$

onde

$$C_{2l,m}^z = \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \text{ e} \quad (2.5.32)$$

$$C_{2l,m}^\varphi = \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} \frac{I_l'(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)} F_{2l,m} \right. \\ \left. - \frac{l^2 \beta_{l,m}^2}{\gamma_{1l,m}^2 \gamma_{2l,m}^2 a^2} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right] - \frac{1}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}. \quad (2.5.33)$$

Verificando as propriedades de simetria em (2.5.32) e (2.5.33), obtém-se

$$C_{2(-l,m+l)}^z = \frac{-l\beta_{(-l,m+l)}}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 a} \frac{I_{-l}^2(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} \left(1 - \frac{\gamma_{1(-l,m+l)}^2}{\gamma_{2(-l,m+l)}^2} \right) = -C_{2l,m}^z, \quad (2.5.34)$$

$$C_{2(-l,m+l)}^\varphi = \frac{I_{-l}^2(\gamma_{1(-l,m+l)} a) G_{1(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{\Delta_{-l,m+l}} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1(-l,m+l)} \gamma_{2(-l,m+l)}} \frac{I_{-l}'(\gamma_{1(-l,m+l)} a)}{I_{-l}(\gamma_{1(-l,m+l)} a)} \frac{G_{4(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)}{G_{2(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)} \right. \\ \left. F_{2(-l,m+l)} - \frac{(-l)^2 \beta_{(-l,m+l)}^2}{\gamma_{1(-l,m+l)}^2 \gamma_{2(-l,m+l)}^2 a^2} \left(1 - \frac{\gamma_{1(-l,m+l)}^2}{\gamma_{2(-l,m+l)}^2} \right) \right] - \frac{1}{G_{2(-l)}(\gamma_{2(-l,m+l)} a)} = C_{2l,m}^\varphi, \quad (2.5.35)$$

comprovando a simetria ímpar de $C_{2l,m}^z$ e a simetria par de $C_{2l,m}^\varphi$.

Nesta seção, discutiram-se as propriedades de simetria dos elementos matemáticos em relação à troca do sinal do índice ordinal. Essas propriedades garantem o modo simétrico de propagação, que é a principal característica da hélice dupla contraposta.

2.6 Considerações Sobre as Correntes

Um ponto importante desta análise é o fato de se considerar que as hélices, embora tenham o mesmo raio, não se tocam. Isto é feito, considerando que as correntes que fluem em cada fita são independentes uma da outra. Embora as correntes nas fitas realmente interajam na estrutura ring-bar, a perturbação não é suficiente para invalidar a teoria, pelo menos para hélices de fitas finas. Na Figura 2.6.1, é ilustrado o esquema de correntes considerado nesta análise. As densidades de corrente que possuem o índice + são aquelas que fluem na fita que gira em sentido anti-horário conforme z aumenta. O índice - é utilizado para aquelas que fluem na fita de sentido contrário.

Para uma hélice dupla contraposta, dois tipos de modos de propagação são possíveis segundo a paridade dos campos. O modo de propagação que interesse neste trabalho é o modo denominado *simétrico*, no qual os campos TM referentes às duas hélices se somam em fase, de forma a produzir uma intensa componente axial de campo elétrico. Para obter a solução do modo simétrico, deve-se impor que as componentes TM dos campos E_ρ , E_z e H_φ apresentem simetria par, enquanto as componentes TE, isto é, H_ρ , H_z e E_φ , apresentem simetria ímpar.

Utilizando a lei de Ampère-Maxwell, segue que a componente axial da densidade de corrente de condução sobre a superfície da hélice $J_z(\rho=a)$ deve ser par e a componente azimutal $J_\varphi(\rho=a)$ deve ser ímpar em relação à variável

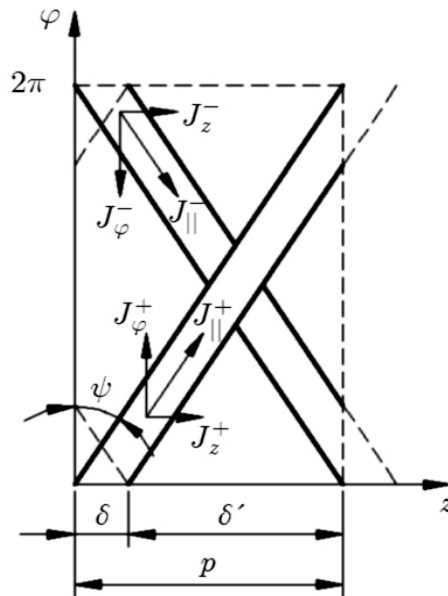


Figura 2.6.1 – Ilustração do esquema de correntes na hélice dupla contraposta. Considerando o eixo z positivo orientado para a direita, as densidades de corrente que fluem na fita têm índice -. As densidades de corrente que fluem na hélice envolta para a direita têm índice +.

azimutal, isto é,

$$J_z^+(\rho = a, \varphi, z) = J_z^-(\rho = a, -\varphi, z), \quad (2.6.1)$$

$$J_\varphi^+(\rho = a, \varphi, z) = -J_\varphi^-(\rho = a, -\varphi, z). \quad (2.6.2)$$

As componentes axial e azimutal podem ser escritas em função das componentes paralela e perpendicular à borda da hélice, como segue.

$$\begin{aligned} J_z^+ \\ J_\varphi^+ \end{aligned} = \begin{aligned} J_\parallel^+ \quad \text{sen} \psi \\ \cos \psi \end{aligned} \pm \begin{aligned} J_\perp^+ \\ \text{sen} \psi \end{aligned}, \quad (2.6.3)$$

$$\begin{aligned} J_z^- \\ -J_\varphi^- \end{aligned} = \begin{aligned} J_\parallel^- \quad \text{sen} \psi \\ \cos \psi \end{aligned} \pm \begin{aligned} J_\perp^- \\ \text{sen} \psi \end{aligned}. \quad (2.6.4)$$

Analisar-se-á, neste trabalho, o caso em que a componente perpendicular da densidade de corrente pode ser desprezada em (2.6.3) e (2.6.4), isto é, $J_\parallel^+ \text{sen} \psi \gg J_\perp^+ \cos \psi$. Isto simplifica bastante a análise e é uma boa aproximação, pelo menos para hélices de fitas finas.

As expressões para as densidades de correntes podem, então, ser desenvolvidas em termos das componentes paralelas, isto é,

$$\begin{aligned} J_z \\ J_\varphi \end{aligned} = \begin{aligned} (J_\parallel^+ + J_\parallel^-) \text{sen} \psi \\ (J_\parallel^+ - J_\parallel^-) \cos \psi \end{aligned}. \quad (2.6.5)$$

Expressando as densidades de correntes paralelas como sua decomposição de Fourier, adequadamente escolhida de forma que tenha a mesma dependência dos campos, a seguinte propriedade pode ser verificada decorrente da propriedade de simetria (2.6.2).

$$\sum_{l,m} J_{\parallel,l,m}^- e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z} = \sum_{-l,m+l} J_{\parallel,(-l,m+l)}^- e^{-jl\varphi} e^{-j\beta_{(-l,m+l)}z} = \sum_{l,m} J_{\parallel,l,m}^+ e^{-jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.6)$$

Isto é apenas uma consequência óbvia do fato de as duas densidades de correntes paralelas às fitas diferirem apenas no sentido da coordenada azimutal.

A expressão para o campo elétrico axial na região 1 (2.3.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$E_{1z} = j \sum_{l,m} [A_{1l,m}^z (J_{zl,m}^+ + J_{zl,m}^-) + A_{1l,m}^\varphi (J_{\varphi l,m}^+ + J_{\varphi l,m}^-)] I_l(\gamma_{1l,m}\rho) e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.7)$$

Aplicando (2.6.5) em (2.6.7) e separando os termos referentes aos dois sentidos das densidades de corrente, obtém-se

$$E_{1z} = j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi - A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^- e^{-jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z} + j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.8)$$

Utilizando a propriedade de simetria expressa em (2.6.6), é possível expressar a densidade de corrente orientada para a esquerda em termos daquela orientada para a direita. Basta aplicar a transformação simétrica $l, m \rightarrow -l, m + l$ no primeiro termo de (2.6.8), isto é,

$$E_{1z} = j \sum_{-l, m+l} (A_{1(-l, m+l)}^z \text{sen} \psi - A_{1(-l, m+l)}^\varphi \cos \psi) I_{-l}(\gamma_{1(-l, m+l)} \rho) J_{|(-l, m+l)}^- e^{-j(-l)\varphi} e^{-j\beta_{-l, m+l}z} + j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.5.9)$$

De acordo com as simetrias dos termos envolvidos em (2.6.9), vistas anteriormente, é possível reescrever E_{1z} como

$$E_{1z} = j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ e^{-jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z} + j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.10)$$

Reordenando algebricamente os termos em (2.6.10), obtém-se

$$E_{1z} = j \sum_{l,m} (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ (e^{jl\varphi} + e^{-jl\varphi}) e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.11)$$

Utilizando a forma de Euler do co-seno, isto é, $\cos(l\varphi) = (e^{jl\varphi} + e^{-jl\varphi})/2$, a expressão final para E_{1z} é dada por

$$E_{1z}(\rho, \varphi, z) = 2j \sum_{l,m} J_{|l,m}^+ (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.12)$$

Aplicando a mesma abordagem no desenvolvimento da expressão de H_{1z} , sob as condições de simetria, tem-se

$$H_{1z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} [C_{1l,m}^z (J_{zl,m}^+ + J_{zl,m}^-) + C_{1l,m}^\varphi (J_{\varphi l,m}^+ + J_{\varphi l,m}^-)] I_l(\gamma_{1l,m} \rho) e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.13)$$

Realizando o procedimento descrito anteriormente, obtém-se a expressão de H_{1z} equivalente à (2.6.11), que é

$$H_{1z} = \sum_{l,m} (C_{1l,m}^z \text{sen} \psi + C_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) J_{|l,m}^+ (e^{jl\varphi} - e^{-jl\varphi}) e^{-j\beta_{l,m}z}. \quad (2.6.14)$$

Utilizando a forma de Euler da função seno, isto é, $\text{sen}(l\varphi) = (e^{jl\varphi} - e^{-jl\varphi})/2j$, a expressão final para H_{1z} é dada por

$$H_{1z} = 2j \sum_{l,m} J_{||l,m}^+ (C_{1l,m}^z \sin \psi + C_{1l,m}^\varphi \cos \psi) I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} . \quad (2.6.15)$$

As demais componentes de campo podem ser obtidas de maneira similar. Porém, para a representação das componentes de campo, é conveniente redefinir os coeficientes de amplitude de campo $A_{1l,m}$, $C_{1l,m}$, $A_{2l,m}$ e $C_{2l,m}$, como se segue.

$$A_{1l,m} = 2j J_{||l,m}^+ (A_{1l,m}^z \text{sen} \psi + A_{1l,m}^\varphi \cos \psi) , \quad (2.6.16)$$

$$C_{1l,m} = 2j J_{||l,m}^+ (C_{1l,m}^z \text{sen} \psi + C_{1l,m}^\varphi \cos \psi) , \quad (2.6.17)$$

$$A_{2l,m} = 2j J_{||l,m}^+ (A_{2l,m}^z \text{sen} \psi + A_{2l,m}^\varphi \cos \psi) , \text{ e} \quad (2.6.18)$$

$$C_{2l,m} = 2j J_{||l,m}^+ (C_{2l,m}^z \text{sen} \psi + C_{2l,m}^\varphi \cos \psi) . \quad (2.6.19)$$

Com estas novas constantes, as expressões de campo para as duas regiões passam a ser escritas da seguinte forma.

$$E_{1z} = \sum_{l,m} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.20)$$

$$H_{1z} = \sum_{l,m} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.21)$$

$$E_{2z} = \sum_{l,m} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.22)$$

$$H_{2z} = \sum_{l,m} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.23)$$

$$E_{1\varphi} = \sum_{l,m} \left[-\frac{j l \beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) - \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}} C_{1l,m} I_l'(\gamma_{1l,m} \rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.24)$$

$$E_{2\varphi} = \sum_{l,m} \left[-\frac{j l \beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) - \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} C_{2l,m} G_{4l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.25)$$

$$E_{1\rho} = \sum_{l,m} \left[\frac{j \beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}} A_{1l,m} I_l'(\gamma_{1l,m} \rho) + \frac{j l k_0 Z_0}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.26)$$

$$E_{2\rho} = \sum_{l,m} \left[\frac{j \beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}} A_{2l,m} G_{3l}(\gamma_{2l,m} \rho) + \frac{j l k_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.27)$$

$$H_{1\varphi} = \sum_{l,m} \left[\frac{j k_0}{\gamma_{1l,m} Z_0} A_{1l,m} I_l'(\gamma_{1l,m} \rho) + \frac{j l \beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.28)$$

$$H_{2\varphi} = \sum_{l,m} \left[\frac{j \varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m} Z_0} A_{2l,m} G_{3l}(\gamma_{2l,m} \rho) + \frac{j l \beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l,m} G_{2l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \quad (2.6.29)$$

$$H_{1\rho} = \sum_{l,m} \left[\frac{j l k_0}{\gamma_{1l,m}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} A_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} \rho) + \frac{j \beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}} C_{1l,m} I_l'(\gamma_{1l,m} \rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m}z} , \text{ e} \quad (2.6.30)$$

$$H_{2p} = \sum_{l,m} \left[\frac{j l \varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l,m}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} A_{2l,m} G_{1l}(\gamma_{2l,m} \rho) + \frac{j \beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}} C_{2l,m} G_{4l}(\gamma_{2l,m} \rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_{l,m} z}. \quad (2.6.31)$$

Uma consideração adicional sobre a corrente é feita no sentido de simplificar a análise e obter soluções aproximadas. Utilizar-se-á, neste trabalho, uma expansão a um termo para a densidade de corrente. Segundo o trabalho de Chodorow e Chu, esta aproximação é capaz de produzir bons resultados. Neste caso, a série duplamente infinita é reduzida a uma série infinita simples, de forma que $J_{||l,m}^+$, que passará a ser escrita apenas como $J_{||l,m}$ daqui por diante, pode ser expressa, da seguinte forma.

$$J_{||l,m} = J_0 \frac{\delta \text{sen}(l\pi\delta/p)}{p \quad l\pi\delta/p} \delta(m), \quad (2.6.32)$$

onde

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (2.6.33)$$

é a função delta de Kronecker.

A partir desse ponto, a análise prosseguirá suprimindo o índice m da notação. Desta forma, (2.6.32) passará a ser escrita da seguinte forma

$$J_{||} = \sum_l J_{||l} = J_0 \frac{\delta}{p} \sum_l \frac{\text{sen}(l\pi\delta/p)}{l\pi\delta/p}. \quad (2.5.34)$$

Convém lembrar que $-\infty < l < \infty$, e verificar que, quando $l = 0$, $J_{||0} = J_0 \delta / p$.

2.7 Equação de Dispersão

A equação de dispersão é, como dito anteriormente, a própria solução do problema de valor de contorno eletromagnético. Esta equação irá dizer se, para uma dada frequência de excitação, haverá uma onda se propagando pela estrutura de ondas lentas. Segundo a construção da solução, se existir alguma solução, esta será uma onda lenta e sua velocidade de fase poderá ser determinada por meio da expressão

$$\frac{v_{p,l}}{c} = \frac{k_0 a}{\beta_0 a + l \cot \psi}. \quad (2.7.1)$$

Portanto, deve-se procurar uma expressão que forneça, possivelmente, valores de $\beta_0 a$ para um dado valor de $k_0 a$. As equações de dispersão são, em geral, equações transcendentais e requerem métodos numéricos para sua solução.

Neste trabalho, proceder-se-á a obtenção de uma equação de dispersão segundo a abordagem descrita por Chodorow e Chu [2]. Como mencionado na seção 1.5, esta abordagem se mostrou mais consistente fisicamente com o modelo do que a de Sensiper [4], visto que parte de princípios mais elementares do eletromagnetismo.

Como o método em questão é uma técnica variacional, o primeiro passo é a construção da função a ser variada. Parte-se da consideração que, já que a hélice é um condutor perfeito, por hipótese, a potência gerada, ou absorvida, pela superfície da hélice seja nula. Uma expressão lagrangeana para o caso em questão é uma boa escolha para a função a ser variada. Considere-se o produto $\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}$ e tome-se a sua divergência. Isto resulta em

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}^*. \quad (2.7.2)$$

Das leis de Faraday e de Ampère-Maxwell, obtém-se

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.7.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}. \quad (2.7.4)$$

Realizando as devidas substituições de (2.7.3) e (2.7.4) em (2.7.2), é possível obter

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{j}{\omega \mu_0} [(\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*]. \quad (2.7.5)$$

Integrando ambos os lados sob o volume da estrutura de propagação, que será discutido mais adiante, obtém-se

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) dV = \frac{j}{\omega\mu_0} \int_V [(\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV. \quad (2.7.6)$$

Por meio do teorema da divergência e da propriedade do produto misto de vetores, a integral do lado esquerdo da igualdade em (2.7.6) pode ser desenvolvida de forma que (2.7.6) se torna

$$-\frac{j}{\omega\mu_0} \oint_S \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) dS = \frac{j}{\omega\mu_0} \int_V [(\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV. \quad (2.7.7)$$

Cancelando o termo comum e passando a integral do lado esquerdo para o direito, obtém-se a expressão lagrangeana para o problema em questão

$$L = \int_V [(\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV + \oint_S \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) dS = 0. \quad (2.7.8)$$

É possível demonstrar que a integral de superfície em (2.7.8) é nula. Considere-se o volume de integração, como mostrado na Figura 2.7.1. Segundo as hipóteses iniciais do modelo, na superfície interna da guia, isto é, em $\rho=b$, o campo elétrico é somente perpendicular e o magnético é somente tangencial. Portanto, a integral de superfície para esta superfície é

$$\oint_{\rho=b} -E_\rho \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{n} \times -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_T dS = 0, \quad (2.7.9)$$

já que o produto vetorial $\mathbf{n} \times -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_T$ produz outras componentes tangenciais que, projetadas na componentes radial, são anuladas.

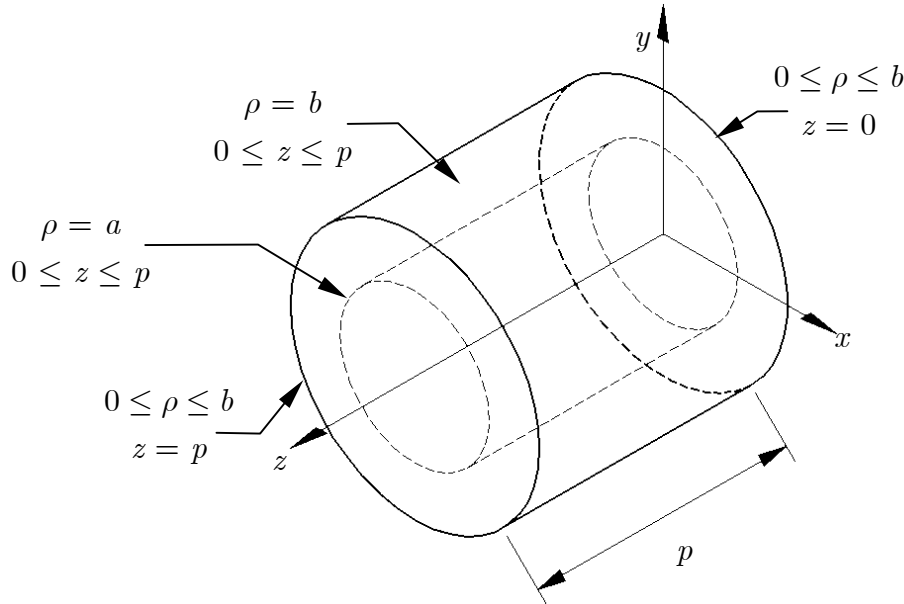


Figura 2.7.1 – Ilustração do volume de integração, que consiste da superfície cilíndrica $\rho = b$, $0 \leq z \leq p$ e das superfícies circulares planas $z = 0$, $0 \leq \rho \leq b$ e $z = p$, $0 \leq \rho \leq b$.

Novamente, segundo as hipótese iniciais, os campos na estrutura devem satisfazer ao teorema de Floquet, ou seja, a seguinte relação deve ser válida

$$\mathbf{E}(z = p) = \mathbf{E}(z = 0) e^{-j\beta_0 p}. \quad (2.7.10)$$

Portanto, para as integrais de superfície nos planos $z = 0$ e $z = p$, tem-se

$$\oint_{\substack{z=0 \\ z=p}} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) dS = \int_0^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\mathbf{E}^*(z=0) \cdot \mathbf{n}(z=0) \times \nabla \times \mathbf{E}(z=0) \right. \\ \left. + e^{j\beta_0 p} \mathbf{E}^*(z=0) \cdot \mathbf{n}(z=p) \times \nabla \times e^{-j\beta_0 p} \mathbf{E}(z=0) \right] \quad (2.7.11)$$

Com o cancelamento das exponenciais, pode-se escrever

$$= \int_0^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{E}^*(z=0) \cdot [\mathbf{n}(z=0) \times \nabla \times \mathbf{E}(z=0) + \mathbf{n}(z=p) \times \nabla \times \mathbf{E}(z=0)] = 0, \quad (2.7.12)$$

já que os versores \mathbf{n} em $z = 0$ e em $z = p$ estão em direções opostas. Portanto, por causa de (2.7.12) e (2.7.9), L se reduz a

$$L = \int_V [(\nabla \times \mathbf{E}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV. \quad (2.7.13)$$

Agora, utilizando a primeira identidade de Green, subdivide-se o volume total em dois outros volumes, um interno e outro externo à hélice. Deste modo, (2.7.13) é reescrita da seguinte forma

$$L = \int_{V_1} \mathbf{E}_1^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 - \varepsilon_1 k_0^2 \mathbf{E}_1) dV + \int_{V_2} \mathbf{E}_2^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2 - \varepsilon_2 k_0^2 \mathbf{E}_2) dV \\ + \int_{S-(\rho=a)} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} dS + \int_{\rho=a} \mathbf{E}^* \cdot [\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \nabla \times \mathbf{E}_2] dS \quad (2.7.14)$$

onde os índices 1 e 2 têm o mesmo significado de antes. $S-(\rho = a)$ significa todas as superfícies exceto a superfície $\rho = a$. Visto que a integral de superfície (2.7.8) é nula e que \mathbf{E} deve satisfazer a equação de ondas em uma região sem fontes, as três primeiras integrais em (2.7.14) são nulas. Com isso, a lagrangeana fica restringida apenas à superfície $\rho = a$ e, por isso, será denotada como L_r daqui em diante, que é expressa por

$$L_r = \int_{\rho=a} \mathbf{E}^* \cdot [\mathbf{n}_1 \times \nabla \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \nabla \times \mathbf{E}_2] dS. \quad (2.7.15)$$

Utilizando a lei de Faraday e observando que \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 têm sentidos opostos, (2.7.15) se torna

$$L_r = -j\omega\mu_0 \int_{\rho=a} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] dS. \quad (2.7.16)$$

Expressando (2.7.16) em termos das componentes do sistema de coordenadas cilíndricas, e utilizando a relação $\omega\mu_0 = k_0 Z_0$, chega-se finalmente à seguinte integral de variação

$$L_r = -jk_0 a Z_0 \int_0^p \int_0^{2\pi} \left\{ E_\varphi^*(\rho=a) [H_{1z}(\rho=a) - H_{2z}(\rho=a)] \right. \\ \left. + E_z^*(\rho=a) [H_{2\varphi}(\rho=a) - H_{1\varphi}(\rho=a)] \right\} d\varphi dz. \quad (2.7.17)$$

Realizando um passo adiante, ainda é possível escrever a descontinuidade dos campos magnéticos tangenciais como a densidade superficial de corrente induzida nas fitas, isto é,

$$L_r = -jk_0 a Z_0 \int_0^p \int_0^{2\pi} [E_\varphi^*(\rho=a) J_\varphi + E_z^*(\rho=a) J_z] d\varphi dz. \quad (2.7.18)$$

A solução do problema de valor de contorno implica em $L_r = 0$. Isto se deve ao fato do integrando de L_r se anular em toda a superfície $\rho = a$, visto que E_z e E_φ se anulam sobre as fitas da hélice e J_z e J_φ se anulam fora delas. Entretanto, a reciprocidade não é verdadeira e, por isso, para obter a solução exata é obtida resolvendo $\delta L_r = 0$. Entretanto, obter-se-á uma solução aproximada resolvendo simplesmente $L_r = 0$. Esta aproximação tem o mesmo efeito de se considerar a aproximação de um termo para a densidade de corrente superficial ao invés de um conjunto completo de funções ortonormais. Embora o grau de precisão aumente com o número de termos da expansão, Sensiper e, posteriormente, Chodorow mostraram que a aproximação de um termo conduz a resultados muito consistentes, além de proporcionar grande simplificação na expressão variacional. Além disso, a interpretação física de L_r é a potência complexa que pode ser gerada ou absorvida pela superfície cilíndrica $\rho = a$. Portanto, é razoável que L_r seja nula.

Substituindo, então, as expressões das correntes tangenciais à superfície da fita, representada apenas pela sua componente paralela, visto que se utiliza a aproximação de fita fina, tem-se

$$J_\varphi = 2j \cos \psi \sum_l J_{||l} \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \quad (2.7.19)$$

$$J_z = 2 \text{sen} \psi \sum_l J_{||l} \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z}. \quad (2.7.20)$$

De (2.6.20) e (2.6.24), tem-se as expressões para os campos elétricos tangenciais. Portanto, seus conjugados complexos são, respectivamente,

$$E_{1z}^*(\rho = a) = \sum_l A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}a) \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \text{ e} \quad (2.7.21)$$

$$E_{1\varphi}^*(\rho = a) = \sum_l \left(\frac{j l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}a) + \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l}a) \right) \text{sen}(l\varphi) e^{j\beta_l z}. \quad (2.7.22)$$

Separando a integral da lagrangeana (2.7.18) em duas partes, tem-se

$$L_r = -j k_0 a Z_0 \left[\int_0^p \int_0^{2\pi} E_{\varphi}^*(\rho=a) J_{\varphi} d\varphi dz + \int_0^p \int_0^{2\pi} E_z^*(\rho=a) J_z d\varphi dz \right]. \quad (2.7.23)$$

A primeira integral,

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^p \int_0^{2\pi} E_{\varphi}^*(\rho=a) J_{\varphi} d\varphi dz \quad (2.7.24)$$

é resolvida no apêndice A6, juntamente com a segunda integral

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^p \int_0^{2\pi} E_z^*(\rho=a) J_z d\varphi dz, \quad (2.7.25)$$

resultando, respectivamente, em

$$\mathcal{J}_1 = 2\pi a p j \cos \psi \sum_{l, l \neq 0} J_{||l} \left[\frac{j l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}a) + \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l}a) \right] e \quad (2.7.26)$$

$$\mathcal{J}_2 = 4\pi a p J_{||0} A_{10}^* I_0(\gamma_{10}a) \text{sen} \psi + 2\pi a p \text{sen} \psi \sum_{l, l \neq 0} J_{||l} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}a). \quad (2.7.27)$$

Substituindo (2.7.26) e (2.7.27) em (2.7.23), obtém-se

$$L_r = -2\pi a p j k_0 Z_0 \text{sen} \psi \left\{ 2J_{||0} A_{10}^* I_0(\gamma_{10}a) + \sum_{l, l \neq 0} J_{||l} \left[A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}a) \left(1 - \frac{l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) - C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l}a) \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} \cot \psi \right] \right\}. \quad (2.7.28)$$

A solução do problema simplificado requer que L_r se anule e, portanto, a equação de dispersão pode ser expressa da seguinte forma (apêndice A7)

$$0 = 2U_0 + \sum_{l=1}^{\infty} J_{||l}^2 (Y_l + Y_{-l}), \quad (2.7.29)$$

onde

$$U_0 = \frac{\gamma_{10}}{k_0^2} \frac{I_0(\gamma_{10}a)}{I_0'(\gamma_{10}a)} \frac{J_{||0}^2}{F_{20}} \text{sen}^2 \psi, \text{ e} \quad (2.7.30)$$

$$\begin{aligned}
Y_l = & \frac{I_l^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{2l}\Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \text{sen}^2 \psi \\
& - \frac{I_l'^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l}\gamma_{2l}} F_{2l} \cos^2 \psi . \quad (2.7.31) \\
- & \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)I_l'(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \text{sen} \psi \cos \psi
\end{aligned}$$

Já que se pode obter alguns resultados interessantes da comparação da hélice dupla com a hélice simples, convém obter também a equação de dispersão para o segundo caso. O procedimento é muito similar ao descrito acima, contudo a simetria da hélice dupla deve ser desconsiderada. Faz-se isto utilizando E_{1z} e $E_{1\varphi}$ expressos em (2.3.1) e (2.3.3), respectivamente. Os termos das correntes para a hélice simples são reduzidos a

$$H_{1z}(\rho=a) - H_{2z}(\rho=a) = J_\varphi = \cos \psi \sum_l J_{||l} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_l z} , \quad \text{e} \quad (2.7.32)$$

$$H_{2\varphi}(\rho=a) - H_{2\varphi}(\rho=a) = J_z = \text{sen} \psi \sum_l J_{||l} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_l z} . \quad (2.7.33)$$

Utilizando (2.7.32) e (2.7.33) em procedimento similar ao apresentado nesta seção, que é resumido no apêndice A8, obtém-se a expressão

$$0 = U_0 + V_0 + \sum_{l=1}^{\infty} J_{||l}^2 (Y_l + Y_{-l}), \quad (2.7.34)$$

onde U_0 e Y_l e $J_{||l}$ são exatamente as mesmas expressões já apresentadas. O termo V_0 , cuja expressão é

$$V_0 = - \frac{1}{\gamma_{10}} \frac{I_0'(\gamma_{10}a)}{I_0(\gamma_{10}a)} \frac{J_{||0}^2}{F_{10}} \cos^2 \psi , \quad (2.7.35)$$

resulta dos campos TE da componente fundamental, que são suprimidos no modo simétrico de propagação, sustentado pela hélice dupla, mas que não sofrem supressão na hélice simples.

2.8 Impedância de Interação

Recordando o conceito, a impedância de interação é uma grandeza, cuja unidade é o ohm, que expressa a eficiência da estrutura de ondas lentas em promover a distribuição de campo em que a transferência de energia do feixe eletrônico para a onda ocorre de maneira mais eficiente. Por causa disso, a impedância de interação é proporcional ao ganho da TWT. Este parâmetro é calculado no eixo da estrutura, isto é, em $\rho = 0$, visto que é onde está o feixe eletrônico.

De acordo com a definição de Pierce [3], a impedância de interação para um determinado modo de propagação do campo eletromagnético em uma estrutura de ondas lentas helicoidal é dada por

$$\mathcal{K}_l = \frac{|E_{z,l}(\rho=0)|^2}{2\beta_0^2 P_T}, \quad (2.8.1)$$

onde $E_{z,l}(\rho=0)$ é o harmônico de ordem l do campo elétrico axial que se propaga pela estrutura e P_T é a potência eletromagnética total propagada pela estrutura. Tendo em vista que $\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(0) = \delta(0,l)$ e, portanto, somente a componente fundamental contribui para a impedância de interação no eixo ($\rho=0$), (2.8.1) se torna

$$\mathcal{K}_0 = \frac{|A_{10}|^2}{2\beta_0^2 P_T}, \quad (2.8.2)$$

A potência eletromagnética propagada pela estrutura é obtida por meio do Teorema de Poynting Complexo, isto é,

$$P_T = \oiint S_z \rho d\rho d\varphi, \quad (2.8.3)$$

onde S_z é a componente axial do vetor de Poynting \mathbf{S} , que é definido como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (2.8.4)$$

Em (2.8.4) \mathbf{H}^* denota o conjugado complexo da expressão de \mathbf{H} . Os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} , escritos em coordenadas cilíndricas, são

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\varphi \mathbf{a}_\varphi + E_z \mathbf{a}_z \quad (2.8.5)$$

$$\mathbf{H} = H_\rho \mathbf{a}_\rho + H_\varphi \mathbf{a}_\varphi + H_z \mathbf{a}_z. \quad (2.8.6)$$

O desenvolvimento do produto vetorial expresso em (2.8.4) resulta em

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = (E_\varphi H_z^* - E_z H_\varphi^*) \mathbf{a}_\rho + (E_z H_\rho^* - E_\rho H_z^*) \mathbf{a}_\varphi + (E_\rho H_\varphi^* - E_\varphi H_\rho^*) \mathbf{a}_z. \quad (2.8.7)$$

A potência que se deseja calcular é aquela que flui na direção axial, portanto toma-se a componente axial de (2.8.4), ou seja,

$$S_z = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_z = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e}(E_\rho H_\varphi^* - E_\varphi H_\rho^*). \quad (2.8.8)$$

A potência total propagada pela estrutura é então

$$P_T = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_0^b (E_\rho H_\varphi^* - E_\varphi H_\rho^*) \rho d\rho d\varphi, \quad (2.8.9)$$

que, para simplificar o desenvolvimento, pode ser expressa como a soma das parcelas referentes às regiões 1 e 2, isto é,

$$P_T = P_1 + P_2, \quad (2.8.10)$$

onde as componentes P_1 e P_2 são as potências propagadas nas regiões 1 e 2, respectivamente, e são calculadas pelas integrais

$$P_1 = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_{1\rho} H_{1\varphi}^* - E_{1\varphi} H_{1\rho}^*) \rho d\rho d\varphi, \quad (2.8.11)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_a^b (E_{2\rho} H_{2\varphi}^* - E_{2\varphi} H_{2\rho}^*) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.8.12)$$

Substituindo as devidas expressões das componentes de campo em (2.8.11) e (2.8.12) e desenvolvendo as integrais, obtém-se (apêndice A8) as seguintes expressões para as potências transmitidas pela estrutura de ondas lentas nas regiões 1 e 2, respectivamente.

$$P_1 = \pi \frac{k_0 \beta_0}{Z_0 \gamma_{10}^2} |A_{10}|^2 i_{1,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{k_0 \beta_l}{Z_0 \gamma_{1l}^2} (|A_{1l}|^2 + Z_0^2 |C_{1l}|^2) \left(i_{1,l} + \frac{l^2}{\gamma_{1l}^2} i_{2,l} \right) + \frac{2l}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} \right] \quad (2.8.14)$$

$$P_2 = \pi \frac{\varepsilon_2 k_0 \beta_0}{Z_0 \gamma_{20}^2} |A_{20}|^2 i_{4,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left\{ \frac{k_0 \beta_l}{Z_0 \gamma_{2l}^2} \left[\varepsilon_2 |A_{2l}|^2 \left(i_{4,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{7,l} \right) + Z_0^2 |C_{2l}|^2 \left(i_{8,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{5,l} \right) \right] + \frac{l}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) (i_{6,l} + i_{9,l}) \right\} \quad (2.8.15)$$

A potência total é dada pela soma de (2.8.14) e (2.8.15), que resulta em

$$P_T = P_0 + \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (P_l + P_{-l}), \quad (2.8.16)$$

onde

$$P_0 = \frac{\pi k_0 \beta_0}{Z_0} \left(\frac{|A_{10}|^2}{\gamma_{10}^2} i_{1,0} + \frac{\varepsilon_2 |A_{20}|^2}{\gamma_{20}^2} i_{4,0} \right) \quad (2.8.17)$$

e

$$\begin{aligned}
P_l = & \frac{k_0 \beta_l}{Z_0 \gamma_{1l}^2} (|A_{1l}|^2 + Z_0^2 |C_{1l}|^2) \left(i_{1,l} + \frac{l^2}{\gamma_{1l}^2} i_{2,l} \right) \\
& + \frac{k_0 \beta_l}{Z_0 \gamma_{2l}^2} \left[\varepsilon_2 |A_{2l}|^2 \left(i_{4,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{7,l} \right) + Z_0^2 |C_{2l}|^2 \left(i_{8,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{5,l} \right) \right] \\
& + l \left[\frac{2}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} + \frac{1}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) (i_{6,l} + i_{9,l}) \right]
\end{aligned} \quad (2.8.18)$$

As integrais $i_{1,l}$ a $i_{9,l}$ são dadas por

$$i_{1,l} = \int_0^a I_l'^2(\gamma_{1l}\rho) \rho \, d\rho, \quad (2.8.19)$$

$$i_{2,l} = \int_0^a I_l^2(\gamma_{1l}\rho) \frac{1}{\rho} \, d\rho, \quad (2.8.20)$$

$$i_{3,l} = \int_0^a I_l(\gamma_{1l}\rho) I_l'(\gamma_{1l}\rho) \, d\rho, \quad (2.8.21)$$

$$i_{4,l} = \int_a^b G_{3l}^2(\gamma_{2l}\rho) \rho \, d\rho, \quad (2.8.22)$$

$$i_{5,l} = \int_a^b G_{2l}^2(\gamma_{2l}\rho) \frac{1}{\rho} \, d\rho, \quad (2.8.22)$$

$$i_{6,l} = \int_a^b G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) G_{3l}(\gamma_{2l}\rho) \, d\rho, \quad (2.8.23)$$

$$i_{7,l} = \int_a^b G_{1l}^2(\gamma_{2l}\rho) \frac{1}{\rho} \, d\rho, \quad (2.8.24)$$

$$i_{8,l} = \int_a^b G_{4l}^2(\gamma_{2l}\rho) \rho \, d\rho, \text{ e} \quad (2.8.25)$$

$$i_{9,l} = \int_a^b G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) G_{4l}(\gamma_{2l}\rho) \, d\rho. \quad (2.8.26)$$

Tem-se, então, a expressão para a impedância de interação da estrutura de ondas lentas em questão, que é dada por (2.8.2), utilizando (2.8.16). Observando (2.8.2), pode-se perceber que a distribuição de campo que produz a maior impedância de interação é aquela em que a componente axial do campo elétrico E_z tem a maior amplitude no eixo da estrutura, isto é, em $\rho = 0$. No denominador, tem-se a soma da potência propagada por todos os harmônicos. Como mencionado na seção 1.5.3, com o modelo da hélice de fita pôde-se

verificar que os harmônicos também carregam uma considerável parte da potência total propagada pela SWS e, por conta disso, a impedância de interação é, na realidade, menor do que aquela prevista pelo modelo da falsa hélice.

É relevante comparar a impedância de interação do modo fundamental \mathcal{K}_0 com a impedância de interação do primeiro modo reverso \mathcal{K}_{-1} , visto que este modo também pode sincronizar com o feixe. Para tanto, utiliza-se (2.8.1), mas como em $\rho=0$ a única contribuição é da componente fundamental, calcula-se para $\rho > 0$. Não há uma posição ρ bem definida em que se deva calcular \mathcal{K}_{-1} e cálculos e medidas desse parâmetro são muito raros. Neste trabalho, considera-se que a borda do feixe eletrônico é um bom local para o cálculo, já que \mathcal{K}_{-1} é nula no eixo e cresce radialmente até a superfície da hélice. Na borda do feixe será o ponto em que haverá a maior transferência de energia do feixe para este modo de propagação em uma possível sincronia entre ambos, visto que para menores valores de ρ , a impedância de interação será menor e para ρ maiores, não haverá mais feixe eletrônico. Apresentar-se-ão, na seção de resultados, curvas que mostram a variação de \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_{-1} em função da posição radial para uma condição em que as velocidades de fase dos dois modos são bem distintas e outra em que são bem próximas.

2.9 Resultados Teóricos

Esta seção descreve a utilização das expressões obtidas pela análise realizada até a seção anterior para a predição das características de dispersão e impedância de interação para uma dada estrutura de ondas lentas. Os resultados expressos aqui são puramente teóricos e a sua validação experimental será discutida na próxima seção.

Todos os cálculos foram realizados implementando as expressões computacionalmente. Um algoritmo, gerado em um programa comercial para cálculos científicos, lê os dados geométricos da estrutura de ondas lentas e constrói os gráficos de velocidade de fase e impedância de interação em função da frequência, mediante o cálculo realizado com as expressões (2.7.20) e (2.8.2).

Como o objetivo deste trabalho é estabelecer uma ferramenta que auxilie no projeto de estruturas de ondas lentas, é importante que ela possa reproduzir resultados conhecidos. Adicionalmente, uma das preocupações no projeto de estruturas de ondas lentas para operar em alta potência é a possibilidade de sincronização de modos indesejados. A Figura 2.9.1 mostra as curvas de velocidade de fase em função da frequência para os modos fundamental, primeiro reverso, segundo reverso, primeiro progressivo e segundo progressivo. Nota-se que apenas o primeiro modo reverso tem possibilidade de sincronizar com o feixe eletrônico que, a princípio, deve estar em sincronia com o modo fundamental. Em outras palavras, dentre os modos de ordem mais alta, somente o primeiro reverso merece preocupação em termos de sincronia com o feixe. A frequência em que a velocidade de fase do modo fundamental é igual à do

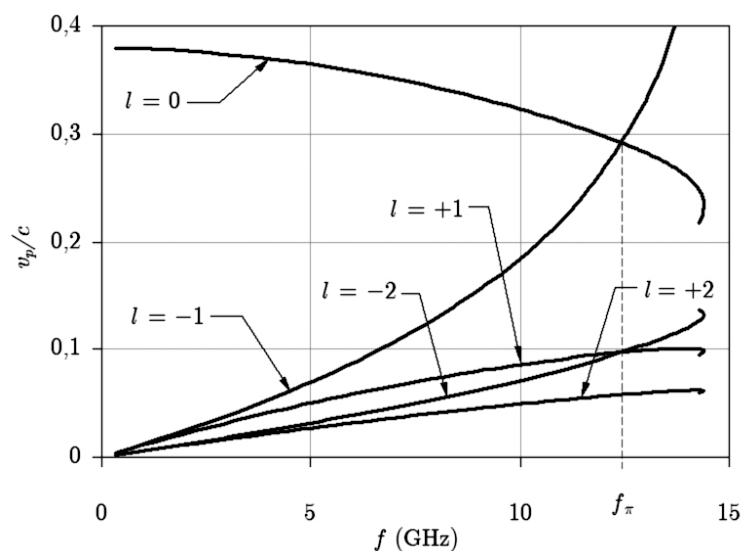


Figura 2.9.1 – Velocidade de fase normalizada em função da frequência para os modos fundamental ($l=0$), primeiro reverso ($l=-1$), segundo reverso ($l=-2$), primeiro progressivo ($l=+1$) e segundo progressivo ($l=+2$).

primeiro reverso é denominada f_π , pois sempre corresponde a um ângulo de fase $\beta_0 p$ igual a π radianos.

O segundo estudo a ser feito é a verificação da influência dos parâmetros geométricos da estrutura de ondas lentas nas características de dispersão e impedância de interação. Estes parâmetros geométricos são o raio médio da hélice a , seu período ou passo p , o ângulo de passo ψ , a largura da fita δ , o raio da guia circular e a permissividade dos suportes dielétricos. Deve-se lembrar que este último parâmetro é considerado por meio de homogeneização, de forma que atribui-se à região 2 uma permissividade relativa efetiva ε_2 . Esta permissividade efetiva pode ser calculada por uma relação de áreas entre a área da secção transversal dos suportes e a área da região 2. Utiliza-se, neste trabalho, a expressão dada por Basu em [20], que é

$$\varepsilon_2 = 1 + \frac{3XY(\varepsilon_s - 1)}{\pi(b^2 - a^2)},$$

onde X e Y são, respectivamente, a largura e a altura da secção transversal dos suportes e ε_s é a permissividade relativa do material que os constitui.

Embora as expressões permitam variar cada parâmetro da SWS arbitrariamente, é mais interessante variar parâmetros que sejam aplicáveis a qualquer estrutura. Por exemplo, varie-se o passo da SWS em questão, obtendo as curvas de velocidade de fase. Este estudo não será válido para uma outra SWS que possuir raio maior o menor. Contudo, se ao invés disso, se variar a grandeza $\cot\psi = 2\pi a/p$, poder-se-á comparar com qualquer estrutura que tiver a mesma $\cot\psi$, independente do passo ou do raio. Neste sentido, são também introduzidas as grandezas, também adimensionais, $r = b/a$ e $\eta = 2\pi\delta/p$.

A Tabela 2.9.1 mostra as dimensões geométricas da estrutura de ondas lentas sob estudo, bem como os valores correspondentes ao parâmetros $\cot\psi$, r e η e o intervalo de variação dos mesmos.

As curvas apresentadas nas Figuras 2.9.3 a 2.9.6 são as curvas de dispersão e de impedância de interação para a variação de cada parâmetro citado. Vista a forma como são apresentadas, o gráfico do topo da página é a curva $k_0 a/\cot\psi$ em função de $\beta_0 a/\cot\psi$. Este gráfico é especialmente importante na definição do ponto de operação da TWT, visto que a reta de velocidade do feixe eletrônico v_0 pode ser sobreposta às curvas $k_0 a/\cot\psi$ em função de $\beta_0 a/\cot\psi$.

Para ilustrar a utilidade deste tipo de gráfico, a Figura 2.9.2 apresenta as curvas referentes ao modo fundamental e o reverso, juntamente com a reta de velocidade do feixe eletrônico, para a TWT sob estudo. O objetivo é identificar os pontos em que a reta v_0 intercepta as curvas $k_0 a/\cot\psi$ em função de $\beta_0 a/\cot\psi$. Contudo, como uma reta de velocidades negativas para o feixe não

Tabela 2.9.1 – Parâmetros geométricos da SWS sob estudo e parâmetros a ser variados e seus respectivos intervalos.

Parâmetro Geométrico	Símbolo	Valor	Unidade
raio médio da SWS	a	2,375	mm
raio interno da guia	b	4,35	mm
período da SWS	p	3,52	mm
largura da fita	δ	0,88	mm
Parâmetro a ser variado			Intervalo
relação entre raio e período	$\cot\psi$	4,239	1,0 - 10,0
raio da guia/raio da SWS	r	1,831	1,0001 - ∞
relação entre largura da fita e período	η	1,571	$0,0001\pi$ - $1,0\pi$
permissividade relativa da região 2	ε_2	1,0	1,0 - 2,0

tem sentido real, rebate-se a curva referente ao modo reverso em relação ao eixo das ordenadas. Desta forma, as curvas de ambos os modos se sobrepõem, mas a reta v_0 continua as interceptando no local correto. Então, basta ajustar os parâmetros da SWS de modo que as curvas do modo fundamental interceptem a reta v_0 antes que aquelas do modo reverso o façam. Destaca-se, ainda, a frequência f_π , em que as velocidades de fase dos dois modos são iguais. Como as curvas são simétricas, este ponto sempre corresponde a $\beta_0 a = \pi a/p$. As TWT operam sempre abaixo deste ponto, pois acima, o modo reverso sincroniza com o feixe ao invés do modo fundamental. No caso mostrado na Figura 2.9.2, há uma boa margem de segurança na operação da válvula, visto que a reta v_0 intercepta a curva do modo fundamental relativamente longe da frequência f_π . O feixe está

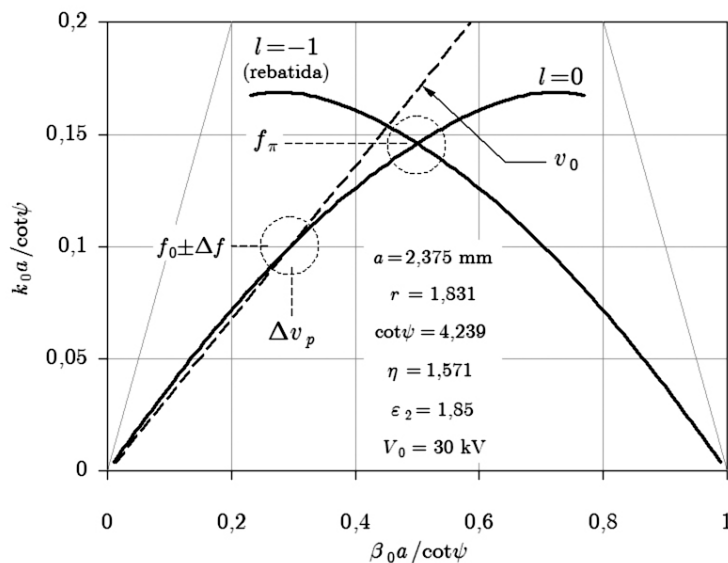


Figura 2.9.2 – Curva $k_0 a / \cot\psi$ em função de $\beta_0 a / \cot\psi$ para uma dada TWT com voltagem de aceleração de 30 kV. A curva do modo reverso aparece rebatida em relação ao eixo das ordenadas.

sincronizado com uma portadora f_0 , que tem uma banda $2\Delta f$. Evidentemente, a estrutura de ondas lentas apresenta nessa banda uma dispersão Δv_p , que deve ser pequena, de forma a minimizar a distorção harmônica. Apresenta-se, adiante, as relações entre as impedâncias de interação tanto no ponto de operação quanto na frequência f_π .

Retornando às Figuras 2.9.3 a 2.9.6, gráficos colocados no meio da página contêm as curvas de velocidade de fase. Nestes gráficos, tem-se o valor da velocidade de fase do modo fundamental em função da frequência. Por meio destas curvas, verifica-se o valor do parâmetro que implicará na velocidade de fase desejada e o quão dispersiva será a estrutura de ondas lentas na banda em questão.

O último gráfico de cada figura apresenta as curvas de impedância de interação em função da frequência e da variação dos respectivos parâmetros. Nestas curvas, é possível verificar se as escolhas dos parâmetros geométricos resultarão em uma estrutura capaz de promover eficientemente a interação onda-feixe, resultando em uma satisfatória transferência de energia.

A Figura 2.9.3 apresenta os resultados de dispersão e impedância de interação para a variação do parâmetro $\cot\psi$. Como indica a Tabela 2.9.1, $\cot\psi$ varia de 1,0 a 10. O que se percebe é que a velocidade da fase diminui com o aumento da $\cot\psi$, que está relacionado com a diminuição do período da SWS. A taxa de diminuição é reduzida com o aumento do passo e, por volta de $\cot\psi = 5$, há uma mudança na inflexão da curva. Observa-se, também, que a dispersividade da estrutura aumenta com $\cot\psi$, isto é, conforme o período diminui. Já impedância de interação, sempre aumenta com a diminuição do passo para as frequências mais baixas, tipicamente menores que 5 GHz. Para frequências próximas de 10 GHz e maiores, a impedância de interação aumenta para $\cot\psi \leq 5$ e começa a diminuir para valores maiores.

Na Figura 2.9.4, apresentam-se os resultados de dispersão e impedância de interação para a variação do parâmetro η . Como indica a Tabela 2.9.1, η varia de $0,0001\pi$ a π . Isto significa variar a largura das fitas que formam as duas hélices desde um valor muito pequeno (a fita é um fio infinitesimal) até que a largura da fita seja metade do período, isto é, a estrutura ring-bar se torna um tubo. Como o modelo trata a estrutura como hélices duplas contrapostas, com $\delta = p/2$ ainda não se tem um tubo e, por isso, a curva tem comportamento convencional. Obviamente, os resultados para este caso podem ser muito questionáveis, visto que as aproximações feitas durante a análise das seções anteriores são boas apenas para hélices de fitas finas. Contudo, ao menos qualitativamente, esses resultados são consistentes e servem para balizamento

no projeto de estruturas de ondas lentas. Nota-se, portanto, redução da velocidade de fase com a redução da largura da fita. No entanto, esta redução não é indefinida, mas prossegue até que a fita se torne um fio. Pode-se observar que, se η for diminuído mais ordens de grandeza, a velocidade de fase não terá diminuição apreciável. A curva de impedância de interação tem comportamento parecido com o caso anterior. Para as frequências mais baixas este parâmetro sofre apenas aumento com a diminuição de η , enquanto para as frequências altas, sofre diminuição. Nas frequências médias, ocorre aumento até certo ponto e depois diminuição. Como na curva de velocidade de fase, conforme a fita se torna um fio, a impedância de interação não muda mais apreciavelmente.

Na Figura 2.9.3, apresentam-se os resultados de dispersão e impedância de interação para a variação da razão entre o raio interno da guia pelo raio médio da hélice. Esta razão é variada desde 1,0001, isto é, a guia está quase em contato com a hélice, até ∞ , que é o caso em que não há guia metálica em volta da hélice. Observa-se que, se a guia for muito próxima à hélice, a velocidade de fase é reduzida nas frequências mais baixas, de forma que há uma acentuada redução da dispersividade dessa estrutura. Esta característica é muito atrativa para a utilização em telecomunicações. Porém, o gráfico da impedância de interação diz que, para r próximos de 1, a estrutura apresenta baixa impedância de interação. E ainda mais, a impedância de interação aumenta com o raio da guia, até que atinge o limite com $r = \infty$. Este tipo de comportamento ressalta a relação de compromisso que deve haver entre os parâmetros de projeto de uma SWS.

Na Figura 2.9.4, apresentam-se os resultados de dispersão e impedância de interação para a variação da permissividade relativa efetiva da região 2. Os valores variam de 1,0, que é o caso em que não há suporte algum, até 2,0, que significaria a utilização de suportes de material com permissividade relativa em torno de 9. No resultado mostrado na Figura 2.9.2, $\varepsilon_2 = 1,85$ corresponde à utilização de 3 suportes de óxido de berílio, que tem permissividade relativa igual a 7,0.

O aumento de ε_2 , que significa o aumento da área ou do número de suportes, ou ainda, de sua permissividade, provoca a redução da velocidade de fase a da frequência de corte, como indicam as curvas de dispersão. A impedância de interação também será gradualmente menor, quanto maior for ε_2 . Isto se deve ao maior armazenamento de energia elétrica na região 2 em detrimento da região 1, em particular, no eixo da estrutura, onde é calculada a impedância de interação.

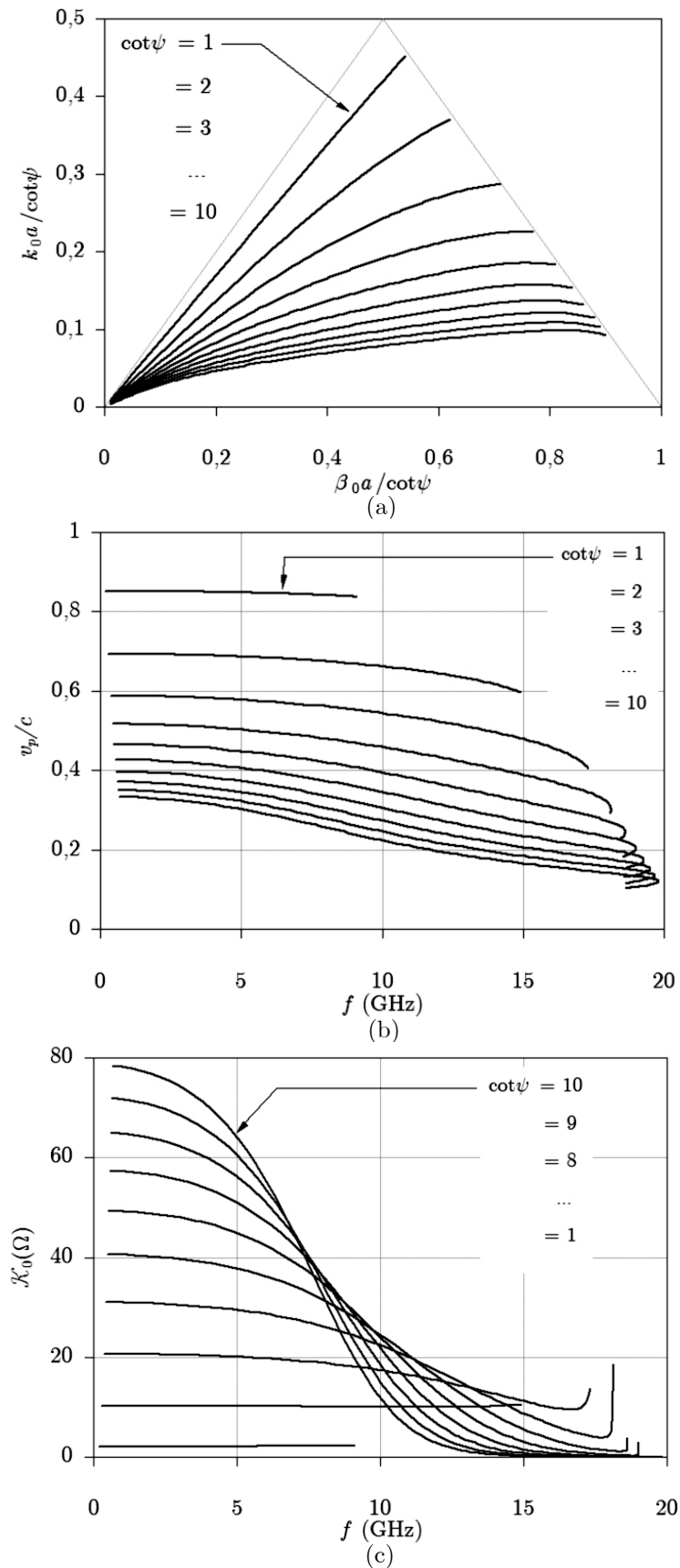


Figura 2.9.3 – Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de $\cot\psi$. Em (a) tem-se as curvas $k_0 a / \cot\psi$ em função de $\beta_0 a / \cot\psi$, em (b) tem-se as curvas de velocidade fase em função da frequência e, em (c) tem-se as curvas de impedância de interação em função da frequência.

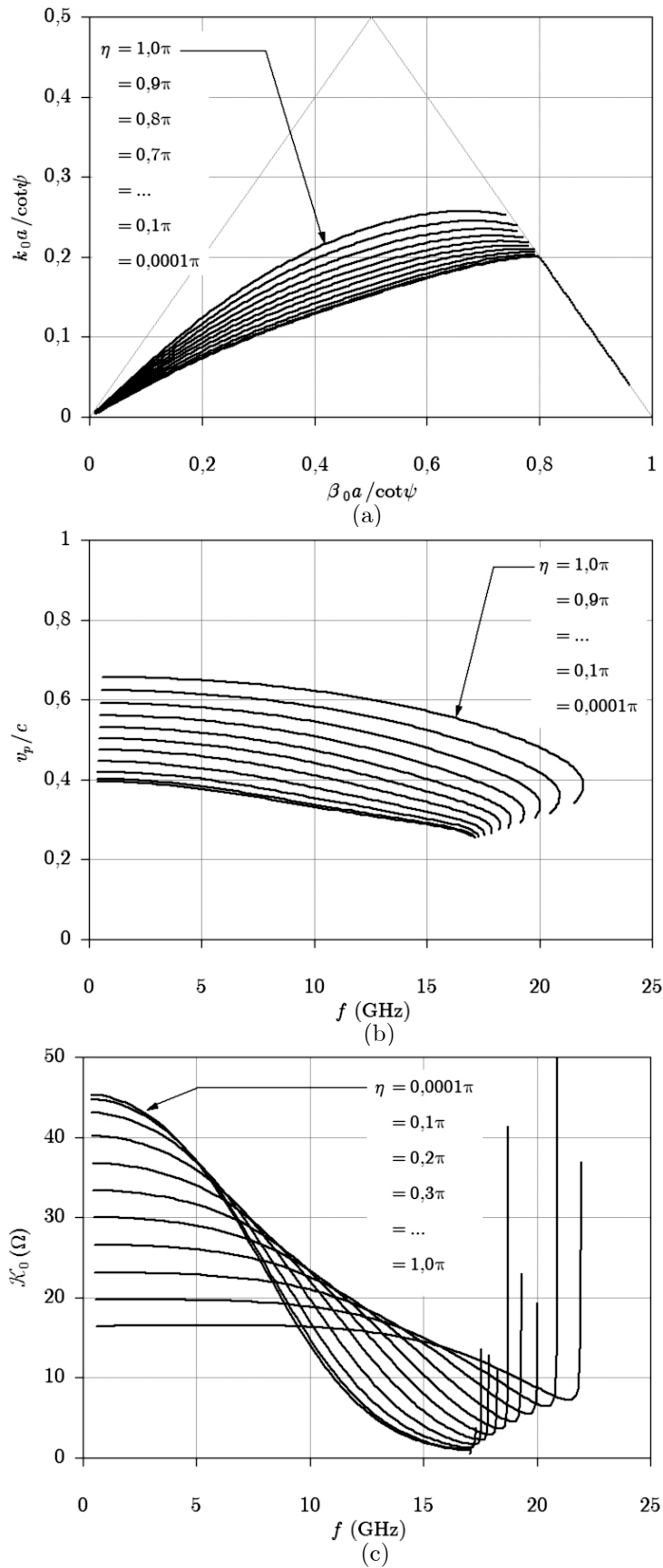


Figura 2.9.4 – Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de η . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência.

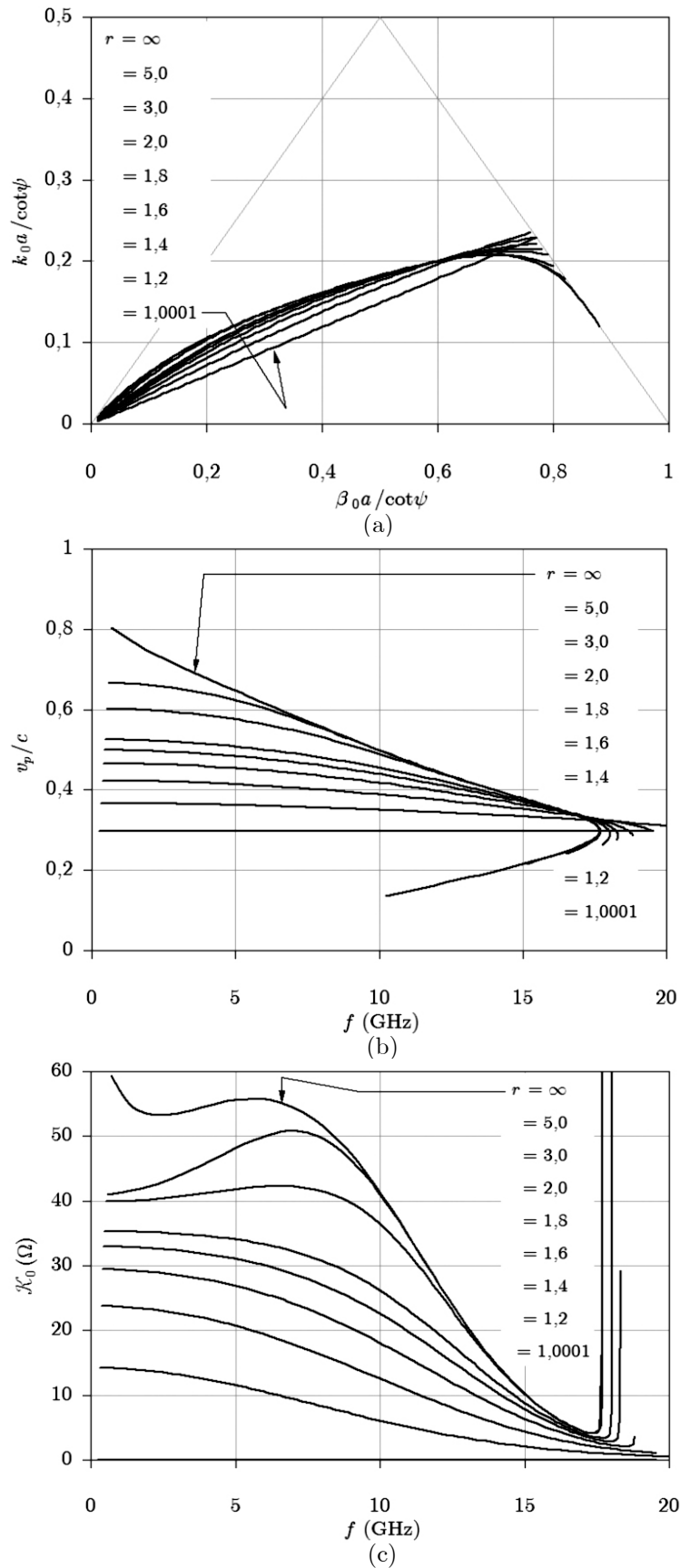


Figura 2.9.5 – Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de r . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência.

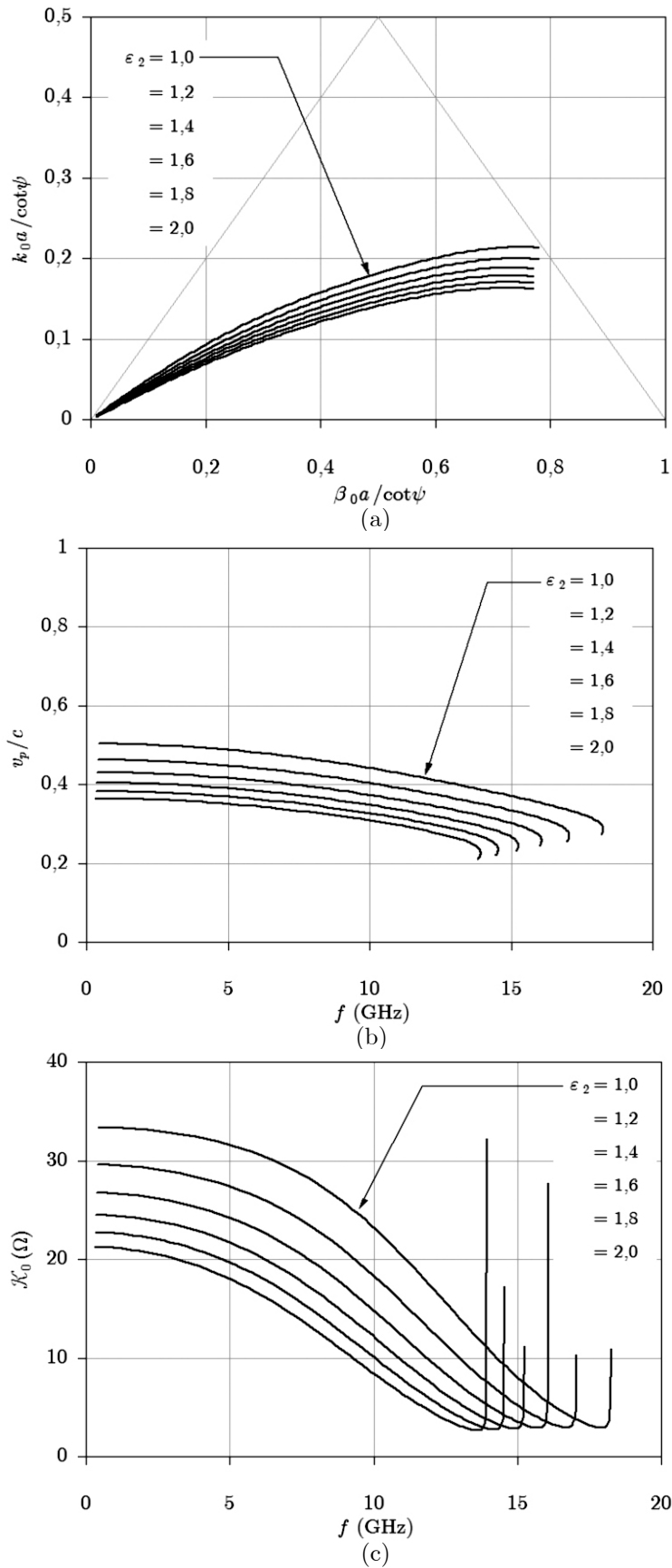


Figura 2.9.6 – Gráficos das curvas de dispersão e impedância de interação parametrizados em função de ϵ_2 . Em (a), tem-se as curvas $k_0 a / \cot \psi$ em função de $\beta_0 a / \cot \psi$. Em (b) e (c), tem-se as curvas de velocidade fase e impedância de interação, respectivamente, ambas em função da frequência.

Outro tipo de resultado que também merece atenção diz respeito à comparação das características de dispersão e impedância de interação entre a hélice dupla e a hélice simples. Chodorow e Chu [2] reportaram que a hélice dupla é mais dispersiva que a hélice simples e apresenta cerca do dobro de impedância de interação para uma mesma velocidade de fase. Portanto, as curvas de dispersão e de impedância de interação para uma hélice simples e uma dupla com os mesmos parâmetros foram construídas nos seguintes casos. O primeiro caso, cujo resultado é apresentado na Figura 2.9.7, as curvas foram construídas para hélices com os mesmos parâmetros geométricos. O segundo caso, cujo resultado é apresentado na Figura 2.9.8, as curvas foram construídas para hélices com a mesma velocidade de fase a uma determinada frequência. Para isso, o passo das hélices foi ajustado de forma que ambas apresentassem velocidade de fase em torno de $0,25c$ na frequência de 8 GHz.

Observando a Figura 2.9.7, nota-se que, a hélice dupla é mais rápida que a hélice simples, isto é, a onda que se propaga em uma hélice dupla com os mesmos parâmetros de uma hélice simples terá cerca de o dobro da velocidade de fase em relação à segunda. Ainda em relação à velocidade de fase, observa-se, na curva $v_p(f)$ da Figura 2.9.8, que a hélice dupla é realmente mais dispersiva que a hélice simples. Sua velocidade de fase tem uma variação bem maior, no mesmo intervalo de frequência, que a velocidade de fase da hélice simples. Esta é, em geral, a única desvantagem da hélice dupla em relação à hélice simples. Esta característica é um inconveniente em aplicações que necessitam de um dispositivo de banda bastante larga. Nestes casos, a hélice simples ainda é preferida atualmente.

Quanto à impedância de interação, a curva $\mathcal{K}_0(f)$ da Figura 2.9.7 mostra que, para hélices com os mesmos parâmetros, a impedância da hélice simples é maior nas frequências mais baixas, mas decai rapidamente e se torna menor do que a impedância da hélice dupla.

Comparando estruturas com a mesma velocidade de fase para uma determinada frequência, a curva $\mathcal{K}_0(f)$ da Figura 2.9.8 mostra que a impedância de interação da hélice dupla é maior em uma ampla faixa de frequências. Particularmente, na frequência em que as velocidades de fase são iguais, a impedância da hélice dupla é um pouco mais do que o dobro que a da hélice simples, confirmando os resultados de Chodorow e Chu.

Outra investigação de interesse é verificar a diferença obtida nos resultados devido à utilização das abordagens de Sensiper e de Chodorow para a obtenção da equação de dispersão. Na Figura 2.9.9, são apresentados os gráficos das curvas de velocidade de fase juntamente com as curvas de impedância de

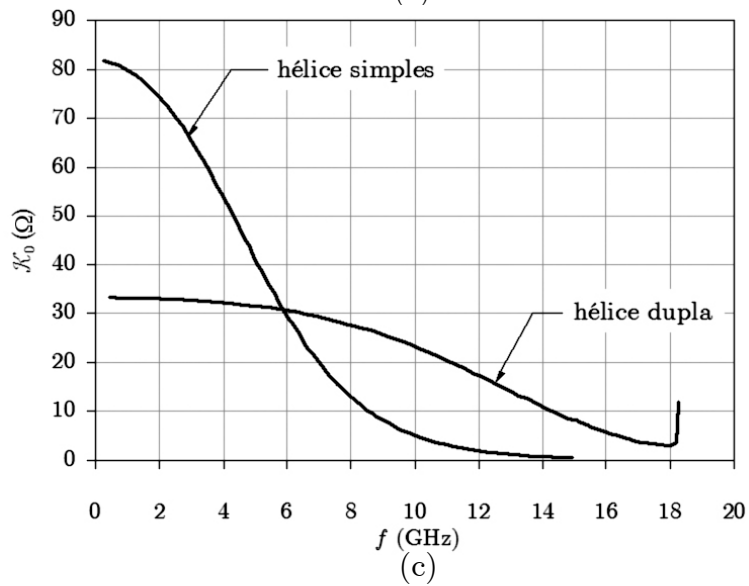
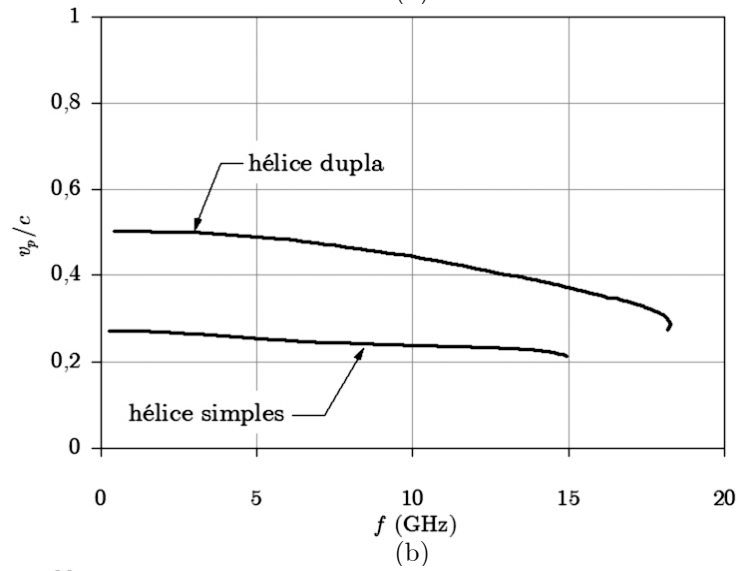
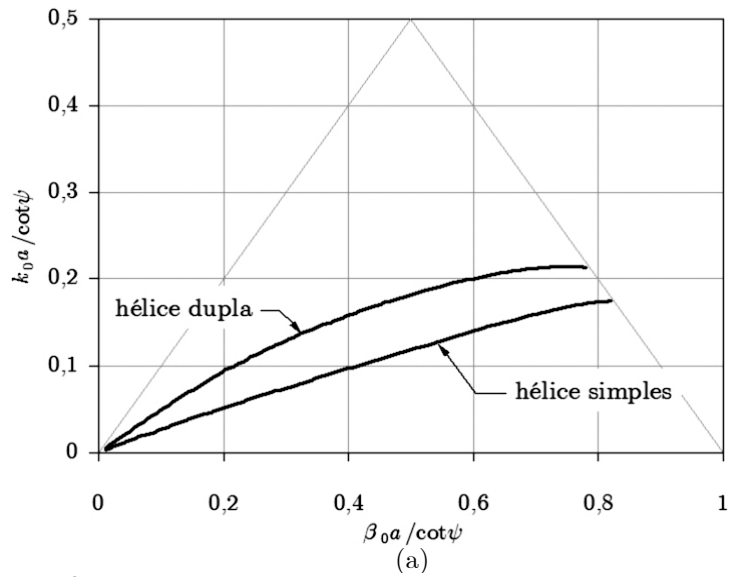


Figura 2.9.7 – Gráficos das curvas de dispersão (a) e (b) e impedância de interação (c) para uma hélice dupla e outra simples com os mesmos parâmetros, que são aqueles mostrados na Tabela 2.9.1.

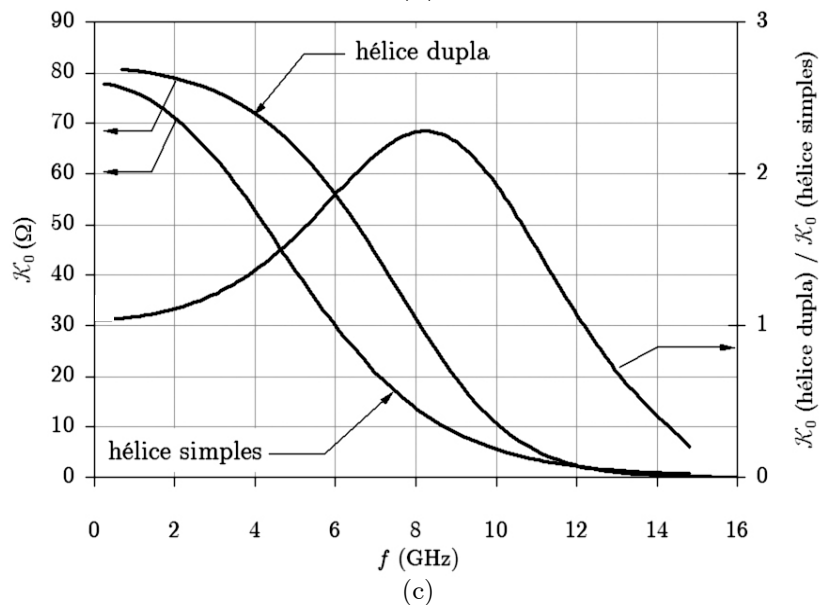
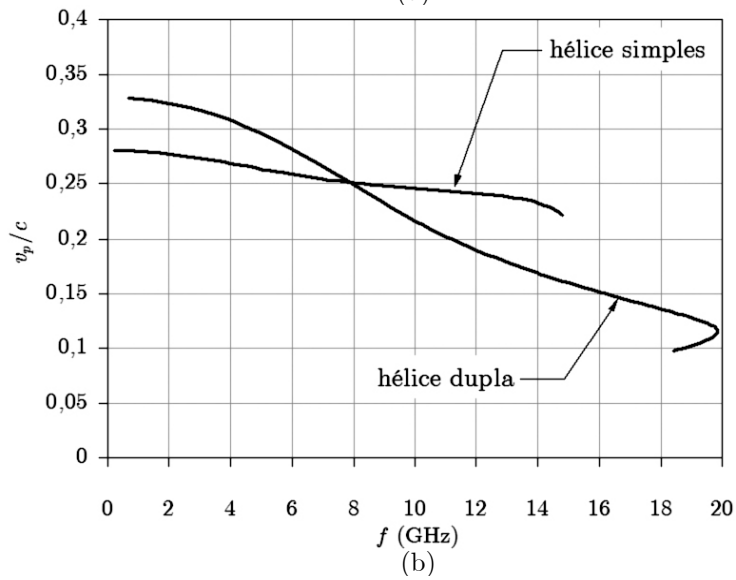
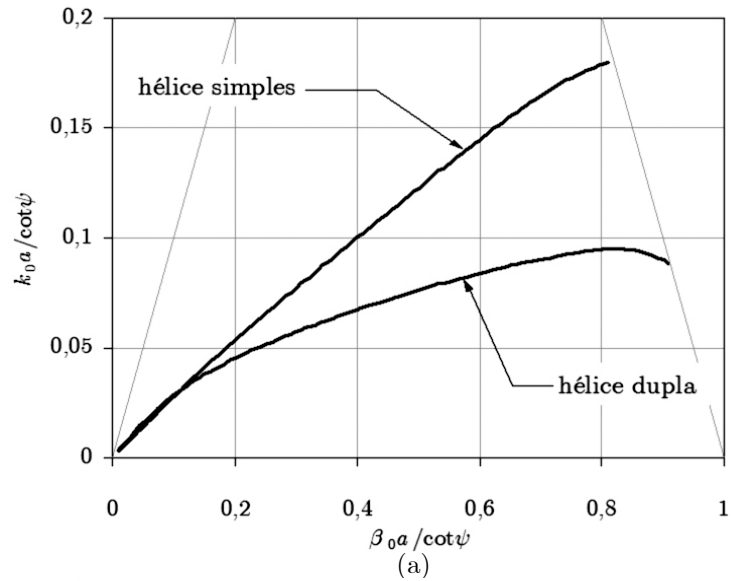


Figura 2.9.8 – Gráficos das curvas de dispersão (a) e (b) e impedância de interação (c) para uma hélice dupla e outra simples. Ambas têm a mesma velocidade de fase na frequência de 8 GHz, que é $0,25c$.

interação comparando as duas abordagens tanto para o caso da hélice simples quanto para a hélice dupla. O observado é que, para o caso da hélice simples, ambas as abordagens conduzem a resultados muito próximos, o que já foi apontado por Chodorow em seu trabalho. Contudo, para o caso da hélice dupla, há apreciável diferença nos resultados, como pode ser visto na Figura 2.9.7(b). Sem se aprofundar nos argumentos físico-matemáticos em si, pode-se notar que a diferença nas expressões finais de cada abordagem é que, como comentado na revisão bibliográfica, o coeficiente da corrente paralela à fita aparece ao quadrado na versão de Chodorow. Provavelmente este fato tem maior implicação no modo simétrico de propagação, existente na hélice dupla, justificando a necessidade de se utilizar a abordagem de Chodorow para a obtenção de resultados numéricos mais confiáveis.

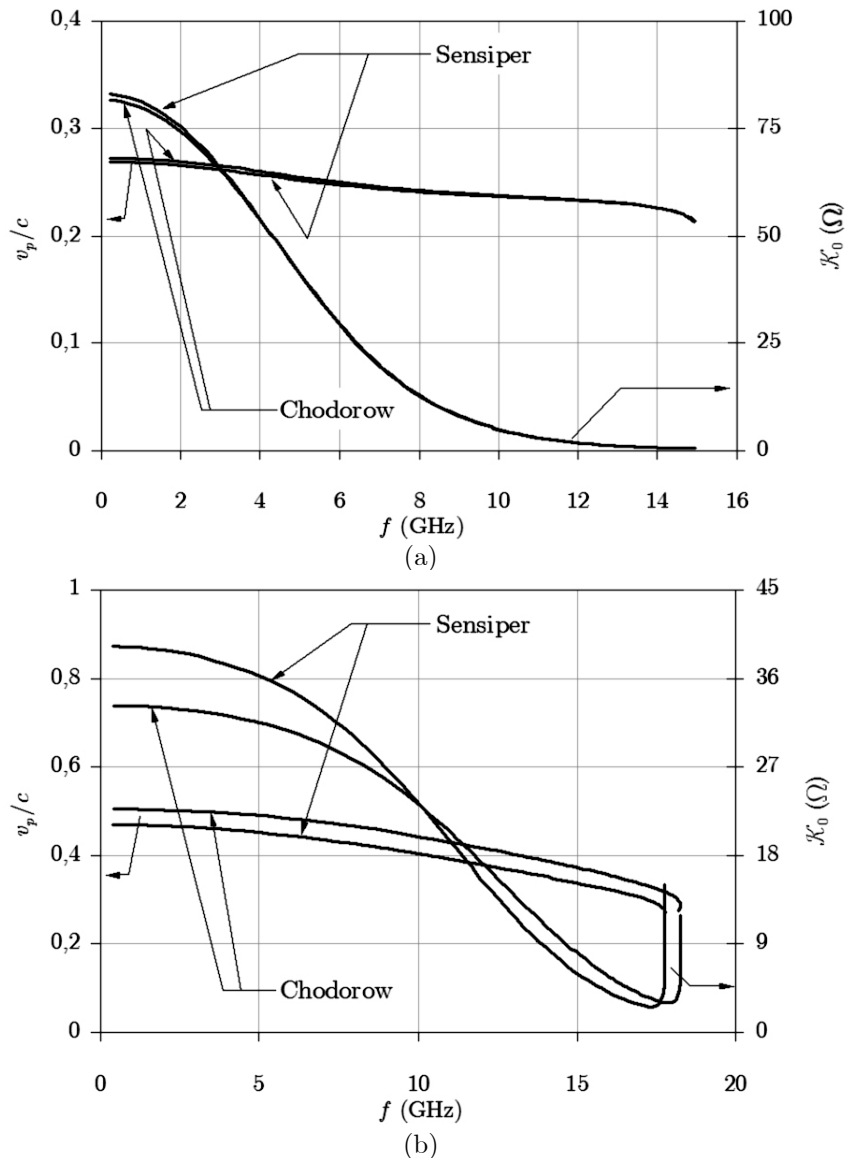


Figura 2.9.9 – Gráficos das curvas de velocidade de fase e impedância de interação considerando as equações de dispersão apresentadas por Sensiper e por Chodorow para (a) a hélice simples e (b) a hélice dupla.

Como dito na revisão bibliográfica, uma vantagem da estrutura helicoidal dupla em relação à simples é que ela possui menor susceptibilidade à excitação do modo reverso de propagação. Este modo, cujo harmônico dominante é o $l = -1$, é responsável por oscilações que ocorrem quando esta onda, que tem velocidade de fase contrária à fundamental consegue sincronizar com o feixe. Para a verificação deste fato, construíram-se as curvas de velocidade de fase e impedância de interação do modo fundamental e do primeiro modo reverso tanto para a hélice dupla quanto para a hélice simples. Estas curvas são apresentadas na Figura 2.9.10. Ambas as estruturas foram ajustadas para apresentar a mesma velocidade de fase $0,25c$ em 8 GHz. Nas curvas da Figura 2.9.10(a), nota-se que, enquanto a velocidade de fase do modo fundamental

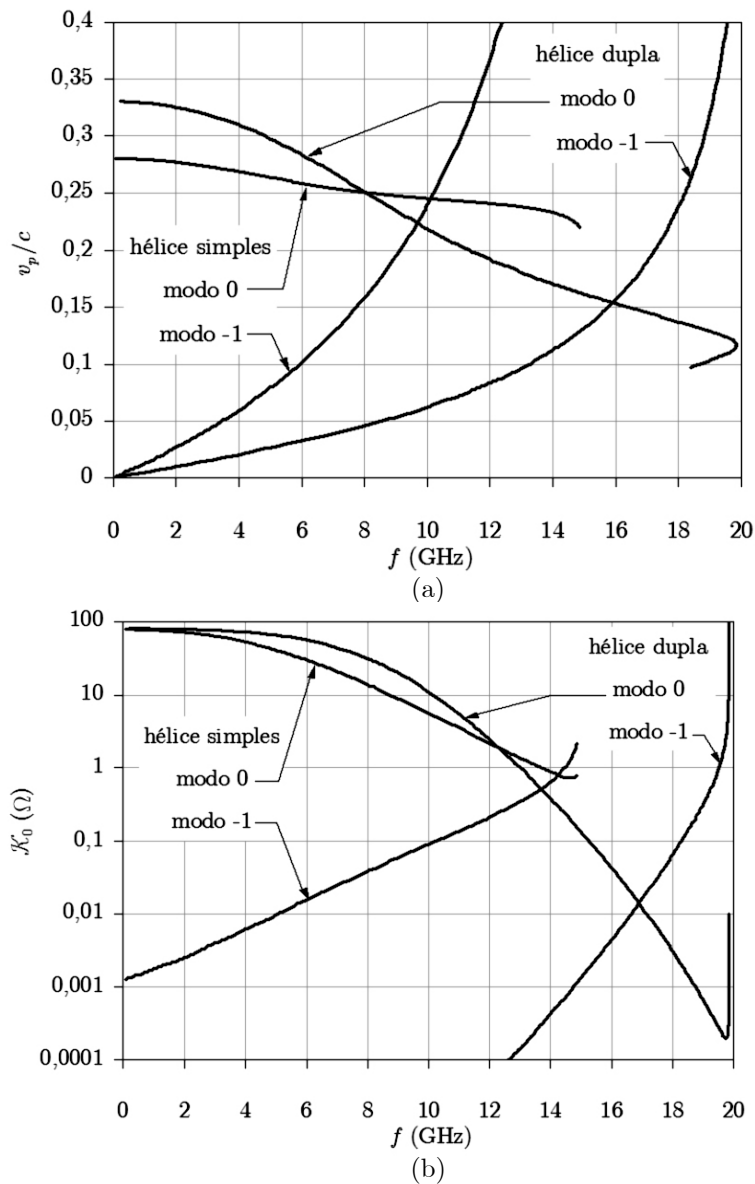


Figura 2.9.10 – Gráficos das curvas de (a) velocidade de fase e (b) impedância de interação para os modos fundamental e primeiro reverso considerando a hélice simples e a hélice dupla. Ambas as estruturas foram ajustadas para apresentarem velocidade de fase de $0,25c$ em 8 GHz

diminui com a frequência, o módulo da velocidade de fase do primeiro modo reverso aumenta rapidamente com a frequência. O ponto em que as velocidades de fase dos modos fundamental e reverso são iguais ocorre em frequências mais baixas para a hélice simples, em comparação com a hélice dupla. Em outras palavras, a frequência f_π é menor para a hélice simples em comparação com a hélice dupla. No que diz respeito à relação entre as impedâncias do modo fundamental e reverso, novamente confirma-se o comportamento reportado em [1][2]. A impedância de interação do modo reverso cresce com a frequência até o ponto em que se torna comparável àquela do modo fundamental. Para a hélice simples, essa equiparação ocorre para frequências menores em comparação com o caso da hélice dupla.

É interessante verificar, ainda, o comportamento da impedância de interação em função da posição radial dentro da estrutura de ondas lentas. A Figura 2.9.11 apresenta a impedância de interação dos modos fundamental e reverso em função da posição radial. Neste caso foram calculados os casos em que a frequência é igual a 8 GHz e igual a f_π , que é próxima de 15,5 GHz neste caso. O ponto 0 corresponde ao eixo da estrutura, onde o valor nominal de \mathcal{K}_0 é calculado e onde \mathcal{K}_{-1} é nulo.

Nota-se que as impedâncias de interação crescem em direção à superfície da hélice, onde atingem seu máximo. Para posições radiais posteriores, elas decaem até se anularem na parede da guia circular. Esse comportamento é perfeitamente previsível visto que o campo elétrico é somente perpendicular à parede da guia circular.

Em relação às frequências em que os resultados foram obtidos, verifica-se

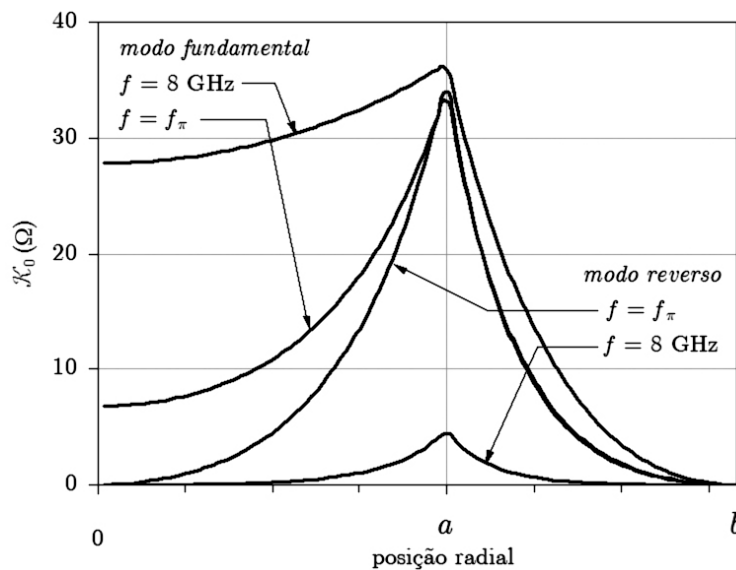


Figura 2.9.11 – Gráfico da impedância de interação em função da posição radial da SWS com hélice dupla para o modo fundamental e o modo reverso nas frequências de 8 GHz e em f_π . a é o raio da hélice e b é o raio da guia circular.

que \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_{-1} mantêm uma razão adequada em 8 GHz. Porém, como esperado, na frequência f_π , que é cerca de 15,5 GHz neste caso, ocorre grande diminuição de \mathcal{K}_0 e aumento \mathcal{K}_{-1} . Nota-se, ainda, que, na hélice dupla, a razão entre \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_{-1} é satisfatória mesmo para feixes da ordem de $0,5a$ ou um pouco maiores.

2.10 Conclusão

Neste capítulo, foi descrito o desenvolvimento de um modelo matemático para a estrutura de ondas lentas do tipo hélice dupla contraposta. Este é um modelo chamado “frio”, pois desconsidera o efeito da carga espacial devida ao feixe de elétrons. O modelo considera os seguintes parâmetros geométricos: O raio médio da hélice, seu período ou passo, a largura da fita, o raio da guia circular que a envolve e a permissividade dos suportes que a centralizam no interior desta guia.

Para a obtenção da equação de dispersão, utilizou-se a abordagem variacional descrita por Chodorow com sendo fisicamente mais consistente e capaz de fornecer resultados mais confiáveis que aquela descrita por Sensiper. Contudo, os resultados das duas abordagens foram comparados na seção de resultados teóricos.

A impedância de interação foi calculada de acordo com a fórmula de Pierce, de forma que o modelo oferece a possibilidade de calcular a impedância de qualquer harmônico de interesse, e não apenas a do fundamental. De fato, na seção de resultados apresentou-se um estudo da relação entre a impedância do modo fundamental é do primeiro modo reverso, que é responsável pelas limitações das hélices simples em altas potências.

Na seção de resultados, apresentou-se um estudo de como a variação de cada um dos parâmetros geométricos citados anteriormente afeta as características de dispersão e impedância de interação da estrutura de ondas lentas composta pela hélice dupla e a guia circular. Faz-se ainda um estudo comparativo das características da hélice dupla em relação à hélice simples, de forma a reproduzir resultados já mencionados na literatura e, eventualmente, produzir algum resultado ainda não mencionado.

Os resultados obtidos na análise das relações de impedância entre o modo reverso e o modo fundamental confirmaram a característica de menor susceptibilidade à excitação do modo reverso para a hélice dupla. Para esta estrutura o modo reverso apresentou menor impedância e, mesmo quando excitado, este modo ocorre em frequências maiores que na hélice simples.

Portanto, o modelo desenvolvido constitui uma ferramenta matemática capaz de auxiliar no projeto de estruturas de ondas lentas, tanto para escolher qual tipo de estrutura utilizar como para ajustar seus parâmetros de forma a obter a maior impedância de interação possível para uma dada velocidade de fase.

Capítulo 3

Teoria da Medida e Aparato Experimental

3.1 Introdução

Este capítulo descreve a teoria das medidas da velocidade de fase e da impedância de interação, bem como a parte experimental deste trabalho, que consistiu na construção de uma plataforma para a realização das medidas citadas. A realização dessas medidas tem como objetivo a validação do modelo matemático desenvolvido, bem como verificar suas deficiências.

Convém lembrar que, embora o modelo matemático desenvolvido considere a hélice de fita dupla contraposta, a estrutura de testes é do tipo ring-bar. Isto quer dizer que se deve esperar resultados de velocidade de fase com maior dispersão e valores de impedância de interação um pouco maiores do que o previsto teoricamente.

O aparato experimental serve como protótipo de uma plataforma para a caracterização de estruturas de ondas lentas de produção em série em uma futura instalação de fabricação de TWT.

Após esta introdução, o restante deste capítulo está subdividido em mais 5 seções, que são:

3.2 – A Medida da Velocidade de Fase, que descreve a teoria da medida da velocidade de fase para uma determinada estrutura;

3.3 – Medida da Impedância de Interação, que descreve a teoria da medida da impedância de interação segundo a técnica de perturbação não ressonante;

3.4 – O Aparato Experimental, que descreve a construção da plataforma de medida e da estrutura de teste;

3.5 – Procedimento de Medida, que descreve os passos realizados no procedimento de medida de forma detalhada.

3.6 – Resultados das Medidas e Discussão, que apresenta os resultados das medidas de velocidade de fase e impedância de interação, comparando-as com os resultados previstos teoricamente;

3.7 – Conclusão, que sumariza as idéias apresentadas e os resultados experimentais obtidos.

3.2 A Medida da Velocidade de Fase

Para a determinação da velocidade de fase em função da frequência $v_p(f)$ é necessário medir a constante de fase em função da frequência $\beta(f)$. Então, a velocidade de fase normalizada será obtida fazendo

$$\frac{v_p}{c}(f) = \frac{k_0(f)}{\beta(f)}, \quad (3.2.1)$$

onde $k_0(f) = 2\pi f/c$ é a constante de propagação do espaço livre.

Não existe uma única forma para a determinação da constante de fase para uma estrutura de guiagem eletromagnética. Neste trabalho, exploram-se duas delas, de forma a obter a validação de ambos os métodos e uma melhor compreensão da medida.

O primeiro método diz respeito ao próprio conceito de velocidade de fase e utiliza a inclinação da curva de fase em função da distância percorrida, nesse caso, o eixo axial da estrutura. O segundo método visa obter a constante de fase por meio do comprimento de onda guiado da estrutura em questão.

3.2.1 Método do Coeficiente Angular da Curva de Fase

Deslocando um curto através do eixo da estrutura de ondas lentas, e medido a variação do coeficiente de reflexão Γ_1 na porta de excitação, é possível construir uma curva da fase da onda refletida em função da posição do curto. A Figura 3.2.1 ilustra essa situação, mostrando um trecho da estrutura de ondas lentas, onde o curto está se movendo. Considere-se que a porta de excitação é a porta 1 e está à esquerda da Figura 3.2.1. A onda incidente é denotada por V_1^+ e a onda refletida em direção à porta 1 é denotada por V_1^- . O curto, cuja geometria e dimensões serão discutidas mais tarde, é constituído por uma pequena hélice metálica. Como este dispositivo não é um curto perfeito, e nem é

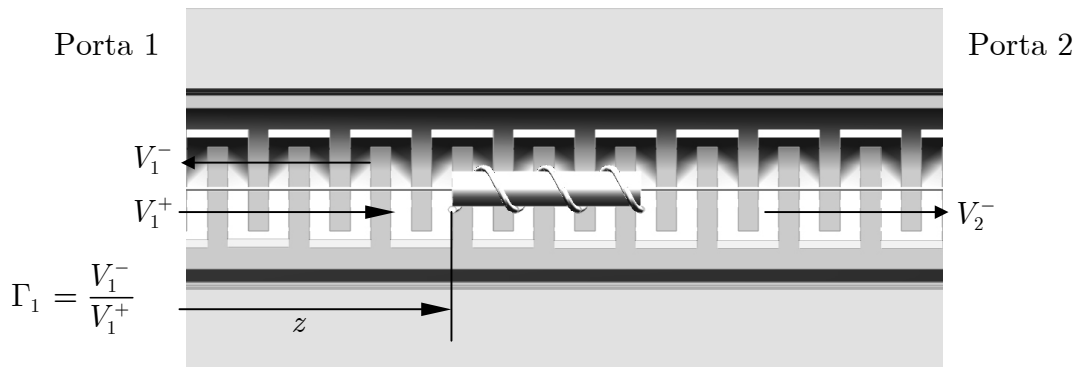


Figura 3.2.1 – Deslocamento do curto helicoidal, cuja forma e dimensões discutir-se-ão posteriormente, no eixo da estrutura de ondas lentas. Para cada posição z do curto tem-se uma respectiva fase φ do coeficiente de reflexão.

necessário que o seja, parte da onda incidente não é refletida e prossegue em direção à porta 2, sendo denotada por V_2^- . É importante que não haja uma componente V_2^+ no sistema, isto é, uma onda refletida da porta 2 em direção à porta 1, para que a informação de variação de fase medida seja devida somente à variação da posição do curto. Portanto, utiliza-se uma terminação casada acoplada à porta 2, de forma a contribuição de uma onda V_2^+ na onda V_1^- seja desprezível.

O coeficiente de reflexão na porta 1, isto é, Γ_1 pode, então, ser escrito em termo do seu módulo e fase, que é o que se mede efetivamente com um analisador vetorial de rede, ou seja, $\Gamma_1 = |\Gamma_1|e^{j\varphi}$. Mas, pela sua definição, o coeficiente de reflexão é a razão da onda refletida pela onda incidente na porta em questão. Logo,

$$\Gamma_1 = \frac{V_1^-}{V_1^+}. \quad (3.2.1.1)$$

Escrevendo as ondas incidente e refletida em termos de sua amplitude e fase na posição do curto, segundo a convenção de sinais e sentidos de propagação adotados no trabalho, tem-se

$$\Gamma_1 = \frac{V_1^- e^{j\beta z}}{V_1^+ e^{-j\beta z}} = \frac{|V_1^-|}{|V_1^+|} e^{j\pi} e^{j2\beta z}. \quad (3.2.1.2)$$

Desta forma, a fase do coeficiente de reflexão é dada por $\varphi = \pi + 2\beta z$, que derivando em ambos os lados, produz

$$d\varphi = 2\beta dz. \quad (3.2.1.3)$$

Portanto, a constante de fase é determinada por

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dz}, \quad (3.2.1.4)$$

ou seja, por metade do coeficiente angular da curva de fase em função da posição do curto. Contudo, (3.2.1.4) merece considerações adicionais pela forma como foi deduzida. Medindo o coeficiente de reflexão, (3.2.1.4) fornece a constante de fase da onda que volta, logo a onda no sentido de z positivo, isto é, que se propaga da porta 1 para a porta 2, é dada por

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dz}, \quad (3.2.1.5)$$

que é a expressão geralmente encontrada na literatura [24][25][26][27]. Mas, ainda assim, é preciso ter em mente que as afirmações acima são válidas quando o curto é deslocado da porta 1 para a porta 2. Caso o deslocamento seja realizado no sentido contrário, isto é, em direção à porta 1, então (3.2.1.4)

fornece a constante de fase desejada. Logo, o sinal em (3.2.1.4) e (3.2.1.5) é, a princípio, irrelevante em uma estrutura recíproca, como é o caso.

3.2.2 Método do Comprimento de Onda Guiado

Como mencionado anteriormente, a constante de propagação de uma onda no espaço livre (também denominada número de onda) é $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda da onda em questão. Para uma onda guiada por determinada estrutura, a constante de propagação muda para $\beta = 2\pi/\lambda_g$, onde λ_g é o comprimento de onda guiado da onda em questão. Em particular, $\beta > k_0$ para as estruturas de ondas lentas. Portanto, o comprimento de ondas guiado é menor que o comprimento de ondas no espaço livre, isto é, $\lambda_g < \lambda_0$.

É possível encontrar o comprimento de onda guiado de uma onda que se propaga em uma estrutura de ondas lentas, pois sua informação de fase se repete a cada $\lambda_g/2$ percorrido. Basta, então, medir a distância em que as informações de fase se repetem na curva de fase em função da posição, obtida pelo deslocamento do curto.

Havendo, então, determinado $\lambda_g/2$ e, conseqüentemente, β para uma dada freqüência, a velocidade de fase normalizada é dada por

$$\frac{v_p}{c} = \frac{k_0}{\beta} = \frac{\lambda_g}{\lambda_0}. \quad (3.2.1)$$

A Figura 3.2.2 mostra curvas típicas de fase em função da posição do curto para uma determinada freqüência. No caso da Figura 3.2.2(a), a curva é construída de forma contínua, possibilitando encontrar a inclinação da curva de variação de fase. No caso da Figura 3.2.2(b), a curva é construída de forma periódica, possibilitando encontrar a metade do comprimento de onda guiado.

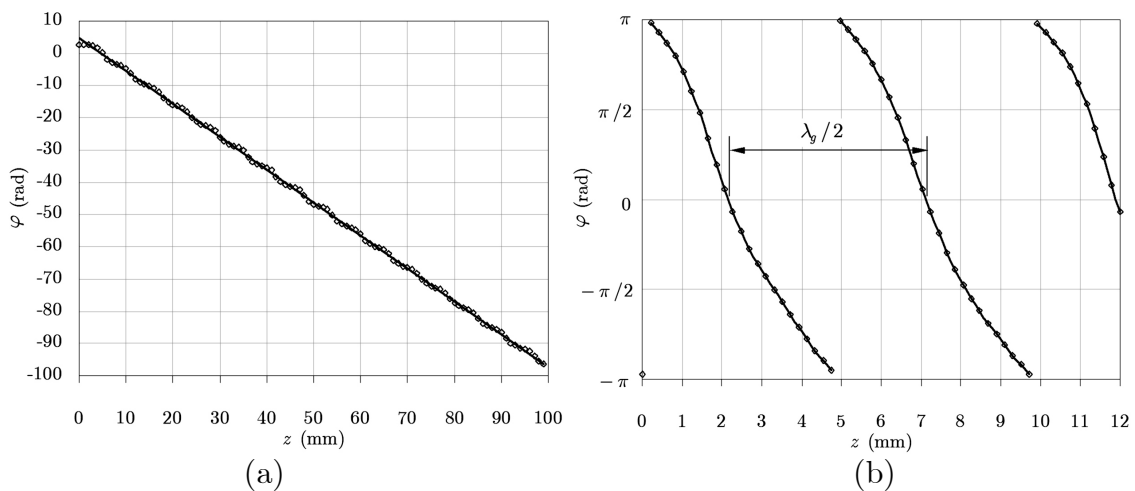


Figura 3.2.2 – Curvas de fase em função da posição do curto helicoidal para utilização no método do coeficiente angular (a) e no método do comprimento de onda guiado (b).

3.3 Medida da Impedância de Interação

Assim como a medida de velocidade de fase, a medida de impedância de interação é bastante indireta. Isto significa que se necessita de uma teoria para associar o parâmetro realmente medido pelo equipamento àquele que se quer estimar. Para a impedância de interação o método utilizado é uma técnica de perturbação, ou seja, este parâmetro está associado à variação de algum outro parâmetro mensurável, provocada por uma perturbação no campo eletromagnético. Se essa perturbação for na frequência de ressonância de uma cavidade, por exemplo, tem-se o método da perturbação ressonante. Por outro lado, se a perturbação acarretar uma mudança da constante de fase, tem-se a perturbação não-ressonante. Tanto a frequência de ressonância quanto a constante de fase podem ser medidas. Particularmente, a seção anterior tratou da medida da constante de fase, que conduz à estimativa da velocidade de fase.

Esta seção descreve a obtenção de expressões para a utilização nas medidas de impedância de interação segundo técnica de perturbação não ressonante. Isto é, procura-se uma expressão que relacione a impedância de interação com uma variação na constante de fase, ou seja,

$$\mathcal{K}_0 = \text{constante} f(r_p, \varepsilon_p) (\Delta\beta / \beta), \quad (3.3.1)$$

onde $f(r_p, \varepsilon_p)$ é uma função dos parâmetros do objeto perturbador. Realiza-se, também, um estudo dessa função com a finalidade de entender como os parâmetros do objeto perturbador que, neste caso particular, é um bastão dielétrico com raio r_p e permissividade relativa ε_p , influenciam na medida.

3.3.1 Expressão Para Perturbação Não Ressonante

Nessa seção é construída uma expressão geral para a integral de perturbação para uma estrutura periódica de guiagem. Inicialmente, admitir-se-á que existam perdas e condutores, mas ao final, particularizar-se-á para o caso livre de perdas e sem condutores, visto que a integral será aplicada para um objeto perturbador dielétrico.

Considere-se que o campo eletromagnético de um modo que se propaga no sistema hipotético criado possa ser expresso em termos de uma função periódica, de período p , e cuja dependência ao longo da direção de propagação seja $e^{-\Gamma z}$. As expressões para esses campos podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{H}(\rho, \varphi, z) \end{aligned} e^{-\Gamma z}. \quad (3.3.1.1)$$

As funções \mathbf{E} e \mathbf{H} são periódicas em z , o que significa que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z_2) &= \mathbf{E}(\rho, \varphi, z_1 + p) \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z_2) &= \mathbf{H}(\rho, \varphi, z_1 + p) \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

Semelhantemente, a densidade de corrente de condução sobre os condutores, que deve obedecer às mesmas hipóteses, é dada por

$$\mathbf{J}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{J}(\rho, \varphi, z)e^{-\Gamma z}. \quad (3.3.1.3)$$

A constante de propagação axial Γ é uma função da frequência e é dada por

$$\Gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega), \quad (3.3.1.4)$$

onde a parte real $\alpha(\omega)$ descreve as perdas do sistema e a parte imaginária $\beta(\omega)$ é a constante de fase.

Se, para uma dada frequência, o sistema for perturbado de alguma forma, pode-se esperar que haja variação na constante de propagação, bem como em todas as quantidades que caracterizam os campos no sistema. Exemplos dessa perturbação podem ser a alteração na permissividade ou na permeabilidade de alguma região, mediante a introdução de um novo material dielétrico ou magnético. Pode-se, ainda, considerar a perturbação provocada pela presença de um condutor perfeito em alguma região do sistema.

Se a perturbação for realizada de forma a preservar a natureza periódica da estrutura, pode-se escrever os campos e densidades de correntes perturbados, respectivamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{E}_l(\rho, \varphi, z) \\ \mathbf{H}_l(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{H}_l(\rho, \varphi, z) \end{aligned} e^{-\Gamma_l z}, \quad (3.3.1.5)$$

$$\mathbf{J}_l(\rho, \varphi, z) = \mathbf{J}_l(\rho, \varphi, z)e^{-\Gamma_l z}. \quad (3.3.1.6)$$

A partir deste ponto, as grandezas perturbadas serão denotadas por um sinal de exclamação, como indicado em (3.3.1.5) e (3.3.1.6). Tanto do caso perturbado quanto no caso não perturbado, o divergente do campo elétrico é nulo, tendo em vista que se trata, aqui, de um modelo frio em que não se considera o efeito de cargas espaciais.

As leis de Faraday e de Ampère, para campos com dependência harmônica nas condições não perturbada e perturbada são, respectivamente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (3.3.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad (3.3.1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_l = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_l, \text{ e} \quad (3.3.1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_I = \mathbf{J}_I + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_I. \quad (3.3.1.10)$$

Para a construção da integral de perturbação, tome-se a seguinte quantidade $\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*)$. Utilizando a identidade vetorial do produto misto, esta divergência resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) &= \mathbf{E}^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}_I - \mathbf{H}_I \cdot \nabla \times \mathbf{E}^* \\ &+ \mathbf{E}_I \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* - \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E}_I. \end{aligned} \quad (3.3.1.11)$$

Utilizando as relações entre os campos, oriundas de (3.3.1.7) a (3.3.1.10), (3.3.1.11) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) &= -j\omega(\mu_r - 1)\mu_0\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_I - j\omega(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_I \\ &- (\mathbf{J}_I \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_I). \end{aligned} \quad (3.3.1.12)$$

Tendo em vista os campos periódicos com dependência exponencial em z , a divergência desenvolvida em (3.3.1.11) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) &= \nabla \cdot [(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*)e^{-(\Gamma_I + \Gamma^*)z}] = \\ &= \nabla \cdot [(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) - (\Gamma_I + \Gamma^*)\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*)]e^{-(\Gamma_I + \Gamma^*)z}. \end{aligned} \quad (3.3.1.12)$$

Por outro lado, a mesma consideração pode ser aplicada à (3.3.1.12), que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) &= -[j\omega(\mu_r - 1)\mu_0\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_I + j\omega(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_I \\ &+ (\mathbf{J}_I \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_I)]e^{-(\Gamma_I + \Gamma^*)z}. \end{aligned} \quad (3.3.1.13)$$

Igualando (3.3.1.12) e (3.3.1.13), o termo exponencial, que é comum, pode ser eliminado. Isto resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) - (\Gamma_I + \Gamma^*)\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*)] &= \\ = -j\omega[(\mu_r - 1)\mu_0\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_I + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_I] - (\mathbf{J}_I \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_I). \end{aligned} \quad (3.3.1.14)$$

Integrando ambos os lados de (3.3.1.14) em todo o volume, pode-se reescrever esta expressão por meio do teorema da divergência como uma integral de superfície, isto é,

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS - (\Gamma_I + \Gamma^*) \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV &= \\ = -j\omega \int_V [(\mu_r - 1)\mu_0\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_I + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_I] dV - \int_V (\mathbf{J}_I \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_I) dV \end{aligned} \quad (3.3.1.15)$$

Por argumentação semelhante àquela apresentada na seção 2.7, quando foi construída a integral de variação, pode-se demonstrar que a integral de

superfície em (3.3.1.14) também se anula. Considere-se o volume de integração mostrado na Figura 3.3.1. Tomando, primeiramente, as superfícies circulares em $z = z_0$ e $z = z_0 + p$, tem-se que

$$\int_{S=z_0} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dS + \int_{S=z_0+p} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot (-\mathbf{a}_z) dS = 0,$$

visto que, devido à periodicidade dos campos, $\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*$ em $z = z_0$ é igual à mesma quantidade em $z = z_0 + p$.

Considerando, agora, a superfície cilíndrica $\rho = b$, pode-se escrever a integral de superfície em (3.3.1.14) nas seguintes formas equivalentes,

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_S [\mathbf{H}_I \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^*) + \mathbf{H}^* \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_I)] dS = \\ &= \oint_S [\mathbf{E}^* \cdot (\mathbf{H}_I \times \mathbf{n}) + \mathbf{E}_I \cdot (\mathbf{H}^* \times \mathbf{n})] dS. \end{aligned} \quad (3.3.1.16)$$

Mas, segundo as condições de contorno dos campos em uma estrutura fechada com superfícies perfeitamente condutoras, (3.3.1.16) é nula. Portanto, (3.3.1.15) se reduz a

$$\begin{aligned} -(\Gamma_I + \Gamma^*) \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_I + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV &= -j\omega \int_V [(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_I \\ &+ (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_I] dV - \int_V (\mathbf{J}_I \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_I) dV \end{aligned} \quad (3.3.1.17)$$

Considerar-se-á, agora, a situação livre de perdas. Isto significa admitir que

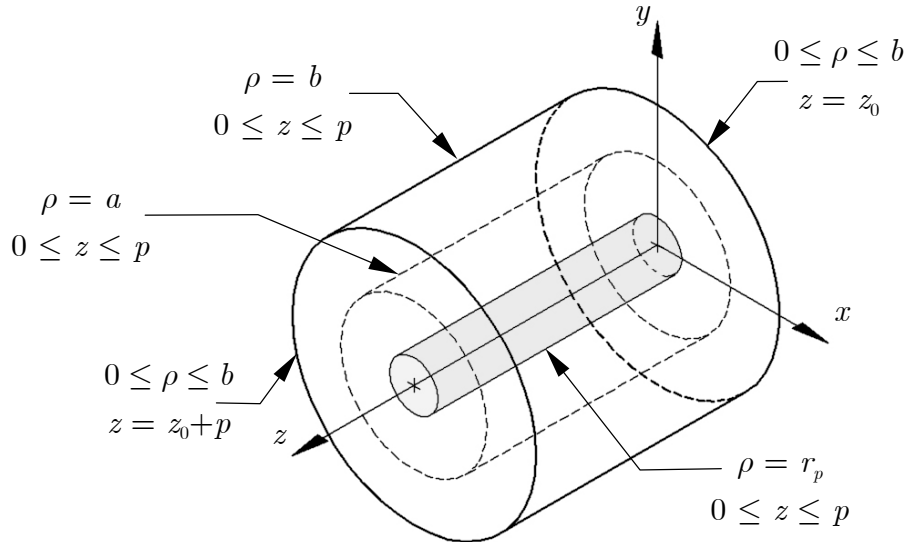


Figura 3.3.1 – Ilustração do volume de integração, que consiste na superfície cilíndrica $\rho = b$, $0 \leq z \leq p$ e nas superfícies circulares planas $z = 0$, $0 \leq \rho \leq b$ e $z = p$, $0 \leq \rho \leq b$. No eixo, tem-se o objeto perturbador que é um bastão dielétrico com raio r_p e permissividade relativa ε_p . Na superfície $\rho = a$, $0 \leq z \leq p$ são atribuídas as condições de contorno da estrutura de ondas lentas.

a constante de propagação axial Γ é um número apenas imaginário, isto é, $\Gamma(\omega) = j\beta(\omega)$. Portanto, para uma estrutura de ondas progressivas sem perdas, tem-se a seguinte relação

$$\Gamma_l + \Gamma^* = j(\beta_l - \beta) = j\Delta\beta, \quad (3.3.1.18)$$

que corresponde à variação na constante de fase devido à perturbação no sistema. Aplicando (3.3.1.18) em (3.3.1.17), obtém-se

$$\Delta\beta \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_l + \mathbf{E}_l \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV = \omega \int_V [(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_l + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_l] dV + \int_V (\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_l) dV. \quad (3.3.1.19)$$

Considere-se, agora, que as grandezas perturbadas possam ser relacionadas com aquelas da situação não-perturbada por meio das relações

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_l &= \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} \\ \mathbf{E}_l &= \mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.3.1.20)$$

onde $\Delta\mathbf{E}$ e $\Delta\mathbf{H}$ representam as perturbações nos campos elétrico e magnético, respectivamente. Sob esta consideração, a integral do lado esquerdo de (3.3.1.19) pode ser desenvolvida como segue

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_l + \mathbf{E}_l \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV &= \int_V [\mathbf{E}^* \times (\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}) + (\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}) \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{a}_z dV = \\ &= \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV + \int_V (\mathbf{E}^* \times \Delta\mathbf{H} + \Delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV \end{aligned} \quad (3.3.1.21)$$

A primeira integral do lado direito da igualdade em (3.3.1.21) é identificada como 4 vezes a média temporal do fluxo de potência, isto é, a potência total P na direção de propagação do sistema não perturbado sobre um comprimento periódico p . Pode-se, então, escrever

$$\int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV = 4Pp, \quad (3.3.1.22)$$

Para se obter a interpretação física da segunda integral do lado direito da igualdade em (3.3.1.21), pode-se considerar que ela é parte da diferença entre a potência propagada na estrutura no caso perturbado e no caso não perturbado. Esta diferença pode ser expressa segundo

$$P_l - P = \frac{1}{4p} \left[\int_V (\mathbf{E}_l^* \times \mathbf{H}_l + \mathbf{E}_l \times \mathbf{H}_l^*) \cdot \mathbf{a}_z dV - \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV \right]. \quad (3.3.1.24)$$

Escrevendo (3.3.1.24) em termos dos campos expressos conforme as relações em (3.3.1.20), obtém-se

$$P_l - P = \frac{1}{4p} \left[2 \int_V (\Delta \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV + \int_V (\Delta \mathbf{E}^* \times \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV \right]. \quad (3.3.1.25)$$

Admitindo que o fluxo de potência seja o mesmo antes e depois da perturbação na estrutura, tem-se que $P_l - P = 0$ e, portanto,

$$2 \int_V (\Delta \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV = - \int_V (\Delta \mathbf{E}^* \times \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{a}_z dV. \quad (3.3.1.26)$$

O lado direito de (3.3.1.26) corresponde ao quadrado da variação do campo em torno da perturbação. Já que, por hipótese, a variação da constante de propagação é pequena, os termos das integrais tornam-se bastante pequenos quando comparados com o termo que representa o fluxo de potência total. Portanto, é válido escrever que

$$\left| \int_V (\mathbf{E}^* \times \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dV \right| \ll \left| \int_V (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dV \right|. \quad (3.3.1.27)$$

Dessa forma, pode-se escrever a fórmula final da integral de perturbação, que é

$$\frac{\Delta \beta}{\omega} = \frac{\int_V [(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_l + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_l] dV + \int_V (\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_l) dV}{4Pp}. \quad (3.3.1.28)$$

Para a obtenção da quantidade que é efetivamente medida, isto é, $\Delta \beta / \beta$, multiplica-se (3.3.1.28) por $1/\beta$, o que resulta em

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{\omega}{4\beta Pp} \left\{ \int_V [(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}_l + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_l] dV + \int_V (\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_l) dV \right\}. \quad (3.3.1.29)$$

3.3.2 A Perturbação de um Bastão Dielétrico em uma Estrutura Periódica

Considera-se, agora, o caso particular em que o objeto perturbador é um bastão dielétrico introduzido no eixo da estrutura de ondas lentas, como ilustrado na Figura 3.3.1.1. O bastão é caracterizado por seu raio r_p e por sua permissividade elétrica relativa ε_p . Considera-se, ainda, que a permeabilidade

magnética do bastão seja a mesma do espaço livre e que sua permissividade elétrica não varie pelo menos com a posição. Por causa dessa consideração e devido ao fato de não haver correntes induzidas no objeto perturbador, visto que é dielétrico, (3.3.1.29) é reduzida para

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{k_0(\varepsilon_r - 1)}{4Z_0\beta Pp} \int_V \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}_l dV. \quad (3.3.2.1)$$

O campo elétrico sustentado por uma estrutura periódica do tipo estudado neste trabalho pode ser escrito, segundo desenvolvimento do capítulo 2, da seguinte forma

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \mathbf{E}_{l,m}(\rho, \varphi, z) = \sum_{l,m} \mathbf{E}_{l,m}(\rho) e^{jl\varphi} e^{-j\beta_{l,m}z}, \quad (3.3.2.2)$$

onde $\beta_{l,m}$, que é a constante de fase axial do harmônico espacial de ordem l,m , é definida segundo

$$\beta_{l,m} = \beta_{0,0} + (l + 2m) \frac{2\pi}{p}. \quad (3.3.2.3)$$

Substituindo as expressões do campo elétrico, em termos de seus harmônicos espaciais, na expressão reduzida para a perturbação, obtém-se

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{k_0(\varepsilon_r - 1)}{4Z_0\beta Pp} \int_V \sum_{\substack{l,m \\ n,q}} \mathbf{E}_{l,m}^*(\rho) \cdot \mathbf{E}_{n,q}(\rho) e^{j(n-l)\varphi} e^{j(l-n)\frac{2\pi z}{p}} e^{j(m-q)\frac{4\pi z}{p}} dV. \quad (3.3.2.4)$$

Pode-se verificar as seguintes relações de ortogonalidade para os harmônicos espaciais

$$\int_0^{2\pi} e^{-j(n-l)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta(l, n), \quad (3.3.2.5)$$

$$\int_0^p e^{-j(m-q)\frac{4\pi z}{p}} dz = p\delta(m, q). \quad (3.3.2.6)$$

A integração de (3.3.2.4) é realizada somente sobre o bastão perturbador, visto que o termo $(\varepsilon_r - 1)$ se anula fora do dielétrico, onde $\varepsilon_r = 1$. Realizando, então, a integração das variáveis axial e azimutal, verifica-se que somente os harmônicos de mesma ordem contribuem em (3.3.2.4). Portanto, a expressão para a variação na constante de fase pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} \sum_{l,m} \int_0^{r_p} \mathbf{E}_{l,m}^*(\rho) \cdot \mathbf{E}_{l,m}(\rho) \rho d\rho. \quad (3.3.2.7)$$

Sob a hipótese de consideração apenas do modo com simetria azimutal, segue que somente o modo fundamental, isto é, $l = 0$ e $m = 0$, deve ser mantido na soma. Com isso, (3.3.2.7) sofre mais uma redução, se tornando

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} \int_0^{r_p} \mathbf{E}^*(\rho) \cdot \mathbf{E}(\rho) \rho d\rho. \quad (3.3.2.8)$$

Como de costume, suprimiram-se os indexadores $_{0,0}$ para simplificar a notação.

Desenvolvendo o produto escalar em (3.3.2.8), considerando que se pode escrever o campo elétrico em termo de suas componentes do sistema de coordenadas, isto é, $\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\varphi \mathbf{a}_\varphi + E_z \mathbf{a}_z$. Contudo, com o intuito de estudar a contribuição dos campos TM e TE, na perturbação realizada, é preferível expressar (3.3.2.9) da seguinte forma

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} \int_0^{r_p} [E_{TM}^*(\rho)E_{ITM}(\rho) + E_{TE}^*(\rho)E_{ITE}(\rho)] \rho d\rho, \quad (3.3.2.9)$$

onde

$$E_{TM}(\rho) = E_z(\rho) + E_\rho(\rho) \quad e \quad (3.3.2.10)$$

$$E_{TE}(\rho) = E_\varphi(\rho). \quad (3.3.2.11)$$

Portanto, (3.3.2.9) pode ser escrita como

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} \left[\int_0^{r_p} [E_z^*(\rho)E_{Iz}(\rho) + E_\rho^*(\rho)E_{I\rho}(\rho)] \rho d\rho + \int_0^{r_p} E_\varphi^*(\rho)E_{I\varphi}(\rho) \rho d\rho \right]. \quad (3.3.2.12)$$

As integrais em (3.3.2.12) podem ser calculadas diretamente, visto que as componentes do campo elétrico na região do bastão para os casos perturbado e não-perturbado, respectivamente, são

$$E_{I\rho}(\rho) = \frac{j\beta_l}{\gamma_l} A_l I_0'(\gamma_l \rho), \quad (3.3.2.13)$$

$$E_{I\varphi}(\rho) = -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_l} C_l I_0'(\gamma_l \rho), \quad (3.3.2.14)$$

$$E_{Iz}(\rho) = A_l I_0(\gamma_l \rho), \quad (3.3.2.15)$$

$$E_\rho^*(\rho) = -\frac{j\beta}{\gamma} A^* I_0'(\gamma \rho), \quad (3.3.2.16)$$

$$E_{\varphi}^*(\rho) = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma} C^* I_0'(\gamma\rho), \text{ e} \quad (3.3.2.17)$$

$$E_z^*(\rho) = A^* I_0(\gamma\rho). \quad (3.3.2.18)$$

A primeira integral em (3.3.2.12) resulta em

$$\int_0^{r_p} [E_z^*(\rho)E_{Iz}(\rho) + E_{\rho}^*(\rho)E_{I\rho}(\rho)]\rho d\rho = A^* A_I \left[\int_0^{r_p} I_0(\gamma\rho)I_0(\gamma_I\rho)\rho d\rho + \frac{\beta\beta_I}{\gamma\gamma_I} \int_0^{r_p} I_0'(\gamma\rho)I_0'(\gamma_I\rho)\rho d\rho \right]. \quad (3.3.2.19)$$

A segunda integral em (3.3.2.12) resulta em

$$\int_0^{r_p} E_{\varphi}^*(\rho)E_{I\varphi}(\rho)\rho d\rho = C^* C_I \frac{k_0^2 Z_0^2}{\gamma\gamma_I} \int_0^{r_p} I_0'(\gamma\rho)I_0'(\gamma_I\rho)\rho d\rho. \quad (3.3.2.20)$$

Portanto, (3.3.2.12) passa a ser escrita como

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} (A^* A_I \tau_{TM} + C^* C_I \tau_{TE}), \quad (3.3.2.21)$$

onde

$$\tau_{TM} = \int_0^{r_p} I_0(\gamma\rho)I_0(\gamma_I\rho)\rho d\rho + \frac{\beta\beta_I}{\gamma\gamma_I} \int_0^{r_p} I_0'(\gamma\rho)I_0'(\gamma_I\rho)\rho d\rho \text{ e} \quad (3.3.2.22)$$

$$\tau_{TE} = \frac{k_0^2 Z_0^2}{\gamma\gamma_I} \int_0^{r_p} I_0'(\gamma\rho)I_0'(\gamma_I\rho)\rho d\rho \quad (3.3.2.23)$$

são fatores de correção devido à contribuição dos campos TM e TE.

Adicionalmente, pode-se identificar os coeficientes de amplitude A e C com os campos elétrico e magnético, respectivamente, calculados no eixo da estrutura, isto é, em $\rho = 0$. Visto que $I_0(0) = 1$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} E_z(\rho=0) &= E_{z(0)} = A \\ E_{Iz}(\rho=0) &= E_{Iz(0)} = A_I, \end{aligned} \quad (3.3.2.24)$$

$$\begin{aligned} H_z(\rho=0) &= H_{z(0)} = C \\ H_{Iz}(\rho=0) &= H_{Iz(0)} = C_I. \end{aligned} \quad (3.3.2.25)$$

Com isto, (3.3.2.21) pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} (E_{z(0)}E_{Iz(0)}\tau_{TM} + H_{z(0)}H_{Iz(0)}\tau_{TE}). \quad (3.3.2.26)$$

Colocando o termo referente ao campo TM em evidência, é possível escrever (3.3.2.26) de uma forma que permita identificar a impedância de interação como definida por Pierce. Isto resulta em

$$\frac{E_{z(0)}E_{Iz(0)}}{2\beta^2P} = \frac{\Delta\beta}{\beta} \frac{Z_0}{\pi k_0\beta(\varepsilon_p - 1)} \frac{1}{\left(\tau_{TM} + \frac{H_{z(0)}H_{Iz(0)}}{E_{z(0)}E_{Iz(0)}} \tau_{TE} \right)} = \mathcal{K}_0. \quad (3.3.2.27)$$

3.3.3 Influência dos Parâmetros do Bastão na Perturbação

Nesta seção, estuda-se a influência dos parâmetros do objeto perturbador na quantidade medida. Isto é necessário, uma vez que a hipótese fundamental na formulação desta técnica é que a perturbação realizada é pequena. Contudo, quanto menor a perturbação, mais difícil é medi-la com precisão. Portanto, deve-se encontrar uma relação de compromisso para a realização de uma perturbação que possa ser medida com precisão mas que não invalide a teoria da medida. Neste caso, o objeto perturbador é um bastão dielétrico de raio r_p e permissividade ε_p .

Antes de verificar efetivamente o efeito dos parâmetros do bastão dielétrico na perturbação $\Delta\beta/\beta$, é conveniente verificar a contribuição dos campos TM e TE. Considere-se a variação $\Delta\beta/\beta$, expressa em (3.3.2.26), reescrita da seguinte forma

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} E_{z(0)}E_{Iz(0)}\tau_{TM} \left(1 + \frac{H_{z(0)}H_{Iz(0)}}{E_{z(0)}E_{Iz(0)}} \frac{\tau_{TE}}{\tau_{TM}} \right). \quad (3.3.3.1)$$

Em hélices simples, a razão H_z/E_z é um número pequeno, mas na hélice dupla contraposta, que é alvo de estudo deste trabalho, esta razão é muito menor. Isto se deve ao fato de a componente TE do campo eletromagnético ser, teoricamente, nula no eixo desse tipo de estrutura de ondas lentas.

Adicionalmente, a razão τ_{TE}/τ_{TM} tende a zero com a diminuição do raio do bastão perturbador, conforme mostra o gráfico da Figura 3.3.3. Este gráfico mostra o comportamento da curva τ_{TE}/τ_{TM} em função do raio do bastão perturbador. A variação da curva em função da variação da permissividade do bastão é muito pequena e, portanto, não é mostrada no gráfico.

Com isso, conclui-se que o termo que representa os campos TE tem contribuição desprezível em (3.3.3.1) e, portanto, esta se torna

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\pi k_0(\varepsilon_p - 1)}{2Z_0\beta P} E_{z(0)}E_{Iz(0)}\tau_{TM}. \quad (3.3.3.2)$$

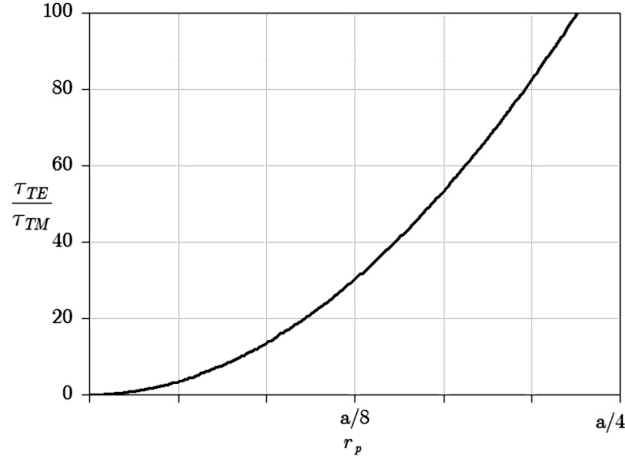


Figura 3.3.3 – Gráfico da razão entre os coeficientes de correção dos campos TE e TM em função do raio do bastão perturbador. A permissividade relativa do bastão tem influência desprezível na curva e, por isso, seu efeito não é mostrado. O raio do bastão perturbador é expresso em frações do raio da hélice.

Multiplicando o lado direito de (3.3.3.2) por β/β , é possível identificar a impedância de interação de Pierce. Isso mostra que a quantidade $\Delta\beta/\beta$ também depende da impedância que se espera obter. Feito isso, obtém-se

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{E_{z(0)}E_{Iz(0)}}{2\beta^2 P} \frac{\pi k_0 \beta (\varepsilon_p - 1)}{Z_0} \tau_{TM} = \mathcal{K}_0 \frac{\pi k_0 \beta (\varepsilon_p - 1)}{Z_0} \tau_{TM}. \quad (3.3.3.3)$$

Com esta expressão é possível encontrar parâmetros adequados para o objeto perturbador, de forma que se exerça uma perturbação pequena, mas mensurável.

3.3.4 Exemplo de Estimativa dos Parâmetros do Bastão Perturbador

Para a estimativa do raio r_p e da permissividade ε_p adequados para o bastão perturbador, é importante ter um conhecimento prévio sobre estrutura de onda lentas. Informações sobre a velocidade de fase e a impedância de interação esperada, são importante, visto que a quantidade $\Delta\beta/\beta$ é função dessas duas grandezas. Neste ponto, enfatiza-se a importância dos modelos teóricos, como o que foi desenvolvido no capítulo 2.

Realizou-se uma simulação da impedância de interação para a estrutura de ondas lentas utilizada neste trabalho, cujos parâmetros são listados na Tabela 2.9.1, porém sem os suportes dielétricos. Para as frequências em torno de 8 GHz, os parâmetros de entrada de (3.3.3.3) calculados são, aproximadamente, $k_0 = 0,166 \text{ mm}^{-1}$, $\beta_0 = 0,357 \text{ mm}^{-1}$ e $\mathcal{K}_0 = 30 \Omega$. Com estes valores pode-se construir a curva $\Delta\beta/\beta$ em função do raio do perturbador e parametrizada pela sua permissividade, como mostrado na Figura 3.3.4.

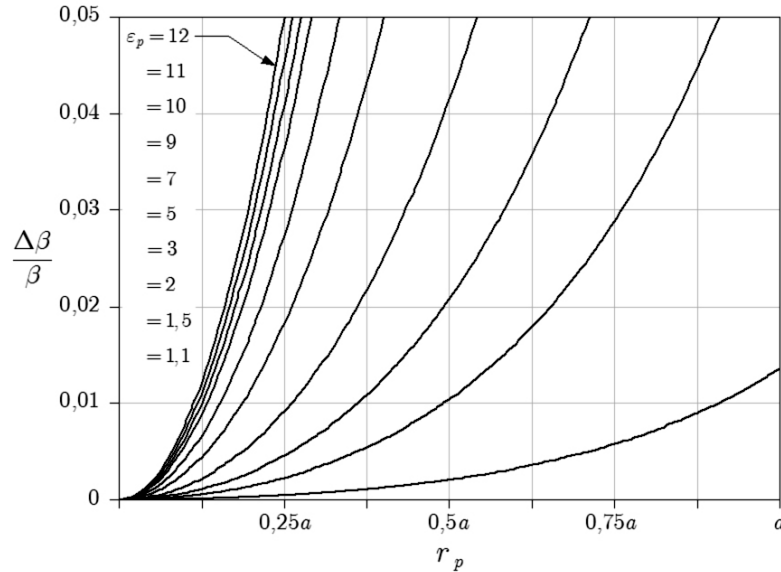


Figura 3.3.4 – Gráfico da curva da perturbação realizada em função do raio do bastão dielétrico e de sua permissividade relativa. O raio do bastão r_p é expresso em frações do raio da hélice a .

Evidentemente, ao aumentar a permissividade do bastão perturbador, a constante de fase axial, β_0 , é perturbada. Quanto maior a permissividade ε_p do bastão, maior será o porcentual de perturbação $\Delta\beta/\beta$ provocada. O gráfico da Figura 3.3.4 revela que bastões de pequenos raios, que são os mais recomendados, devido à desconsideração dos efeitos dos campos TE, necessitam de permissividades maiores para realizarem maiores perturbações. Esses argumentos justificam a utilizações de bastões finos e permissividades elevadas.

Perturbações consideradas mensuráveis com alguma precisão, mas que não invalidam as aproximações, são da ordem de 1% a 5%. Portanto, de acordo com a curva $\Delta\beta/\beta(r_p, \varepsilon_p)$, para essa estrutura é conveniente escolher um bastão dielétrico de raio igual $0,25a$ e permissividade relativa em torno de 3 a 10. Entretanto, deve-se ter em mente que um bastão, geralmente de material cerâmico, com comprimento maior que uma estrutura de ondas lentas e muito fino, com raio menor que 1 mm, é difícil de se construir e manusear, devido à sua fragilidade. Portanto, nestes casos, bastões muito finos se tornam inviáveis e decide-se por bastões de maior raio e menor permissividade relativa, por exemplo, $r_p = 0,5a$ e $\varepsilon_p = 3$.

Pode-se ainda considerar o caso em que já se dispõe de um objeto perturbador e deseja-se verificar se a perturbação provocada por ele pode ser considerada pequena o suficiente para a utilização da teoria apresentada.

3.3.5 O Efeito dos Harmônicos Espaciais e dos Campos TE

Devido às características próprias da estrutura de ondas lentas que opera no modo simétrico, tanto o efeito dos campos TE como dos harmônicos espaciais devem ser pequenos. No entanto, para avaliar a amplitude desse efeito, esta seção se dedica a aplicar tais correções à expressão da impedância de interação já obtida, que é

$$\mathcal{K}_0 = \frac{Z_0}{\pi k_0 \beta (\varepsilon_p - 1)} \frac{\Delta \beta}{\beta} \frac{1}{\left(\tau_{TM} + \frac{C_{1(0,0)} C_{11(0,0)}}{A_{1(0,0)} A_{11(0,0)}} \tau_{TE} \right)} \frac{1}{\zeta_n}. \quad (3.3.5.1)$$

Os coeficientes indicados com o ponto de exclamação são aqueles referentes ao campo perturbado. Estes coeficientes são calculados a partir de um par k_0 e β_l , medido após a perturbação.

ζ_n é o fator de correção para considerar o efeito dos harmônicos espaciais e, conforme discutido em [24][27], é dado por

$$\zeta_n = \sum_{l=-n}^n \frac{E_{z(l,0)}^2(\rho=r_p)}{E_{z(0,0)}^2(\rho=r_p)}. \quad (3.3.5.2)$$

Utilizando as expressões para as constantes de amplitude de campo, fornecidas no capítulo 2, pode-se escrever (3.3.5.2) como

$$\zeta_n = \sum_{l=-n}^n \frac{A_{1l,0}^2 I_l^2(\gamma_{1l,0} r_p)}{A_{1(0,0)}^2 I_0^2(\gamma_{1(0,0)} r_p)}. \quad (3.3.5.3)$$

O resultado da consideração dos fatores de correção devido aos harmônicos espaciais e ao campo TE, será analisado posteriormente.

3.4 O Aparato Experimental

Os resultados experimentais que se deseja obter são as curvas de velocidade de fase e impedância de interação em função da frequência. Contudo, estas medidas são muito indiretas, uma vez que as medidas em microondas se resumem a razões de amplitudes e diferenças de fases do campo eletromagnético.

O aparelho utilizado para a realização destas medidas é o analisador vetorial de rede (do inglês: Vector Network Analyzer – VNA), que fornece o módulo e a fase dos coeficientes de reflexão e transmissão de uma porta para outra. Estes dados são denominados parâmetros de espalhamento ou, como são comumente chamados, parâmetros S.

O coeficiente de reflexão é definido como a razão da onda refletida sobre a onda emitida. De forma análoga, o coeficiente de transmissão é a razão da onda transmitida sobre a onda emitida. Considerando um dispositivo de 2 portas como o VNA em questão, o parâmetro S_{11} é o coeficiente de reflexão de uma onda refletida em direção à porta 1, quando não há reflexão na porta 2. O parâmetro S_{21} é o coeficiente de transmissão de uma onda transmitida da porta 1 para a porta 2. O parâmetro S_{12} é o coeficiente de transmissão de uma onda transmitida da porta 2 para a porta 1. O parâmetro S_{22} é o coeficiente de reflexão de uma onda refletida em direção à porta 2, quando não há reflexões na porta 1.

Toda a teoria de medidas em microondas se desenvolve pela manipulação dos parâmetros S, ou seja, trabalhando com os coeficientes de reflexão e/ou transmissão e fases das ondas refletidas e/ou transmitidas nas estruturas e circuitos de microondas sob estudo. O VNA disponível no Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo é o modelo Agilent N5230A PNA, que possui duas portas bidirecionais, isto é, pode medir as 4 combinações de parâmetros S, simultaneamente.

A Figura 3.4.1 apresenta uma fotografia do aparato de medida construído. Este aparato foi desenvolvido de maneira similar ao descrito em [24] e se baseia em um sistema de deslocamento do tipo plataforma móvel controlada por motor de passo e computador. O objetivo é permitir o deslocamento do curto helicoidal ao longo da estrutura de ondas lentas e medir as informações de fase da onda refletida em direção à porta de excitação. Neste caso, considerou-se mais apropriado mover a estrutura de teste e deixar o curto fixo em um fio de náilon preso nas extremidades do sistema de deslocamento.

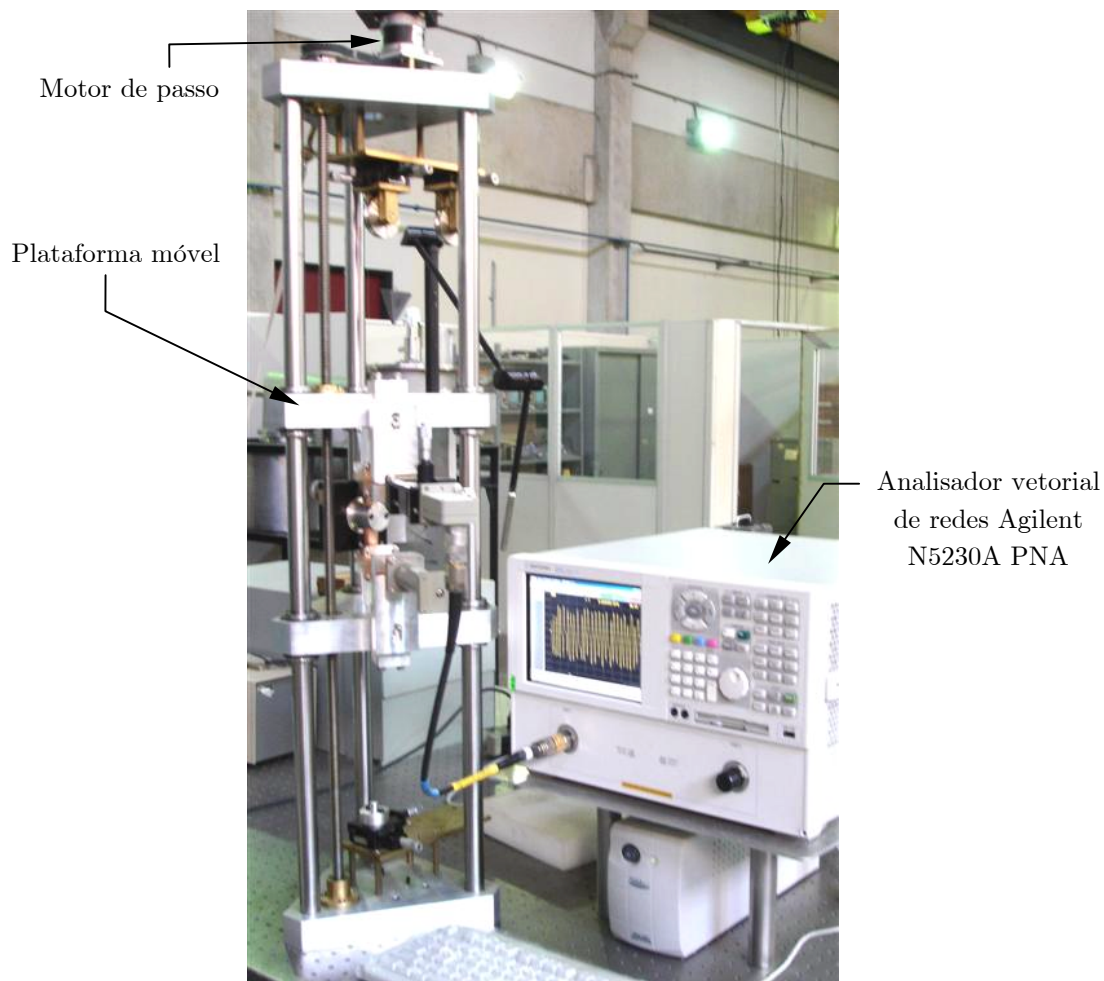


Figura 3.4.1 – Fotografia do aparato de medida construído.

A Figura 3.4.2 apresenta detalhes da fixação da estrutura de testes no sistema de deslocamento. O sintonizador conectado à porta 1 é opcional, podendo ser substituído por um trecho de guia de onda WR-90. Na porta 2 da estrutura de testes, conecta-se uma carga casada, suprimir a onda V_{2+} , como explicado na seção 3.2.1.

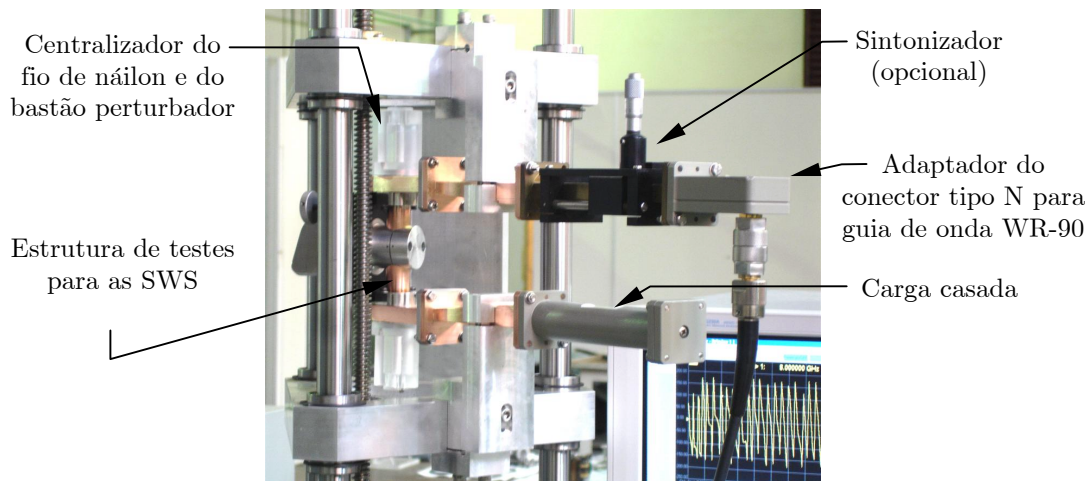


Figura 3.4.2 – Detalhe da montagem da estrutura de testes na plataforma móvel do aparato experimental.

A Figura 3.4.3 mostra detalhes da estrutura de testes. Na figura 3.4.3(a), apresenta-se uma ilustração com corte do posicionamento da estrutura de ondas lentas ring-bar dentro da estrutura de testes. Observe-se que uma das dimensões do guia de excitação corresponde a um período da estrutura de ondas lentas. Na Figura 3.4.3(b) apresenta-se a estrutura de testes desmontada, onde pode-se observar os adaptadores de impedância do guia WR-90 para o guia de excitação, os guias de excitação, os centralizadores do fio de náilon, os anéis fixadores da estrutura de ondas lentas, o guia circular, o tubo de acrílico utilizado para carregar a estrutura e a estrutura de ondas lentas do tipo ring-bar. Esta última é, por sua vez, mostrada em detalhe na Figura 3.4.4.

A estrutura de ondas lentas ring-bar utilizada neste trabalho foi construída

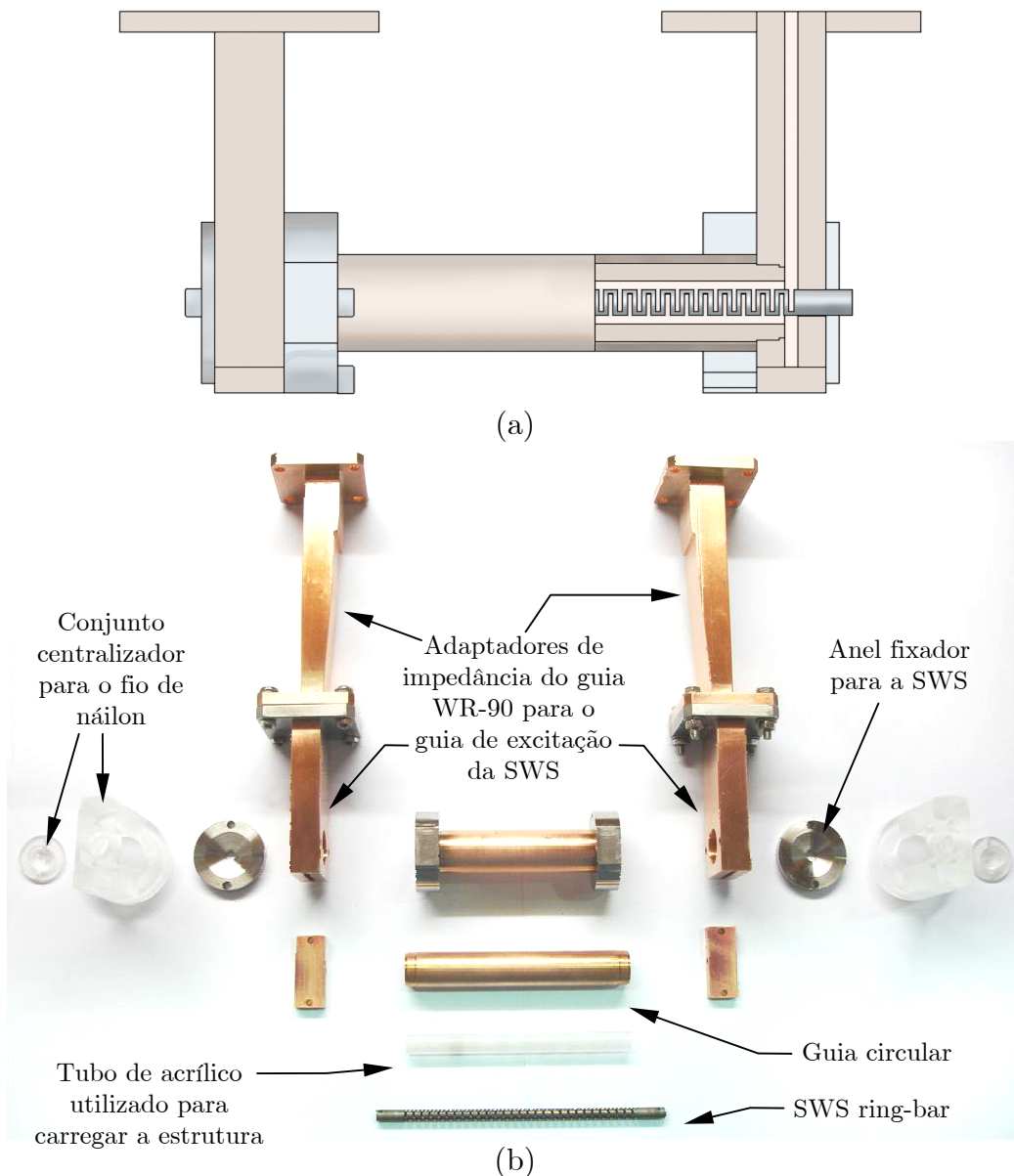


Figura 3.4.3 – Ilustração com corte (a) e fotografia (b) da estrutura de testes desmontada.

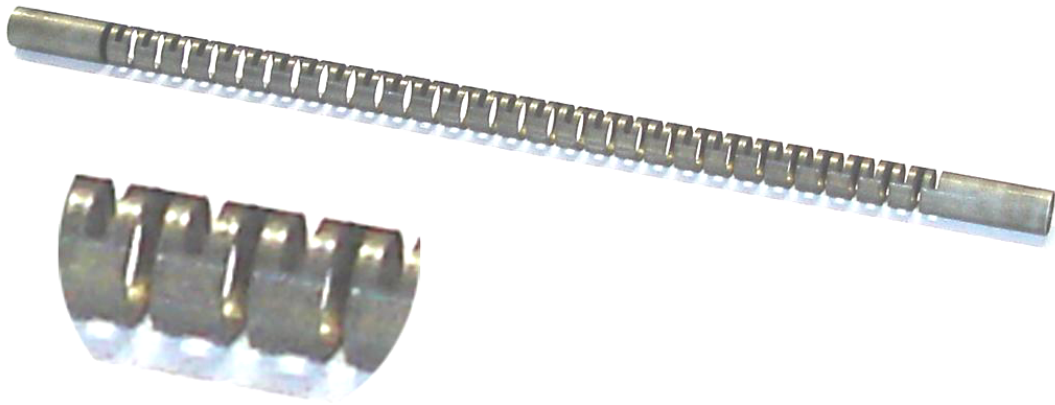


Figura 3.4.4 – Fotografia e detalhe da estrutura de ondas lentas do tipo ring-bar caracterizada neste trabalho.

a partir de um tubo de molibdênio utilizando usinagem por eletro-erosão. Ela tem cerca de 126 mm de comprimento, diâmetro externo de 5,07 mm, diâmetro interno de 4,43 mm, os anéis têm largura de 0,88 mm, bem como as ranhuras, que têm profundidade de 4,35 mm. O período desta estrutura é igual a 3,52 mm.

A Figura 3.4.5 mostra o curto helicoidal utilizado na medida de velocidade de fase. A geometria deste dispositivo foi definida com base em [24][25], onde reporta-se que um curto helicoidal deve ter cerca de 3 espiras com metade do diâmetro da estrutura de ondas lentas que se deseja medir. Adicionalmente, o período dessa pequena hélice deve ser tal que sua relação de dispersão resulte em uma velocidade de fase próxima daquela que se deseja medir. Utilizando, então, o modelo matemático descrito no capítulo 2 para estimar os parâmetros de uma hélice simples que tivesse velocidade de fase próxima daquela apresentada pela estrutura ring-bar, obteve-se que o curto helicoidal deveria ser uma hélice composta de 3 espiras com raio médio de, aproximadamente, 2,1 mm, e comprimento de 7 mm.

Fixa-se essa pequena hélice em torno um suporte cilíndrico de acrílico com um furo no eixo, de forma a passar um fio de náilon. Para a realização das medidas, utilizou-se fios de náilon com diâmetros de 0,15 mm e 0,60 mm.

Para a perturbação necessária à medida da impedância de interação, utilizou-se varetas de PVC, com diâmetro de 2,1 mm, e de fibra de vidro, com diâmetro de 1,58 mm.

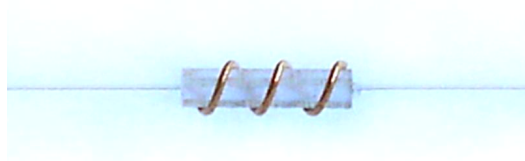


Figura 3.4.5 – Fotografia do curto helicoidal utilizado na medida de velocidade de fase para a estrutura de ondas lentas em questão no estado não perturbado

3.5 Procedimento de medida

Nesta seção, descreve-se os procedimentos de medida para a velocidade de fase e a impedância de interação.

3.5.1 Procedimento de Medida da Velocidade de Fase

Com a estrutura de testes montada e fixada na plataforma móvel, o primeiro passo é a calibração do analisador vetorial de rede (VNA). O objetivo é desconsiderar as reflexões oriundas da estrutura em si, de forma que se considere a fase das ondas refletidas apenas pelo curto helicoidal. Para tanto, é necessário que o padrão de onda estacionária (VSWR) do parâmetro S_{11} após a calibração seja próximo da unidade na banda de frequências selecionada.

Utiliza-se, nesta medida, apenas a porta 1. Portanto, escolhe-se a faixa de frequências adequada, seleciona-se a opção de calibração adequada no menu de calibrações do VNA e conecta-se os elementos padrão do kit de calibração. Esses elementos são um curto, um aberto (composto pelo curto mais um trecho de guia com o comprimento de $1/4$ de onda) e uma carga casada. Em especial, toda a estrutura, juntamente com a carga casada conectada à porta 2, deve ser considerada como uma única carga casada e, portanto, utilizada na calibração. A seqüência destas três medidas é ilustrada na Figura 3.5.1.

O próximo passo é passar o fio de náilon com o curto helicoidal fixado e prendê-lo nas extremidades do sistema de deslocamento. A posição do curto helicoidal deve ser tal que permita uma excursão ao longo de, aproximadamente, 90 a 100 mm no centro axial da estrutura de ondas lentas. A direção do deslocamento é arbitrária, mas deve-se avaliar o uso do sinal negativo em (3.2.1.5). O passo seguinte consiste em deslocar o curto helicoidal em intervalos conhecidos e anotar as informações de fase do parâmetro S_{11} em cada posição. Neste trabalho, desenvolveu-se um programa que controla o motor de passo do sistema de deslocamento por meio da porta paralela de um computador pessoal.

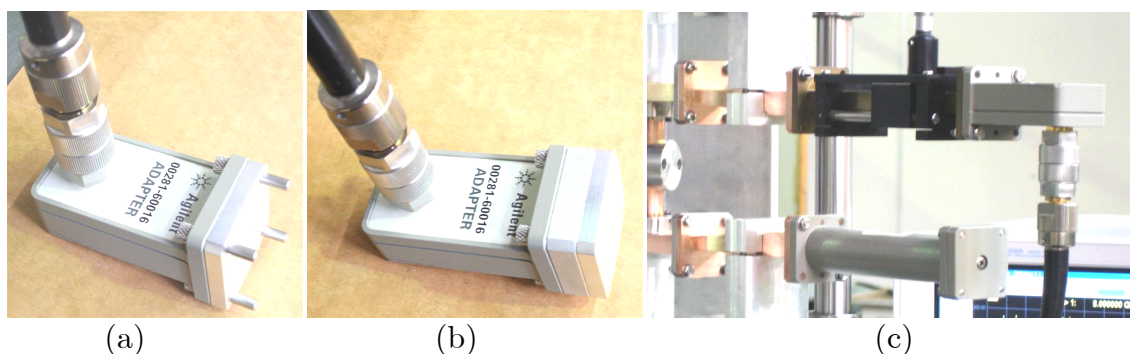


Figura 3.5.1 – Seqüência de calibração do VNA para medida da curva de fase em função da posição do curto: (a) medida do curto; (b) medida do aberto; e (c) medida da carga casada.

Para cada posição z do curto helicoidal, salva-se um arquivo no VNA com a informação de fase em função da frequência para aquela posição. Após toda a excursão ao longo da SWS, obtém-se vários arquivos, cada um com a informação de fase para uma determinada posição do curto helicoidal. Um outro programa desenvolvido converte todos os arquivos em uma única matriz de fases, em que as colunas correspondem às frequências e as linhas correspondem às posições. Desse modo, é possível construir as curvas de fase em função da posição, $\varphi(z)$, para as frequências da banda escolhida.

Uma vez obtida a curva $\varphi(z)$ para uma determinada frequência, determina-se a constante de propagação β para essa frequência por (3.2.1.5). Então, a velocidade de fase normalizada pode ser calculada por meio de (3.2.1), preferencialmente, ou pelo método do comprimento de onda guiado. Discutir-se-á ambos os métodos na seção de resultados.

3.5.2 Procedimento de Medida da Impedância de Interação

Estima-se a impedância de interação a partir da medida de uma diferença na constante de fase, $\Delta\beta$, provocada por uma perturbação. Portanto, o procedimento de medida consiste na repetição dos passos para a medida da velocidade de fase, descrita anteriormente, mas sob a influência de uma perturbação. Essa perturbação é realizada substituindo o fio de náilon, que se considera como uma perturbação desprezível, por um bastão de material dielétrico com permissividade conhecida. Neste caso, utilizou-se uma vareta de PVC com diâmetros de 2,1 mm e uma vareta de fibra de vidro com diâmetro de 1,58 mm.

Em um procedimento de medida mais rigoroso, deve-se obter, experimentalmente, a curva de permissividade relativa em função da frequência para os materiais utilizados com perturbadores. Contudo, adotou-se valores tabelados que, apesar de variarem de uma fonte para outra, ficam em torno de 3,0 para o PVC e 5,0 para a fibra de vidro.

O curto helicoidal é fixado em torno das próprias varetas, não havendo a necessidade do suporte de acrílico, como ilustra a Figura 3.5.2.

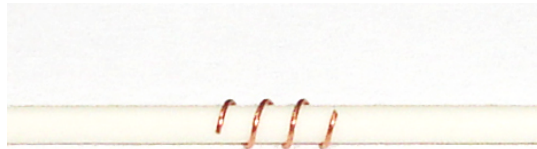


Figura 3.5.2 – Curto helicoidal fixado em torno de uma vareta de PVC com diâmetros de 2,1 mm, que é utilizada para medir a constante de propagação no estado perturbado.

3.6 Resultados das Medidas e Discussão

A Figura 3.6.1 apresenta o resultado das medidas de velocidade de fase para a estrutura de testes com e sem o carregamento dielétrico. Como mencionado anteriormente, o carregamento da estrutura é realizado inserindo um tubo de acrílico na região entre a hélice e a guia circular, que corresponde à região 2 do modelo matemático. As linhas sólidas são as previsões teóricas para ambos os casos. Os pontos medidos foram ajustados por um polinômio de segundo grau, cujos índices de correlação são de 0,9998 e 0,999 para a curvas superior e inferior, respectivamente.

Observa-se que as curvas experimentais apresentam menor velocidade de fase e maior dispersão que as curvas teóricas. Em outras palavras, no mesmo intervalo de frequência, a velocidade de fase experimental varia mais do que o previsto teoricamente. Esta discrepância era esperada, de acordo com os resultados reportados em [1], em que se encontram curvas experimentais comparando as velocidades de fase de uma hélice simples com a de uma hélice dupla contraposta e uma ring-bar. Para efeito de comparação, este resultado é apresentado na Figura 3.6.2.

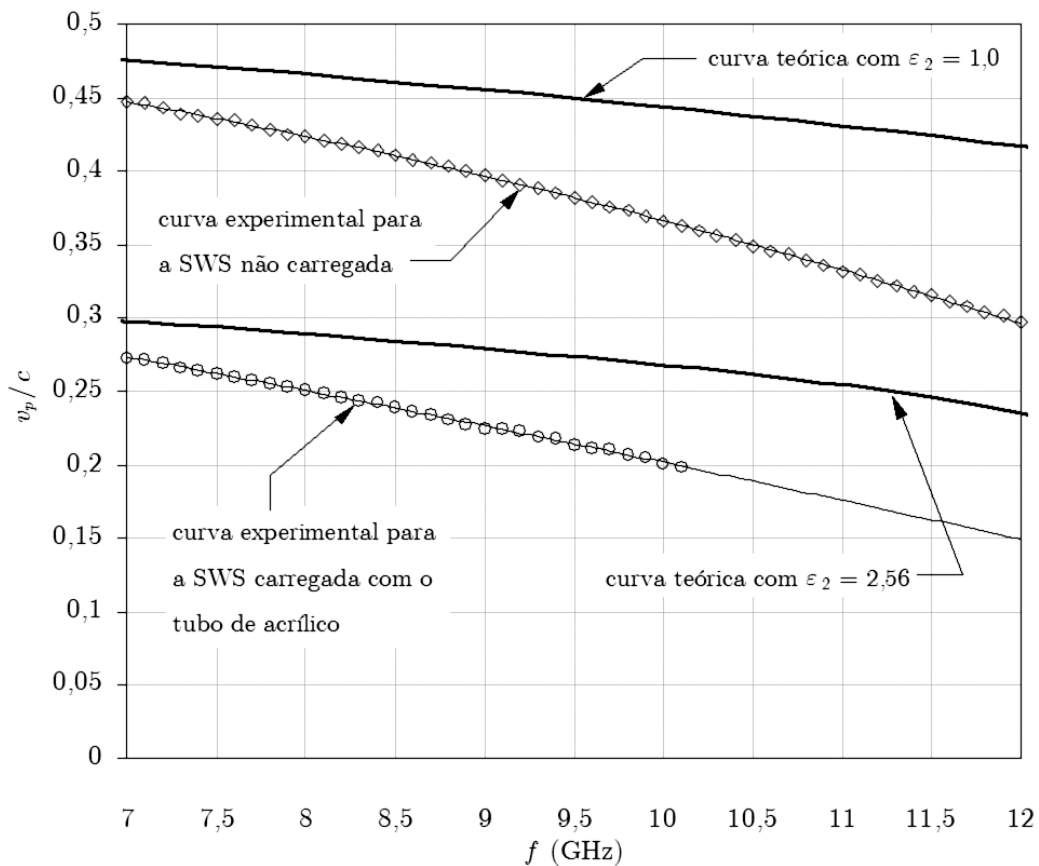


Figura 3.6.1 – Gráfico das curvas teóricas e experimentais de velocidade de fase normalizada para a estrutura carregada e não-carregada.

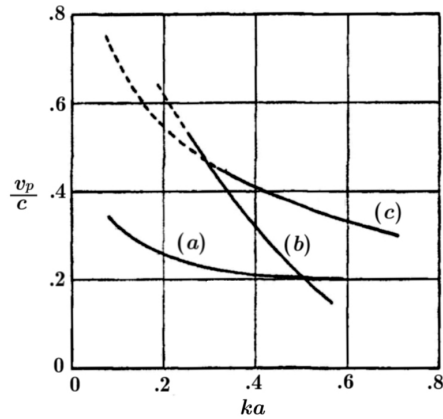


Figura 3.6.2 – Gráfico da velocidade de fase normalizada em função da frequência normalizada ka ($= k_0 a$) para hélices (a) simples, (b) ring-bar e (c) dupla contraposta. Resultado reportado por Birdsall e Everhart em [1].

Na Figura 3.6.2, apresenta-se resultados para hélices que não são envolvidas por guias metálicas. Portanto, há maior dispersão e as inflexões das curvas são contrárias àquelas apresentadas na Figura 3.6.1. Observa-se que a curva de velocidade de fase para a hélice do tipo ring-bar (curva *b*) é mais dispersiva do que a curva relativa à hélice dupla contraposta (curva *c*). As duas curvas se cruzam em ka ($= k_0 a$) aproximadamente igual a 0,3, o que corresponde a uma frequência de, aproximadamente, 6 GHz para a estrutura de ondas lentas deste trabalho. Visto que esta frequência está abaixo da frequência de corte da Banda X, que é de 6,56 GHz, não foi possível verificar experimentalmente esta interceptação das curvas. Contudo, é de se esperar que ela ocorra, visto que as curvas se aproximam com a diminuição da frequência até 7 GHz. Portanto, considerou-se que os resultados das medidas de velocidade de fase estão dentro da margem de erro esperada em relação aos resultados teóricos.

A validade do método de medida também é comprovada pela realização da medida com o carregamento da estrutura. A Figura 3.6.3 apresenta os valores teórico e experimental para o percentual de redução da velocidade de fase em virtude do carregamento da estrutura. A teoria prevê uma redução na velocidade de fase que varia de 63% em 7 GHz a 54% em 12 GHz. Já o resultado experimental revela reduções de 61% e 50% nas respectivas frequências.

Na curva referente à estrutura carregada, apresentada na Figura 3.6.1, não se pôde determinar as constantes de propagação para frequências acima de 10,1 GHz. A causa disso é que as curvas de fase em função da posição do curto helicoidal mostraram-se muito irregulares a partir desta frequência. Acredita-se que, acima de 10,1 GHz, a velocidade de fase caia um pouco mais do que é

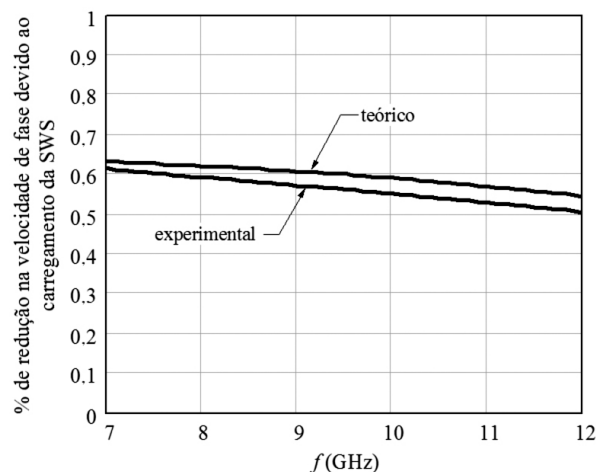


Figura 3.6.3 – Gráfico do percentual de redução da velocidade de fase em virtude do carregamento da estrutura.

indicado pela linha de ajuste. Isto implicaria em uma redução no erro do percentual de redução da velocidade de fase nas frequências mais altas.

A irregularidade na curva de fase mencionada ocorreu em todas as medidas realizadas sob a condição de carregamento. Não se encontrou menção a este fenômeno em qualquer dos artigos de referência, mas acredita-se que o dispositivo de reflexão, composto pelo curto helicoidal, suporte e o fio de náilon, não seja mais adequado para tais frequências na estrutura carregada. Isto sugere que se deva reprojeter o curto helicoidal para a nova situação. Discutir-se-á mais sobre este assunto adiante.

A reprodutibilidade conseguida para a medida de velocidade de fase foi condizente com o que é reportado na literatura especializada, que é em torno de 1% de erro relativo. Os resultados apresentados na Figura 3.6.1, foram obtidos pelo método do coeficiente angular da curva de fase, que é mais estável que o método do comprimento de onda guiado. Portanto, obteve-se erro relativo menor que 1%. As curvas obtidas pelo método do comprimento de onda guiado diferenciam-se daquelas mostradas na Figura 3.6.1 apenas pelo fato dos pontos experimentais apresentarem uma oscilação um pouco maior em torno da curva de ajuste. Contudo, os ajustes das curvas obtidas pelos dois métodos diferem dentro do erro citado.

A Figura 3.6.4 apresenta os resultados para a medida da impedância de interação, para as perturbações realizadas com as varetas de PVC e de fibra de vidro (FV), com e sem a correção de harmônicos espaciais. A correção devido ao efeito do campo TE mostrou-se ser desprezível, uma vez que a curva com esta correção quase não se distingue daquela sem correção. Portanto, esta correção não foi incluída nos resultados apresentados na Figura 3.6.4.

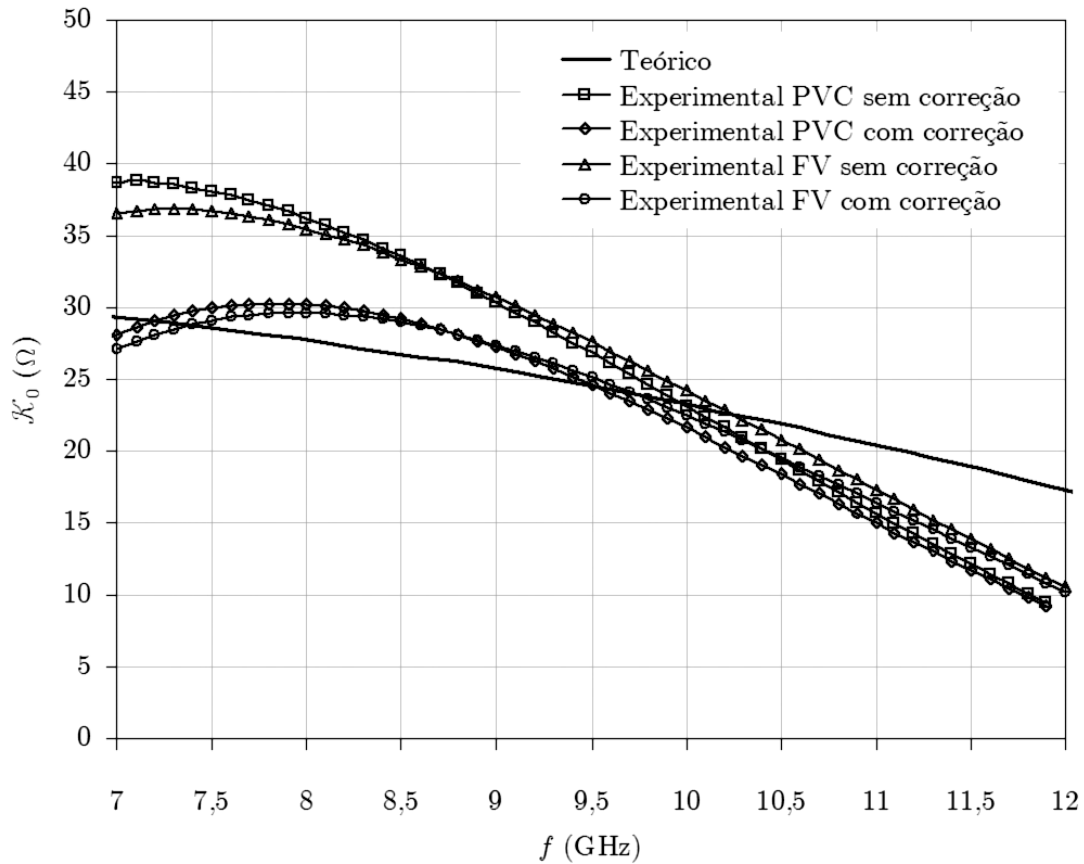


Figura 3.6.4 – Gráfico da Impedância de Interação em função da frequência para a SWS ring-bar em estudo. Apresenta-se a curva teórica e as experimentais com e sem correção de harmônicos espaciais para perturbação realizada com varetas de PVC e de fibra de vidro (FV).

Observa-se que as curvas experimentais apresentam maior dispersão do que a curva teórica. Para as frequências mais baixas, a impedância de interação sem correção de harmônicos espaciais é cerca de 23% maior que a prevista teoricamente. Esta diferença diminui até cerca de 10 GHz, que é a frequência na qual a curva teórica e as curvas experimentais se cruzam. A partir desta frequência, a impedância de interação experimental diminui mais do que a teórica, chegando ser até 38% menor em 12 GHz.

As curvas experimentais com a correção dos harmônicos espaciais consideram apenas um harmônico de ordem superior e um de ordem inferior. Os demais harmônicos não têm influência perceptível nas curvas mostradas. Com esta correção as curvas experimentais se aproximaram da curva teórica para as frequências mais baixas, mas para as frequências mais altas elas apresentaram pouca mudança. Contudo, observou-se que o efeito geral dos harmônicos espaciais age no sentido de reduzir a impedância de interação sem correção.

A redução da impedância de interação na curva com correção de harmônicos espaciais para as frequências próximas de 7 GHz não é um

comportamento esperado, embora tenha sido notado em todas as medidas. Um comportamento semelhante ao apresentado pela curva sem correção é comumente visto em resultados reportados em artigos. No entanto, deve-se considerar que os resultados publicados a que se teve acesso neste trabalho são todos relativos a hélices simples. Resultados publicados sobre SWS projetadas para operar em alta potência são muito difíceis de se encontrar, talvez por causa do caráter estratégico de suas aplicações. Por isso, decidiu-se que esses são os resultados oficiais deste trabalho e sugere-se, para os próximos trabalhos, que se desenvolva uma teoria para consideração dos harmônicos espaciais que leve em consideração as propriedades de simetria inerentes ao modo simétrico de propagação.

Não foi possível obter a quantidade $\Delta\beta(f)$ para a estrutura carregada com o tubo de acrílico. A curva de fase em função da posição do curto helicoidal para a estrutura perturbada se mostrou muito irregular, não sendo possível obter sua inclinação ou os comprimentos de onda guiados. O fenômeno observado é que com o carregamento da estrutura pelo tubo de acrílico e pelas varetas de PVC ou fibra de vidro, as medidas de fase se tornaram muito difíceis. Possivelmente, o curto helicoidal poderia não ser mais adequado às velocidades de fase de uma estrutura tão dielectricamente carregada. Contudo, um reprojeto do curto, modificando seu comprimento para cerca de 3,6 mm não proporcionou melhoria nas medidas. Isto indica que são necessários estudos mais aprofundados para o estabelecimento de um método para o projeto de curtos helicoidais a partir de uma banda de frequências estabelecidas e valores de velocidade de fase esperados.

A Figura 3.2.2 apresenta um exemplo de uma curva de fase em função da posição com as características necessárias à aplicação do método do coeficiente angular para a determinação da constante de propagação e, conseqüentemente, da velocidade de fase. A Figura 3.6.5 mostra um exemplo contrário, em que se pode observar uma curva de fase bastante irregular.

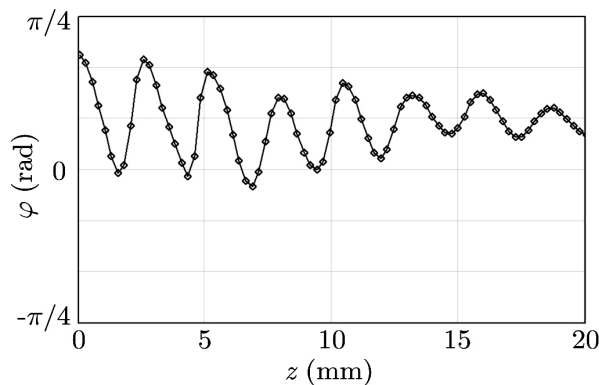


Figura 3.6.5 – Exemplo de curva de fase em função da posição, $\varphi(z)$, fora dos padrões de uma medida adequada.

Observa-se que não é possível construir uma curva contínua, como a mostrada na Figura 3.2.2(a), para a determinação de sua inclinação nem estimar com precisão a metade do comprimento de onda guiado.

Com o intuito de se validar o procedimento de medida utilizado e os resultados obtidos, utilizou-se uma técnica diferente para a obtenção da variação na constante de propagação. Esta técnica é discutida superficialmente no Apêndice A10.

Os autores em [28],[29] e [30] argumentam que a variação na constante de propagação é igual à diferença de fase na onda transmitida pela estrutura entre o estado perturbado e o não-perturbado dividida pelo comprimento em que se realizou a perturbação, ou seja,

$$\Delta\beta(f) = \frac{\Delta\varphi(f)}{L}. \quad (3.6.1)$$

$\Delta\varphi(f)$ é a diferença de fase na onda transmitida pela estrutura em função da frequência e L é o comprimento da estrutura que sofreu perturbação. A quantidade $\Delta\varphi(f)$ é, por sua vez obtida por meio da expressão

$$\Delta\varphi(f) = \arg\left(\frac{S_{21}(f)}{S'_{21}(f)}\right), \quad (3.6.2)$$

onde $S'_{21}(f)$ é o parâmetro S_{21} da estrutura de testes no estado perturbado. Entretanto, esta medida de diferença de fase se mostrou bastante complexa para a estrutura de testes, talvez devido ao caráter periódico da estrutura de ondas lentas. A curva $\Delta\varphi(f)$ resultante apresenta grande oscilação em torno de um valor médio que deve ser o valor desejado. Os autores em [30] fornecem uma fórmula para suavização da curva $\Delta\varphi(f)$. Segundo eles, a diferença de fase corrigida é obtida por (A10.4), expressa no Apêndice A10. Contudo a utilização desta fórmula suavizou apenas algumas curvas relativas a perturbações dielétricas. Visto que se abordou esta técnica apenas superficialmente durante este trabalho, restam ainda alguns pontos a serem esclarecidos. Considera-se, porém, que um minucioso estudo desta técnica é de grande importância na determinação experimental da impedância de interação.

O procedimento básico de medida consiste em medir a matriz de espalhamento da estrutura no estado perturbado e no estado não perturbado e, então, utilizar as fórmulas mencionadas.

Na Figura 3.6.6, apresenta-se o resultado obtido por meio desta técnica para a perturbação realizada com a vareta de PVC de 2,1 mm de diâmetro. Compara-se, neste gráfico, o resultado teórico com o resultado experimental com e sem correção das oscilações.

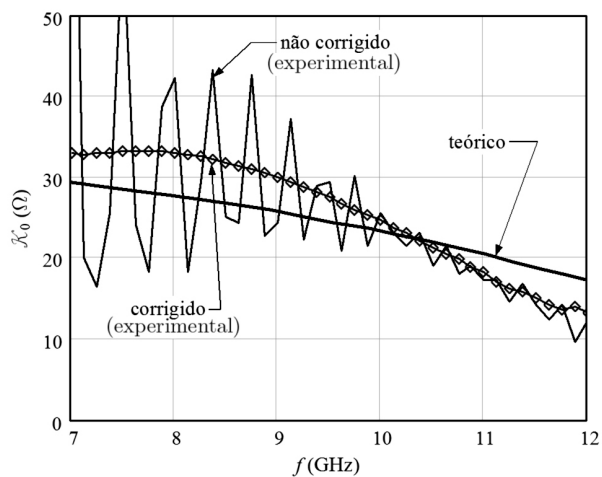


Figura 3.6.6 – Gráfico da Impedância de interação em função da frequência. Este resultado foi obtido por meio da técnica alternativa em que se mede as matrizes de espalhamento nos estados perturbado e não perturbado para a realização da correção sobre as oscilações.

Embora não se tenha dominado esta técnica completamente durante este trabalho, os resultados obtidos por meio dela se mostraram bastante próximos daqueles apresentados na Figura 3.6.4. Isto corrobora para a validação dos resultados obtidos por ambas as técnicas de medida.

3.7 Conclusão

Neste capítulo, apresentou-se a parte experimental deste trabalho, bem como seus resultados. Descreveu-se a teoria em que se baseia a medida da velocidade de fase e da impedância de interação. Mostrou-se como planejar um experimento de medida para uma dada estrutura de ondas lentas, cujas características de velocidade de fase e de impedância de interação tenham sido teoricamente estimadas. Neste ponto, enfatiza-se a importância de se desenvolver um modelo matemático para a predição das características de velocidade de fase e impedância de interação de uma estrutura de ondas lentas, pois, sem uma estimativa dos valores esperados, o procedimento experimental se torna muito mais complexo.

Os resultados experimentais para a velocidade de fase, foram obtidos por dois métodos, a partir da curva de fase em função da posição do curto helicoidal. O primeiro método, que se baseia no coeficiente angular da curva de fase se mostrou mais estável e produz uma curva bastante suave, com pouca oscilação em torno do valor esperado. O segundo método, que consiste em estimar a metade do comprimento de onda guiado, produz resultados com mais oscilações, porém o ajuste dos pontos produz uma curva que não dista do resultado obtido pelo primeiro método mais que o erro experimental. O método do comprimento de onda guiado tem uma vantagem de poder ser aplicado em curvas que não possuem a regularidade suficiente para a utilização do método do coeficiente angular. Contudo, necessita-se de alguma regularidade ao longo do eixo de deslocamento.

Foi possível estabelecer um padrão de regularidade para as curvas de fase, de forma que se pôde avaliar se uma medida produziria resultados consistentes, antes da análise dos dados. Por meio da regularidade da curva de fase é possível avaliar se o dispositivo de curto está atuando de maneira satisfatória, ou se é necessário reprojeta-lo.

Considerou-se que os resultados obtidos para a velocidade de fase são muito satisfatórios, mesmo com uma visível discrepância em relação à predição teórica. Essa discrepância era esperada e foi reproduzível com margem de erro aceitável para a estrutura carregada com o tubo de acrílico. A reprodutibilidade desta medida também foi satisfatória, ficando dentro da margem de erro relativo reportado na literatura, que é da ordem de 1%.

A impedância de interação foi obtida experimentalmente por dois métodos distintos. No primeiro a variação na constante de propagação foi obtida repetindo o procedimento de medida da velocidade de fase, mas com a presença

de um elemento perturbador. Desta forma, obtiveram-se duas constantes de propagação e, portanto, uma variação neste parâmetro. Já o segundo método, consistiu em medir diretamente a variação na constante de propagação. Embora não se tenha estudado o segundo método em detalhe neste trabalho, foi possível obter resultados bastante próximos aos do primeiro método, tanto em valores quanto ao comportamento da curva.

Como não se teve acesso a resultados experimentais publicados sobre o tipo de estrutura de ondas lentas estudada neste trabalho, não foi possível fazer comparação com outros trabalhos. No entanto, considerou-se que os resultados obtidos são satisfatórios, embora ainda caibam melhorias no procedimento de medida. A principal melhoria diz respeito ao elemento perturbador. É importante que a permissividade do perturbador seja conhecida em função da frequência. Notou-se ainda que, do ponto de vista do aparato experimental, é importante que o elemento perturbador seja ou rígido, como um tarugo, ou muito flexível, como um fio. Elementos semiflexíveis, como as varetas de PVC e fibra de vidro, podem não ficar muito bem centralizados no eixo axial da estrutura de ondas lentas, mesmo com a utilização dos centralizadores. Uma boa centralização do elemento perturbador é essencial para evitar distorções na curva de fase.

A reprodutibilidade da curva de impedância de interação está dentro do padrão reportado para as hélices simples, que é de 5 a 10%. Cabe lembrar que grande precisão não é essencial nesta medida, uma vez que, o número de importância na determinação do ganho de uma TWT é proporcional à raiz cúbica da impedância de interação.

Portanto, embora aprimoramentos no procedimento de medida da impedância de interação ainda sejam necessários, considerou-se que os resultados experimentais obtidos são satisfatórios.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho, descreveu-se o desenvolvimento de uma plataforma composta de um modelo matemático e um aparato de medida que será utilizado no projeto e caracterização de estruturas de ondas lentas para válvulas de microondas do tipo válvula de ondas progressivas.

O modelo matemático desenvolvido é baseado no modelo da hélice dupla contraposta, considerando o carregamento com uma guia metálica de secção circular e o efeito dos suportes dielétricos utilizando a técnica de homogeneização. O modelo matemático fornece expressões que possibilitam calcular a velocidade de fase e a impedância de interação em função da variação dos principais parâmetros de construção da SWS e da frequência. Este é um modelo chamado “frio”, pois desconsidera o efeito da carga espacial devida ao feixe de elétrons. O modelo considera os seguintes parâmetros geométricos: O raio médio da hélice, seu período ou passo, a largura da fita, o raio da guia circular que a envolve e a permissividade dos suportes que a centralizam no interior desta guia.

Para a obtenção da equação de dispersão, utilizou-se a abordagem variacional descrita por Chodorow por ser fisicamente mais consistente e capaz de fornecer resultados mais confiáveis do que aquela descrita por Sensiper. Contudo, os resultados das duas abordagens foram comparados na seção de resultados teóricos.

A impedância de interação foi calculada de acordo com a fórmula de Pierce, de forma que o modelo oferece a possibilidade de calcular a impedância de qualquer harmônico de interesse, e não apenas a impedância do harmônico fundamental. De fato, na seção de resultados do capítulo 2, apresentou-se um estudo da relação entre a impedância do modo fundamental e do primeiro modo reverso, que é responsável pelas limitações das hélices simples em altas potências. Apresentou-se, ainda, um estudo de como a variação de cada um dos parâmetros geométricos citados anteriormente afeta as características de dispersão e impedância de interação da estrutura de ondas lentas composta pela hélice dupla e a guia circular. Fez-se, ainda, um estudo comparativo das características da hélice dupla em relação à hélice simples, de forma a reproduzir resultados já mencionados na literatura e produziu alguns resultados ainda não reportados.

Os resultados obtidos na análise das relações de impedância entre o modo reverso e o modo fundamental confirmaram a característica de menor susceptibilidade à excitação do modo reverso para a hélice dupla. Para esta estrutura, o modo reverso apresentou menor impedância e, mesmo quando excitado, este modo ocorre em frequências maiores que na hélice simples.

Portanto, o modelo desenvolvido constitui uma ferramenta matemática capaz de auxiliar no projeto de estruturas de ondas lentas, tanto para escolher qual tipo de estrutura utilizar como para ajustar seus parâmetros de forma a obter a maior impedância de interação possível para uma dada velocidade de fase.

Paralelamente, construiu-se um aparato experimental para a realização das medidas de velocidade de fase e impedância de interação, de modo a validar o modelo desenvolvido por meio da caracterização das estruturas de ondas lentas. Este aparato também serve como protótipo para um equipamento que será utilizado em medidas realizadas em linha de produção.

Descreveu-se a teoria em que se baseia a medida da velocidade de fase e da impedância de interação. Mostrou-se como planejar um experimento de medida para uma dada estrutura de ondas lentas, cujas características de velocidade de fase e de impedância de interação tenham sido teoricamente estimadas. Enfatizou-se a importância de se desenvolver um modelo matemático para a predição das características de velocidade de fase e impedância de interação de uma estrutura de ondas lentas, visto que, sem uma estimativa dos valores esperados, o procedimento experimental se tornaria muito mais complexo.

Os resultados experimentais obtidos para a velocidade de fase, foram obtidos por dois métodos, a partir da curva de fase em função da posição do curto helicoidal. O primeiro método, que se baseia no coeficiente angular da curva de fase se mostrou mais estável e produz uma curva bastante suave, com pouca oscilação em torno do valor esperado. O segundo método, que consiste em estimar a metade do comprimento de onda guiado, produz resultados com mais oscilação, porém o ajuste dos pontos produz uma curva que não dista do resultado obtido pelo primeiro método mais do que o erro relativo. O método do comprimento de onda guiado tem uma vantagem de poder ser aplicado em curvas que não possuem a regularidade suficiente para a utilização do método do coeficiente angular. Contudo, alguma regularidade ao longo do eixo de deslocamento é necessária.

Foi possível estabelecer um padrão de regularidade para as curvas de fase, de forma que se pôde avaliar se uma medida produzirá resultados consistentes, antes da análise dos dados. Por meio da regularidade da curva de fase é possível

avaliar se o dispositivo de curto está atuando de maneira satisfatória, ou se é necessário reprojeta-lo.

Considerou-se que os resultados obtidos para a velocidade de fase são muito satisfatórios, mesmo com uma visível discrepância em relação à predição teórica. Essa discrepância era esperada e foi reprodutível com margem de erro aceitável para a estrutura carregada com o tubo de acrílico. A reprodutibilidade desta medida também foi satisfatória, ficando dentro da margem de erro relativo reportado na literatura, que é da ordem de 1%.

A impedância de interação foi obtida experimentalmente por dois métodos distintos. No primeiro a variação na constante de propagação foi obtida repetindo o procedimento de medida da velocidade de fase, mas com a presença de um elemento perturbador. Desta forma, obtiveram-se duas constantes de propagação e, portanto, uma variação neste parâmetro. Já o segundo método, consistiu em medir diretamente a variação na constante de propagação. Embora não se tenha estudado segundo método em detalhe neste trabalho, foi possível obter resultados bastante próximos aos do primeiro método, tanto em valores quanto ao comportamento da curva.

Como não se teve acesso a resultados experimentais publicados sobre o tipo de estrutura de ondas lentas estudada neste trabalho, não foi possível fazer comparação com outros trabalhos. No entanto, considerou-se que os resultados obtidos são satisfatórios, embora ainda caibam melhorias no procedimento de medida. A principal melhoria diz respeito ao elemento perturbador. É importante que a permissividade do perturbador seja conhecida em função da frequência. Notou-se ainda que, do ponto de vista do aparato experimental, é importante que o elemento perturbador seja ou rígido como um tarugo ou muito flexível como um fio. Elementos semiflexíveis, como as varetas de PVC e fibra de vidro, podem não ficar muito bem centralizados no eixo axial da estrutura de ondas lentas, mesmo com a utilização dos centralizadores. Uma boa centralização do elemento perturbador é essencial para evitar distorções na curva de fase.

A reprodutibilidade da curva de impedância de interação está dentro do padrão reportado para as hélices simples, que é cerca de 5%. Cabe lembrar que grande precisão não é essencial nesta medida, uma vez que, o número de importância na determinação do ganho de uma TWT é a raiz cúbica da impedância de interação.

Portanto, embora alguns aprimoramentos no procedimento de medida da impedância de interação ainda sejam necessários, considerou-se que os resultados experimentais obtidos foram satisfatórios.

Sugere-se, como continuação deste trabalho que:

- i. seja construído um modelo numérico da estrutura de ondas lentas em questão utilizando um código de elementos finitos, o que tem é uma vertente muito em voga hoje em dia;
- ii. tanto no modelo analítico desenvolvido, quanto no modelo numérico citado acima, considere-se a inserção de um objeto perturbador no eixo na estrutura, de forma que o experimento de perturbação possa ser simulado;
- iii. seja aprimorado o modelo analítico no sentido de acrescentar mais regiões dentro do domínio, de forma a considerar a espessura da hélice e abandonar a técnica de homogeneização dos suportes dielétricos;
- iv. seja desenvolvida uma expressão para a impedância de interação experimental que considere o efeito dos harmônicos espaciais de acordo com as propriedades de simetria inerentes ao modo simétrico de propagação, que o modo sustentado pela SWS em questão;
- v. a técnica de medida da variação na constante de propagação, $\Delta\beta$, diretamente, discutida resumidamente neste trabalho, seja estudada em detalhe;
- vi. se obtenha as curvas de permissividade em função da frequência para os elementos perturbadores utilizados e verifique-se a sua influência nos resultados da impedância de interação; e
- vii. se faça um estudo mais aprofundado sobre o projeto dos curtos helicoidais, de forma que, dada uma banda de frequências e uma velocidade de fase esperada teoricamente, seja possível determinar as dimensões apropriadas para um curto helicoidal eficiente; e
- viii. a medida da velocidade de fase seja realizada utilizando também as informações de fase da onda transmitida.

Referências Bibliográficas

- [1] C. K. Birdsall and T. E. Everhart, "Modified contra-wound helix circuits for high-power traveling-wave tubes," *IRE Trans. Electron Devices*, Vol. ED-3, no. 4, pp. 190-204, Oct. 1956.
- [2] M. Chodorow and E. L. Chu, "Cross-wound twin helices for traveling-wave tubes," *J. Appl. Phys.* vol. 26. pp. 33-43, Jan. 1955.
- [3] J. R. Pierce, *Traveling-Wave Tubes*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1950.
- [4] S. Sensiper, "Electromagnetic wave propagation on helical conductors," Sc.D. Thesis, Dept. of Elec. Eng., MIT, May 1951.
- [5] H. C. Pocklington, "Electrical oscillations in wires," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 324; 1897.
- [6] F. Ollendorf, *Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik*, J. Springer, Berlin, Ger., pp. 79; 1926.
- [7] J. W. Nicholson, "Resistance and inductance of a helical conductor," *Phil. Mag.*, vol. 19, pp. 77; 1910.
- [8] E. T. Kornhauser, "Electromagnetic wave propagation in helical structures," D.Sc. Thesis, Harvard Univ., Jun, 1949.
- [9] E. Roubine, "Study of electromagnetic waves guided by helical circuits," *Ann. Des Telecommun.*, vol. 7, pp. 206, May, 1952; pp. 262, Jun, 1952; pp. 310, Jul-Aug, 1952.
- [10] C. Schulman and M. S. Heagy, "Small signal analysis of traveling wave tube," *RCA Rev.*, vol. 8, pp. 593; Dec, 1947.
- [11] R. S. Phillips and H. Malin, "A helical wave guide II," Res. Rep. 170-3, New York Univ. Math. Res. Group; Jun, 1948.
- [12] C. K. Bagby, "A theoretical investigation of electromagnetic wave propagation on the helical beam antenna," M.Sc. Thesis, Ohio Sate Univ., 1948.
- [13] W. Sollfrey, "Propagation along a helical wire," Rep. TW-10, *J. Appl. Phys.*, vol. 22, pp. 905; Jul, 1951.

- [14] C. C. Cutler, "Experimental determination of helical-wave properties," *Proc. I.R.E.*, vol. 36, pp. 230 – 233, Feb, 1948.
- [15] J. D. Kraus, *Antennas*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N. Y., 1950.
- [16] S. Sensiper, "Electromagnetic wave propagation on helical structures," *Proc. I.R.E.*, vol. 43, pp. 149 – 161, Dec. 1955.
- [17] K. Tsutaki, Y. Yuasa, and Y. Morisumi, "Numerical analysis and design for high-performance helix traveling-wave tubes," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. ED-32, pp. 1842-1849, no. 9, Sep. 1985.
- [18] R. Kompfner and N. T. Williams, "Backward-wave tubes," *Proc. I.R.E.*, vol. 41, pp. 1603 – 1611, Nov., 1953.
- [19] W. N. Cain and R. W. Grow, "The effect of dielectric and metal loading on the dispersion characteristics for contrawound helix circuits used in high-power traveling-wave tubes," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. ED-32, pp. 1566-1578, Jun. 1990.
- [20] B. N. Basu, *Electromagnetic theory and applications in beam-wave electronics*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [21] R. M. Bevensee, *Electromagnetic Slow Wave Systems*, John Wiley & Sons, Inc. 1964.
- [22] R. P. Lagerstrom, "Interaction impedance measurements by perturbation of traveling waves," Electronics Research Lab., Stanford University, Stanford, CA, Report 7, 1957.
- [23] C. W. Steele, "Nonresonant perturbation theory," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-14, 2, 1966, pp. 70-74.
- [24] S. J. Rao, S. Ghosh, P. K. Jain, and B. N. Basu, "Nonresonant perturbation measurement on dispersion and interaction impedance characteristics of helical slow-wave structures," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, vol. MTT-45, pp. 1585-1168, Sep. 1997.
- [25] J. R. Legarra, "Measurement of microwave characteristics of helix traveling-wave circuits," in *IEEE Int. Electron Devices Meeting Tech. Dig.*, pp. 401–411, Dec. 1979.
- [26] C. L. Kory and J. A. Dayton, Jr., "Computational investigation of experimental interaction impedance obtained by perturbation for helical

traveling-wave tube structures,” *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 45, pp. 2063–2071, Sep. 1998.

- [27] P. Wang, R. Carter, and B. N. Basu, “An improved technique for measuring the Pierce impedance of helix slow-wave structures,” in *Europ. Microwave Conf.*, 1994.
- [28] A. V. Soukhov, S. S. Jung, and G. S. Park, “Method for measuring interaction impedance in helix TWT,” in *International Vacuum Electronics Conference*, 2000.
- [29] S. S. Jung, A. V. Soukhov, and G. S. Park, “Effect of conductive perturber diameter on nonresonant measurement of interaction impedance for helical slow-wave structures,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, Vol. 50, Issue 9, pp. 2196 – 2198, Sep. 2002.
- [30] A. V. Soukhov, S. S. Jung, and G. S. Park, “Improvement of non-resonant perturbation measurement using S-matrix data,” *Infrared and Millimeter Waves*, 2000. Conference Digest. 2000 25th International Conference on 12-15 Sept. 2000, pp. 335 – 336.

Apêndice A1 – Cálculo do Determinante do Sistema Linear (2.4.9)

De forma a simplificar a notação, suprimir-se-á a indexação harmônica l, m das expressões, recuperando-a na expressão final. O sistema linear 2.4.9 é dado por

$$\Delta = \begin{bmatrix} I(\gamma_1 a) & 0 & -G_1(\gamma_2 a) & 0 \\ -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ 0 & I(\gamma_1 a) & 0 & -G_2(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

Utilizando o método do cofator, obtém-se

$$\Delta = I(\gamma_1 a) \begin{bmatrix} -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ I(\gamma_1 a) & 0 & -G_2(\gamma_2 a) \\ \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - G_1(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ 0 & I(\gamma_1 a) & -G_2(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

Reaplicando este procedimento mais uma vez, obtém-se

$$\Delta = -I^2(\gamma_1 a) \begin{bmatrix} \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} + I(\gamma_1 a) G_2(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) \\ \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

Desenvolvendo os determinantes de ordem 2, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_2^4 a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) + \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^4 a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \\
&\quad - \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) - \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\gamma_2^2} I^2(\gamma_1 a) G_3(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) + \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I(\gamma_1 a) I'(\gamma_1 a) G_2(\gamma_2 a) G_3(\gamma_2 a) \\
&\quad - \frac{k_0^2}{\gamma_1^2} I'^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) + \frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I(\gamma_1 a) I'(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a)
\end{aligned} \tag{A1.4}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{l^2 \beta^2}{a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[\frac{1}{\gamma_1^4} - \frac{2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_2^4} \right] \\
&\quad - \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\gamma_2^2} I^2(\gamma_1 a) G_4(\gamma_2 a) G_3(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{I'(\gamma_1 a)}{I(\gamma_1 a)} \frac{G_2(\gamma_2 a)}{G_4(\gamma_2 a)} \right] \\
&\quad + \frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I(\gamma_1 a) I'(\gamma_1 a) G_4(\gamma_2 a) G_1(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{I'(\gamma_1 a)}{I(\gamma_1 a)} \frac{G_2(\gamma_2 a)}{G_4(\gamma_2 a)} \right]
\end{aligned} \tag{A1.5}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^4 a^2} I^2(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right]^2 \\
&\quad + \frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I(\gamma_1 a) I'(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) F_1 F_2
\end{aligned} \tag{A1.6}$$

Definindo as funções auxiliares

$$F_{1l,m} = 1 - \frac{\gamma_{2l,m}}{\gamma_{1l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \quad \text{e} \tag{A1.7}$$

$$F_{2l,m} = 1 - \varepsilon_2 \frac{\gamma_{1l,m}}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{I'_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{3l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{1l}(\gamma_{2l,m} a)}, \tag{A1.8}$$

o determinante é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Delta_{l,m} &= I_l^2(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a) \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} F_{1l,m} F_{2l,m} \right. \\
&\quad \left. + l^2 \frac{\beta_{l,m}^2}{\gamma_{1l,m}^4 a^2} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{A1.9}$$

Apêndice A2 – Cálculo do Coeficiente $A_{1l,m}$

De forma a simplificar a notação, suprimir-se-á a indexação harmônica l,m das expressões, recuperando-a na expressão final. Sob essa consideração, o coeficiente $A_{1l,m}$ será dado por

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G_1(\gamma_2 a) & 0 \\ 0 & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ J_\varphi & I(\gamma_1 a) & 0 & -G_2(\gamma_2 a) \\ J_z & \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.1})$$

Aplicando o método do cofator, o determinante é dado por

$$A_1 = \frac{-G_1(\gamma_2 a)}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ J_\varphi & I(\gamma_1 a) & -G_2(\gamma_2 a) \\ J_z & \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

$$A_1 = \frac{G_1(\gamma_2 a)}{\Delta} \left\{ J_\varphi \begin{bmatrix} -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ \frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - J_z \begin{bmatrix} -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_1} I'(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ I(\gamma_1 a) & -G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A2.3})$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ -J_\varphi \frac{j l \beta k_0 Z_0}{\gamma_1^2 \gamma_2 a} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{I'(\gamma_1 a)}{I(\gamma_1 a)} \frac{G_2(\gamma_2 a)}{G_4(\gamma_2 a)} \right] \right. \\ \left. + J_z \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{I'(\gamma_1 a)}{I(\gamma_1 a)} \frac{G_2(\gamma_2 a)}{G_4(\gamma_2 a)} \right] \right\} \quad (\text{A2.4})$$

Utilizando a função auxiliar $F_{1l,m}$, definida no apêndice A1, e uma variante desta, definida como

$$F_{3l,m} = 1 - \frac{\gamma_{1l,m}}{\gamma_{2l,m}} \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a)}{I_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}, \quad (\text{A2.5})$$

o coeficiente $A_{1l,m}$ resulta em

$$A_{1l,m} = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left(F_{1l,m} J_{2l,m} - F_{3l,m} \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2} J_{\varphi l,m} \right). \quad (\text{A2.6})$$

Apêndice A3 – Cálculo do Coeficiente $C_{1l,m}$

De forma a simplificar a notação, suprimir-se-á a indexação harmônica l,m das expressões, recuperando-a na expressão final. Sob essa consideração, o coeficiente $C_{1l,m}$ será dado por

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I(\gamma_1 a) & 0 & -G_1(\gamma_2 a) & 0 \\ -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & 0 & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ 0 & J_\varphi & 0 & -G_2(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & J_z & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

Aplicando sucessivas vezes o método do cofator, obtém-se

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ -J_\varphi \begin{bmatrix} I(\gamma_1 a) & -G_1(\gamma_2 a) & 0 \\ -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} + J_z \begin{bmatrix} I(\gamma_1 a) & -G_1(\gamma_2 a) & 0 \\ -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ 0 & 0 & -G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A3.2})$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ -J_\varphi I(\gamma_1 a) \begin{bmatrix} \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ \frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_2 Z_0} G_3(\gamma_2 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - J_\varphi G_1(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_2} G_4(\gamma_2 a) \\ -\frac{jk_0}{\gamma_1 Z_0} I'(\gamma_1 a) & -\frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_2(\gamma_2 a) \end{bmatrix} - J_z G_2(\gamma_2 a) \begin{bmatrix} I(\gamma_1 a) & -G_1(\gamma_2 a) \\ -\frac{l\beta}{\gamma_1^2 a} I(\gamma_1 a) & \frac{l\beta}{\gamma_2^2 a} G_1(\gamma_2 a) \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

Desenvolvendo algebricamente os determinantes 2 x 2, obtém-se

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} -J_\varphi I(\gamma_1 a) \left[-\frac{l^2 \beta^2}{\gamma_2^4 a^2} G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) + \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\gamma_2^2} G_3(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) \right] \\ -J_\varphi G_1(\gamma_2 a) \left[\frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I(\gamma_1 a) G_2(\gamma_2 a) - \frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I'(\gamma_1 a) G_4(\gamma_2 a) \right] \\ -J_z l \beta I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[\frac{1}{\gamma_2^2 a} - \frac{1}{\gamma_1^2 a} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A3.4})$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} -J_{\varphi T} \left[-\frac{l^2 \beta^2}{\gamma_2^4 a^2} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) + \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \right] \\ -\frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I'(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) + \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\gamma_2^2} I(\gamma_1 a) G_3(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) \\ -J_z l \beta I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[\frac{1}{\gamma_2^2 a} - \frac{1}{\gamma_1^2 a} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A3.5})$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} -J_\varphi \left[+\frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right] \right. \\ \left. -\frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I'(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) \left[1 - \varepsilon_r \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{I(\gamma_1 a)}{I'(\gamma_1 a)} \frac{G_3(\gamma_2 a)}{G_1(\gamma_2 a)} \right] \right] \\ +J_z \frac{l \beta}{\gamma_1 a} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A3.6})$$

Utilizando a função auxiliar $F_{2l,m}$, definida no apêndice A1, (A3.6) pode ser reescrita como

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} -J_\varphi \frac{l^2 \beta^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 a^2} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right] \\ +J_z \frac{l \beta}{\gamma_1 a} I(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_2(\gamma_2 a) \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right] \\ +J_\varphi \frac{k_0^2}{\gamma_1 \gamma_2} I'(\gamma_1 a) G_1(\gamma_2 a) G_4(\gamma_2 a) F_2 \end{array} \right\}, \quad (\text{A3.7})$$

que, reorganizando algebricamente, resulta em

$$C_{1l,m} = \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left[J_{\varphi l,m} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} \right. \\ \left. + \frac{l \beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m} a} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{I'_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(J_{z l,m} - \frac{l \beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} J_{\varphi l,m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right] \quad (\text{A3.8})$$

Apêndice A4 – Cálculo do Coeficiente $A_{2l,m}$

O coeficiente $A_{2l,m}$ é obtido a partir de $A_{1l,m}$, segundo (2.4.3), que pode ser reescrita como

$$A_{2l,m} = \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a)}{G_{1l}(\gamma_{2l,m}a)} A_{1l,m}, \quad (\text{A4.1})$$

Substituindo a expressão para $A_{1l,m}$,

$$A_{1l,m} = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l(\gamma_{1l,m}a) G_{1l}(\gamma_{2l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} \left(F_{1l,m} J_{2l,m} - F_{3l,m} \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} J_{\varphi l,m} \right), \quad (\text{A4.2})$$

obtém-se

$$A_{2l,m} = \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l,m}} \frac{I_l^2(\gamma_{1l,m}a) G_{4l}(\gamma_{2l,m}a)}{\Delta_{l,m}} \left(J_{2l,m} F_{1l,m} - J_{\varphi T} \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} F_{3l,m} \right). \quad (\text{A4.3})$$

Apêndice A5 – Cálculo do Coeficiente $C_{2l,m}$

O coeficiente $C_{2l,m}$ é obtido a partir de $C_{1l,m}$, utilizando (2.4.7), que pode ser reescrita como

$$C_{2l,m} = \frac{C_{1l,m} I_l(\gamma_{1l,m} a) - J_{\varphi l,m}}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}. \quad (\text{A5.1})$$

Separando em duas parcelas,

$$C_{2l,m} = C_{1l,m} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)} - \frac{J_{\varphi l,m}}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}, \quad (\text{A5.2})$$

Substituindo a expressão para $C_{1l,m}$, obtida no apêndice A3,

$$C_{1l,m} = \frac{I'_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{\Delta_{l,m}} \left[J_{\varphi l,m} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{I'_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(J_{z l,m} - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} J_{\varphi l,m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right], \quad (\text{A5.3})$$

obtém-se

$$C_{2l,m} = \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a) I'_l(\gamma_{1l,m} a) G_{1l}(\gamma_{2l,m} a) G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a) \Delta_{l,m}} \left[J_{\varphi l,m} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l,m} \gamma_{2l,m}} F_{2l,m} + \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{1l,m}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l,m} a)}{I'_l(\gamma_{1l,m} a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}{G_{4l}(\gamma_{2l,m} a)} \left(J_{z l,m} - \frac{l\beta_{l,m}}{\gamma_{2l,m}^2 a} J_{\varphi l,m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l,m}^2}{\gamma_{2l,m}^2} \right) \right] - \frac{J_{\varphi l,m}}{G_{2l}(\gamma_{2l,m} a)}. \quad (\text{A5.4})$$

Apêndice A6 – Cálculo das Integrais (2.7.24) e (2.7.25)

A integral (2.7.24) é dada por

$$\mathcal{F}_1 = \int_0^p dz \int_0^{2\pi} a d\varphi E_\varphi^*(\rho = a) J_\varphi. \quad (\text{A6.1})$$

O conjugado complexo da expressão de $E_{1\varphi}(\rho = a)$ é obtido utilizando (2.6.24), que resulta em

$$E_{1\varphi}^*(\rho = a) = \sum_l \left[\frac{j l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) + \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l} a) \right] \sin(l\varphi) e^{j\beta_l z} \quad (\text{A6.2})$$

O termo entre colchetes é dado por (2.7.10), isto é,

$$J_\varphi = 2j \cos \psi \sum_l J_{||l} \sin(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \quad (\text{A6.3})$$

Fazendo as substituições de (A6.2) e (A6.3) em (A6.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = 2a j \cos \psi \sum_{l,m} J_{||m} \left[\frac{j l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) \right. \\ \left. + \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l} a) \right] \int_0^p e^{j(\beta_l - \beta_m)z} dz \int_0^{2\pi} \sin(l\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A6.4})$$

Pode-se verificar a seguinte relação de ortogonalidade da função seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(l\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \pi, & m = l \neq 0 \\ 0, & m = l = 0 \end{cases}. \quad (\text{A6.5})$$

Isto implica que as soluções válidas têm $l = m$. Logo, o duplo somatório é substituído por um somatório simples e

$$\int_0^p e^{j(\beta_l - \beta_m)z} dz = \int_0^p e^0 dz = \int_0^p 1 dz = p. \quad (\text{A6.6})$$

A integral \mathcal{F}_1 resulta então em

$$\mathcal{F}_1 = 2\pi a p j \cos \psi \sum_{l, l \neq 0} J_{||l} \left[\frac{j l \beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) + \frac{j k_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l} a) \right]. \quad (\text{A6.7})$$

A integral \mathcal{F}_2 , dada por (2.7.16), que é

$$\mathcal{F}_2 = \int_0^p dz \int_0^{2\pi} a d\varphi E_{1z}^*(\rho = a) [H_{2\varphi}(\rho = a) - H_{1\varphi}(\rho = a)], \quad (\text{A6.8})$$

é resolvida substituindo as expressões

$$E_{1z}^*(\rho = a) = \sum_l A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z} \quad \text{e} \quad (\text{A6.9})$$

$$H_{2\varphi}(\rho = a) - H_{1\varphi}(\rho = a) = 2 \sin \psi \sum_l J_{||l} \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z} . \quad (\text{A6.10})$$

Realizando as devidas substituições, obtém-se

$$\mathcal{J}_2 = 2a \sin \psi \sum_{l,m} J_{||m} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) \int_0^p e^{j(\beta_l - \beta_m)z} dz \int_0^{2\pi} \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi . \quad (\text{A6.11})$$

Pode-se também verificar a seguinte relação de ortogonalidade da função co-seno

$$\int_0^{2\pi} \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \pi, & m = l \neq 0 \\ 2\pi, & m = l = 0 \end{cases} . \quad (\text{A6.12})$$

Aplicando (A6.12) em (A6.11), considerando ainda (A6.6), obtém-se

$$\mathcal{J}_2 = 4\pi a p J_{||0} A_{10}^* I_0(\gamma_{10} a) \sin \psi + 2\pi a p \sin \psi \sum_{l,l \neq 0} J_{||l} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) . \quad (\text{A6.13})$$

Apêndice A7 – Obtenção da Equação de Dispersão a Partir de (2.7.19)

A partir de (2.7.19), substitui-se as expressões de A_{10}^* , A_{1l}^* e C_{1l}^* , que são dadas por

$$A_{10}^* = -2jJ_{\parallel 0}(A_{10}^z \text{sen} \psi + A_{10}^\varphi \text{cos} \psi), \quad (\text{A7.1})$$

$$A_{1l}^* = -2jJ_{\parallel l}(A_{1l}^z \text{sen} \psi + A_{1l}^\varphi \text{cos} \psi), \text{ e} \quad (\text{A7.2})$$

$$C_{1l}^* = -2jJ_{\parallel l}(C_{1l}^z \text{sen} \psi + C_{1l}^\varphi \text{cos} \psi). \quad (\text{A7.3})$$

Utilizando as expressões para os sub-coeficientes, tem-se que

$$A_{10}^z = \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{20}} \frac{I_0(\gamma_{10}a)G_{10}(\gamma_{20}a)G_{40}(\gamma_{20}a)}{\Delta_0} F_{10} \text{ e} \quad (\text{A7.4})$$

$$A_{10}^\varphi = 0. \quad (\text{A7.5})$$

Substituindo (A7.4) e (A7.5) em (A7.1), obtém-se

$$A_{10}^* = -2jJ_{\parallel 0} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{20}} \frac{I_0(\gamma_{10}a)G_{10}(\gamma_{20}a)G_{40}(\gamma_{20}a)}{\Delta_0} F_{10} \text{sen} \psi. \quad (\text{A7.9})$$

Os sub-coeficientes de A_{1l}^* , são

$$A_{1l}^z = \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l}} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} F_{1l} \text{ e} \quad (\text{A7.10})$$

$$A_{1l}^\varphi = -\frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l}} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} F_{3l}. \quad (\text{A7.11})$$

Portanto, A_{1l}^* é dado por

$$A_{1l}^* = -2jJ_{\parallel l} \frac{k_0 Z_0}{\gamma_{2l}} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \text{sen} \psi. \quad (\text{A7.12})$$

Procedendo da mesma forma para C_{1l}^* , tem-se que

$$C_{1l}^z = \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \text{ e} \quad (\text{A7.13})$$

$$C_{1l}^\varphi = \frac{I_l'(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l}\gamma_{2l}} F_{2l} - \frac{l^2\beta_l^2}{\gamma_{1l}^2\gamma_{2l}^2 a^2} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)}{I_l'(\gamma_{1l}a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{G_{4l}(\gamma_{2l}a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \right]. \quad (\text{A7.14})$$

Realizando as substituições de (A7.13) e (A7.14) em (A7.3), o coeficiente C_{1l}^* pode ser escrito como

$$C_{1l}^* = -2jJ_{\parallel l} \left\{ \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \text{sen} \psi \right. \\ \left. + \frac{I_l'(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\Delta_l} \left[\frac{k_0^2}{\gamma_{1l}\gamma_{2l}} F_{2l} - \frac{l^2\beta_l^2}{\gamma_{1l}^2\gamma_{2l}^2 a^2} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)}{I_l'(\gamma_{1l}a)} \frac{G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{G_{4l}(\gamma_{2l}a)} \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \right] \text{cos} \psi \right\}. \quad (\text{A7.15})$$

Realizando as substituições de (A.7.9), (A7.12) e (A7.15) em (2.7.19), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & 4\pi a p k_0^2 Z_0^2 \left\{ 2J_{\parallel 0}^2 \frac{I_0^2(\gamma_{10}a)G_{10}(\gamma_{20}a)G_{40}(\gamma_{20}a)}{\gamma_{20}\Delta_0} F_{10} \text{sen}^2\psi \right. \\
& + \sum_{l,l \neq 0} J_{\parallel l}^2 \left[\frac{I_l^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{2l}\Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot\psi \right) \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot\psi \right) \text{sen}^2\psi \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_0^2}{\gamma_{1l}\gamma_{2l}} \frac{I_l^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} F_{2l} \cos^2\psi \right. \\
& \quad \left. - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)I_l'(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot\psi \right) \text{sen}\psi \cos\psi \right] \left. \right\}. \quad (\text{A7.16})
\end{aligned}$$

O problema de minimização requer que \mathcal{L} se anule e, portanto, a equação de dispersão pode ser expressa da seguinte forma

$$0 = 2U_0 + \sum_{l=1}^{\infty} J_{\parallel l}^2 (Y_l + Y_{-l}), \quad (\text{A7.17})$$

onde

$$U_0 = \frac{\gamma_{10}}{k_0^2} \frac{I_0(\gamma_{10}a)}{I_0'(\gamma_{10}a)} \frac{J_{\parallel 0}^2}{F_{20}} \text{sen}^2\psi, \text{ e} \quad (\text{A7.18})$$

$$\begin{aligned}
Y_l = & \frac{I_l^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{2l}\Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot\psi \right) \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot\psi \right) \text{sen}^2\psi \\
& - \frac{I_l^2(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{4l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} \frac{k_0^2}{\gamma_{1l}\gamma_{2l}} F_{2l} \cos^2\psi. \quad (\text{A7.19}) \\
& - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l}a)I_l'(\gamma_{1l}a)G_{1l}(\gamma_{2l}a)G_{2l}(\gamma_{2l}a)}{\gamma_{1l}\Delta_l} \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot\psi \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \text{sen}\psi \cos\psi
\end{aligned}$$

Apêndice A8 – Obtenção da Equação de Dispersão para a Hélice Simples

A obtenção da equação de dispersão para a hélice simples é muito similar àquela para a hélice dupla, diferindo apenas nas expressões de campo e corrente utilizadas. Estas expressões de campo e corrente devem ser gerais o suficiente para não considerarem as condições de simetria impostas pela hélice dupla. Partindo, então, da equação (2.7.9), isto é,

$$\mathcal{L} = jk_0 Z_0 \int_0^p dz \int_0^{2\pi} a d\varphi \left\{ E_{1\varphi}^*(\rho = a) [H_{1z}(\rho = a) - H_{2z}(\rho = a)] \right. \\ \left. + E_{1z}^*(\rho = a) [H_{2\varphi}(\rho = a) - H_{2\varphi}(\rho = a)] \right\}, \quad (\text{A8.1})$$

utiliza-se as expressões de E_{1z} e $E_{1\varphi}$ dadas, respectivamente, por (2.3.1) e (2.3.3). Desta forma, tem-se que

$$E_{1z}^*(a, \varphi, z) = \sum_l A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) e^{-jl\varphi} e^{j\beta_l z} \quad e \quad (\text{A8.2})$$

$$E_{1\varphi}^*(a, \varphi, z) = \sum_l \left[-\frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l} I_l'(\gamma_{1l} a) \right] e^{-jl\varphi} e^{j\beta_l z}. \quad (\text{A8.3})$$

Os termos referentes às correntes são

$$H_{1z}(\rho = a) - H_{2z}(\rho = a) = J_\varphi = \cos \psi \sum_l J_{||l} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_l z} \quad e \quad (\text{A8.4})$$

$$H_{2\varphi}(\rho = a) - H_{2\varphi}(\rho = a) = J_z = \sin \psi \sum_l J_{||l} e^{jl\varphi} e^{-j\beta_l z}. \quad (\text{A8.5})$$

Conduzindo o desenvolvimento de forma similar ao caso para a hélice dupla, (A8.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = jk_0 Z_0 (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2), \quad (\text{A8.6})$$

onde as integrais \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 resultam em

$$\mathcal{F}_1 = a \cos \psi \sum_{l,m} J_{||m} \left[-\frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) \right. \\ \left. + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l} I_l'(\gamma_{1l} a) \right] \int_0^p e^{j(\beta_l - \beta_m)z} dz \int_0^{2\pi} e^{j(m-l)\varphi} d\varphi \quad e \quad (\text{A8.7})$$

$$\mathcal{F}_2 = a \sin \psi \sum_{l,m} J_{||m} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) \int_0^p e^{j(\beta_l - \beta_m)z} dz \int_0^{2\pi} e^{j(m-l)\varphi} d\varphi. \quad (\text{A8.8})$$

Utilizado a relação de ortogonalidade da função exponencial, que é,

$$\int_0^{2\pi} e^{j(l-m)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{l,m}, \quad (\text{A8.9})$$

as integrais resultam em

$$\mathcal{F}_1 = 2\pi pa \sin \psi \sum_l J_{||l} \left[-\frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a) + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I'_l(\gamma_{1l} a) \right] e \quad (\text{A8.10})$$

$$\mathcal{F}_2 = 2\pi pa \cos \psi \sum_l J_{||l} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l} a). \quad (\text{A8.11})$$

As expressões para os coeficientes de amplitude de campo são obtidas de (2.4.16) e (2.4.17), cujos conjugados complexos são,

$$A_{1l}^* = -\frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l}} \frac{I_l(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) J_{||l} \sin \psi, \text{ e} \quad (\text{A8.12})$$

$$C_{1l}^* = J_{||l} \sin \psi \frac{I'_l(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\Delta_l} \left[\cot \psi \frac{k_0^2}{\gamma_{1l} \gamma_{2l}} F_{2l} + \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l} a) G_{2l}(\gamma_{2l} a)}{I'_l(\gamma_{1l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)} \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \right]. \quad (\text{A8.13})$$

Substituindo (A8.12) e (A8.13) em \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 e estas, por sua vez, em (A8.6), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = k_0^2 Z_0^2 2\pi pa \sum_l J_{||l}^2 & \left[\frac{I_l^2(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{2l} \Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \sin^2 \psi - \frac{k_0^2}{\gamma_{1l} \gamma_{2l}} \frac{I_l'^2(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{1l} \Delta_l} F_{2l} \cos^2 \psi \right. \\ & \left. - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l} a) I'_l(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{2l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{1l} \Delta_l} \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \sin \psi \cos \psi \right] \end{aligned} \quad (\text{A8.14})$$

Igualando (A8.14) a zero e separando da somatória o termo $l=0$, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\gamma_{10}}{k_0^2} \frac{I_0(\gamma_{10} a)}{I'_0(\gamma_{10} a)} \frac{J_{||0}^2}{F_{20}} \sin^2 \psi - \frac{1}{\gamma_{10}} \frac{I'_0(\gamma_{10} a)}{I_0(\gamma_{10} a)} \frac{J_{||0}^2}{F_{10}} \cos^2 \psi \\ & + \sum_{l, l \neq 0} J_{||l}^2 \left[\frac{I_l^2(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{2l} \Delta_l} \left(F_{1l} - F_{3l} \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \cot \psi \right) \sin^2 \psi \right. \\ & \quad \left. - \frac{k_0^2}{\gamma_{1l} \gamma_{2l}} \frac{I_l'^2(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{4l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{1l} \Delta_l} F_{2l} \cos^2 \psi \right. \\ & \quad \left. - \frac{l\beta_l}{\gamma_{1l}^2 a} \frac{I_l(\gamma_{1l} a) I'_l(\gamma_{1l} a) G_{1l}(\gamma_{2l} a) G_{2l}(\gamma_{2l} a)}{\gamma_{1l} \Delta_l} \left(1 - \frac{l\beta_l}{\gamma_{2l}^2 a} \cot \psi \right) \left(1 - \frac{\gamma_{1l}^2}{\gamma_{2l}^2} \right) \sin \psi \cos \psi \right] \end{aligned} \quad (\text{A8.15})$$

que expressa-se melhor da forma

$$0 = U_0 + V_0 + \sum_{l=1}^{\infty} J_{||l}^2 (Y_l + Y_{-l}), \quad (\text{A8.16})$$

onde U_0 e Y_l e $J_{||l}$ são exatamente as expressões da hélice dupla e

$$V_0 = -\frac{1}{\gamma_{10}} \frac{I'_0(\gamma_{10} a)}{I_0(\gamma_{10} a)} \frac{J_{||0}^2}{F_{10}} \cos^2 \psi. \quad (\text{A8.17}).$$

Apêndice A9 – Cálculo da Potência Eletromagnética Propagada na SWS

A potência propagada na região 1 é dada por (2.8.11), isto é,

$$P_1 = \frac{1}{2} \Re \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_{1\rho} H_{1\varphi}^* - E_{1\varphi} H_{1\rho}^*) \rho d\rho d\varphi. \quad (\text{A9.1})$$

Para facilitar o desenvolvimento, separa-se (A9.1) em duas parcelas, de forma que $P_1 = P_{1A} - P_{1B}$, onde

$$P_{1A} = \frac{1}{2} \Re \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^a E_{1\rho} H_{1\varphi}^* \rho d\rho d\varphi, \text{ e} \quad (\text{A9.2})$$

$$P_{1B} = \frac{1}{2} \Re \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^a E_{1\varphi} H_{1\rho}^* \rho d\rho d\varphi. \quad (\text{A9.3})$$

As expressões para os campos são

$$\begin{aligned} E_{1\rho} &= \sum_l \left[\frac{j\beta_l}{\gamma_{1l}} A_{1l} I_l'(\gamma_{1l}\rho) + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l} I_l(\gamma_{1l}\rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \\ &= \sum_l R_{E_{1\rho},l} \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \end{aligned} \quad (\text{A9.4})$$

$$\begin{aligned} H_{1\varphi}^* &= \sum_l \left[-\frac{jk_0}{\gamma_{1l} Z_0} A_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l}\rho) - \frac{j\beta_l}{\gamma_{1l}^2} \frac{1}{\rho} C_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}\rho) \right] \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \\ &= \sum_l R_{H_{1\varphi},l}^* \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \end{aligned} \quad (\text{A9.5})$$

$$\begin{aligned} E_{1\varphi} &= \sum_l \left[-\frac{j\beta_l}{\gamma_{1l}^2} \frac{1}{\rho} A_{1l} I_l(\gamma_{1l}\rho) - \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{1l}} C_{1l} I_l'(\gamma_{1l}\rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \\ &= \sum_l R_{E_{1\varphi},l} \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \end{aligned} \quad (\text{A9.6})$$

$$\begin{aligned} H_{1\rho}^* &= \sum_l \left[-\frac{jk_0}{\gamma_{1l}^2 Z_0} \frac{1}{\rho} A_{1l}^* I_l(\gamma_{1l}\rho) - \frac{j\beta_l}{\gamma_{1l}} C_{1l}^* I_l'(\gamma_{1l}\rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \\ &= \sum_l R_{H_{1\rho},l}^* \text{sen}(l\varphi) e^{j\beta_l z}. \end{aligned} \quad (\text{A9.7})$$

Desenvolvendo a expressão para P_{1A} , tem-se

$$P_{1A} = \frac{1}{2} \Re \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^a \sum_{l,m} R_{E_{1\rho},l} R_{H_{1\varphi},m}^* \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) e^{j(\beta_m - \beta_l)z} \rho d\rho d\varphi, \quad (\text{A9.9})$$

$$P_{1A} = \frac{1}{2} \Re \epsilon \sum_{l,m} \int_0^a R_{E_{1\rho},l} R_{H_{1\varphi},m}^* \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi e^{j(\beta_m - \beta_l)z}, \quad (\text{A9.10})$$

Pode-se também verificar a seguinte relação de ortogonalidade da função coseno

$$\int_0^{2\pi} \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \pi, & m = l \neq 0 \\ 2\pi, & m = l = 0 \end{cases}, \quad (\text{A9.11})$$

portanto

$$P_{1A} = \frac{1}{2} \Re \mathfrak{c} \left[2\pi \int_0^a R_{E_{1\rho},0} R_{H_{1\varphi},0}^* \rho d\rho + \pi \sum_{l,l \neq 0} \int_0^a R_{E_{1\rho},l} R_{H_{1\varphi},l}^* \rho d\rho \right], \quad (\text{A9.12})$$

$$P_{1A} = \pi \frac{\beta_0 k_0}{\gamma_{10}^2 Z_0} |A_{10}|^2 i_{1,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{\beta_l k_0}{\gamma_{1l}^2 Z_0} \left(|A_{1l}|^2 i_{1,l} + \frac{l^2 Z_0^2}{\gamma_{1l}^2} |C_{1l}|^2 i_{2,l} \right) + \frac{l}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} \right], \quad (\text{A9.13})$$

$$i_{1,l} = \int_0^a I_l'^2(\gamma_{1l}\rho) \rho d\rho, \quad (\text{A9.14})$$

$$i_{2,l} = \int_0^a I_l^2(\gamma_{1l}\rho) \frac{1}{\rho} d\rho, \quad (\text{A9.15})$$

$$i_{3,l} = \int_0^a I_l(\gamma_{1l}\rho) I_l'(\gamma_{1l}\rho) d\rho. \quad (\text{A9.16})$$

Desenvolvendo a expressão para P_{1B} , tem-se

$$P_{1B} = \frac{1}{2} \Re \mathfrak{c} \sum_{l,m} \int_0^a R_{E_{1\rho},l} R_{H_{1\rho},m}^* \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin(l\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi e^{j(\beta_m - \beta_l)z}. \quad (\text{A9.17})$$

Utilizando a relação de ortogonalidade da função seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(l\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \pi, & m = l \neq 0 \\ 0, & m = l = 0 \end{cases} \quad (\text{A9.18})$$

obtém-se

$$P_{1B} = \frac{1}{2} \Re \mathfrak{c} \left(\pi \sum_{l,l \neq 0} \int_0^a R_{E_{1\rho},l} R_{H_{1\rho},l}^* \rho d\rho \right) \quad (\text{A9.19})$$

$$P_{1B} = -\frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{\beta_l k_0 Z_0}{\gamma_{1l}^2} \left(|C_{1l}|^2 i_{1,l} + \frac{l^2}{\gamma_{1l}^2 Z_0^2} |A_{1l}|^2 i_{2,l} \right) + \frac{l}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} \right]. \quad (\text{A9.20})$$

Somando as duas parcelas da potência, obtém a potência propagada na região 1, que é

$$P_1 = \pi \frac{\beta_0 k_0}{\gamma_{10}^2 Z_0} |A_{10}|^2 i_{1,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{\beta_l k_0}{\gamma_{1l}^2 Z_0} (|A_{1l}|^2 + Z_0^2 |C_{1l}|^2) \left(i_{1,l} + \frac{l^2}{\gamma_{1l}^2} i_{2,l} \right) + \frac{2l}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} \right]. \quad (\text{A9.21})$$

A potência propagada na região 2 é dada por (2.8.12), isto é,

$$P_2 = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_a^b (E_{2\rho} H_{2\varphi}^* - E_{2\varphi} H_{2\rho}^*) \rho d\rho d\varphi. \quad (\text{A9.22})$$

Para facilitar o desenvolvimento, separa-se (A9.22) em duas parcelas, de forma que $P_2 = P_{2A} - P_{2B}$, onde

$$P_{2A} = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_a^b E_{2\rho} H_{2\varphi}^* \rho d\rho d\varphi, \text{ e} \quad (\text{A9.23})$$

$$P_{2B} = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \int_0^{2\pi} \int_a^b E_{2\varphi} H_{2\rho}^* \rho d\rho d\varphi. \quad (\text{A9.24})$$

As expressões para os campos são

$$E_{2\rho} = \sum_l \left[\frac{j\beta_l}{\gamma_{2l}} A_{2l} G_{3l}(\gamma_{2l}\rho) + \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l} G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) \right] \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \quad (\text{A9.25})$$

$$= \sum_l R_{E_{2\rho},l} \cos(l\varphi) e^{-j\beta_l z}$$

$$H_{2\varphi}^* = \sum_l \left[-\frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l} Z_0} A_{2l}^* G_{3l}(\gamma_{2l}\rho) - \frac{j\beta_l}{\gamma_{2l}^2} \frac{1}{\rho} C_{2l}^* G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) \right] \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \quad (\text{A9.26})$$

$$= \sum_l R_{H_{2\varphi},l}^* \cos(l\varphi) e^{j\beta_l z}$$

$$E_{2\varphi} = \sum_l \left[-\frac{j\beta_l}{\gamma_{2l}^2} \frac{1}{\rho} A_{2l} G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) - \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{2l}} C_{2l} G_{4l}(\gamma_{2l}\rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_l z}, \quad (\text{A9.27})$$

$$= \sum_l R_{E_{2\varphi},l} \text{sen}(l\varphi) e^{-j\beta_l z}$$

$$H_{2\rho}^* = \sum_l \left[-\frac{j\varepsilon_2 k_0}{\gamma_{2l} Z_0} \frac{1}{\rho} A_{2l}^* G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) - \frac{j\beta_l}{\gamma_{2l}} C_{2l}^* G_{4l}(\gamma_{2l}\rho) \right] \text{sen}(l\varphi) e^{j\beta_l z}, \quad (\text{A9.28})$$

$$= \sum_l R_{H_{2\rho},l}^* \text{sen}(l\varphi) e^{j\beta_l z}$$

Desenvolvendo a expressão para P_{2A} , tem-se

$$P_{2A} = \frac{1}{2} \Re \mathbf{e} \sum_{l,m} \int_a^b R_{E_{2\rho},l} R_{H_{2\varphi},m}^* \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos(l\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi e^{j(\beta_m - \beta_l)z}. \quad (\text{A9.29})$$

Considerando a relação de ortogonalidade da função co-seno, expressa em (A9.11), (A9.27) é reescrita como

$$P_{2A} = \frac{1}{2} \Re \left[2\pi \int_a^b R_{E_{2\rho,0}} R_{H_{2\rho,0}}^* \rho d\rho + \pi \sum_{l,l \neq 0} \int_a^b R_{E_{2\rho,l}} R_{H_{2\rho,l}}^* \rho d\rho \right]. \quad (\text{A9.30})$$

$$P_{2A} = \pi \frac{\varepsilon_2 k_0 \beta_0}{\gamma_{20}^2 Z_0} |A_{20}|^2 i_{4,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{\beta_l k_0}{\gamma_{2l}^2} \left(\frac{\varepsilon_2}{Z_0} |A_{2l}|^2 i_{4,l} + \frac{l^2 Z_0}{\gamma_{2l}^2} |C_{2l}|^2 i_{5,l} \right) + \frac{l}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) i_{6,l} \right], \quad (\text{A9.31})$$

$$i_{4,l} = \int_a^b G_{3l}^2(\gamma_{2l}\rho) \rho d\rho, \quad (\text{A9.32})$$

$$i_{5,l} = \int_a^b G_{2l}^2(\gamma_{2l}\rho) \frac{1}{\rho} d\rho, \quad (\text{A9.33})$$

$$i_{6,l} = \int_a^b G_{2l}(\gamma_{2l}\rho) G_{3l}(\gamma_{2l}\rho) d\rho. \quad (\text{A9.34})$$

Desenvolvendo a expressão para P_{2B} , tem-se

$$P_{2B} = \frac{1}{2} \Re \left[\sum_l \int_a^b R_{E_{2\rho,l}} R_{H_{2\rho,m}}^* \rho d\rho \int_0^{2\pi} \text{sen}(l\varphi) \text{sen}(m\varphi) d\varphi e^{j(\beta_m - \beta_l)z} \right]. \quad (\text{A9.35})$$

Considerando a relação de ortogonalidade da função seno, expressa em (A9.18), (A9.33) é reescrita como

$$P_{2B} = \frac{1}{2} \Re \left[\pi \sum_{l,l \neq 0} \int_a^b R_{E_{2\rho,l}} R_{H_{2\rho,l}}^* \rho d\rho \right], \quad (\text{A9.36})$$

que resulta em

$$P_{2B} = -\frac{\pi}{2} \sum_{l,l \neq 0} \left[\frac{\beta_l k_0}{\gamma_{2l}^2} \left(Z_0 |C_{2l}|^2 i_{8,l} + \frac{\varepsilon_2 l^2}{Z_0 \gamma_{2l}^2} |A_{2l}|^2 i_{7,l} \right) + \frac{l}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) i_{9,l} \right], \quad (\text{A9.37})$$

$$i_{7,l} = \int_a^b G_{1l}^2(\gamma_{2l}\rho) \frac{1}{\rho} d\rho, \quad (\text{A9.38})$$

$$i_{8,l} = \int_a^b G_{4l}^2(\gamma_{2l}\rho) \rho d\rho, \quad (\text{A9.39})$$

$$i_{9,l} = \int_a^b G_{1l}(\gamma_{2l}\rho) G_{4l}(\gamma_{2l}\rho) d\rho. \quad (\text{A9.40})$$

Somando as duas parcelas da potência, obtém a potência propagada na região 2, que é

$$P_2 = \pi \frac{\varepsilon_2 k_0 \beta_0}{\gamma_{20}^2 Z_0} |A_{20}|^2 i_{4,0} + \frac{\pi}{2} \sum_{l, l \neq 0} \left\{ \frac{\beta_l k_0}{\gamma_{2l}^2 Z_0} \left[\varepsilon_2 |A_{2l}|^2 \left(i_{4,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{7,l} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + Z_0^2 |C_{2l}|^2 \left(i_{8,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{5,l} \right) \right] + \frac{l}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) (i_{6,l} + i_{9,l}) \right\}. \quad (\text{A9.41})$$

Finalmente, a potência total propagada na estrutura é dada pela soma de P_1 e P_2 , que é

$$P_T = P_0 + \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (P_l + P_{-l}), \quad (\text{A9.42})$$

onde

$$P_0 = \frac{\pi \beta_0 k_0}{Z_0} \left(\frac{|A_{10}|^2}{\gamma_{10}^2} i_{1,0} + \frac{\varepsilon_2 |A_{20}|^2}{\gamma_{20}^2} i_{4,0} \right) e \quad (\text{A9.43})$$

$$P_l = \frac{\beta_l k_0}{\gamma_{1l}^2 Z_0} (|A_{1l}|^2 + Z_0^2 |C_{1l}|^2) \left(i_{1,l} + \frac{l^2}{\gamma_{1l}^2} i_{2,l} \right) \\ + \frac{\beta_l k_0}{\gamma_{2l}^2 Z_0} \left[\varepsilon_2 |A_{2l}|^2 \left(i_{4,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{7,l} \right) + Z_0^2 |C_{2l}|^2 \left(i_{8,l} + \frac{l^2}{\gamma_{2l}^2} i_{5,l} \right) \right] \\ + l \left[\frac{2}{\gamma_{1l}^3} (\beta_l^2 A_{1l} C_{1l}^* + k_0^2 A_{1l}^* C_{1l}) i_{3,l} + \frac{1}{\gamma_{2l}^3} (\beta_l^2 A_{2l} C_{2l}^* + \varepsilon_2 k_0^2 A_{2l}^* C_{2l}) (i_{6,l} + i_{9,l}) \right] \quad (\text{A9.44})$$

Apêndice A10 – Resumo de uma Técnica Alternativa para a Medida da Variação na Constante de Propagação

Para a determinação experimental de impedância de interação, necessita-se da obtenção experimental da constante de fase, $\beta(\omega)$, característica da estrutura de ondas lentas em questão e da variação nesta constante de fase, $\Delta\beta(\omega)$, provocada por uma perturbação. A principal técnica utilizada neste trabalho consiste em obter $\beta(\omega)$ tanto no estado não perturbado quanto no perturbado por meio da curva de fase em função da posição do curto helicoidal. A partir desses dois valores de constante de fase, obtém-se $\Delta\beta(\omega)$. No entanto, há outra abordagem em que é possível medir $\Delta\beta(\omega)$ diretamente por meio de um procedimento de medida, sendo necessário realizar o procedimento usual apenas uma vez.

A princípio, este método alternativo é bem simples, mas ele tem alguns inconvenientes, que serão discutidos mais à frente, que fazem com que ele careça de um aprofundamento maior. Por causa disso, este método é discutido apenas superficialmente neste trabalho. As referências deste método são [28] [29].

Este método é baseado no fato da variação na constante de fase ser igual à diferença de fase na onda transmitida provocada pela perturbação sobre o comprimento perturbado, isto é,

$$\Delta\beta(f) = \frac{\Delta\varphi(f)}{L}, \quad (\text{A10.1})$$

onde $\Delta\varphi(f)$ é a diferença de fase na onda transmitida pela estrutura em função da frequência e L é o comprimento da estrutura que sofreu perturbação. Uma diferença crucial entre este método e o anterior é que, neste, o parâmetro S medido é o S_{21} (ou o S_{12} , já que a estrutura é recíproca), enquanto no anterior mede-se o parâmetro S_{11} . Isto se deve ao fato de que, neste caso, trabalha-se com a onda transmitida ao invés da refletida.

O método mais prático para realizar a perturbação na estrutura é por meio de um fio (ou bastão) introduzido, assim como no método anterior, no eixo axial da estrutura de ondas lentas. Uma característica interessante deste método é que ele permite obter $\Delta\beta(f)$ devido a perturbações dielétricas e metálicas.

O procedimento consiste em :

- i. Calibrar o VNA para medir os quatro parâmetros S;
- ii. Conectar o VNA na estrutura de testes;
- iii. Salvar o parâmetro $S_{21}(f)$;
- iv. Introduzir o elemento perturbador no eixo da estrutura;
- v. Salvar o parâmetro $S_{21}(f)$ perturbado, isto é, $S'_{21}(f)$;

A diferença de fase $\Delta\varphi(\omega)$ é obtida por

$$\Delta\varphi(f) = \arg\left(\frac{S_{21}(f)}{S_{21}^i(f)}\right). \quad (\text{A10.2})$$

Utilizando (A10.1) encontra-se, então, a variação na constante de propagação e, utilizando (3.3.2.27), determina-se a impedância de interação. Se o elemento perturbador for um fio metálico fino, a expressão para a impedância de interação é [28][29]

$$\mathcal{K}_0(f) = \frac{120 \Delta\beta(f) \gamma^2}{k_0 \beta^2(f) \gamma_l r_p} \frac{1}{\left(I_1(\gamma_l r_p) + \frac{K_1(\gamma_l r_p)}{K_0(\gamma_l r_p)} \right)}. \quad (\text{A10.3})$$

A Figura A10.1 apresenta curvas de diferença de fase em função da frequência para dois elementos perturbadores distintos. Na Figura A10.1(a), apresenta-se a curva de variação de fase para a perturbação de um fio metálico de diâmetro igual a 0,2 mm. Na Figura A10.1(b), apresenta-se a respectiva curva de impedância de interação obtida, juntamente com um ajuste polinomial

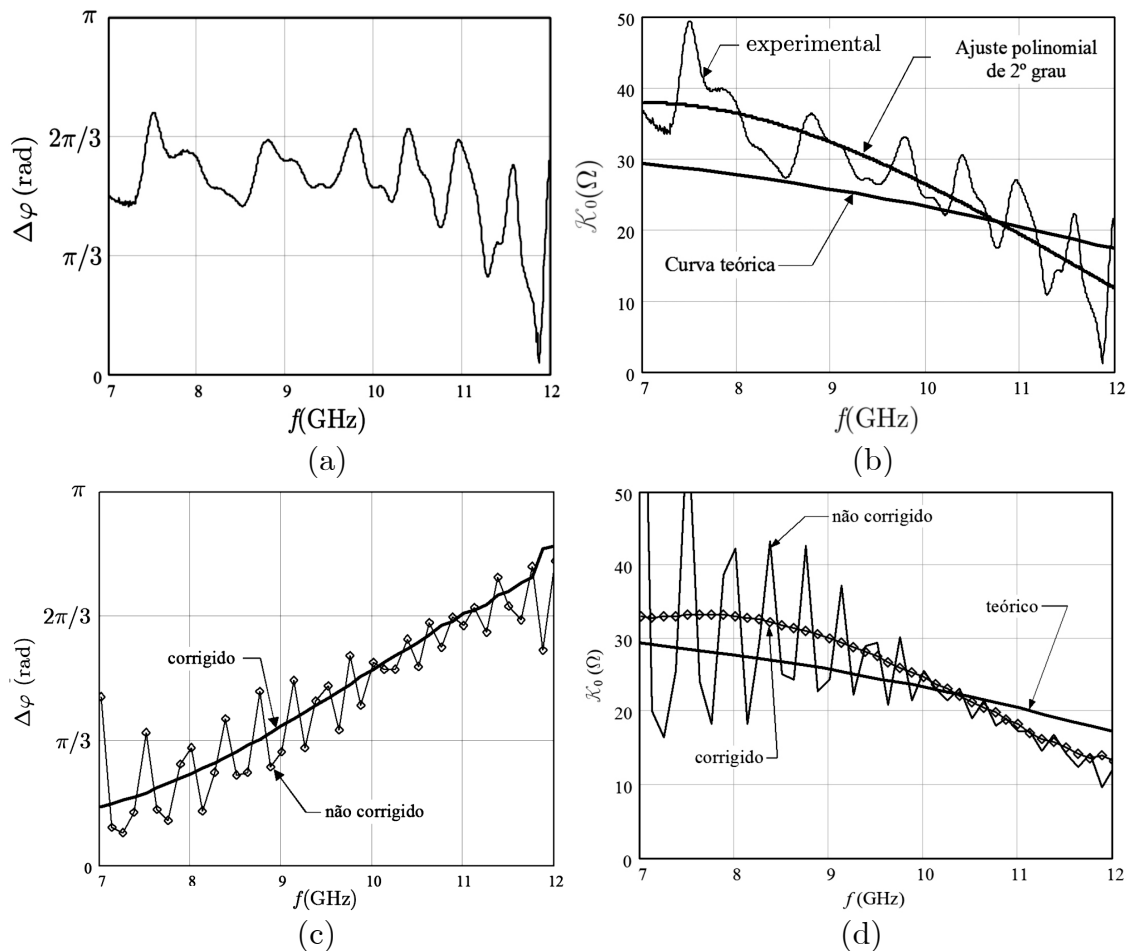


Figura A10.1 – Gráficos da variação na curva de fase devido a perturbações por um fio metálico (a) e por uma vareta de PVC (c). As respectivas curvas de impedância de interação são (b) e (d).

de 2° grau. Na Figura A10.1(c), apresenta-se a curva de variação de fase para a perturbação de uma vareta de PVC de diâmetro igual a 2,1 mm. Apresenta-se a respectiva curva de impedância de interação na Figura A10.1(d).

Observa-se que as curvas de variação de fase apresentam uma oscilação bastante grande, cuja origem ainda é desconhecida. Confirmou-se não se tratar de qualquer problema de calibração. Isto faz com que a curva de impedância de interação também apresente o mesmo comportamento, com a diferença de ser ponderado por $1/\beta^2(f)$. Contudo, fazendo um ajuste por uma curva de comportamento mais provável, observa-se que o resultado é muito próximo do que foi obtido pela outra técnica de medida.

Um método para corrigir o problema das oscilações é discutido em [30]. Este método consiste em salvar em um arquivo todos os parâmetros S da estrutura, tanto no estado perturbado quanto no estado não perturbado, e utilizar a seguinte fórmula para obter a variação de fase corrigida

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{S'_{22}S_{11} + S'_{11}S_{22} + S'_{12}S'_{21} + S_{12}S_{21} - S'_{11}S'_{22} - S_{11}S_{22}}{S'_{21}S_{21}}\right)\right), \quad (\text{A10.4})$$

onde o ponto de exclamação indica os parâmetros S medidos no estado perturbado.

Observa-se o efeito desta correção na Figura A10.1(c), onde a curva mais suave é obtida a partir de (A10.4). Esta curva de variação de fase resulta na curva indicada como corrigida na Figura A10.1(d), que se aproxima bastante dos resultados já obtidos. No entanto, essa correção não teve o mesmo efeito sobre a variação de fase relativa à perturbação realizada com o fio metálico.

Concluindo, este apêndice mostrou que os resultados das medidas de impedância de interação obtidos neste trabalho devem realmente estar próximos do valor real, uma vez que resultados próximos foram obtidos por outra técnica de medida.

Sugere-se, para futuros trabalhos, um minucioso estudo desta técnica de medida, uma vez que a utilização de elementos perturbadores muito finos como os fios metálicos, minimiza os efeitos dos harmônicos espaciais. Isto simplifica bastante a fórmula para a obtenção da impedância de interação a partir da variação na constante de propagação.