

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM "MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS"

Análise do Modelo Hull-White para o Mercado Brasileiro de Derivativos de
Taxas de Juros

Leonardo Alves de Almeida

Orientadores: Prof. Dr. Joe A. Yoshino

São Paulo

2002

Análise do Modelo Hull-White para o Mercado Brasileiro de Derivativos de
Taxas de Juros

Leonardo Alves de Almeida

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade e ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo para
obtenção do Título de Mestre.

Orientadores: Prof. Dr. Joe A. Yoshino

São Paulo

2002

FICHA CATALOGRÁFICA

Almeida, Leonardo Alves de

Análise do modelo Hull-White para o mercado brasileiro de derivativos de taxas de juros/ Leonardo Alves de Almeida.

– São Paulo : FEA/IME/USP, 2002

140 p.

Dissertação – Mestrado

Bibliografia

1. Finanças 2. Taxas de Juros – Modelos 3. Calibração
4. Opções (Finanças) I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP. II. Instituto de Matemática e Estatística da USP.

CDD – 332

Resumo

As principais características do mercado de renda fixa brasileiro, com altas taxas de juros e excessiva volatilidade em comparação com padrões internacionais, tornam sua modelagem extremamente complexa. Um dos grandes desafios na área de engenharia financeira é implementar modelos de taxas de juros que consigam incorporar a maioria dos fatos estilizados observados na renda fixa de mercados emergentes. Este trabalho analisa em detalhe a implementação do modelo Hull-White um fator para o mercado de opções de IDI-BM&F. Descrevemos em detalhe os desafios para ajustar os preços de mercado aos preços do modelo. O procedimento escolhido nos permite a estimação endógena dos parâmetros de velocidade de reversão à média e da volatilidade da taxa de juros de curto prazo. Apesar da escassez de dados diários de opções de IDI, mostramos que é possível calibrar o modelo de Hull-White, de maneira razoavelmente robusta, em períodos de estabilidade econômico financeira. Mostramos também que em períodos com grande volatilidade, mais especificamente, no recente efeito contágio argentino para o mercado de renda fixa brasileiro, o modelo fornece parâmetros instáveis.

Abstract

The main features of Brazilian fixed income market, with high interest rates and huge volatility in a comparison with international standards, make its modelling extremely complex. One of the great challenges in financial engineering is to implement interest rate models that are able to capture most of the stylized facts seen in the emerging markets' fixed-income. This work analyses in detail the implementation of Hull-White one factor model for the IDI-BM&F option market. We describe in detail the challenges for matching the market prices to model prices. The chosen procedure allow us for estimating endogenously both the mean-reverting speed and the short-rate volatility parameters. Despite of the scarcity of IDI option daily data, we show that is possible to calibrate Hull-White model, on a reasonably robust fashion, in periods of economic and financial stability. We also show that in periods with large volatility, more specifically, in the recent Argentinean contagious effect in the Brazilian fixed income market, this model renders unstable parameters.

Agradecimentos

Sem dúvida alguma, terminar esta dissertação de mestrado exigiu muito estudo, esforço e alguns sacrifícios por inúmeras coisas mais agradáveis que deixei de fazer durante os dois anos de mestrado. Entretanto, hoje, tenho a certeza que este esforço valeu a pena e tudo aquilo que aprendi no mestrado é um ativo de grande valor que eu tenho.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha namorada, Juliete, pelo apoio, carinho e pela infinita paciência que teve comigo durante o último ano. Ela abriu mão de inúmeros passeios e viagens que poderia ter feito sozinha apenas para estar do meu lado. Em algumas horas, tenho certeza que era muito chato ficar em São Paulo e deixar de viajar, por exemplo. Entretanto, ela sabia da importância da conclusão do curso e nunca reclamou porque eu precisava gastar muitas horas estudando nos finais de semana. Agora, vamos poder fazer todos os passeios que planejamos!

Agradeço também ao Banco Itaú S.A pela bolsa concedida para a realização deste mestrado. O Banco Itaú S.A tem investido fortemente em cursos e programas de educação para seus funcionários e está colhendo os resultados desta iniciativa. Em especial, agradeço ao Erivelto Calderan Correa, Superintendente de Controle de Risco e Compliance da Área de Mercado de Capitais do Banco Itaú, e meu chefe. Do início até o final do curso, incentivou-me, forneceu todo o apoio necessário em algumas horas mais críticas que precisei e sempre se mostrou interessado em saber como progrediam os estudos. Além disso, agradeço ao José Euclides de M. Ferraz (Banco Itaú) e à Cibele Dunder, aluna do doutorado do IME, por algumas dicas preciosas de MATLAB que utilizei na implementação dos modelos. Agradeço ao Jorge C. Kapotas pela participação nas discussões finais sobre a calibração do modelo.

Para a realização desta dissertação, decidi trabalhar simultaneamente com dois orientadores porque achava que isto agregaria mais conhecimentos a minha formação. O meu orientador oficial foi o Prof. Joe Yoshino, um velho conhecido desde 1995, pois foi meu professor em dois cursos que fiz quando era estudante de graduação em Economia. O prof. Joe foi quem me avisou, em 1999, sobre a criação do Mestrado Profissionalizante e procurou incentivar para que participasse do curso. Não tenho como agradecer sua colaboração, discussões e as inúmeras e valiosas dicas que passou durante a elaboração do capítulo de resultados e em toda a execução deste trabalho.

O co-orientador que escolhi foi o Prof. Pedro Paulo, a quem conheci durante o mestrado. O Prof. Pedro Paulo demonstrou inúmeras qualidades no período em que trabalhamos juntos nesta dissertação. Sempre esteve disponível para tirar dúvidas, ajudar na resolução dos problemas que surgiam e foi extremamente pró-ativo. Sua participação na implementação conceitual das rotinas de calibração foi fundamental e de valor inestimável. Tenho certeza que esta postura do Prof. Pedro Paulo é a razão pela qual é um dos mais elogiados professores em nosso mestrado.

Por último, quero agradecer minha mãe, dona Maria Cecília. Ela é a responsável por ter dado importância total a minha educação desde quando era criança. O “empurrão inicial” dela foi essencial para que eu chegasse a este ponto.

“One of the major challenges any financial engineer has to cope with is the practical implementation of mathematical models for pricing derivative securities”

Damiano Brigo e Fabio Mercurio (2001)

Índice

Lista de Figuras	3
0.1 Introdução Geral	6
1 Estrutura Conceitual para a Modelagem de Renda Fixa	8
1.1 Introdução	8
1.2 Terminologia	9
1.3 A Abordagem por Equações Diferenciais Parciais	12
2 Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juros	19
2.1 Introdução	19
2.2 Classificação dos modelos de taxas de juros: Equilíbrio x Não Arbitragem e Unifatoriais x Multifatoriais	20
2.3 Merton (1973)	22
2.4 Vasicek (1977)	23
2.5 Cox-Ingersoll-Ross (1985)	26
2.6 Ho-Lee (1986)	28
2.7 Hull-White (1990)	29
2.8 Black-Derman-Toy (1990)	36
2.9 Black-Karasinski (1991)	38
2.10 Heath-Jarrow-Morton (1992)	39
3 Derivativos de Taxas de Juros: Principais Produtos	44
3.1 Introdução	44
3.2 Opção sobre Discount-Bond	45
3.3 Cap	47
3.4 Floor	48
3.5 Opção de IDI	49
4 Implementação do modelo Hull-White	54
4.1 Introdução	54
4.2 Calibração dos Parâmetros	55

4.2.1	Principais abordagens	55
4.2.2	Calibração Bootstrapping	59
4.2.3	Calibração Global	60
4.2.4	Calibração para o mercado brasileiro	61
4.3	Construção da Árvore Trinomial	62
4.3.1	Principais idéias	62
4.3.2	Árvores Trinomiais de Taxas de Juros de Hull-White	63
4.3.3	Apreçamento dos Derivativos de Taxa de Juros	69
5	Descrição dos Dados e Fatos Estilizados no Mercado de Renda Fixa Brasileiro	71
5.1	Estrutura Temporal das Taxas de Juros	71
5.2	Aplicação de Componentes Principais para a curva de juros pré-fixada	74
5.3	Análise de Liquidez das opções sobre IDI	75
5.4	Implementação da Árvore Trinomial para a curva de taxa de juros brasileira	76
6	Resultados	86
6.1	Escolha do Modelo	86
6.2	Calibração via Opções de IDI-BM&F	87
7	Conclusão	103
	Bibliografia	105
A	Resultados da calibração com a aplicação do log aos prêmios das opções	108
B	Resultados da calibração variando a função objetivo e o critério de ponderação	119
C	Resultados da calibração com critério de ponderação e filtragem dos dados	126

Lista de Figuras

4.1	Três alternativas do processo de <i>branching</i> , que parte de cada um dos nós da árvore trinomial.	65
4.2	Exemplo de árvore trinomial modificada, em que os nós inferiores e superiores estão limitados em um determinado nível.	68
5.1	Evolução da taxa de juros CDI no período entre janeiro/2000 e dezembro/2001	72
5.2	Superfície para as curvas de taxas de juros brasileira de jan/1998 até dez/2001	73
5.3	Estrutura a termo das taxas de juros pré-fixadas para algumas datas selecionadas	73
5.4	Decomposição das mudanças da curva de juros brasileira em componentes principais.	74
5.5	Quadro Resumo sobre dados de negociação das opções de IDI na BM&F.	76
5.6	Evolução temporal da quantidade de contratos negociados de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.	77
5.7	Evolução temporal da quantidade de negócios de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.	77
5.8	Evolução temporal da quantidade de séries negociadas de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.	78
5.9	Análise do limite inferior da taxa de juros no 1ºestágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $a = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 31/01/2001.	79
5.10	Análise do limite inferior da taxa de juros no 1ºestágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $a = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 22/03/2001.	80
5.11	Análise do limite inferior da taxa de juros no 1ºestágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $a = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 22/03/2001 com 25 dias para vencimento.	81
5.12	$a=10\%$ e $\sigma=1\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$	82
5.13	$a=10\%$ e $\sigma=1,5\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$	83

5.14	$a=20\%$ e $\sigma=1\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$	84
5.15	$a=20\%$ e $\sigma=1,5\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$	84
5.16	$a=30\%$ e $\sigma=2\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$	85
6.1	Exemplo com resultados de duas calibrações, com e sem a aplicação do log aos prêmios das opções	90
6.2	Resumo dos negócios com o vencimento Março 05 de opção de IDI durante o mês de Janeiro de 2000.	91
6.3	Estatísticas para os três tipos de pesos	94
6.4	Comportamento dos resíduos quadráticos da otimização dos parâmetros a e σ	95
6.5	Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P1 (03/01/2000 até 30/11/2000)	96
6.6	Parâmetro a (velocidade de reversão à média) no período P1 (03/01/2000 até 30/11/2000)	97
6.7	Volatilidade da taxa de juros de 21 dias úteis e <i>spread</i> entre a taxa de <i>swap</i> de 1 ano e a taxa de 1 dia, de 03/01/2000 até 15/03/2001	97
6.8	Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P2 (01/12/2000 até 15/03/2001)	98
6.9	Parâmetro a (velocidade de reversão à média) no período P2 (01/12/2000 até 15/03/2001)	99
6.10	Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P3 (16/03/2001 até 28/12/2001)	100
6.11	Parâmetro a (velocidade de reversão à média) no período P3 (16/03/2001 até 28/12/2001)	100
6.12	Curvas de taxas de juros (<i>Swaps</i> Pré x CDI BM&F) para 14/03/2001 e 15/03/2001	101
6.13	Volatilidade das taxas de juros de 21 e 252 dias úteis, de 02/01/2001 até 28/01/2001	101
A.1	Calibração sem aplicação do log aos prêmios	109
A.2	Continuação	110
A.3	Continuação	111
A.4	Continuação	112
A.5	Continuação	113
A.6	Calibração com aplicação do log aos prêmios	114
A.7	Continuação	115
A.8	Continuação	116
A.9	Continuação	117
A.10	Continuação	118
B.1	Calibração com a equação (6.2) e <i>moneyness</i>	120
B.2	Calibração com a equação (6.2) e (vega +1)	120

B.3	Calibração com a equação (6.2) e “ w_3 ”	121
B.4	Calibração com a equação (6.3) e sem ponderação	121
B.5	Calibração com a equação (6.3) e <i>moneyness</i>	122
B.6	Calibração com a equação (6.3) e (vega +1)	122
B.7	Calibração com a equação (6.3) e “ w_3 ”	123
B.8	Calibração com a equação (6.4) e sem ponderação	123
B.9	Calibração com a equação (6.4) e <i>moneyness</i>	124
B.10	Calibração com a equação (6.4) e (vega + 1)	124
B.11	Calibração com a equação (6.4) e “ w_3 ”	125
C.1	Calibração com a equação (6.4), (vega + 1) e filtro de 100%	127
C.2	Calibração com a equação (6.4), “ w_3 ” e filtro de 100%	127
C.3	Calibração com a equação (6.4), (vega + 1) e filtro de 50%	128
C.4	Continuação	129
C.5	Continuação	130
C.6	Calibração com a equação (6.4), “ w_3 ” e filtro de 50%	131
C.7	Continuação	132
C.8	Continuação	133

0.1 Introdução Geral

Esta dissertação possui como tema a análise e implementação do modelo Hull-White para o mercado de derivativos de taxas de juros no Brasil. Está dividida da seguinte maneira:

- Capítulo 1: São descritos os principais conceitos da terminologia de renda fixa, por exemplo, taxa à vista, taxa a termo, taxas instantâneas. Além disso, a partir da relação existente entre taxas à vista, taxas a termo e o preço dos títulos *discount*, a estrutura temporal das taxas de juros pode ser construída a partir de qualquer um dos três conceitos. Na segunda parte do capítulo, discutimos a não-arbitragem em modelos de um fator e introduzimos o preço de mercado pelo risco, o qual é a ligação para a mudança de medida de probabilidade, do mundo natural para o mundo neutro ao risco.
- Capítulo 2: O foco principal deste capítulo é a apresentação sucinta de alguns dos modelos mais importantes de um fator para a taxa de juros. a saber, Merton (1973), Vasicek (1977), Cox-Ingerson-Ross (1985), Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992).
- Capítulo 3: Este capítulo apresenta os principais derivativos de taxas de juros, como opções sobre *discount bonds*, *caps*, *floors* e no caso brasileiro, a opção de IDI.
- Capítulo 4: Este capítulo analisa as etapas no processo de implementação dos modelos, focando no modelo Hull-White. As etapas são calibração de parâmetros usando preços de mercado de opções e algoritmos de otimização, construção da árvore trinomial de

taxas de juros e apreçamento dos derivativos de taxas de juros.

- Capítulo 5: Neste capítulo, a base de dados é descrita e alguns fatos estilizados para o mercado de renda fixa brasileiro são ilustrados através de gráficos que mostram o comportamento da *yield curve* ao longo do tempo. As condições de liquidez das opções de IDI são analisadas e, no final, são realizadas calibrações e algumas simulações com dados reais de curvas de juros para a árvore trinomial de Hull-White.
- Capítulo 6: Este capítulo ressalta os aspectos considerados para a escolha do modelo Hull-White e apresenta a metodologia completa que foi empregada para a calibração das opções de IDI e para a geração dos resultados.
- Capítulo 7: A dissertação é concluída e são sugeridos temas de pesquisa futura.

Capítulo 1

Estrutura Conceitual para a Modelagem de Renda Fixa

1.1 Introdução

Este primeiro capítulo dessa dissertação pretende construir o aparato básico dos conceitos requeridos para a modelagem de renda fixa. É uma apresentação bastante preliminar pois apenas alguns temas são tratados, como a terminologia de taxas de juros, o que é taxa à vista, taxa a termo, taxa instantânea. Também definições de *hedging* para modelos de um fator e o preço de mercado pelo risco são analisadas. Inúmeros conceitos que não estão no presente texto devem ser adicionados pelo leitor interessado no estudo do tema, como a abordagem via esperanças condicionais e martingais, a ligação entre esperanças condicionais e equações diferenciais parciais via Teorema de Feynman-Kac. Outro ponto extremamente importante é a mudança de medida de probabilidade para a medida risco neutro e o uso do Teorema de Cameron-Martin-Girsanov. Em um ambiente de não-arbitragem, o apereçamento de derivativos precisa ser transformado em um martingal através da mudança de medida de probabilidade. O capítulo divide-se na seção 1.2, que discorre

sobre a terminologia de renda fixa e a seção 1.3 discute a abordagem de equações diferenciais parciais para ativos e derivativos de renda fixa.

1.2 Terminologia

O objetivo desta seção é descrever as principais definições relativas a taxas de juros em tempo contínuo, ressaltando os inter-relacionamentos existentes entre taxas à vista, taxas a termo, preços de títulos de renda fixa e outros conceitos igualmente importantes. Em primeiro lugar, definimos o horizonte de tempo como o espaço dado pelo intervalo entre $t = 0$ e $t = T^*$, de modo que t seja sempre a data de análise ou a data atual, portanto, $0 < t < T < T^*$. Nesse contexto, o ativo mais primitivo relacionado a taxa de juros é o título descontado sem pagamentos intermediários¹, em que $P(t, T)$ é a representação para o preço na data t de um título que paga na data T , $t < T$, uma unidade de moeda ao seu detentor, logo, $P(T, T) = 1$. Este título é livre de *default*, ou seja, não há risco de crédito de o emissor falhar na obrigação de pagar 1 ao detentor do título na data T . Este título paga um rendimento entre as datas t e T de modo que o valor cresça de $P(t, T)$ até 1 na data de seu vencimento T . Podemos definir esta taxa como o rendimento continuamente composto até o vencimento ou *yield to maturity* $Y(t, T)$ para este *zero-coupon bond* $P(t, T)$.

$$P(t, T)e^{Y(t, T)(T-t)} = 1$$

$$P(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)} \quad (1.1)$$

$$Y(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}, \quad (1.2)$$

¹Título descontado sem pagamentos intermediários é mais conhecido na literatura de renda fixa como *zero-coupon bond* ou *discount bond*. A partir de agora, sempre que se fizer referência a estes dois termos, eles estarão representando o mesmo significado.

Uma das maneiras para a representação da estrutura temporal das taxas de juros ou curva de taxas de juros é observar, em uma data t , rendimentos $Y(t, T)$ de títulos com datas de vencimento T distintas. Essa curva de juros apresenta-se em formas diversas ao longo do tempo, podendo ser inclinada para cima ou para baixo, plana, ter curvatura, além de outras variações possíveis de formato. Ademais, as volatilidades das taxas e o grau de correlação entre as taxas de juros de curto prazo e as de longo prazo interferem no formato final da estrutura temporal das taxas de juros. O grande desafio na modelagem de renda fixa é tentar capturar este comportamento estocástico de toda a curva de juros. No Brasil, esta curva de juros, usualmente, é construída a partir da coleta dos preços no mercado futuro de DI-BM&F para os prazos mais curtos e das taxas de *swap* Pré-Fixado x Pós-Fixado (Pré x CDI) para os prazos mais longos da curva².

Quando o intervalo de tempo (t, T) tende a zero, a taxa r_t é chamada de taxa de juros instantânea ou taxa de juros de curto prazo e corresponde à taxa de juros livre de risco, na data t , para captação ou empréstimos para um intervalo de tempo infinitesimal dt , ou seja, com vencimento em $t + dt$. De modo equivalente, podemos expressar a taxa de juros instantânea como sendo o limite do *yield-to-maturity* $Y(t, T)$

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T)$$

$$r_t = Y(t, t) \tag{1.3}$$

A partir da definição de r_t , pode-se criar um título que pague ao seu detentor o acúmulo contínuo das taxas de curto prazo em um horizonte de tempo definido entre $t=0$

²Na construção da *yield curve*, é importante definir de maneira consistente quais instrumentos considerar, levando em conta a liquidez de cada um deles e, por conseguinte, a qualidade da informação implícita nos preços dos instrumentos de renda fixa. Além disso, a escolha do melhor método de interpolação da curva (*splines* ou *flat forwards*) é uma questão ainda bastante discutida.

e $t=T$.

$$B_t = e^{\int_0^t r_u du} \quad (1.4)$$

O fator de acumulação (1.4) corresponde ao depósito inicial de $B_0 = 1$ e contínuo reinvestimento a taxa de juros livre de risco de curto prazo r_t , em que (1.4) é a solução da equação diferencial ordinária (EDO) $dB_t = r_t B_t dt$. Em um contrato acordado na data t , para um empréstimo a taxa de juros livre de risco, que se inicia no tempo T com vencimento em U , $t < T < U$, aparece o conceito de taxa a termo (*forward rate*) continuamente composta.

$$f(t, T, U) = -\frac{\ln P(t, U) - \ln P(t, T)}{U - T} \quad (1.5)$$

Tomando-se o intervalo de tempo entre T e U cada vez menor e tendendo a zero, definimos a taxa a termo instantânea como a taxa de juros livre de risco, acordada no tempo t e válida para um intervalo de tempo futuro que se inicia em T e vence em $T + dt$, com dt tendendo a zero. Assumindo-se que $P(t, T)$ é uma função diferenciável, temos

$$f(t, T, T) = f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (1.6)$$

É fácil verificar que na equação (1.6) se tomarmos $T=t$, chegamos à seguinte conclusão

$$f(t, t) = r_t$$

Integrando-se a equação (1.6) de t até T

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, u) du &= \int_t^T -\frac{\partial \ln P(t, u)}{\partial u} du \\ \int_t^T f(t, u) du &= -\ln P(t, u) \Big|_{u=t}^{u=T} \\ \int_t^T f(t, u) du &= -\ln P(t, T) \end{aligned}$$

Inserindo exponenciais nos dois lados da equação acima, chegamos em

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du} \quad (1.7)$$

O preço do *discount bond* $P(t, T)$, além de ser uma função de seu rendimento composto continuamente $Y(t, T)$, também é expresso através do acúmulo das taxas a termo instantâneas $f(t, T)$. Portanto, de acordo com a relação entre $Y(t, T)$, $f(t, T)$ e $P(t, T)$, a estrutura temporal das taxas de juros pode ser construída a partir de qualquer um dos três conceitos.

1.3 A Abordagem por Equações Diferenciais Parciais

Para a compreensão das condições de não-arbitragem envolvendo modelos de taxas de juros de um fator³, adotar-se-á a abordagem proposta por Vasicek (1977). O argumento usado por Vasicek é semelhante ao raciocínio de não-arbitragem e neutralidade ao risco usado por Black e Scholes (1973) na derivação do modelo de opções para ações. Como a taxa de juros é um ativo não transacionável na economia, cria-se uma carteira de títulos que seja instantaneamente sem risco, e que portanto, deve possuir rendimento igual à taxa de juros livre de risco. As ferramentas conceituais desenvolvidas neste tópico são fundamentais para a análise dos modelos de taxa de juros de um fator. A principal hipótese adotada é a de que a taxa de juros à vista r_t é a única variável que determina totalmente a estrutura temporal das taxas de juros e assim, os retornos instantâneos de todos os títulos de renda fixa são perfeitamente correlacionados. A taxa de juros à vista r_t é definida como a taxa de

³Modelos de um fator estão associados a uma única fonte de incerteza. Apenas um fator determina completamente a estrutura a termo das taxas de juros. A discussão maior destes modelos encontra-se no capítulo 2.

juros instantânea para o recebimento e concessão de empréstimos. em um ambiente livre de risco. Dessa forma, um empréstimo com valor inicial Π , realizado à taxa à vista, assumirá a seguinte dinâmica em um instante de tempo dt .

$$d\Pi = \Pi r_t dt \quad (1.8)$$

São assumidas as seguintes hipóteses

a. A taxa de juros à vista é um processo estocástico contínuo ao longo do tempo, sem a ocorrência de "jumps" e r_t é um processo de Markov⁴, $\{r_\tau, \tau \geq t\}$. Portanto, o valor da taxa de juros à vista no tempo t é independente do caminho seguido por r_t no passado até o presente momento, a única informação relevante é seu valor corrente r_t . Supondo-se que a equação diferencial estocástica a seguir para a taxa de juros à vista seja válida

$$dr_t = f(r, t) dt + \rho(r, t) dW_t \quad (1.9)$$

onde $f(r, t)$ é a função que caracteriza a tendência instantânea de r_t , $\rho(r, t)$ é a função de desvio-padrão instantâneo e W_t é o movimento Browniano na medida de probabilidade natural ou subjetiva P .

b. Para um título de renda fixa sem pagamentos intermediários (*discount bond*) $P(t, T)$, no instante de tempo t e com vencimento no tempo T , seu preço é dado pela avaliação da evolução da taxa de juros à vista r_t no intervalo de tempo compreendido entre t e T . De certa forma, esta hipótese é uma consequência da anterior na medida em que assumimos a taxa de juros à vista como único fator responsável pela estrutura temporal de

⁴Um processo de Markov é um processo estocástico para o qual tudo o que sabemos sobre seu futuro é resumido pelo seu valor atual. isto é, a distribuição de X_n é

$$f_n^i(X_n; x_0, x_1, \dots, x_i) = g_n^i(X_n; x_i)$$

taxa de juros e deste ponto, define-se

$$P(t, T) = f(t, T, r_t) \quad (1.10)$$

c. Repetem-se as hipóteses de eficiência em um mercado de capitais. O mercado é eficiente e não existem custos de transação, os ativos podem ser negociados em quantidades infinitesimais, os investidores são racionais, possuem expectativas homogêneas e esta é disponível a qualquer investidor a qualquer tempo. Pode-se seguir, usando as equações (1.9) e (1.10), para a derivação da equação diferencial estocástica para o preço do título de renda fixa. Aplicando lema de Itô.

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= \frac{\partial P(t, T, r_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial P(t, T, r_t)}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t, T, r_t)}{\partial t^2} (dt)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t, T, r_t)}{\partial r^2} (dr)^2 + O(dt^2) \end{aligned}$$

Simplificando a notação e eliminando os termos dt de ordem superiores ou iguais a 2.

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P_t dt + P_r dr + \frac{1}{2} P_{rr} (dr)^2 \\ dP(t, T) &= P_t dt + P_r (f(r, t) dt + \rho(r, t) dW_t) + \frac{1}{2} P_{rr} (f(r, t) dt + \rho(r, t) dW_t)^2 \\ dP(t, T) &= \left(P_t + P_r f(r, t) + \frac{1}{2} P_{rr} \rho^2(r, t) \right) dt + P_r \rho(r, t) dW_t \quad (1.11) \end{aligned}$$

Na equação diferencial estocástica (1.11), é possível distinguir os termos relativos à média $\mu(t, T)$ e a variância $\sigma(t, T)$ dos retornos sobre $P(t, T)$. Tanto a média como a variância são relativas à taxa instantânea de retorno no tempo t sobre um título de renda fixa descontado, com vencimento em T , dado r_t .

$$\mu(t, T) = \left(P_t + P_r f(r, t) + \frac{1}{2} P_{rr} \rho^2(r, t) \right) \quad (1.12)$$

$$\sigma(t, T) = P_r \rho(r, t) \quad (1.13)$$

Substituindo estes dois termos na expressão (1.11), surge a equação diferencial estocástica, na medida de probabilidade natural P , para o preço do título $P(t, T)$.

$$dP(t, T) = \mu(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t \quad (1.14)$$

A partir da equação anterior, vamos supor que um indivíduo componha uma carteira com dois títulos: um título $P(t, T_1)$ sem pagamentos de cupom com vencimento na data T_1 e uma quantidade θ de um título $P(t, T_2)$ de mesma característica, mas com vencimento em T_2 , com $T_2 > T_1$. Logo, sua riqueza total Π é dada por

$$\Pi = P(t, T_1) + \theta P(t, T_2) \quad (1.15)$$

A equação diferencial estocástica representativa da evolução da riqueza Π deste indivíduo é dada por

$$d\Pi = (\mu(t, T_1) + \theta\mu(t, T_2)) dt + (\sigma(t, T_1) + \theta\sigma(t, T_2)) dW_t \quad (1.16)$$

Neste ponto, o argumento de não-arbitragem de Black e Scholes é empregado para tornar o *portfolio* Π sem risco, de acordo com a razão θ escolhida pelo investidor.

$$\theta = -\frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_2)} \quad (1.17)$$

Se o *portfolio* Π for distribuído entre os dois títulos da forma especificada em (1.17), o termo de incerteza e gerador de risco que possui dW_t desaparece da equação e o *portfolio* torna-se instantaneamente sem risco.

$$\Pi = P(t, T_1) - \frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_2)} P(t, T_2) \quad (1.18)$$

$$d\Pi = dP(t, T_1) - \frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_2)} dP(t, T_2) \quad (1.19)$$

Por arbitragem, o valor Π crescerá de acordo com a taxa livre de risco, seguindo a dinâmica definida para r_t . Portanto, igualamos (1.8) e (1.19) para chegar em

$$\frac{\mu(t, T_1) - r_t P(t, T_1)}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r_t P(t, T_2)}{\sigma(t, T_2)} \quad (1.20)$$

A razão expressa em (1.20) é igual para as duas datas, ou seja, é independente da data de vencimento do título. Deste modo, podemos generalizar e chamar este termo de preço de mercado pelo risco $\lambda(t, r)$.

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, T) - r_t P(t, T)}{\sigma(t, T)}, \quad T \geq t \quad (1.21)$$

O real significado do preço de mercado pelo risco é que o prêmio de risco oferecido para títulos com vencimento arbitrário é sempre o mesmo, ou seja, o prêmio de mercado pelo risco independe da data de vencimento do título. O preço de mercado pelo risco é dado pelo excesso de retorno do título $\mu(t, T)$ em relação à taxa de juros livre de risco r_t , dividido pelo desvio padrão $\sigma(t, T)$ do retorno deste título. O termo $\lambda(t, r)$ será usado para a derivação da equação diferencial parcial (EDP) para o preço do título $P(t, T)$. Rearranjando (1.21)

$$\mu(t, T) = r_t P(t, T) + \lambda(t, r) \sigma(t, T) \quad (1.22)$$

Esta última definição para a média dos retornos do título é bastante geral e vale para qualquer título, seja ele de renda fixa ou mesmo uma ação. O retorno de um título qualquer é dado pela taxa de juros livre de risco r_t mais um termo decorrente da multiplicação do prêmio pelo risco $\lambda(t, r)$ pelo desvio padrão do retorno do título $\sigma(t, T)$. Se equalizarmos as equações (1.12) e (1.22), chegamos à EDP para os preços de títulos de renda fixa descontados.

$$r_t P + \lambda(t, r) \sigma(t, T) = P_t + P_r f(r, t) + \frac{1}{2} P_{rr} \rho^2(r, t)$$

$$r_t P + \lambda(t, r) P_r \rho(r, t) = P_t + P_r f(r, t) + \frac{1}{2} P_{rr} \rho^2(r, t)$$

$$P_r (f(r, t) - \lambda(t, r) \rho(r, t)) + P_t + \frac{1}{2} P_{rr} \rho^2(r, t) - P r = 0 \quad (1.23)$$

cuja condição de contorno é $P(T, T) = 1$.

A despeito de a derivação da EDP ter sido feita para um título *zero-coupon*, ela é uma equação geral e define a EDP para qualquer ativo ou derivativo no contexto de modelo unifatorial, alterando-se apenas a condição inicial e/ou final. Por exemplo, para uma opção europeia com vencimento em T cujo ativo objeto seja um título descontado com vencimento em U ($T < U$), a equação diferencial para esta opção é resolvida com a condição final $(P(T, U) - K)^+$. Esta equação diferencial parcial pode ser resolvida analiticamente ou por métodos de integração numérica (por exemplo, diferenças finitas), de acordo com a complexidade do instrumento. Para ilustrar o caráter geral da EDP, exemplificamos com os modelos de Vasicek (1977) e Cox-Ingerson-Ross (1985) para a evolução das taxas de juros. As duas equações a seguir estão na medida de probabilidade natural P .

- Vasicek

$$dr_t = k[\theta - r_t] dt + \sigma dW_t$$

$$\rho(r, t) = \sigma$$

$$\lambda(t, r) = \lambda_{Vas}$$

- Cox-Ingerson-Ross

$$dr_t = k[\theta - r_t] dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

$$\rho(r, t) = \sigma \sqrt{r_t}$$

$$\lambda(t, r) = \frac{\lambda_{CIR}\sqrt{r_t}}{\sigma}$$

O termo de tendência $k[\theta - r_t]$ é o mesmo para os dois modelos, os quais se diferenciam nas formas funcionais para a variância e para o preço de mercado pelo risco. A EDP para os dois modelos é simplesmente

Vasicek

$$P_r(k(\theta - r) - \lambda_{Vas}\sigma) + P_t + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 - Pr_t = 0$$

Cox-Ingersoll-Ross

$$P_r(k(\theta - r) - r\lambda_{CIR}) + P_t + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2r - Pr_t = 0$$

Uma ressalva crítica que precisa ser feita com relação a essa estrutura de *hedging* para modelos de taxas de juros de um fator é que qualquer título ou derivativo pode ser usado para proteger perfeitamente um outro título. Não parece razoável supor que um título com vencimento em um dia seja capaz de proteger totalmente um título com 1 ano para o vencimento.

Capítulo 2

Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juros

2.1 Introdução

A intenção deste tópico não é montar um *survey* sobre todos os modelos de taxa de juros existentes na literatura de Finanças, tarefa já realizada por diversos livros e artigos sobre o tema. O foco principal será a apresentação sucinta de alguns dos modelos mais importantes, ressaltando-se as diferenças entre eles com respeito à dinâmica estocástica, média e variância do processo gerador das taxas de juros e o comportamento da estrutura a termo em cada um deles. À medida que cada um desses modelos for analisado, será dada importância às vantagens e desvantagens em implementar cada um. Vamos iniciar a discussão com alguns conceitos relativos à diferenciação dos modelos entre equilíbrio e não arbitragem, unifatoriais ou multifatoriais. Logo em seguida, discutiremos sobre alguns modelos de um fator para a taxa de juros, a saber, Merton (1973), Vasicek (1977), Cox-Ingersoll-Ross (1985), Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992).

2.2 Classificação dos modelos de taxas de juros: Equilíbrio x Não Arbitragem e Unifatoriais x Multifatoriais

Antes do início da exposição dos modelos selecionados, é necessário introduzir alguns conceitos referentes a sua classificação. Primeiramente, é necessário determinar qual será a variável estocástica a ser modelada. Há três principais abordagens a serem seguidas: a modelagem dos preços de títulos $P(t, T)$, da taxa de juros à vista r_t e da taxa a termo instantânea $f(t, T)$. Todos os modelos que se seguem irão adotar alguma dentre as três alternativas para representar o processo estocástico da taxa de juros. Feita a escolha, podemos distinguir os modelos de estrutura temporal das taxas de juros em modelos de equilíbrio e modelos de não arbitragem. Os modelos de equilíbrio caracterizam-se por colocar a determinação da taxa de juros como resultado de um equilíbrio econômico. A determinação da taxa de juros é endógena. Na prática, podemos dizer que em modelos de equilíbrio a estrutura temporal das taxas de juros surge como resultado do modelo e não é exatamente igual à curva de taxa de juros atualizada e verificada no mercado. Isto constitui-se em um grande inconveniente para o apreamento de ativos contingentes em taxa de juros pois se a curva de taxa de juros encontrada em mercado, a qual é a principal variável para o cálculo do preço de um derivativo de taxa de juros, não é reproduzida, o preço do derivativo embutirá uma incerteza muito grande.¹ Pertencem à classe dos modelos de equilíbrio, os modelos de Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox-Ingerson-Ross (1985), dentre os mais citados.

Para replicar as estruturas a termo das taxas de juros e de volatilidades, os modelos

¹Conforme Hull (1997, pg.424), um erro de 1% no apreamento de um título pode levar a um erro de 25% no preço de uma opção referenciada a este título.

de não-arbitragem possuem termos dependentes do tempo, justamente o que permite o *fit* exato das duas curvas de mercado. Ao contrário dos modelos de equilíbrio, as curvas de juros e volatilidade são entradas para o modelo de não-arbitragem. Essa característica torna este modelo implementável do ponto de vista prático e com grande aceitação por parte dos usuários. Dentro dessa categoria, citam-se Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992), dentre os principais.

A modelagem também requer um número determinado de variáveis de estado para o processo estocástico das taxas de juros e, nesse caso, a escolha recai sobre modelos unifatoriais ou modelos multifatoriais. Os modelos unifatoriais ou de um fator assumem que apenas uma variável de estado determina toda a estrutura a termo das taxas de juros, na maioria dos casos, a taxa de juros à vista r_t . Esta hipótese implica em correlação perfeita entre títulos para qualquer prazo de vencimento, ou seja, qualquer deslocamento da curva das taxas de juros será paralelo. Os resultados conhecidos da análise de componentes principais justificam essa decisão pelo fato de o primeiro fator, o nível das taxas de juros, explicar entre 85-90% da variação dos juros. Dessa forma, à primeira vista, a praticidade em usar um fator no modelo de taxa de juros parece bem argumentada e pode ser empregada para os derivativos que não dependam da correlação entre as taxas à vista ou a termo, por exemplo, opções sobre títulos, *caps* e *floors*. Por outro lado, os mesmos resultados de componentes principais indicam que 90-95% da estrutura a termo é explicada com dois fatores, o nível e a inclinação da curva de juros. Dessa forma, um modelo de dois fatores é o mais recomendado para aqueles derivativos de juros que dependam em maior intensidade

do grau de correlação entre duas taxas diferentes. Um exemplo são os *swaptions* e as opções sobre *yield-curve spread*, cujo *payoff* é dado por $(Y(\tau, n) - Y(\tau, m) - K)^+$, onde $Y(\tau, \cdot)$ é a taxa de juros entre as datas τ e n/m ($n > m$). Então, o uso de modelos multifatoriais adiciona a correlação imperfeita dos títulos na determinação da curva das taxas de juros. O que se observa no mercado, em alguns momentos, são variações acentuadas de inclinação e curvatura, justificando a modelagem multifatorial. Todavia, a complexidade computacional é maior quando esta opção é efetuada. Exemplos de modelos multifatoriais são Brennan-Schwartz (1982), Longstaff-Schwartz (1992) e a versão multifatorial de Heath-Jarrow-Morton (1992).

2.3 Merton (1973)

A primeira proposta de modelagem do processo estocástico gerador das taxas de juros apareceu no clássico artigo de Merton, publicado em 1973. Considerando a medida de probabilidade natural P , o comportamento da taxa de juros em tempo contínuo é descrito pela equação (2.1)

$$dr_t = \theta dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

Os termos θ e σ são constantes positivas e W_t é o movimento browniano, definido na medida P , o qual é o responsável pela incerteza do comportamento futuro das taxas de juros. Pelo fato de apenas um componente aleatório estar envolvido, dW_t , o modelo de Merton é incluído na classe dos modelos unifatoriais de taxa de juros. Além disso, podemos incluí-lo na categoria dos modelos de equilíbrio pois a curva de juros é gerada pelo modelo, portanto, não reproduz fielmente a curva de juros encontrada no mercado. Calculando

a solução para a equação diferencial estocástica de Merton, podemos analisar também a função de distribuição de probabilidade para as taxas de juros.

$$r_t = r_s + \theta(t - s) + \sigma \int_s^t dW_u \quad (2.2)$$

$$r_t \sim N(r_s + \theta(t - s), \sigma^2(t - s)) \quad (2.3)$$

Uma das vantagens do modelo é sua tratabilidade analítica ao fornecer fórmulas fechadas para o preço de *discount bonds* e opções europeias sobre os títulos. Como inconvenientes, pelo fato de a distribuição de probabilidade para r_t ser Gaussiana², existe a possibilidade de taxas de juros negativas, o que o próprio Merton ressaltou em seu artigo. Como a geração da curva das taxas de juros é realizada endógenamente pelo modelo, o mesmo não consegue reproduzir os preços negociados em mercado para os títulos de renda fixa sem cupons. Além disso, contribui negativamente para a avaliação do modelo o caráter de instabilidade da média e da variância, as quais podem assumir valores infinitos à medida que a diferença $(t - s)$ torna-se elevada. Dessa forma, a implementação prática deste modelo é totalmente comprometida.

2.4 Vasicek (1977)

A observação econômica de que taxas de juros muito elevadas não se perpetuam, tendendo para taxas de juros mais baixas em períodos seguintes, assim como taxas de juros muito baixas tendem a se elevar para patamares maiores levou Vasicek a descrever um modelo de estrutura temporal das taxas de juros que incorporasse esta característica.

²O fato de inúmeros modelos unifatoriais de taxas de juros serem Gaussianos é explicado pela equação diferencial estocástica linear apresentar como solução a distribuição normal para r_t . Para maior rigor e discussão das condições técnicas para isto, ver Duffie (1996), Apêndice E.

No artigo de 1977, Vasicek aplicou o processo de Ornstein-Uhlenbeck para a dinâmica estocástica das taxas de juros de curto prazo

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.4)$$

A equação diferencial estocástica (2.4) define os parâmetros a , θ e σ assumindo valores constantes e positivos e o movimento browniano unidimensional W_t pertencendo ao espaço de probabilidade (Ω, F, P) , em que a medida de probabilidade P é a probabilidade natural ou subjetiva. O termo θ representa a expectativa de longo prazo para a média da taxa de juros de curto prazo r_t , de outra forma poderíamos dizer que se espera que as taxas r_t revertam para o patamar θ . Sempre que o termo $\theta - r_t$ for positivo, o parâmetro de velocidade de reversão à média a indicará qual a intensidade, qual a força do ajuste que levará a taxa de juros r_t a subir e aproximar-se de θ no longo prazo. Da mesma forma, o contrário ocorre quando $\theta - r_t$ for negativo e a indicará a velocidade de realização do ajuste que conduzirá a taxa de juros r_t a cair e atingir nível próximo a θ no longo prazo. A solução da equação diferencial estocástica (2.4) é

$$r_t = \theta + (r_s - \theta)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (2.5)$$

Através da solução para o processo em r_t , podemos calcular sua média e a variância condicionais e assim caracterizar a distribuição de probabilidade para a taxa de juros de curto prazo

$$r_t \sim N \left(\theta + (r_s - \theta)e^{-a(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) \right) \quad (2.6)$$

Para a determinação dos preços livre de arbitragem dos títulos $P(t, T)$, a equação diferencial parcial (EDP) para os títulos *zero-coupon* deve ser resolvida com a condição de

contorno $P(T, T) = 1$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2 + (a(\theta - r_t) - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} - r_t P = 0 \quad (2.7)$$

A resolução desta EDP é dada pela função afim (2.8)

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-r_t B(t, T)} \quad (2.8)$$

A equação diferencial estocástica que descreve o comportamento dos preços dos títulos de renda fixa *discount bonds* é determinada pela aplicação do lema de Itô a $P(r_t, t, T)$ em conjunto com (2.4)

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \left(r_t + \frac{\lambda\sigma}{a} \left(1 - e^{-(T-t)a} \right) \right) dt + \frac{\sigma}{a} \left(1 - e^{-(T-t)a} \right) dW_t \quad (2.9)$$

e a estrutura a termo de volatilidades dos títulos é dada por

$$v(t, T) = \frac{\sigma}{a} \left(1 - e^{-(T-t)a} \right) \quad (2.10)$$

Dentre as vantagens da utilização do modelo de Vasicek há o fato de a distribuição de r_t ser Gaussiana e assim existirem fórmulas fechadas para preços de títulos e opções europeias. Se analisarmos mais detidamente a função de distribuição de probabilidade explicitada em (2.6), notaremos que à medida que o tempo para o vencimento tende para o infinito, a média de r_t iguala-se a θ , assim como a variância também assume um caráter estacionário no longo prazo, aproximando-se de $\sigma^2/2a$. A introdução da reversão à média evita a presença de taxas explosivas, ao contrário do modelo de Merton. Do lado das desvantagens, por ser um modelo de equilíbrio, seu uso no apereçamento de derivativos de taxas de juros é perigoso na medida em que o mesmo não consegue calcular o preço do título de renda fixa subjacente e verificado no mercado. As variações de formato que a

curva gerada pelo modelo de Vasicek permite são bastante limitadas, não possibilitando, por exemplo, dupla curvatura na curva de juros.³ Ademais, a probabilidade é positiva de que as taxas de juros sejam negativas. Com certeza, este é um dos problemas do modelo pois vai de encontro à hipótese de não arbitragem se supusermos uma economia com dinheiro. Contudo, a área da função de distribuição de probabilidade para a qual r_t é menor do que zero é minimizada pelo fato de o processo estocástico incorporar a reversão à média. Do ponto de vista da implementação prática do modelo de Vasicek, temos quatro parâmetros ($a, \theta, \sigma, \lambda$) para ajustar as curvas de taxas de juros e de volatilidades dos títulos. Para que o número de incógnitas seja igual ao número de equações, poderíamos ajustar somente dois pontos em cada curva, ou seja, a implementação sob esse enfoque é impossível.⁴ Resta a alternativa de estimar os parâmetros econométricamente via dados históricos via GMM (*Generalized Method of Moments* ou Método dos Momentos) ou ML (*Maximum Likelihood* ou Máxima Verossimilhança).⁵

2.5 Cox-Ingersoll-Ross (1985)

Dentro de um contexto de equilíbrio geral intertemporal no mercado de ativos, com os agentes econômicos possuindo funções de utilidade bem definidas, e do lado da produção, as oportunidades de produção sendo influenciadas pela evolução do estado da tecnologia, as taxas de juros são determinadas endógenamente através do equilíbrio geral que ocorre entre oferta e demanda pelos ativos da economia. Dessa forma, por meio de uma construção

³Ver Hull (1997), 3ª edição, capítulo 17.

⁴Conforme Yacine Ait-Sahalia, *lecture notes* University of Chicago, 1998.

⁵Para estudos nessa linha, consultar um dos mais citados: Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff e A.B. Sanders, 1992. "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, 41, 617-632.

elegante da teoria microeconômica de equilíbrio geral, Cox, Ingersoll e Ross (CIR) propõem a forma a seguir para a dinâmica da taxa de juros em tempo contínuo

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (2.11)$$

Os parâmetros a , θ e σ são constantes positivas e W_t é o movimento browniano definido na medida de probabilidade natural P . CIR também é um modelo em que os preços dos títulos de renda fixa, para qualquer prazo de vencimento, são determinados somente pela taxa de juros de curto prazo r_t , $P(r_t, t, T)$. Comparando com o modelo de Vasicek, CIR possui a mesma característica de reversão à média, ou seja, a taxa de juros r_t tende para um nível θ no longo prazo, cuja velocidade de ajuste é dada por a . A grande diferença e avanço em relação a Vasicek é que, em CIR, é excluída a possibilidade de taxas de juros negativas, fenômeno garantido pelo termo $\sigma\sqrt{r_t}$ ⁶. Ademais, a variância total de r_t cresce se a taxa de juros crescer, sendo portanto proporcional. A função de densidade de probabilidade para a taxa de juros é uma qui-quadrado não central, cujos valores esperados condicionais para a média e variância são

$$E[r_t/r_s] = \theta + (r_s - \theta)e^{-a(t-s)} \quad (2.12)$$

$$Var[r_t/r_s] = r_s \frac{\sigma^2}{a} \left(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)} \right) + \theta \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-a(t-s)} \right)^2 \quad (2.13)$$

À medida que o tempo t nas duas expressões anteriores aproxima-se do infinito, a taxa de juros de curto prazo tende para o valor θ e a variância de r_t tende a $\theta \frac{\sigma^2}{2a}$, implicando em estacionariedade da distribuição de probabilidade. Da mesma forma que Vasicek, o modelo CIR fornece fórmulas fechadas para títulos de renda fixa e opções européias. En-

⁶Para uma prova matemática da impossibilidade de taxas de juros negativas no processo estocástico suposto por CIR (1985), ver W. Feller, 1951, "Two Singular Diffusion Problems", *Annals of Mathematics* 54, pg. 173-182.

tretanto, a grande desvantagem continua presente por não se ajustar à curva de taxas de juros de mercado, à semelhança dos modelos de equilíbrio. A implementação padece dos mesmos problemas citados anteriormente por depender da estimação de parâmetros não observáveis em mercado (preço de mercado pelo risco).

2.6 Ho-Lee (1986)

Em seu artigo de 1986, Thomas Ho e Sang-Bin Lee (HL) foram os pioneiros na construção de um modelo de não-arbitragem para a estrutura a termo das taxas de juros. HL desenvolveram um modelo binomial discreto multiperíodo que replica exatamente a estrutura inteira das taxas de juros negociadas no mercado. Esta árvore binomial representa, portanto, a evolução de toda a estrutura a termo durante um determinado período de tempo, não se limitando aos preços de títulos. Esta foi uma das mais importantes contribuições à modelagem de renda fixa, pois permitiu a passagem dos modelos de equilíbrio para os modelos de não-arbitragem, os quais corrigem a limitação dos primeiros por gerar uma estrutura a termo que corresponde àquela observada no mercado. A transformação do modelo discreto para tempo contínuo segue a equação (2.14)

$$dr_t = \theta(t) dt + \sigma dW_t^Q \quad (2.14)$$

onde $\theta(t)$ é uma função dependente do tempo e que se ajusta para reproduzir os preços dos *discount bonds*. σ é a volatilidade da taxa de juros de curto prazo e W_t^Q é um processo estocástico na medida de probabilidade neutra ao risco Q . Como a árvore binomial calcula preços livre de arbitragem por meio das probabilidades neutras ao risco, sua transformação para tempo contínuo é diretamente para a medida Q . Comparando-se as equações (2.1) e

(2.14), conclui-se que o modelo HL nada mais é que uma versão modificada do modelo de Merton, diferenciando-se apenas porque possui termo θ para a tendência dependente do tempo. A equação dada por (2.14) possui solução

$$r_t = r_s + \theta(t-s) + \sigma \int_s^t dW_u \quad (2.15)$$

e a função de distribuição de probabilidade para r_t é gaussiana.

$$r_t \sim N\left(r_s + \int_s^t \theta(u)(t-u), \sigma^2(t-s)\right)$$

Conforme citado anteriormente, a grande vantagem do modelo é a possibilidade de reproduzir a curva das taxas de juros de mercado. Certamente, a distribuição gaussiana facilita seu uso para cálculo de preços de títulos, opções européias sobre títulos descontados e sobre títulos que pagam cupom. A implementação através de árvore binomial permite a avaliação de derivativos de taxas de juros ligeiramente mais complexos, como opções americanas. Todavia, constitui uma involução em relação ao modelo de CIR a inexistência de reversão à média, que somada à distribuição normal para r_t , torna relevante a preocupação com taxas de juros negativas.

2.7 Hull-White (1990)

John Hull e Alan White propõem uma formulação mais abrangente para o processo estocástico da taxa de juros de curto prazo r_t , dentro do contexto de modelo com um fator de incerteza.

$$dr_t = [\theta(t) - a(t)(b - r_t)] dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t \quad (2.16)$$

É um modelo que incorpora tanto a reversão à média (Vasicek) como a consistência com a curva de juros observada no mercado (Ho-Lee). A inovação do modelo Hull-White

é permitir que todos os parâmetros sejam dependentes do tempo e assim, reproduzir as estruturas a termo das taxas de juros e de volatilidades. A equação diferencial estocástica (2.16) é um processo de Ornstein-Uhlenbeck, cuja dinâmica é caracterizada pelo movimento Browniano W_t , definido por um espaço de probabilidade (Ω, F, P) , onde P é a medida de probabilidade natural. A equação (2.16) pode ser reescrita como

$$dr_t = a(t) \left[\frac{\theta(t)}{a(t)} + b - r_t \right] dt + \sigma(t) r_t^\beta dW_t \quad (2.17)$$

O processo estocástico direciona a taxa de juros de curto prazo para um nível médio $\theta(t)/a(t) + b$, com velocidade de reversão $a(t)$ e volatilidade $\sigma(t) r_t^\beta$. Com relação a cada um dos termos da equação (2.16), a função $\theta(t)$ é a responsável por ajustar-se exatamente à estrutura a termo inicial das taxas de juros, $\sigma(t)$ ajusta-se a estrutura a termo da volatilidade e a função $a(t)$ representa a velocidade de reversão à média. Para o caso em que $\beta = 0$ e $\beta = 1$, Hull e White denominaram os dois modelos, respectivamente, de Vasicek Extendido (EXV) e Cox-Ingerson-Ross Extendido (EXCIR). Para o modelo EXV, temos a representação do processo da taxa de juros de curto prazo, na medida de probabilidade P , conforme (2.18).

$$dr_t = [\theta(t) - a(t)(b - r_t)] dt + \sigma(t) dW_t \quad (2.18)$$

De acordo com o exposto no capítulo 1 sobre a abordagem via EDP, podemos usar o preço de mercado ajustado pelo risco $\lambda(t)$ e resolver a EDP para o modelo Hull-White. Substituindo $\phi(t) = a(t)b + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t)$ em (2.18), temos a EDP válida para qualquer ativo contingente de renda fixa, no caso abaixo, um título.

$$P_r(\phi(t) - a(t)r_t) + P_t + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma(t)^2 - P r_t = 0 \quad (2.19)$$

e a equação diferencial estocástica, na medida neutra ao risco Q

$$dr_t = [\phi(t) - a(t)r_t] dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (2.20)$$

A partir da EDP dada por (2.19), sua solução é a função afim, resolvida para a condição final $P(T, T) = 1$.

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \quad (2.21)$$

Diferenciando-se a equação (2.21) e simplificando seus termos $A(t, T)$ e $B(t, T)$ por A e B , temos

$$\begin{aligned} d(Ae^{-Br}) &= d(A) e^{-Br} + Ad(e^{-Br}) \\ d(Ae^{-Br}) &= dAe^{-Br} + Ae^{-Br} \left[-d(Br) + \frac{1}{2}d(Br)^2 \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= dAe^{-Br} + Ae^{-Br} \left[-(dBr + Bdr) + \frac{1}{2}(B^2\sigma(t)^2 dt) \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= e^{-Br} \left[dA - dBAr - ABdr + \frac{1}{2}AB^2\sigma(t)^2 dt \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= e^{-Br} \left[dA - dBAr + \frac{1}{2}AB^2\sigma(t)^2 dt - ABdr \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= e^{-Br} \\ &\left[dA - dBAr + \frac{1}{2}AB^2\sigma(t)^2 dt - AB \left((\phi(t) - a(t)r) dt + \sigma(t) dW_t^Q \right) \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= e^{-Br} \\ &\left[dA - dBAr + \frac{1}{2}AB^2\sigma(t)^2 dt - AB\phi(t) dt + ABa(t)r dt - AB\sigma(t) dW_t^Q \right] \\ d(Ae^{-Br}) &= Ae^{-Br} \\ &\left[\frac{dA}{A} - dBr + \frac{1}{2}B^2\sigma(t)^2 dt - B\phi(t) dt + a(t)Br dt - B\sigma(t) dW_t^Q \right] \\ \frac{d(P)}{P} &= \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} - \frac{dB}{dt} r + \frac{1}{2}B^2\sigma(t)^2 - B(\phi(t) - a(t)r) \right) dt - B\sigma(t) dW_t^Q \quad (2.22) \end{aligned}$$

Como a equação (2.20) está na dinâmica neutra ao risco, podemos usar o argu-

mento de não-arbitragem e reescrever

$$\frac{d(P)}{P} = rdt + v dW_t^Q \quad (2.23)$$

$$r = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} - \frac{dB}{dt} r + \frac{1}{2} B^2 \sigma(t)^2 - B(\phi(t) - a(t)r) \quad (2.24)$$

$$v = -B\sigma(t) \quad (2.25)$$

Rearranjando a equação diferencial ordinária (EDO) (2.24),

$$r \left(1 - a(t)B + \frac{dB}{dt} \right) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} - B\phi(t) + \frac{1}{2} B^2 \sigma(t)^2 \quad (2.26)$$

A equação (2.26) está na forma $f(t) = r_t g(t)$, logo, a solução desta equação ocorre ou quando r_t é igual a zero ou $f(t) = g(t) = 0$. Portanto, a solução da EDO (2.24) consiste na resolução de um sistema de duas EDO's, a saber,

$$1 - a(t)B + \frac{dB}{dt} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} - B\phi(t) + \frac{1}{2} B^2 \sigma(t)^2 = 0 \quad (2.28)$$

As equações (2.27) e (2.28) possuem as seguintes condições de contorno

$$1 = A(T, T)e^{-B(t, T)}$$

$$A(T, T) = 1 \quad e \quad B(T, T) = 0 \quad (2.29)$$

Logo, a função afim (2.21) resolve a EDP para o modelo Hull-White e sua condição de contorno quando (2.27) e (2.28) são resolvidas de acordo com (2.29). Se assumimos que a e σ são constantes na determinação da fórmula analítica para $P(t, T)$, obteremos os mesmos resultados que em Vasicek (1977).

$$e^{at} \frac{\partial (B(t, T) e^{-at})}{\partial t} + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_t^T \frac{\partial (B(t, T) e^{-at})}{\partial t} &= - \int_t^T e^{-at} \\
B(T, T) e^{-aT} - B(t, T) e^{-at} &= \frac{1}{a} (e^{-aT} - e^{-at}) \\
B(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

e para $A(t, T)$,

$$\begin{aligned}
\int_t^T \frac{\partial (\ln A(t, T))}{\partial t} &= \int_t^T B(s, T) \phi(s) - \frac{1}{2} B(s, T)^2 \sigma^2 ds \\
\ln A(T, T) - \ln A(t, T) &= \int_t^T B(s, T) \phi(s) - \frac{1}{2} B(s, T)^2 \sigma^2 ds \\
\ln A(t, T) &= - \int_t^T \left(B(s, T) \phi(s) - \frac{1}{2} B(s, T)^2 \sigma^2 \right) ds \\
A(t, T) &= e^{- \int_t^T \left(B(s, T) \phi(s) - \frac{1}{2} B(s, T)^2 \sigma^2 \right) ds} \\
A(t, T) &= e^{\left[\frac{(B(t, T) - T + t)(a\phi(t) - \sigma^2/2) - \sigma^2 B(t, T)^2}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right]}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Contudo, a análise do modelo Hull-White no caso em que a e σ são dependentes do tempo, permite verificar e ilustrar melhor as propriedades do modelo. Deve-se resolver os termos $A(t, T)$, $B(t, T)$, $a(t)$ e $\phi(t)$ em função dos valores conhecidos no tempo 0 para $A(0, T)$, $B(0, T)$, $\sigma(0)$, esta última a volatilidade da taxa de juros instantânea (*short rate*).

$$\widehat{A}(t, T) = \widehat{A}(0, T) - \widehat{A}(0, t) - B(t, T) \frac{\partial \widehat{A}(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[B(t, T) \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right]^2 d\tau \tag{2.32}$$

$$B(t, T) = \frac{B(0, T) - B(0, t)}{\partial B(0, t) / \partial t} \tag{2.33}$$

onde $\widehat{A}(t, T) = \log A(t, T)$. O resultado final são fórmulas analíticas para $a(t)$ e $\phi(t)$

$$a(t) = - \frac{\partial^2 B(0, t) / \partial t^2}{\partial B(0, t) / \partial t} \tag{2.34}$$

$$\circ(t) = -a(t) \frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{A}(0, t)}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right]^2 d\tau \quad (2.35)$$

Traduzindo os conceitos implícitos em cada um dos termos anteriores, podemos ver que o modelo Hull-White corresponde exatamente às estruturas a termo iniciais das taxas de juros e volatilidade. Na solução acima, assumimos que $B(0, T)$ era um valor conhecido no instante $t=0$. Para mostrar isto, consideramos a fórmula já descrita no capítulo 1 para o preço do *discount bond* em função de seu *yield to maturity* e a fórmula da função afim para $P(t, T)$.

$$Y(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}$$

logo, podemos reescrever,

$$Y(t, T) = -\frac{\ln A(t, T) - r_t B(t, T)}{T - t}$$

Aplicando o lema de Itô à função $Y(r, t, T)$, na qual adicionamos a dependência a r_t , temos

$$dY(r, t, T) = \frac{\partial Y(r, t, T)}{\partial r_t} dr$$

$$\sigma_{Y(r, t, T)} = \frac{\partial Y(r, t, T)}{\partial r} \sigma(t) \quad (2.36)$$

onde $\sigma_{Y(r, t, T)}$ é a volatilidade das taxas à vista (*yield to maturity*) entre t e T e $\sigma(t)$ é a volatilidade da taxa instantânea (*short rate*) verificada no instante t . Essas volatilidades estão medidas em termos absolutos (dY) e não em termos relativos (dY/Y) Substituindo a derivada parcial em (2.36),

$$\begin{aligned}\sigma_{Y(r,t,T)} &= \frac{B(t,T)}{T-t} \sigma(t) \\ B(t,T) &= \frac{(T-t)}{\sigma(t)} \sigma_{Y(t,T)}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Então, $B(t, T)$ é função da estrutura a termo de volatilidade das taxas à vista, dada por $\sigma_{Y(r,t,T)}$, e da volatilidade da *short-rate* $\sigma(t)$ ⁷. Para calcular no instante $t=0$, obtemos,

$$B(0, T) = \frac{T}{\sigma(0)} \sigma_{Y(0,T)}\tag{2.38}$$

Usando (2.38), torna-se bastante claro o ajuste à estrutura a termo atual das volatilidades das taxas de juros à vista. O termo $A(0, T)$ é obtido no momento em que fazemos o ajuste aos preços dos títulos descontados (*discount bonds* ou *zero coupon*) observados no instante atual $t=0$, ou seja, à estrutura a termo das taxas de juros.

$$P(0, T) = A(0, T) e^{-B(0,T)r_t}\tag{2.39}$$

Portanto, $A(0, T)$ e $B(0, T)$ são inseridos nas equações (2.32), (2.33), (2.34) e (2.35) para que seja possível calcular $A(t, T)$, $B(t, T)$, $a(t)$ e $\phi(t)$ para qualquer instante de tempo. O termo $\sigma(\tau)$ que surge na equação para $A(t, T)$ permite deduzir o comportamento atual e futuro da volatilidade da taxa de juros instantânea.

Analisando-se os aspectos de implementação do modelo Hull-White, é possível reconhecer inúmeras qualidades do modelo. A forma funcional do modelo Vasicek Extendido resulta em distribuição normal para r_t , logo, em distribuição lognormal para os preços dos títulos $P(t, T)$, o que permite o uso do aparato Black e Scholes para a obtenção de fórmulas

⁷Esta mesma derivação pode ser feita para mostrar que $B(t, T)$, alternativamente, também é expresso em termos da estrutura a termo de volatilidade das taxas a termo. Ver Apêndice Hull e White (1990) "Pricing interest rate derivative securities". Ver ainda Rebonato, segunda edição, capítulo 13.

fechadas para opções europeias sobre títulos com e sem cupons. No caso de EXCIR, é necessário solução numérica para o cálculo de preços de opções. A equação para \mathbb{V}_t é dada por (2.10). Extendido com parâmetros dependentes do tempo possui três graus de liberdade, os quais se ajustam à estrutura a termo das taxas de juros ($\phi(t)$) e à estrutura a termo de volatilidades e aos preços de *caps* e *swaptions* ($\alpha(t)$ e $\sigma(t)$). Porém, a implementação recai, na grande maioria dos casos, no uso de valores constantes para α e σ , porque ao ajustar preços exatos aos de mercado para prêmio de opções, o modelo pode produzir padrões inconsistentes para a volatilidade futura da *short rate* $\sigma(t)$. É claro que ao tornar α e σ constantes, impede-se que preços de opções sejam recuperados exatamente, contudo, o resultado é uma estrutura estacionária para a volatilidade e um apreçamento mais robusto para derivativos exóticos.

Ademais, Hull e White, como será visto em capítulo posterior, propõem a resolução do modelo através da construção de árvores trinomiais. Isto confere grande flexibilidade na medida em que opções americanas também podem ter preços calculados. Dessa forma, a tratabilidade analítica e a facilidade de implementação é grande porque pode se dar por via analítica ou por árvores trinomiais. Como desvantagem do modelo, citamos a probabilidade de serem observadas taxas de juros negativas, característica atenuada pela reversão à média.

2.8 Black-Derman-Toy (1990)

Assim como os outros modelos de taxas de juros citados anteriormente, o modelo sugerido por Black, Derman e Toy (BDT) é um modelo Markoviano de um fator, ou seja, apenas o valor atual da taxa de juros de curto prazo r_t determina a estrutura a termo vigente bem como sua evolução no tempo. No artigo original, BDT mostram como imple-

mentar o modelo em uma árvore binomial e ressaltam a facilidade em replicar a estrutura a termo de juros com volatilidade constante ou replicar as duas estruturas a termo simultaneamente. Assim como o modelo Hull-White, BDT também é uma evolução clara em relação ao modelo de Ho-Lee, pois este último assume volatilidade constante para as taxas de juros de qualquer prazo. Entretanto, não somente a possibilidade de ajustar uma estrutura a termo de volatilidades das taxas de juros é uma vantagem de BDT. Ao adotar a hipótese de que r_t possui distribuição lognormal, BDT evita a ocorrência de taxas de juros negativas e resolve um inconveniente da maioria dos modelos de um fator que assumem a distribuição gaussiana para a taxa de juros de curto prazo. A lognormalidade para r_t , todavia, reduz a tratabilidade analítica do modelo, pois não é mais possível obter fórmulas fechadas para preços de títulos e opções europeias. Há necessidade de esquemas numéricos, por exemplo Newton-Raphson, para resolver as taxas de juros, volatilidades e preços de títulos em cada nó da árvore. Em tempo contínuo, podemos analisar algumas características analíticas do modelo.

$$d \ln(r_t) = (\theta(t) - a \ln(r_t)) dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (2.40)$$

Na equação (2.40), podemos verificar mais claramente que o processo para $\ln(r_t)$ possui reversão à média. Se considerarmos $r_t = u(t) e^{\sigma(t)W_t}$ e aplicarmos o lema de Itô para a função $r(t, W_t)$, com $W_t = (\ln r_t - \ln u(t)) / \sigma(t)$, ampliamos o nível de detalhamento do modelo BDT.

$$d \ln(r_t) = \left(\frac{\partial \ln u(t)}{\partial t} - \frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} (\ln u(t) - \ln r_t) \right) dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (2.41)$$

onde $u(t)$ é a mediana da distribuição lognormal para r_t . Se considerarmos $a=0$ na equação (2.40), o processo estocástico não apresentará reversão à média, tornando-se uma

“versão logaritmica” do modelo Ho-Lee. Visto de outra forma, se considerarmos volatilidade constante, o termo $\partial \ln \sigma(t) / \partial t$ será igual a zero e não permitirá reversão à média. Uma das limitações do modelo é que deve ser assumido que o processo de evolução de $\sigma(t)$ decaia com o tempo ($\partial \ln \sigma(t) / \partial t < 0$), caso contrário, acontecerá o inverso (*mean-fleeing*) da reversão à média e a volatilidade assumirá um caráter explosivo com o aumento do tempo.

Apenas para efeito de comparação, a discretização do processo estocástico para r_t na árvore binomial para HL (normal) e BDT (lognormal) segue

$$Ho - Lee : r_{i,j} = u(i) + \sigma j \sqrt{dt} \quad (2.42)$$

$$BDT : r_{i,j} = u(i) e^{-\sigma j \sqrt{dt}} \quad (2.43)$$

Nas equações (2.42) e (2.43), $r_{i,j}$ é a taxa de juros no tempo i e estado j e $u(i)$ é o termo que se ajusta para gerar preços dos títulos iguais aos do mercado. BDT assumem que a probabilidade neutra ao risco é igual a $1/2$ em qualquer nó. O procedimento de *forward induction* e o uso dos preços de estado de Arrow-Debreu⁸ facilita a construção da árvore binomial. Além dos contratos europeus, a avaliação de derivativos de taxas de juros americanos é viável porque os preços dos títulos são calculados para qualquer nó, permitindo o cálculo do *payoff* para um exercício antecipado.

2.9 Black-Karasinski (1991)

Da equação geral para o modelo de Black-Karasinski (BK), podemos concluir que o modelo BDT é um caso particular de BK.

$$d \ln(r_t) = (\theta(t) - k(t) \ln(r_t)) dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (2.44)$$

⁸Ver Jamshidian, F., 1991. “Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models”, *Journal of Fixed Income*, 1, 62-74.

Ao adicionar um termo dependente do tempo $k(t)$ e que caracteriza a velocidade de reversão à média, BK deixam três graus de liberdade para o ajuste simultâneo das curvas de taxas de juros, de volatilidade e dos *caps*. Em seu artigo, é demonstrada a implementação do modelo em uma árvore binomial na qual o espaçamento de tempo da árvore é variável e é o parâmetro que se ajusta para replicar os preços de mercado para os *caps*. De modo similar à BDT, para evitar distorções é preciso usar uma curva de volatilidades que seja declinante com a passagem do tempo.

2.10 Heath-Jarrow-Morton (1992)

Seguindo a mesma linha de raciocínio de Ho-Lee, David Heath, Robert Jarrow e Andrew Morton (HJM-1992) desenvolveram uma nova abordagem para modelos de taxas de juros com o objetivo de apreçar títulos de maneira consistente com o mercado e tratar a evolução de toda a curva de juros, não somente a *short-rate*. O modelo de HJM é um marco na modelagem de taxas de juros porque sua construção engloba toda a classe de modelos de um fator por meio da evolução completa das taxas *forwards* instantâneas em tempo contínuo, alterando-se apenas as especificações do termo de tendência (*drift*) e da volatilidade. O ativo subjacente no modelo HJM é curva inteira e atual das taxas de juros. Portanto, devido à generalidade e amplitude do modelo HJM é impreciso chamá-lo de “modelo HJM”. Não é um exagero afirmar que HJM está para os modelos de derivativos de taxas de juros assim como o modelo de Black & Scholes está para os modelos de derivativos de ações, moedas, índices e futuros. Se considerarmos um intervalo de tempo $[0, T^*]$ e fixarmos uma data $T < T^*$, a formalização de HJM através de seu processo estocástico para

a taxa a termo na versão unifatorial é dada por

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T) du + \int_0^t \sigma(u, T) dW_u^Q \quad (2.45)$$

onde os parâmetros $\alpha(t, T)$ e $\sigma(t, T)$ caracterizam, respectivamente, o termo de tendência e volatilidade da taxa a termo. Fixando-se T , temos a dinâmica da taxa a termo $f(t, T)$, ou seja, a evolução ao longo do tempo da taxa a termo observada na data t e válida para um intervalo de tempo infinitesimal a partir de T . Se variarmos a data de vencimento T , conseguimos reunir e descrever a evolução de toda a curva de taxas a termo. Adicionando um pouco mais de rigor à equação (2.45), a mesma está definida em um espaço de probabilidade (Ω, F, Q) , já na medida de probabilidade neutra ao risco, e os parâmetros $\alpha(t, T)$ e $\sigma(t, T)$ satisfazem condições de integrabilidade para que sejam processos adaptados e finitos para qualquer T .

$$\int_0^T |\alpha(u, T)| du + \int_0^T |\sigma(u, T)|^2 du < \infty$$

Como pode ser notado pela equação (2.45), HJM é um modelo não-Markoviano pois a dinâmica da taxa $f(t, T)$ depende da história do movimento Browniano do instante 0 até o tempo t . Para derivar as condições necessárias para ausência de arbitragem em HJM, seguiremos Shreve (1996) e Musiela-Rutkowski (1997) de maneira concisa. Reescrevendo (2.45), temos

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t^Q \quad (2.46)$$

Do capítulo 1, estabelecemos em (1.7) que

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

Se primeiramente diferenciarmos $-\int_t^T f(t, u) du$, chegamos em

$$\begin{aligned} d\left(-\int_t^T f(t, u) du\right) &= r_t dt - \int_t^T \alpha(t, u) du dt - \int_t^T \sigma(t, u) du dW_t^Q \\ d\left(-\int_t^T f(t, u) du\right) &= r_t dt - \alpha^*(t, T) dt - \sigma^*(t, T) dW_t^Q \end{aligned}$$

usando o Lema de Itô em (1.7) e o resultado anterior, temos

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r_t dt - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^*(t, T)^2 \right] dt - \sigma^*(t, T) P(t, T) dW_t^Q$$

Para que Q seja de fato de a medida de probabilidade risco neutra, o termo de tendência da equação anterior deve equivaler à taxa de juros livre de risco, pois todos os ativos possuem este rendimento em um mundo neutro ao risco. Para isto, é preciso que a condição a seguir seja satisfeita

$$\begin{aligned} \alpha^*(t, T) &= \frac{1}{2} \sigma^*(t, T)^2, \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*, \\ \int_t^T \alpha(t, u) du &= \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma(t, u) du \right)^2 \end{aligned}$$

Derivando em relação à T,

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du \quad (2.47)$$

E assim, a equação (2.46) pode ser reformulada em termos de (2.47).

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du dt + \sigma(t, T) dW_t^Q \quad (2.48)$$

Deduzimos da equação (2.48), que o processo estocástico das taxas a termo é caracterizado totalmente pela estrutura a termo da volatilidade das taxas a termo. Sem dúvida, é um resultado poderoso pois ressalta a importância do conhecimento da estrutura a termo de volatilidade, pois, dados os preços de títulos de renda fixa, o único parâmetro que não

conseguimos verificar em mercado para o apreçamento de derivativos é a volatilidade e sua estrutura a termo. A equação (2.48) pode ser reformulada em termos de taxa de juros instantânea dado que $r_t = f(t, t)$.

$$r_t = f(0, t) + \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du dt + \sigma(t, T) dW_t^Q \quad (2.49)$$

Além disso, é possível extrair a maioria dos modelos unifatoriais de taxas de juros a partir da formulação HJM. Alterando-se apenas a especificação funcional da variância, é possível deduzir os modelos de Ho-Lee, CIR, Hull-White, para citar alguns, a partir do modelo geral de Heath-Jarrow-Morton. Dessa forma, fica comprovada a abrangência de HJM ao englobar todos estes modelos e mostrar que podem ser derivados a partir dele.

Sobre aspectos práticos de implementação, HJM é bastante flexível por aceitar diversas formas funcionais para a estrutura da volatilidade e pela possibilidade de inclusão de mais fatores (versão multifatorial). Essas características auxiliam o modelo HJM a fornecer uma descrição mais precisa da *yield curve* e de seus movimentos. Para o apreçamento de derivativos mais complexos, do tipo *path-dependent* (dependentes do caminho) ou que sejam influenciados pela correlação entre pontos diferentes na curva de juros, sem dúvida, a versão multifatorial de HJM é a mais indicada. Pelo fato de ser não-Markoviano, não possui fórmulas fechadas e sua implementação ocorre com simulação de Monte Carlo ou árvores não-recombinantes. Com relação à simulação de Monte Carlo, para opções americanas é praticamente inviável identificar os valores de exercício antecipado. Para as árvores não-recombinantes o custo computacional é intenso, se em uma árvore binomial recombinante o número de nós terminais é igual a n , em uma árvore binomial não-recombinante este número é igual a 2^n . Dessa forma, tendo em vista o *trade-off* entre as vantagens e a complexidade

e intensidade computacional na implementação de modelos HJM, para derivativos mais simples é preferível usar modelos de um fator para r_t .

Capítulo 3

Derivativos de Taxas de Juros: Principais Produtos

3.1 Introdução

O volume negociado de derivativos de taxas de juros, tanto em bolsas como em mercado de balcão, vem experimentando crescimento contínuo ano após ano. Segundo estatísticas do ISDA (*International Swap Derivatives Association*), o valor nominal das posições de derivativos de taxas de juros em mercados de balcão (OTC: *over-the-counter*) cresceu de US\$ 865 bilhões, em 1987, para cerca de US\$ 63 trilhões no final de 2000. No mercado externo, principalmente Europa e Estados Unidos, há uma variedade enorme de produtos oferecidos nas bolsas de futuros e pelos bancos aos seus clientes. Estes instrumentos são usados com diversas finalidades: *hedging*, arbitragem e especulação. Dentre os principais produtos, podemos citar os *swaps* entre taxas de juros pós-fixadas x pré-fixadas, futuros de títulos governamentais, opções sobre títulos, *caps*, *floors*, *swaptions*, até as operações mais complexas envolvendo opções americanas, opções com barreira, digitais e etc.

O mercado brasileiro infelizmente carece de instrumentos mais sofisticados para a

gestão de carteiras de renda fixa, destacando-se, principalmente, os futuros de taxa de juros (Futuro DI BM&F) e *swaps* de taxa pré-fixada contra taxa pós-fixada, os quais não requerem um aparato conceitual mais avançado pelo fato de seus preços decorrerem diretamente de um fator de desconto, a partir da curva de taxa de juros diária de mercado. A proposta deste capítulo é examinar alguns dos principais derivativos de taxas de juros e ressaltar que seu uso pode oferecer maiores possibilidades de exploração no gerenciamento de carteiras de renda fixa.

3.2 Opção sobre Discount-Bond

Considere-se a negociação em uma data t , de uma opção de compra européia C (venda P), com vencimento em T , sobre um título de renda fixa sem cupons (*discount bond*), com vencimento em T_1 . Esta opção dá ao comprador o direito de adquirir (vender) pelo preço de exercício K , em T , um título de renda fixa sem cupons $P(t, T)$ com vencimento em T_1 , sendo $T_1 > T > t$. Exemplificando, se um investidor acredita em um movimento de alta das taxas de juros à vista $Y(t, T_1)$, ele pode comprar *puts* ou vender *calls* sobre um *discount bond*. Se a trajetória das taxas de juros for declinante, sua estratégia pode ser a compra de *calls* ou venda de *puts*. Na data de vencimento T , o *payoff* da opção de compra é definido a partir de

$$C_T = (P(T, T_1) - K)^+ \quad (3.1)$$

Para avaliar o preço desta opção de compra na data t , precisamos calcular a expectativa condicional abaixo

$$C_t = B_t E_t^Q [B_T^{-1} (P(T, T_1) - K)^+] \quad (3.2)$$

onde B_t e B_T^{-1} são os fatores de acumulação definidos em (1.4). Em um ambiente de taxas de juros estocásticas, os dois termos dentro dos colchetes, B_T^{-1} e $P(T, T_1)$ são variáveis aleatórias. Logo, tomar a esperança condicional na medida de probabilidade Q implica em calcular a probabilidade conjunta dessas duas variáveis estocásticas, o que nos obrigará a calcular termos de correlação entre as duas variáveis e a resolução desta esperança será muito mais complicada. Além disso, $P(T, T_1)$ não é um processo martingal na medida Q . Uma solução para contornar estas dificuldades é fazer uma mudança de medida de probabilidade que transforme estes processos em martingais. Esta medida, denotada F_T , é chamada de medida neutra ao risco a termo (*forward martingale measure*), e transforma a expressão

$$C_t = B_t E_t^Q [B_T^{-1} (P(T, T_1) - K)^+] \quad (3.3)$$

em uma expressão muito mais simples

$$C_t = P(t, T) E_t^F (P(T, T_1) - K)^+ \quad (3.4)$$

onde $P(T, T_1)$ é calculado na mesma data que a mudança de medida. Esta abordagem sofisticada foge ao escopo deste trabalho.

No caso brasileiro, as opções sobre *discount bonds* seriam as opções sobre os títulos pré-fixados da dívida pública, por exemplo, opções sobre LTN's (Letras do Tesouro Nacional). Em um cenário de quedas consistentes nas taxas de juros projetadas pelo mercado futuro, as quais são uma das referências para a formação dos preços das LTN's, o Tesouro Nacional poderia vender em um mesmo pacote LTN's de prazos mais longos e opções americanas de venda dessas LTN's. Dessa forma, o Tesouro conseguiria aumentar relativamente

o estoque e alongar o perfil da dívida pública federal atrelada a juros pré-fixados e ofereceria mais segurança aos compradores das LTN's, pois em caso de alta súbita das taxas de juros, os investidores exerceriam antecipadamente as *puts* e venderiam seus títulos ao Tesouro. Se a política econômica mantivesse a queda nas taxas, arrecadaria recursos com a venda das *puts*, que não seriam exercidas, e reduziria o encargo de juros sobre a dívida pública. Toda essa arquitetura já foi desenhada pela atual equipe econômica, entretanto, não foi posta em prática devido às turbulências no cenário internacional, as quais impediram a continuidade da trajetória declinante das taxas de juros, interrompida no primeiro semestre de 2001.

3.3 Cap

O *cap* é um instrumento financeiro negociado no mercado de balcão e oferecido pelas instituições financeiras aos seus clientes corporativos. O *cap* de taxa de juros funciona como um seguro contra súbitas altas nas taxas de juros pós-fixadas, acima de um certo nível pré-estabelecido (*cap rate*). A negociação de um *cap* envolve a determinação de um montante de referência (*notional*), um prazo de vencimento T_n , datas de pagamento T_j , $j = 1, \dots, n$ e o nível de taxa de juros definido como teto k . Em cada uma das datas de pagamento T_j , o comprador do *cap* tem direito ao seguinte *payoff*, supondo-se montante igual a 1.

$$Cpl(T_{i+1}) = \delta t (Y(T_i, T_{i+1}) - k)^+ \quad (3.5)$$

Um *cap* nada mais é do que um conjunto de opções de compra sobre a taxa de juros, cada uma dessas opções individuais recebe o nome de *caplet* (Cpl). O *payoff* acima, representado de maneira genérica para um *caplet*, estabelece que se a taxa de juros Y entre

o tempo T_i e T_{i+1} for maior do que a taxa k , o comprador do *caplet* receberá, no tempo T_{i+1} , essa diferença ajustada para o intervalo de tempo $\delta t = T_{i+1} - T_i$.

A avaliação do preço do *caplet* na data t segue abaixo¹.

$$Cpl(t) = B_t E_t^Q \left[B_{T_2}^{-1} (Y(T_1, T_2) - k)^+ \right] \delta t \quad (3.6)$$

Usando o formalismo da medida neutra ao risco a termo, a equação é simplificada para

$$Cpl(t) = P(t, T_1) E_t^F \left[\left(1 - \tilde{\delta} P(T_1, T_2) \right)^+ \right] \quad (3.7)$$

De (3.7), é verificado que um *caplet* nada mais é do que uma opção de venda com preço de exercício igual a 1 sobre um *discount bond* com valor de face $\tilde{\delta} = (1 + k\delta t)$ e mesmo vencimento do *caplet*, em T_2 . Então, um *cap*, o qual é um conjunto de opções de compra sobre taxas de juros pode ser visto também como um *portfolio* de opções de venda sobre um *discount bond*.

3.4 Floor

Um *floor* é um contrato inverso ao *cap*, pois oferece proteção contra quedas nas taxas de juros pós-fixadas, abaixo de certo nível pré-estabelecido (*floor rate*). Um *floor* nada mais é do que um conjunto de opções de venda sobre taxas de juros, cada uma dessas opções individuais recebe o nome de *floortion*. Existe uma paridade para *caps* e *floors* semelhante à que existe entre *calls* e *puts*, que relaciona

$$\text{preço do Cap} = \text{preço do Floor} + \text{preço do Swap} \quad (3.8)$$

¹Esta derivação está em Musiela e Rutkowski (1997).

3.5 Opção de IDI

A opção de IDI é um instrumento derivativo sobre taxa de juros negociado na BM&F, que pode ser usado tanto para *hedge*, apostas direcionais e outros tipos de operações na curva de taxas de juros. O IDI (Índice de Depósito Interfinanceiro) é um índice divulgado diariamente que reflete o acúmulo diário das taxas médias de CDI (Certificado de Depósito Interfinanceiro). Para uma opção de IDI, o ativo objeto é a variação acumulada do CDI diário, decorrido entre a data de compra ou venda da opção e seu vencimento. Considerando um período entre as datas t e T ($T > t$), temos

$$IDI_T = IDI_t \prod_{i=t}^{T-1} (1 + CDI_i) \quad (3.9)$$

$$CDI_i = (1 + CDI_i \% a.a)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (3.10)$$

Estas opções são de estilo europeu e possuem vencimento em todo primeiro dia útil de cada mês, data em que ocorre liquidação financeira das posições pela diferença entre o valor do IDI no vencimento da opção e seu respectivo preço de exercício. Levando-se em conta que a análise ocorre em tempo contínuo, podemos reformular (3.9)

$$IDI_T = IDI_t e^{\left(\int_t^T CDI_s ds\right)} \quad (3.11)$$

O *payoff* de uma *call* sobre o IDI, com preço calculado em t , é determinado através da esperança, na medida de probabilidade neutra ao risco Q , do valor presente da diferença entre o IDI na data T e o preço de exercício K ².

$$C_t = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} [IDI_T - K]^+ \right] \quad (3.12)$$

²A primeira derivação desta fórmula deve-se ao artigo de C.A.V. Neto e P. Valls (1999), "Derivação de uma Fórmula para o Cálculo do Preço Livre de Arbitragem das Opções sobre o Índice de Depósitos Interfinanceiros de 1 Dia - IDI". *Resenha BM&F*, vol. 136.

Considerando a representação para o IDI, em tempo contínuo, como o acúmulo das taxas CDI diárias e substituindo na expressão anterior,

$$C_t = E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} \left[IDI_t e^{\int_t^T CDI_s ds} - K \right]^+ \right\} \quad (3.13)$$

A taxa de juros de curto prazo livre de risco é o CDI diário, portanto, pode-se substituir a integral que acumula as taxas de CDI pela integral que acumula as taxas de curto prazo r_t . Após este arranjo na fórmula, a opção de compra sobre o IDI é expressa pela diferença positiva entre o valor do IDI na data t e o preço de exercício K trazido a valor presente para a data t .

$$C_t = E_t^Q \left\{ \left[IDI_t - K e^{-\int_t^T r_s ds} \right]^+ \right\} \quad (3.14)$$

Para a avaliação do preço desta opção, existe um termo estocástico $e^{-\int_t^T r_s ds}$ para o qual devemos determinar uma dinâmica e assim chegar ao preço livre de arbitragem para a *call*. Supondo-se que o processo que melhor representa o movimento de r_t seja o modelo Hull-White, com parâmetros de velocidade de reversão à média e variância constantes.

$$dr_t = [\theta(t) - ar_t] dt + \sigma dW_t \quad (3.15)$$

Aplicando o teorema de Girsanov, para a equação diferencial estocástica anterior, onde $\phi(t) = \theta(t) - ar_t - \lambda\sigma$ e W_t^Q é um movimento browniano na medida de probabilidade neutra ao risco Q

$$dr_t = [\phi(t) - ar_t] dt + \sigma dW_t^Q \quad (3.16)$$

A resolução da equação (3.16) nos leva ao processo estocástico para r_t

$$r_T = e^{-aT} r_t + \int_t^T \phi(s) e^{-a(T-s)} ds + \int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_t^Q$$

$$\begin{aligned}
x_{t,T} &= \left(\int_t^T r_s ds \right) = \int_t^T ds \left[e^{(-as)} r_t + \int_t^s \phi(u) e^{(-a(s-u))} du \right] \\
&\quad + \int_t^T ds \left[\int_t^s \sigma e^{(-a(s-u))} dW_u^Q \right] \\
x_{t,T} &= \int_t^T e^{(-as)} r_t ds + \int_t^T \int_t^s \phi(u) e^{(-a(s-u))} du ds \\
&\quad + \int_t^T \int_t^s \sigma e^{(-a(s-u))} dW_u^Q ds
\end{aligned}$$

Verificamos acima que $x_{t,T}$ é uma variável gaussiana definida por $x_{t,T} \sim N \left(\mu_{t,T}, \sigma_{t,T}^2 \right)$,

onde a esperança de uma variável com distribuição lognormal é dada por,

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= E_t^Q \left[e^{(- \int_t^T r_s ds)} \right] = E_t^Q \left[e^{(-x_{t,T})} \right] \\
P(t, T) &= E_t^Q \left[e^{(-x_{t,T})} \right] = e^{\left(-\mu_{t,T} + \frac{\sigma_{t,T}^2}{2} \right)}
\end{aligned}$$

$$\ln(P(t, T)) = -\mu_{t,T} + \frac{\sigma_{t,T}^2}{2} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
u_{t,T} &= \int_t^T e^{(-as)} r_s ds + \int_t^T \int_t^s \phi(u) e^{(-a(s-u))} du ds \\
u_{t,T} &= \frac{r_t}{a} (e^{(-at)} - e^{(-aT)}) + \int_t^T \int_t^s \phi(u) e^{(-a(s-u))} du ds
\end{aligned}$$

e a variância definida de acordo com a derivação abaixo,

$$\sigma_{t,T}^2 = \sigma_P^2 = E_t^Q \left[\left(\int_t^T \sigma \int_t^s e^{(-a(s-u))} dW_u^Q ds \right)^2 \right]$$

Aplicando a propriedade da Isometria de Itô na expressão anterior, podemos calcular a integral estocástica,

$$\sigma_P^2 = \sigma^2 \left[\left(\int_t^T \left(\int_t^s e^{(-a(s-u))} \right)^2 du ds \right)^2 \right]$$

Integrando o primeiro termo $\left(\int_t^s e^{(-a(s-u))} \right)^2 du$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\left(\int_t^s e^{(-a(s-u))} \right)^2 du &= \left(-\frac{1}{a} + \frac{e^{(-a(s-t))}}{a} \right)^2 \\
\left(\int_t^s e^{(-a(s-u))} \right)^2 du &= \frac{1}{a^2} - \frac{2e^{(-a(s-t))}}{a^2} + \frac{e^{(-2a(s-t))}}{a^2}
\end{aligned}$$

Introduzindo estes resultados e voltando à resolução de σ_P^2 logo abaixo,

$$\sigma_P^2 = \sigma^2 \left[\int_t^T \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2e^{-a(s-t)}}{a^2} + \frac{e^{-2a(s-t)}}{a^2} \right) ds \right]$$

$$\sigma_P^2 = \sigma^2 \left[\frac{T}{a^2} - \frac{t}{a^2} + \frac{2e^{-a(T-t)}}{a^3} - \frac{2}{a^3} - \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a^3} + \frac{1}{2a^3} \right]$$

Fazendo $\tau = T - t$, conseguimos simplificar e chegar ao resultado final da variância condicional

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} [2a\tau + 4e^{-a\tau} - e^{-2a\tau} - 3]$$

Voltando à resolução do preço da *call* de IDI, temos

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} [IDI_t - Ke^{-x_{t,T}}]^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{(x_{t,T} - \mu_{t,T})^2}{2\sigma_P^2}} dx$$

Para retirar operador parte positiva +, precisamos avaliar o *payoff* da opção alterando seus limites de integração, de tal modo que a parte positiva do *payoff* seja calculada

$$C_t = \int_{-\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right)}^{+\infty} [IDI_t - Ke^{-x_{t,T}}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{(x_{t,T} - \mu_{t,T})^2}{2\sigma_P^2}} dx$$

Substituindo-se $\frac{(x_{t,T} - \mu_{t,T})}{\sigma_P}$ por z , é preciso mudar a integral de dx para dz , assim

como o limite inferior da integração para que continue positivo

$$C_t = IDI_t \int_{-\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right) - \mu_{t,T}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma_P dz$$

$$- K \int_{-\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right) - \mu_{t,T}}^{+\infty} e^{-z\sigma_P - \mu_{t,T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma_P dz$$

De (3.17), o termo $\mu_{t,T}$ pode ser substituído em $-\frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right) - \mu_{t,T}}{\sigma_P}$ de modo que

$$-d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right) + \mu_{t,T}}{\sigma_P}$$

$$-d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{K}\right) - \ln(P(t, T)) + \frac{\sigma_P^2}{2}}{\sigma_P}$$

$$-d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{KP(t, T)}\right) + \frac{\sigma_P^2}{2}}{\sigma_P}$$

Voltando a resolução da opção de compra

$$C_t = IDI_t \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - K \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-z\sigma_P - \mu_{t,T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$C_t = IDI_t \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz - K \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}(z^2 + 2z\sigma_P + \sigma_P^2)\right)} e^{\left(\frac{1}{2}\sigma_P^2 - \mu_{t,T}\right)} dz$$

$$C_t = IDI_t N(d_1) - K \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}(z + \sigma_P)^2\right)} e^{\left(\frac{1}{2}\sigma_P^2 + \ln(B(t,T)) - \frac{1}{2}\sigma_P^2\right)} dz$$

$$C_t = IDI_t N(d_1) - KP(t, T) \int_{-\infty}^{d_1 - \sigma_P} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}H^2\right)} dH$$

$$C_t = IDI_t N(d_1) - KP(t, T) N(d_1 - \sigma_P) \quad (3.18)$$

onde d_1 é definido da seguinte forma

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{IDI_t}{KP(t, T)}\right) + \frac{\sigma_P^2}{2}}{\sigma_P} \quad (3.19)$$

Capítulo 4

Implementação do modelo Hull-White

4.1 Introdução

Após a discussão teórica dos principais modelos de estrutura temporal no que tange às suas especificações, vantagens e desvantagens e da descrição dos principais derivativos de taxas de juros, parte-se, neste ponto, para a descrição do processo de implementação dos modelos. Este processo constitui um conjunto que é formado pelas seguintes etapas:

- calibração de alguns parâmetros, usando preços de mercado de opções e algoritmos de otimização,
- construção da árvore trinomial de taxas de juros,
- apreçamento dos derivativos de taxas de juros.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira parte, descrevemos algumas idéias e principais abordagens para o processo de calibração dos parâmetros. A

estabilidade das estimativas é um ponto de preocupação durante a calibração. São apresentados, também, alguns estudos para as tentativas de calibração para o mercado brasileiro. Depois, descrevemos a rotina para a construção da árvore trinomial de Hull-White e finalmente, como o apreçamento dos derivativos ocorre na árvore.

4.2 Calibração dos Parâmetros

4.2.1 Principais abordagens

Esta etapa constitui-se na escolha de métodos e critérios para encontrar estimativas consistentes e estáveis para os parâmetros que se deseja inferir e usar na geração da árvore trinomial. A intuição do problema da calibração para derivativos de taxas de juros é a mesma empregada para opções Black & Scholes, nas quais o parâmetro calibrado é a volatilidade implícita, a qual equaliza o preço de mercado com o preço calculado pelo modelo.

Grande parte do que será discutido nesta seção está baseado nos trabalhos de Hull e White (1994 e 2000), Ong (1996), Douady (1999), Rebonato (1996) e Pelsser (2000). A tarefa de calibração busca os parâmetros de velocidade de reversão à média e volatilidade que melhor ajustam os preços observados em mercado aos preços do modelo, para os derivativos de taxas de juros mais líquidos. Descobertas as estimativas para os parâmetros, é possível não somente calcular os preços dos próprios instrumentos que deram origem às estimativas, mas também é possível fornecer preços para opções exóticas, para as quais não existem cotações disponíveis. As mesmas estimativas são usadas para *hedging* e gerenciamento do risco destes contratos. Infelizmente, esta “tarefa” de encontrar os melhores parâmetros, na

prática não possui o caráter tão simplista como descrito na frase anterior, pelo contrário, são colocadas questões de difícil resolução para quem deseja implementar modelos de taxa de juros com essas características. Por exemplo, qual conjunto de instrumentos derivativos devemos usar: *caps*, *floors*, *swaptions* ou simplesmente as opções de IDI, no caso brasileiro, pela mais absoluta falta de outros instrumentos com preços negociados e visíveis em mercado. Além disso, precisamos definir qual o prazo de vencimento dos contratos contingentes que devem ser considerados no momento da calibração e qual o método de otimização e a função objetivo a ser empregada na procura pelos parâmetros ótimos.

Em Hull e White (1994), o assunto calibração é tratado de maneira preliminar, focando apenas na resolução do problema de otimização não-linear, com a busca dos parâmetros a e σ que minimizam a diferença ao quadrado entre os preços de mercado e os preços do modelo para um conjunto de contratos derivativos *at-the-money* líquidos. Os parâmetros implícitos representam, na realidade, soluções *global best-fit*, por serem únicas estimativas a serem empregadas para todas as opções e, portanto, não reproduzem exatamente os preços de mercado. A sugestão de Pelsser (2000) segue a mesma linha e adiciona o fato de que os preços de *caps* e *floors* possuem ordens de grandeza bastante distintas; no conjunto de dados utilizado por Pelsser, o intervalo de variação para estes preços chegava a cerca de 1.000 *basis-points*. Esta amplitude nos preços prejudica a performance do algoritmo de otimização, e em certos casos, pode até mesmo impedir o alcance de uma solução adequada para o problema. Pelsser trata os preços na forma logarítmica, o que reduz consideravelmente a amplitude observada nos preços dos derivativos, com o adicional citado por ele de que uma

regressão não-linear em termos logarítmicos diminui a heterocedasticidade do erro.

$$\min \Phi = \sum_{i=1}^n \left(\log \left(P_i^{\text{mercado}} \right) - \log \left(P_i^{\text{modelo}} \right) \right)^2 \quad (4.1)$$

onde P_i é o preço da i -ésima opção. Já no artigo de Ong (1996), há uma citação bastante relevante e que deve nortear o início de qualquer processo de calibração e ser, de certo modo, uma premissa na elaboração desta estrutura.

“As much as possible, one needs to choose the most liquid ones with the most market information embedded in them”

Portanto, o conjunto de instrumentos necessários para a calibração de um modelo precisa ser líquido o suficiente para que se possam extrair dele as estimativas corretas e isso inclui, também, que esses derivativos sejam *at-the-money*. A razão para a preferência por opções *at-the-money* é porque na ocorrência de negócios com opções muito fora do dinheiro, o prolongamento do *skew* de volatilidade pelo *trader*, no momento do apreçamento do derivativo, envolve algum tipo de intuição subjetiva pelo simples motivo de haver poucos negócios além de um certo nível de preços. Partindo-se para a discussão sobre o número de vértices, ou seja, o tempo até o vencimento do derivativo, devemos garantir que o sistema seja determinado. Usando o mesmo exemplo de Ong (1996), suponhamos que existam dez vértices de tempo, vinte instrumentos disponíveis para a calibração e vinte parâmetros dependentes do tempo para serem calibrados. Assim, a estabilidade e unicidade da solução estão garantidas pois existe o mesmo número de incógnitas, os vinte parâmetros dependentes do tempo, para o mesmo número de equações, os vinte instrumentos derivativos.

Um exemplo de função objetivo sugerida por Ong a ser usada na implementação é a minimização n -dimensional da função a seguir e que nada mais é do que encontrar n

parâmetros dependentes do tempo minimizando Φ . O termo ϖ é um peso que diferencia os instrumentos usados na calibração e pode ser, por exemplo, o vega do respectivo instrumento. O termo entre parênteses é o objetivo principal da minimização, a diferença entre o preço de mercado e o preço fornecido pelo modelo.

$$\min \Phi = \sum_{i=1}^n \varpi_i \left(P_i^{\text{mercado}} - P_i^{\text{modelo}} \right)^2 \quad (4.2)$$

Outros formatos para esta função podem ser os que seguem, calculando essas diferenças em termos relativos. E para as três variações da função de minimização, deve ser escolhido um algoritmo de otimização que seja o mais adequado para tratar mínimos-quadrados não-lineares, por exemplo, o algoritmo de Levenberg-Marquardt.

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{P_i^{\text{mercado}} - P_i^{\text{modelo}}}{P_i^{\text{mercado}}} \right]^2 \quad \sum_{i=1}^n \frac{\left(P_i^{\text{mercado}} - P_i^{\text{modelo}} \right)^2}{P_i^{\text{mercado}}} \quad (4.3)$$

Para fins de *hedging* e *risk management*, além das medidas de sensibilidades ("gregas") já conhecidas, é fundamental mensurar o impacto que variações nos parâmetros do modelo (a_i, σ_i) provocam no preço do derivativo em análise.

O trabalho de Douady (1999) analisou minuciosamente os principais assuntos relacionados à calibração de modelos matemáticos em finanças e em seu artigo são colocadas idéias importantes sobre os diversos aspectos relacionados ao tema, como as possíveis abordagens da calibração, métodos numéricos de otimização e estabilidade dos parâmetros estimados. Douady distingue duas abordagens no processo de calibração, a calibração estatística, a qual procura extrair de séries históricas as estimativas para os parâmetros e para isto, é claro, está se assumindo que o futuro irá comportar-se de maneira igual ao passado. Um outro inconveniente desta linha de modelagem, citado por Douady, é o mercado inteiro

possuir estimativas completamente diferentes do modelo utilizado, mesmo que as últimas estejam corretas. A segunda abordagem é a calibração implícita, a qual compreende a extração dos parâmetros dos preços de opções líquidas, o mesmo raciocínio enfatizado por Ong acima. Já neste tipo de abordagem, podem ser inconvenientes a falta de uma solução única por haver mais parâmetros do que opções, e essa instabilidade nas soluções gerar situações em que o *hedge*, com o uso desses parâmetros, torna-se uma prática perigosa e leva a grandes oscilações no valor de mercado da carteira. Independentemente da abordagem escolhida, devem ser fontes de atenção, para o usuário do modelo, a precisão da calibração implícita e a sugestão de Douady neste ponto é que o erro decorrente da calibração não exceda o *spread* entre a compra e a venda e a estabilidade dos parâmetros, pois não é recomendado que estes sejam processos aleatórios.

Duas técnicas são sugeridas por Douady para lidar com a calibração: *bootstrap* e *global*, as quais começamos a discutir com mais detalhe a partir de agora.

4.2.2 Calibração Bootstrapping

O *bootstrap* unidimensional destina-se a situações em que existe um conjunto de opções a serem calibradas, mas há apenas uma opção para cada vencimento, por exemplo, $T_1, T_2 \dots T_N$. Os parâmetros são funções dependentes somente do tempo, sendo que um deles é a incógnita e os outros $N-1$ foram fornecidos. Para calibrar este único parâmetro dependente do tempo, a função pode ser representada por uma função polinomial do tipo *piecewise constant* ou *splines*. Deve ser encontrado, por meio de um método numérico de resolução de equações não lineares para uma variável (Newton-Raphson), um valor λ_i que faça o preço do modelo “bater” com o preço de mercado.

Para lidar com a resolução de vários parâmetros simultaneamente, existe o *bootstrap* multidimensional cuja lógica consiste em agrupar um número determinado j de opções com a mesma data de vencimento e, a partir disso, calibrar j parâmetros dependentes do tempo. Este conjunto forma um sistema de j equações não-lineares para j incógnitas, tornando o sistema determinado. A instabilidade criada pela excessiva variação dos parâmetros λ_i pode ser contornada pelo uso de uma constante c , que procura estabilizar a variação na série λ_i , conforme equação (4.4)

$$\min \Phi_c(\lambda_i) = \left[C(K_i, T_i, \lambda_i) - \widehat{C}(K_i, T_i) \right]^2 + c(\lambda_i - \lambda_{i-1})^2 \quad (4.4)$$

A equação de minimização acima reflete um *trade-off* entre a precisão da calibração dos preços dos derivativos vis à vis a estabilidade pretendida para o parâmetro λ_i . Quanto menor o valor atribuído à constante c , melhor será o ajuste do preço do modelo ao preço do mercado e menor a estabilidade da série $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$. Por outro lado, quanto maior o valor de c , pior o ajuste da calibração e menor variação do parâmetro λ_i . Douady ressalta a falha neste procedimento numérico quando o primeiro valor calculado para λ_i está distorcido, pois a partir daí, os erros na minimização são sistemáticos e ocorrem na mesma direção do erro inicialmente cometido.

4.2.3 Calibração Global

É uma técnica que consiste em encontrar um conjunto de parâmetros que minimize, segundo algum critério de mínimos quadrados uma função como a descrita abaixo, na mesma linha do que foi citado anteriormente para outros pesquisadores

$$\min \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^n \varpi_i (F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_p) - P_i)^2 \quad (4.5)$$

Os pesos ϖ_i são positivos e sua tarefa é garantir a uniformidade nos resultados, onde F_i é o preço do modelo e P_i é o preço de mercado. É possível inserir restrições nos parâmetros da função Ψ , o que efetivamente acontece pois temos que assegurar que a volatilidade e a velocidade de reversão à média sejam positivas. Além de sugerir diversos algoritmos de minimização, Douady deixa bastante claro as falhas que podem ser encontradas durante o processo de minimização da função Ψ , como mínimos locais e áreas planas, as quais levam o algoritmo para soluções incorretas, impedindo o alcance do mínimo global.

4.2.4 Calibração para o mercado brasileiro

Algumas tentativas e sugestões para dados do mercado brasileiro já foram realizadas em alguns artigos que lidaram com o problema da calibração. De La Rocque e Garcia (1996)¹ e Silva (1997)² empregaram métodos econométricos para a estimação empírica do parâmetro de velocidade de reversão à média e de volatilidade. Mais recentemente, a tese de doutorado de Neto (2000) propôs duas alternativas as quais chamou de método endógeno e método exógeno. No primeiro, a estimação via função de log-verossimilhança encontra para a série histórica do CDI-Cetip os parâmetros de nível de longo prazo da taxa de juros (θ), velocidade de reversão à média (a) e volatilidade da taxa de juros de curto prazo (σ). No método exógeno, é sugerida a utilização da volatilidade do DI Futuro como uma aproximação da volatilidade do preço dos títulos (σ_P) e seu uso direto na fórmula do preço da opção de IDI, conforme (3.18). Essa volatilidade σ_P é estimada através de um modelo GARCH(p,q) que leva em conta o fato de que a volatilidade do título tende a diminuir à

¹Garcia, M. e E. La Rocque. 1996. "Um Estudo sobre a Volatilidade do Mercado Futuro de Juros no Brasil". *Pesquisa e Planejamento Econômico*, vol. 26, num. 2, agosto.

²Silva, M. E., 1997. "Precificação de opções e futuros de taxa de juro no Brasil", *Resenha BM&F*, vol. 118. 21-35.

medida que o prazo para o vencimento esgota-se. Mais recente ainda, há o artigo de Cassettari (2001), no qual é implementado um modelo semi-empírico para a estimação estatística dos parâmetros. O autor justificou a impossibilidade em extrair do modelo os parâmetros de velocidade de reversão à média e a volatilidade devido à falta de dados de juros e à excessiva volatilidade do mercado de juros. As estimativas de a e σ foram obtidas através da inserção exógena de alguns valores, como o nível médio de longo prazo para a taxa de juros. Finalmente, cabe ressaltar que a obtenção de parâmetros para modelos de taxas de juros através de técnicas estatísticas não produzirá os parâmetros de acordo com a dinâmica risco-neutro Q . Para obtê-los, a estimação deve ser feita implicitamente com os preços de mercado para opções líquidas.

4.3 Construção da Árvore Trinomial

4.3.1 Principais idéias

A idéia do uso de árvores para o apereçamento de opções é devida a Cox, Ross e Rubinstein (1979) para o caso de opções sobre ações, que ilustram de maneira bastante intuitiva conceitos como probabilidade neutra ao risco, *portfolio* replicante e *delta hedging*. Para o tratamento das taxas de juros, o trabalho pioneiro foi o de Ho e Lee (1986), com o uso de uma árvore binomial para representar a evolução de *discount-bonds*, o qual foi seguido pelos artigos posteriores de Hull e White (1990) e Black, Derman e Toy (1990), citando-se apenas os modelos de maior destaque.

Os métodos de árvore são uma alternativa aos métodos de diferenças finitas e simulação de Monte Carlo. Dessa forma, em que situações pode-se favorecer a construção de

árvores em detrimento das outras duas alternativas citadas? Para calcular o preço livre de arbitragem de contratos derivativos, via método de diferenças finitas, a complexidade envolvida é maior comparativamente às árvores, exigindo-se a discretização de uma equação diferencial parcial em um *grid* e no caso de métodos implícitos, a resolução de sistemas de equações; além da possibilidade de ocorrência de problemas ligados a convergência e estabilidade numérica. Por outro lado, simulações de Monte Carlo são inconvenientes no apereçamento de instrumentos derivativos de estilo Americano ou Bermuda, os quais envolvem exercício antecipado, por não serem capazes de identificar a fronteira ótima de exercício. Conceitualmente, pode-se dizer que a representação em árvore nada mais é do que uma aproximação, em tempo discreto, das variáveis em tempo contínuo, descritas pelas equações diferenciais estocásticas representativas de preços de ações, taxas de câmbio e taxas de juros. A construção adequada da árvore deve garantir que a média e a variância da variação da variável de estado analisada sejam equivalentes à média e variância do processo estocástico neutro ao risco.

4.3.2 Árvores Trinomiais de Taxas de Juros de Hull-White

A idéia discutida aqui é a apresentada por Hull e White (1993), na qual sugerem um procedimento para a construção de árvores trinomiais de taxas de juros que permita tanto a consistência com a estrutura temporal das taxas de juros bem como com a estrutura temporal de volatilidades das taxas de juros. Logo em seguida, Hull e White (1994) sugeriram um outro procedimento numérico para a geração da árvore trinomial, o qual é uma melhoria em relação à rotina anterior, sob o ponto de vista computacional mais eficiente e com mais precisão. Esta metodologia é válida para aplicação, apenas para os modelos

de Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e para todas as formulações log-normal. Para especificações mais gerais do processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo, conforme equação (4.6), é conveniente usar o modelo Hull-White descrito em 1993.

$$dr_t = [\theta(t) - a(t)r_t] dt + \sigma r_t^\beta dW_t \quad (4.6)$$

Em Hull-White (1993), a árvore trinomial é construída de modo a retratar os movimentos da taxa de juros de curto prazo (*short-rate*) r em cada intervalo de tempo Δt e a cada passo, podendo tomar valores como $r_0 + k\Delta r$, onde k é um número inteiro. Esta restrição de, a cada passo de tempo, a taxa de juros de curto prazo r ser igual a $r_0 + k\Delta r$ é substituída, em Hull-White (1994b), por uma nova geometria da árvore trinomial de modo que esta seja simétrica em torno de um nó central, o qual é o valor esperado de r . Esta simetria da árvore trinomial proporciona uma construção mais rápida da árvore e valores mais precisos para apuração e *hedge*. A árvore gerada é uma trinomial modificada, pelo fato de incorporar propriedades de reversão à média, conforme descrição do processo estocástico e que pode ser visto na figura 4.1. De cada um dos nós da árvore trinomial, pode partir cada um dos três ramos, o ramo (a) indica uma situação normal para as taxas de juros, ou seja ela tanto pode subir como cair Δr ou manter-se estável, o ramo (b), ascendente, indica a ocorrência de uma taxa de juros muito baixa, a qual tende a ser maior no período seguinte devido à reversão à média. A partir do ramo (b), as taxas podem manter-se estáveis, subir Δr ou subir ainda mais, $2\Delta r$. A partir do ramo (c), descendente, as taxas são muito altas e portanto, espera-se que se mantenham estáveis, caiam Δr ou caiam ainda mais no valor $2\Delta r$.

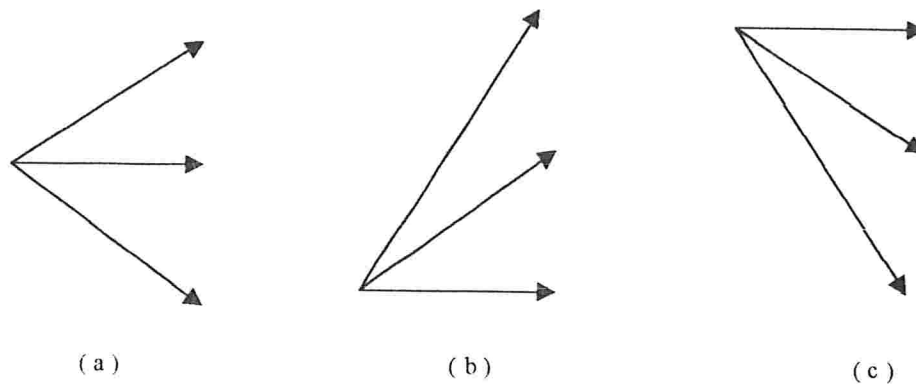


Figura 4.1: Três alternativas do processo de *branching*, que parte de cada um dos nós da árvore trinomial.

De cada um destes ramos, as probabilidades p_u , p_m e p_d são as probabilidades de deslocamento para um nó superior, para um nó no meio e para um nó inferior, respectivamente.

A construção da árvore trinomial divide-se em dois estágios, no primeiro deles é assumida a hipótese de que a função $\theta(t) = 0$ e o valor inicial de r é igual a zero. Sendo assim, o processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo, neste primeiro estágio, é dado por

$$dr_t = -ar_t dt + \sigma dW_t \quad (4.7)$$

É interessante analisar o fato de que o novo procedimento sugerido por Hull-White (1994b) consegue separar as contribuições para o termo de tendência da taxa de juros (μdt) em dois fatores, o termo responsável pela reversão à média ($-ar dt$) e o termo ($\theta(t)$), responsável por ajustar os preços dos *discount-bonds* gerados pela árvore aos preços observados no mercado e portanto, produzir consistência com a curva *zero-coupon* de taxa de juros inicial.

Da equação anterior (4.7), verifica-se que, no primeiro estágio, apenas a reversão à média constitui a tendência para o processo estocástico em questão. Nesta fase, existe simetria em torno da taxa de juros de curto prazo igual a zero e são calculadas as probabilidades p_u , p_m e p_d em cada nó (i,j) da árvore, assim como as taxas de juros para cada período de tempo Δt e em cada um dos nós, na forma $r = j\Delta r$. Assume-se, como hipótese, que r é uma taxa composta continuamente para o período Δt , o intervalo de tempo escolhido, e são explicitados o valor esperado e a variância da mudança da taxa de juros como

$$E[r(t + \Delta t) - r(t)] = r(t)M \quad (4.8)$$

$$Var[r(t + \Delta t) - r(t)] = V \quad (4.9)$$

onde M e V são iguais a,

$$M = e^{(-a\Delta t)} - 1 \quad (4.10)$$

$$V = \sigma^2 (1 - e^{-2a\Delta t}) / 2a \quad (4.11)$$

e estas escolhas para M e V permitem uma convergência levemente mas rápida, conforme Hull e White (1994). O tamanho do passo da taxa de juros na árvore é igual a $\Delta r = \sqrt{3V}$ e esta escolha é decorrente de procedimentos numéricos que validam a mesma do ponto de vista de minimização de erro numérico. Hull e White (2000) explicam que o número 3 permite ao método numérico reproduzir os cinco primeiros momentos da distribuição condicional de r_t , quando a taxa de reversão é zero. Para gerar a evolução das taxas de juros, é preciso resolver as probabilidades de tal modo que correspondam à mudança esperada para a taxa de juros igual a $j\Delta rM$ e sua variância V no próximo intervalo de tempo Δt , e respeitando a condição de que a soma das probabilidades seja igual a 1. Portanto, as

probabilidades são resultado da solução de um sistema de três equações e três incógnitas, no caso, as probabilidades. Analisando-se a figura 4.2, se o ramo que sair do nó (i,j) for normal, suas probabilidades serão determinadas por

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 + jM) \quad (4.12)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - j^2 M^2 \quad (4.13)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 - jM) \quad (4.14)$$

Se o ramo for descendente, as probabilidades são

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 + 3jM) \quad (4.15)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - j^2 M^2 - 2jM \quad (4.16)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 + jM) \quad (4.17)$$

E se for ascendente, as probabilidades são

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 - jM) \quad (4.18)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - j^2 M^2 + 2jM \quad (4.19)$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2} (j^2 M^2 - 3jM) \quad (4.20)$$

Hull e White estabelecem um j máximo e mínimo (j_{\max}/j_{\min}) para o qual o ramo que parte de um nó(i,j) não é o ramo normal, trocando-se para o ramo descendente ou o ramo ascendente, respectivamente. Esta rotina existe para evitar a ocorrência de probabilidades negativas e dá à árvore o formato exposto na figura 4.2, na qual é visível a limitação superior e inferior do número de nós existentes na árvore após um determinado tempo $i\Delta t$. Para

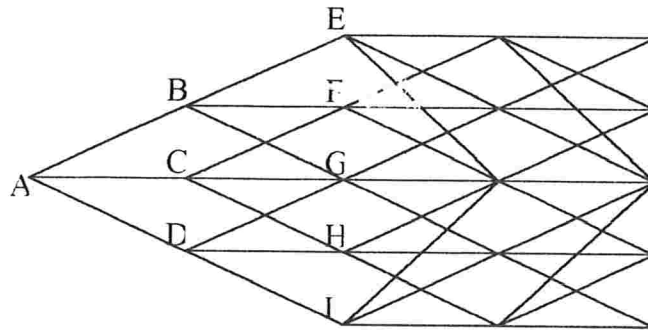


Figura 4.2: Exemplo de árvore trinomial modificada, em que os nós inferiores e superiores estão limitados em um determinado nível.

garantir que as probabilidades sejam sempre positivas, Hull e White propõem como mais eficiente determinar j_{\max} igual ao menor inteiro maior do que $-0,184/M$ e j_{\min} igual a $-j_{\max}$.

O segundo estágio da construção da árvore trinomial consiste em adicionar um valor α_i aos nós no tempo $i\Delta t$, determinados no primeiro estágio, de modo que a nova árvore a ser gerada seja igual a $r(i, j)$ da árvore antiga mais α_i . Este α_i é escolhido de modo que a árvore forneça preços de *discount-bonds* consistentes com a curva inicial de taxa de juros observada no mercado e assim, α_i estará corretamente determinando um preço para o título vencendo em $(i + 1)\Delta t$. Para este segundo estágio, o processo estocástico representativo é dado pela expressão abaixo

$$dr_t = [\theta(t) - ar_t] dt + \sigma dW_t \quad (4.21)$$

A geração da árvore final de taxas de juros envolve a resolução de duas variáveis, o próprio α_i e $Q_{i,j}$, o preço de Arrow-Debreu, o qual é definido como o valor presente de um título que paga 1 se o nó (i,j) é alcançado e zero, caso contrário. O procedimento para a

geração de $Q_{i,j}$ é o *forward-induction*, proposto por Jamshidian (1991) e a implementação da rotina computacional, seguindo a notação de Hull e White (1994), pressupõe que para um tempo $i \leq m$ ($m > 0$), os preços de Arrow-Debreu já tenham sido gerados, e assim, resolve-se a equação abaixo para descobrir o valor de α_m ,

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta r) \Delta t] \quad (4.22)$$

$$\alpha_m = \frac{\log \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp(-j\Delta r \Delta t) - \log P_{m+1}}{\Delta t} \quad (4.23)$$

A primeira equação equaliza o preço dos *discount-bonds* no tempo $(m+1)\Delta t$ ao produto dos preços Arrow-Debreu $Q_{i,j}$, no tempo m pelo fator de desconto $(\alpha_m + j\Delta r) \Delta t$, o qual representa a taxa de juros do nó (m, j) válida para o período entre $m\Delta t$ e $(m+1)\Delta t$. A solução da equação 4.23 fornece a taxa de juros todos os nós no tempo m , as quais são dadas por $\alpha_m + j\Delta r$, onde n é o número de nós em cada lado a partir do nó central no tempo m . Como α_m foi descoberto, para o período seguinte $(m+1)\Delta t$ são calculados os preços de Arrow-Debreu $Q_{i,j}$.

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta r) \Delta t] \quad (4.24)$$

O termo $q(k, j)$ indica a probabilidade de mover-se do nó (m, k) para o nó $(m+1, j)$ e são tomados todos os valores de k para os quais esta probabilidade não é zero.

4.3.3 Apreçamento dos Derivativos de Taxa de Juros

Para calcular preços dos derivativos de taxa de juros em uma árvore trinomial, podemos usar um procedimento de *backward induction*, através do qual se calcula, primeira-

mente. o *payoff* para os nós terminais da árvore

$$C_{T,j} = (P_{T,j} - K)^+ \quad (4.25)$$

onde $C_{T,j}$ é o preço de uma opção de compra na data de vencimento T e no nó j, $P_{T,j}$ é o preço do título na data T e para o nó j e K é o preço de exercício. O valor (4.25) de cada nó é trazido a valor presente de acordo com as probabilidades e taxa de juros de desconto de cada nó, do final da árvore para seu começo.

$$C_{i,j} = d_{i,j} (p_{u,i,j}C_{i+1,u} + p_{m,i,j}C_{i+1,m} + p_{d,i,j}C_{i+1,d}) \quad (4.26)$$

onde $d_{i,j}$ é o fator de desconto para o nó i,j e p são as probabilidades de cada nó. Para opções americanas, é preciso incluir uma condição que avalie se o exercício antecipado $P_{i,j} - K$ é vantajoso.

$$C_{i,j} = [P_{i,j} - K, d_{i,j} (p_{u,i,j}C_{i+1,u} + p_{m,i,j}C_{i+1,m} + p_{d,i,j}C_{i+1,d})]^+ \quad (4.27)$$

Capítulo 5

Descrição dos Dados e Fatos Estilizados no Mercado de

Renda Fixa Brasileiro

5.1 Estrutura Temporal das Taxas de Juros

Os principais dados empregados na implementação do modelo Hull-White (Vasicek Extendido) foram a taxa média diária do CDI-CETIP, as taxas de Swaps Pré x CDI divulgadas pela BM&F e os dados relativos ao mercado de opções de IDI na BM&F. A amostra possui informações que compreendem o período de 03/01/2000 até 31/12/2001. Trata-se, sem dúvida alguma, de um período um tanto quanto limitado em termos de base de dados; entretanto, justificado pelo acréscimo recente de operações envolvendo opções de IDI. A figura 5.1 ilustra o comportamento da taxa média diária anualizada do CDI-CETIP, dentro do período analisado, e no qual podem ser verificados dois padrões de comportamento bem distintos. O primeiro padrão reflete um comportamento de queda das taxas de juros básicas até meados de março de 2001, cujo piso ficou em torno de 15% ao ano. Em decorrência

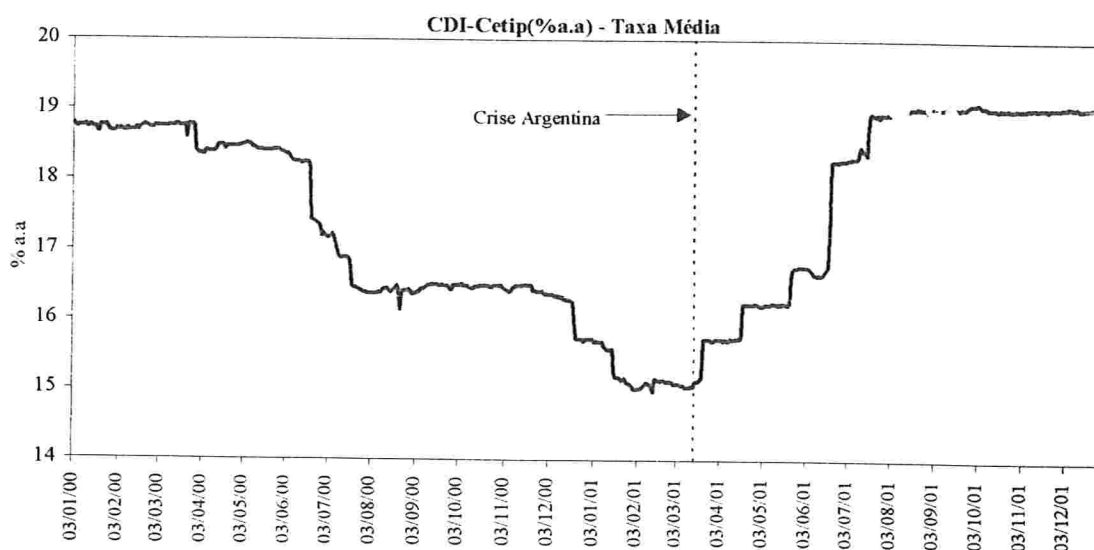


Figura 5.1: Evolução da taxa de juros CDI no período entre janeiro/2000 e dezembro/2001 do agravamento da crise argentina e o efeito contágio no Brasil, a partir do mesmo mês de março de 2001, ocorrem sucessivas elevações nas taxas de juros primárias (Selic), as quais são acompanhadas pelo CDI e levadas novamente ao patamar de 19% ao ano.

As figuras 5.2 e 5.3¹ exemplificam os mais variados formatos que a curva de taxas de juros assumiu em período recente no Brasil. As mudanças na estrutura a termo das taxas de juros atestam a instabilidade e volatilidade que o mercado de renda fixa sofreu a partir da grave deterioração do risco soberano da Argentina. O aumento da volatilidade e do prêmio de risco exigido pelo mercado para operações com prazos mais longos ficam nítidos quando são comparadas as curvas de juros nos dias 28/12/2000 e 18/09/2001.

¹Nas duas figuras, foram utilizadas as taxas de Swap Pré X CDI, divulgadas diariamente pela BM&F.

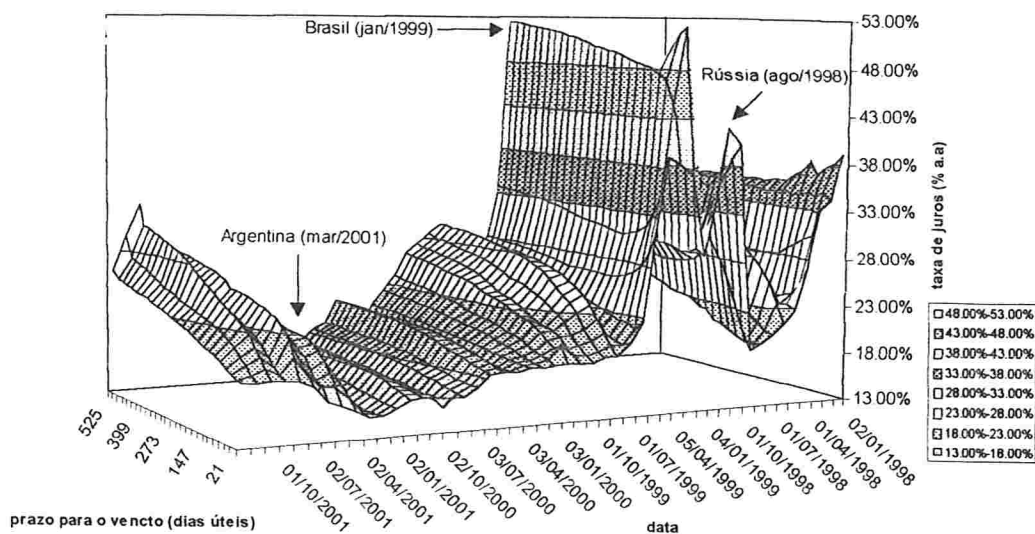


Figura 5.2: Superfície para as curvas de taxas de juros brasileira de jan/1998 até dez/2001

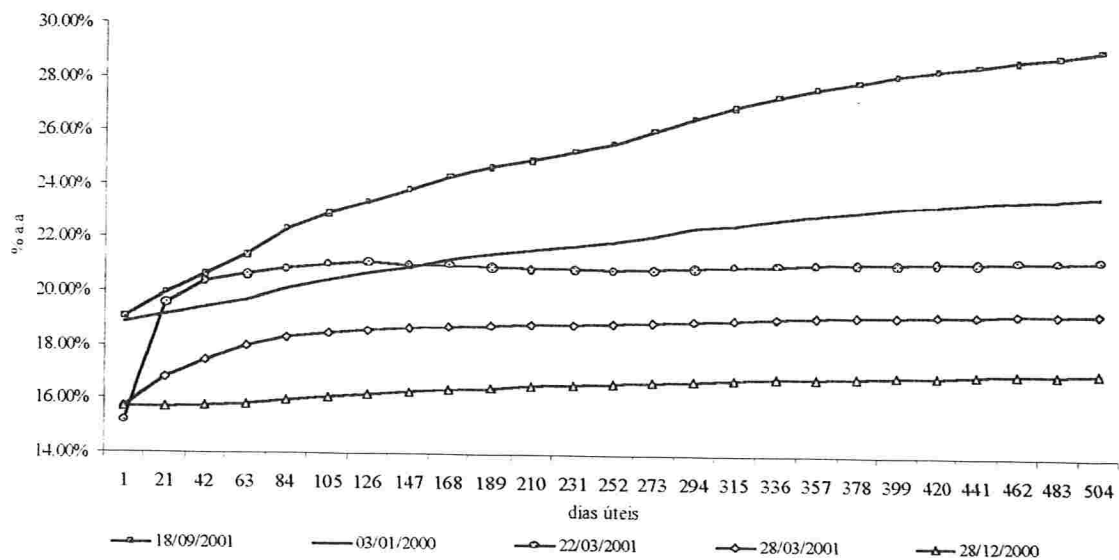


Figura 5.3: Estrutura a termo das taxas de juros pré-fixadas para algumas datas selecionadas

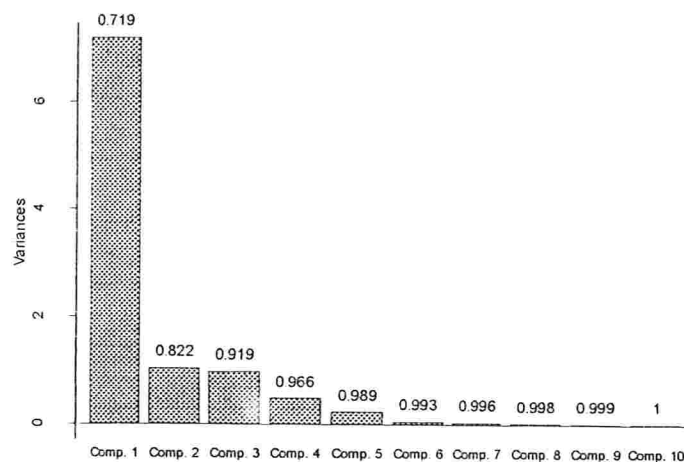


Figura 5.4: Decomposição das mudanças da curva de juros brasileira em componentes principais.

5.2 Aplicação de Componentes Principais para a curva de juros pré-fixada

A técnica de análise de componentes principais tem sido bastante empregada para explicar as variações na estrutura temporal das taxas de juros. O principal trabalho neste campo de aplicação é o de Litterman e Scheinkman (1988)². Uma base de dados formada por 997 observações, de novembro de 1997 até dezembro de 2001, foi decomposta em dez variáveis, as quais correspondem aos vértices escolhidos para descrever a estrutura temporal. Os resultados mostram que os três primeiros fatores explicam cerca de 92% das variações na curva de taxa de juros.

²Litterman, R. e J. Schienkman, 1988. "Common Factors Affecting Bond Returns", Goldman Sachs, Financial Strategies Group, New York.

5.3 Análise de Liquidez das opções sobre IDI

Após esta breve discussão sobre o comportamento recente das taxas de juros no Brasil, partimos para uma análise mais detalhada sobre as condições que cercam o mercado de opções de IDI, como liquidez, prazos de vencimento. A figura 5.5 é um resumo sobre os negócios realizados de opções de IDI e dela constatamos que este mercado ainda sofre pela falta de liquidez, dado que não se observam operações em todos os dias, apenas em 85,02% dos dias contidos na amostra. E existe o problema de que para outros derivativos de taxas de juros como *caps*, *floors* e *swaptions*, a negociação ocorre apenas no mercado de balcão e com liquidez ainda mais reduzida. Como essas operações são realizadas por tesourarias de grandes bancos para grandes clientes corporativos, a indisponibilidade destes dados é total. Na realidade, a dificuldade em obter dados para este tipo de pesquisa não é exclusividade nossa, aqui no Brasil. Conforme citam Gupta e Subrahmanyam (2000)

“Therefore, while these models have provided important theoretical insights, their empirical validity and performance remain to be tested. Empirical research in this area has lagged behind theoretical advances partly due to the difficulty in obtaining data, as most of these interest rate contingent claims are traded in over-the-counter markets, where data are often not recorded in a systematic fashion. This gap is being slowly filled by recent research in this area.”

Como já era esperado, a predominância é total para os contratos de opções de compra, cuja parte no total de número de negócios efetuados equivale a 96,71%. Por este motivo, para a aplicação do modelo aos dados de opção de IDI foram desprezadas as puts, pois são pouco representativas em relação ao universo destes negócios.

OPÇÕES DE IDI - BM&F

Início da amostra	03/01/00	
Fim da amostra	28/12/01	
Nº de dias	494	
Total de dias com negócios	420	85,02%
Total de negócios efetuados	4.685	100,00%
Total de negócios efetuados CALLS	4.531	96,71%
Total de negócios efetuados PUTS	154	3,29%
Total de contratos negociados	1.790.278	100,00%
Total de contratos negociados CALLS	1.665.380	93,02%
Total de contratos negociados PUTS	124.898	6,98%

Figura 5.5: Quadro Resumo sobre dados de negociação das opções de IDI na BM&F.

A seqüência de gráficos a seguir retrata a evolução ao longo do tempo de alguns critérios de liquidez envolvendo as opções de IDI. São ilustrados os dados diários relativos a número de contratos negociados, número de negócios e quantidade de séries negociadas, assim como uma linha de média móvel de 21 dias úteis, a qual facilita a visualização de tendências no aumento ou diminuição destas operações durante o período.

5.4 Implementação da Árvore Trinomial para a curva de taxa de juros brasileira

A rotina computacional para a geração da árvore trinomial de Hull-White foi realizada em MATLAB e diversas análises foram conduzidas para testar a sensibilidade do processo gerador da árvore.

Como no modelo de Hull-White há a possibilidade de ocorrência de taxas de juros negativas, pelo fato de o mesmo assumir como hipótese a distribuição normal para as

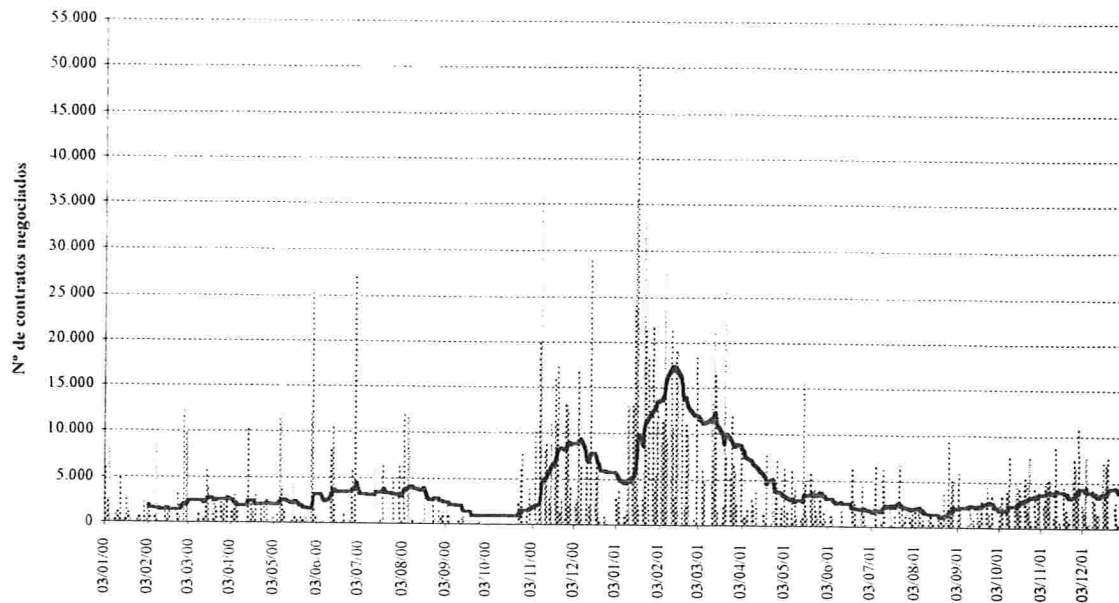


Figura 5.6: Evolução temporal da quantidade de contratos negociados de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.

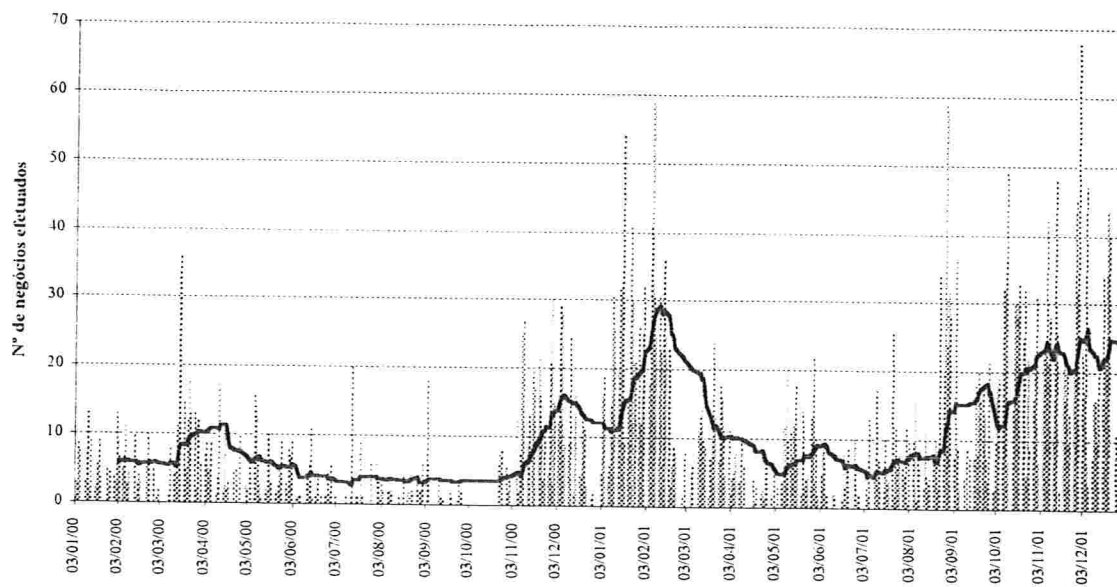


Figura 5.7: Evolução temporal da quantidade de negócios de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.

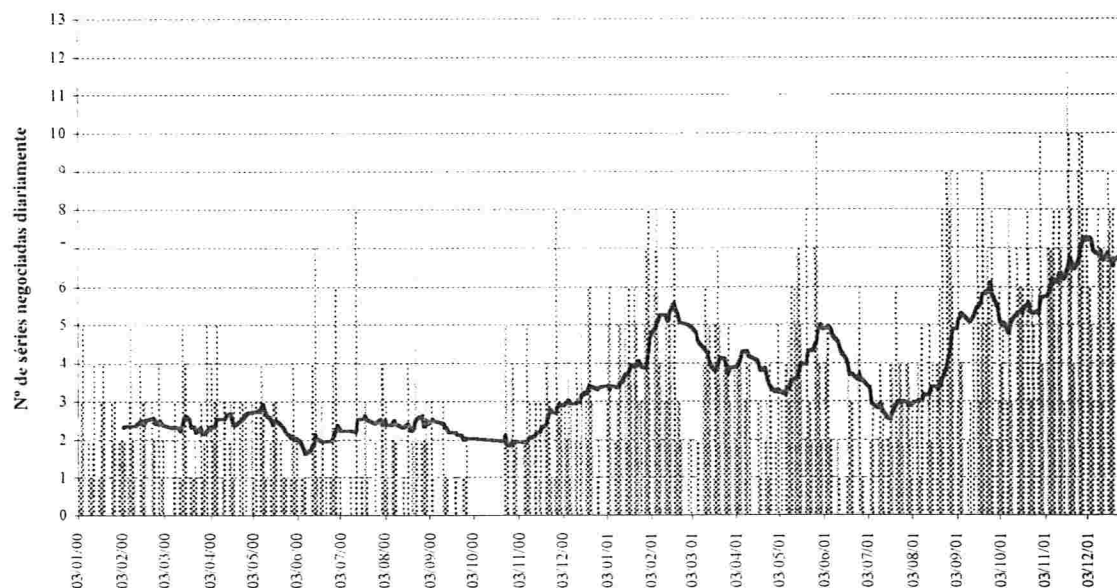


Figura 5.8: Evolução temporal da quantidade de séries negociadas de opção de IDI, na BM&F, durante 03/01/2000 até 28/12/2001.

taxas de juros, é importante verificar se a probabilidade de existência de taxas negativas é significativa e a partir disso, tentar eliminar esta possibilidade. Conforme Hull e White descrevem, para a maioria das moedas, a ocorrência de taxas de juros negativas possui pequena probabilidade, entretanto, em países com taxas de juros muito baixas, essa probabilidade aumenta consideravelmente. Isto porque a taxa de juros muito baixa associada a alguma volatilidade, facilmente pode levar as taxas de juros para o lado negativo. Um exemplo citado pelos dois autores é o Japão e a sugestão proposta por Fisher Black (1995), que consiste em transformar em zero as taxas negativas. A seguir, são discutidas várias simulações feitas com base em parâmetros previamente definidos da árvore trinomial. Um parâmetro para o qual devemos tomar cuidado é a volatilidade da taxa de juros, pois é o determinante da magnitude de Δr e assim do grau de abertura da árvore. Volatilidades

Como calibrar a árvore de Hull-White

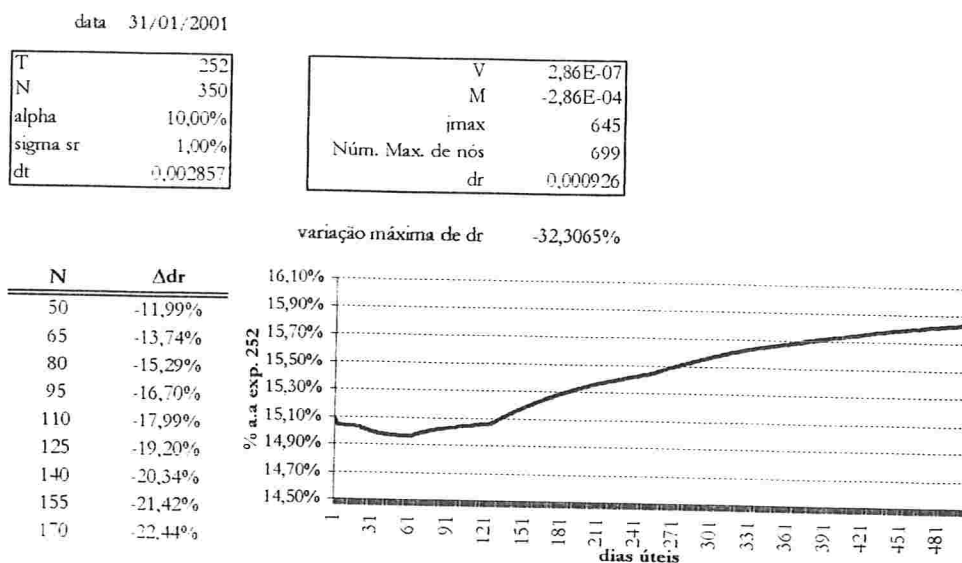


Figura 5.9: Análise do limite inferior da taxa de juros no 1º estágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $a = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 31/01/2001.

muito altas inevitavelmente irão levar a taxas de juros negativas.

Na figura 5.9, foi feita uma simulação de todos os parâmetros envolvidos na construção da árvore para verificar qual o número máximo de passos (N) que evitaria o aparecimento de taxas de juros negativas dados esses parâmetros. O exemplo foi criado a partir da curva de taxa de juros pré-fixada para o dia 31/01/2001, considerando o intervalo dt como fração do ano, $a = 10\%$, $\sigma = 1\%$ e as outras variáveis calculadas conforme explicação dada no item 4.3.2.

Relembramos que no primeiro estágio da construção da árvore trinomial, são geradas taxas de juros $r(i, j) = j\Delta r$ e no segundo estágio, as taxas de juros finais obtidas são $r(i, j) = r(i, j) + a(i)$. Desta forma, saber antecipadamente, ou seja, antes de “rodar” a árvore, qual o valor mínimo que $j\Delta r$ pode tomar facilita a calibração e a intervenção do

Como calibrar a árvore de Hull-White

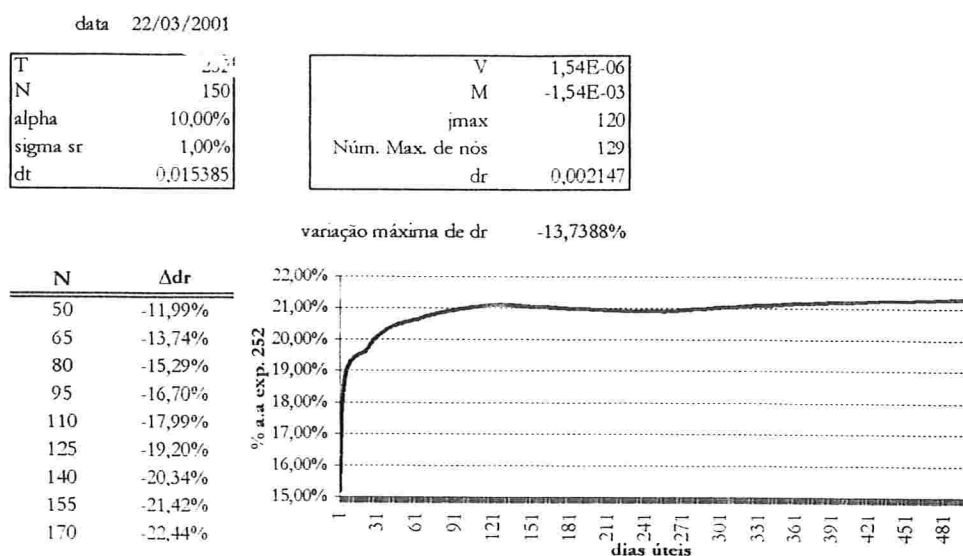


Figura 5.10: Análise do limite inferior da taxa de juros no 1º estágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $\alpha = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 22/03/2001.

usuário para que taxas de juros negativas sejam evitadas. Dado o perfil da curva de taxa de juros e um prazo de vencimento (T) igual a 252 dias úteis, tem-se que a partir de 80 passos (N), a probabilidade de ocorrência de taxa de juros negativas começa a aumentar pelo fato de o termo $j\Delta r$ estar crescendo. Fizemos o mesmo teste para um outro dia em que a estrutura temporal de taxa de juros não estava tão plana, como pode ser verificado na figura 5.10, a qual mostra a mesma simulação para o dia 22/03/2001, dia de nervosismo no mercado financeiro em decorrência de turbulências na economia argentina. Na figura 5.10, verifica-se que uma árvore para o mesmo prazo comportaria cerca de 150 passos sem gerar taxas de juros negativas.

Para o mesmo dia 22/03/2001, analisamos o efeito do número de passos (N) sobre uma árvore com duração menor, $T=25$. O que a figura 5.11 mostra é que para um

Como calibrar a árvore de Hull-White

data 22/03/2001

T	25
N	150
alpha	10,00%
sigma sr	1,00%
dt	0,000661

V	6,61E-05
M	-6,61E-05
µmax	2783
Núm. Max. de nós	299
dr	0,000445

variação máxima de dr -6,6368%

N	Δdr
50	-3,78%
75	-4,66%
100	-5,40%
125	-6,05%
150	-6,64%
175	-7,18%
200	-7,68%
225	-8,15%
250	-8,59%

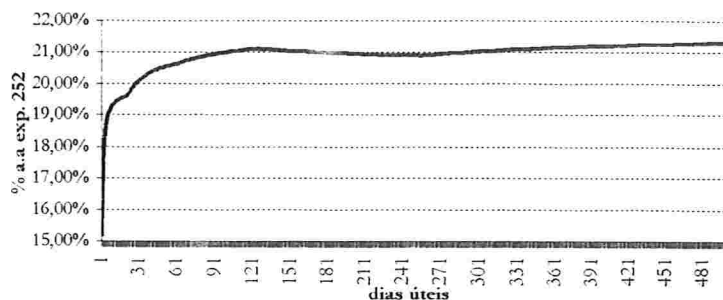


Figura 5.11: Análise do limite inferior da taxa de juros no 1º estágio da construção da árvore quando o número de passos N varia. $a = 10\%$ e $\sigma = 1,00\%$ em 22/03/2001 com 25 dias para vencimento.

prazo menor, podemos gerar a árvore com número muito maior de passos sem aumentar significativamente a probabilidade de gerar taxas de juros negativas.

Até o presente momento, descrevemos os impactos que o número de passos N e o tempo para o vencimento T exercem sobre Δr e, portanto, sobre a taxa de juros $r(i, j)$ gerada em cada nó j a cada intervalo de tempo dt . Os gráficos a seguir pretendem ilustrar a construção completa da árvore trinomial de Hull-White, destacando-se a curva de taxa de juros observada no mercado de renda fixa e os limites máximos e mínimos delimitados pela árvore para a taxa de juros. Os gráficos ilustram as consequências sobre o formato da árvore, quando existe variação nos parâmetros de velocidade de reversão à média a e volatilidade da taxa de juros de curto prazo σ . A curva de taxa de juros tomada como exemplo é referente ao dia 08/02/1999. Nesta ocasião, o cenário econômico financeiro era

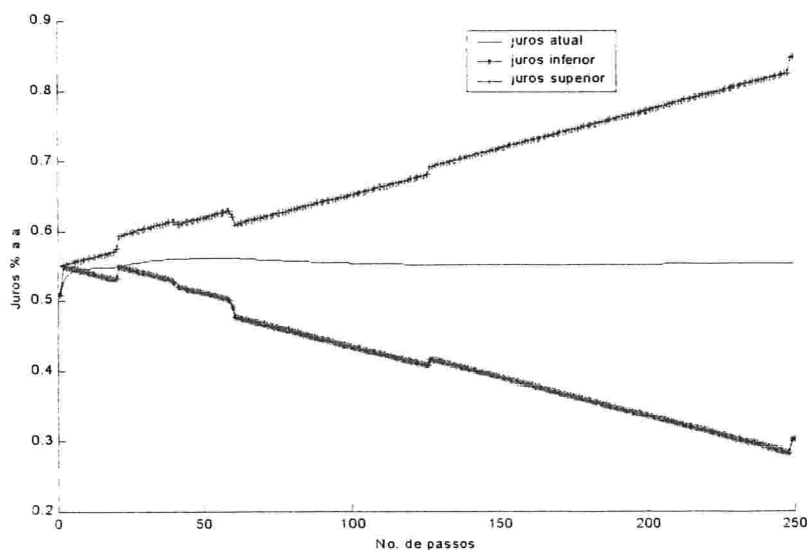


Figura 5.12: $a=10\%$ e $\sigma=1\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$

bastante instável pois havia decorrido menos de um mês desde a mudança do regime cambial que levou à flutuação do real. Posto isto, a curva reflete a indefinição do mercado através de taxas de juros extremamente elevadas, em torno de 50-55% a.a.

Por exemplo, na figura 5.12, a árvore foi construída com $a = 10\%$ e $\sigma = 1\%$. Observa-se que a menor taxa de juros atingida pelo limite inferior da árvore ficou em torno de 30% a.a e portanto sem chances de ocorrerem taxas de juros negativas. Na figura 5.13, apenas aumentamos a volatilidade para $\sigma = 1,5\%$, com os limites da árvore abrindo-se muito mais e o limite inferior foi levado para o nível de 15%a.a praticamente no final do número de passos.

Na figura 5.14, apenas foi mudada a velocidade de reversão à média a , a qual subiu de 10% para 20%. É nítido o efeito que a reversão à média possui sobre os limites da

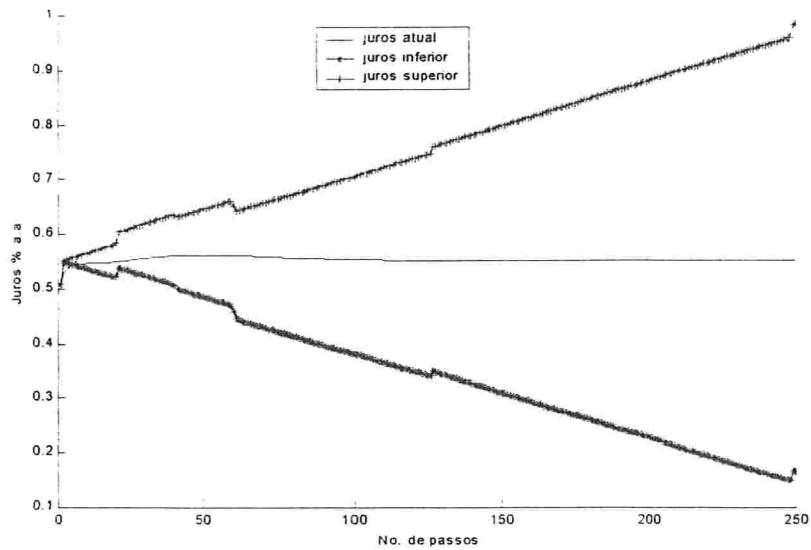


Figura 5.13: $a=10\%$ e $\sigma=1,5\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$

árvore, pois a árvore estabiliza-se no nível inferior, em cerca de 30%a.a. a partir do passo número 230. Mantivemos a em 20% e alteramos σ de 1% para 1,5%, o que levou os juros da árvore para próximo de 18%a.a na figura 5.15. Na última figura 5.16, aumentamos os dois parâmetros simultaneamente para níveis maiores, $a = 30\%$ e $\sigma = 2\%$. Nota-se que a alteração no parâmetro de reversão à media teve maior impacto pois a árvore começa a reverter a partir do passo 155 para o patamar de cerca de 20% a.a.

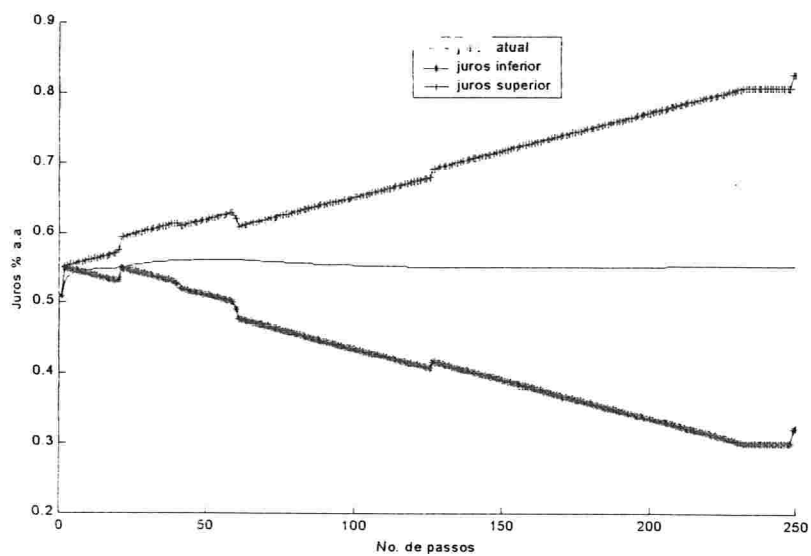


Figura 5.14: $a=20\%$ e $\sigma=1\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$

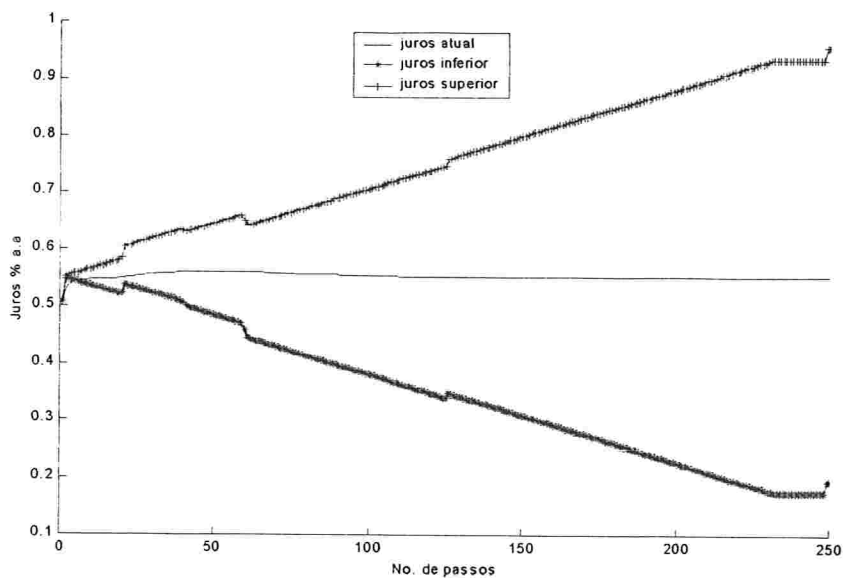


Figura 5.15: $a=20\%$ e $\sigma=1,5\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$

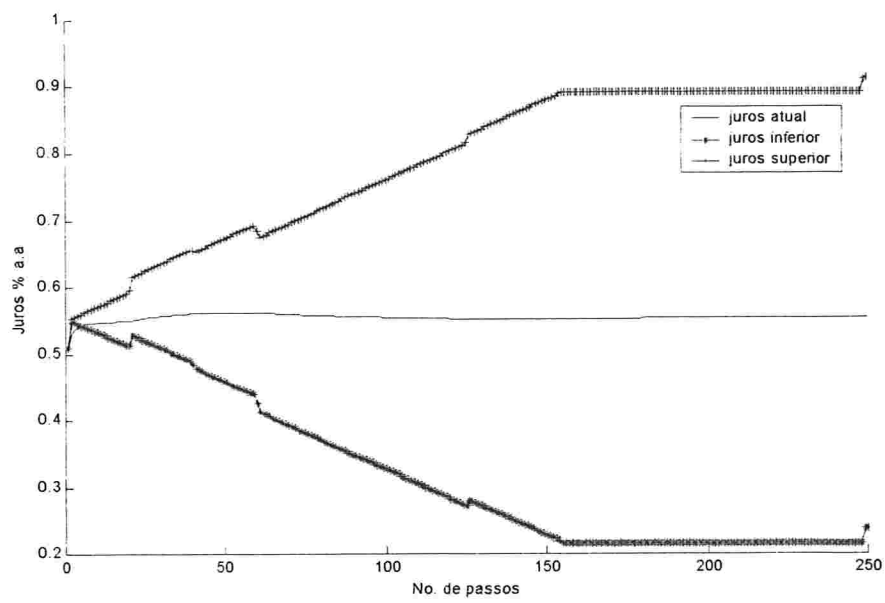


Figura 5.16: $\alpha=30\%$ e $\sigma=2\%$. Árvore de Hull-White para a curva de taxa de juros de 08/02/1999 com $T=252$, $N=250$

Capítulo 6

Resultados

6.1 Escolha do Modelo

Para a implementação de um modelo de taxa de juros, escolhemos o modelo Hull-White descrito em (2.20), com valores constantes para a velocidade de reversão à média e para a volatilidade da taxa de juros de curto prazo. Uma das principais razões para a escolha deste modelo é sua facilidade e simplicidade para ser implementado. Por ser um modelo de um fator, gaussiano e Markoviano para a taxa de juros de curto prazo, possui grande tratabilidade analítica, permitindo o uso de fórmulas fechadas ou a implementação de árvores trinomiais. Além disso, consegue reproduzir a curva das taxas de juros negociadas no mercado. Com relação à preferência da modelagem unifatorial, podemos argumentar com os resultados de análise de componentes principais, os quais atribuem ao primeiro fator (mudança de nível da curva) a responsabilidade por elevada parcela das variações na curva de juros. Um outro ponto positivo para a adoção de modelos de um fator é a possibilidade maior de realizar calibração diária porque possui menos parâmetros e assim, requer um número menor de observações necessárias para a calibração. Por exemplo, a versão Hull-

White dois fatores possui mais parâmetros para serem calibrados, logo, necessita de um número maior de observações para determinação da solução. Se estamos trabalhando em um mercado com liquidez relativamente menor, a calibração pelo modelo Hull-White dois fatores deixará de ser diária em alguns dias.

A distribuição normal para as taxas de juros de curto prazo r_t não impede a existência de taxas de juros negativas. Porém, é interessante repetir aqui o argumento usado por Cícero Vieira Neto (1999) em sua tese de doutorado, na qual reproduziu uma frase de Duffie (1996).

“Gaussian short-rate models are nevertheless useful, and frequently used, since the probability of negative interest rates within a reasonably short time, with reasonable choices for the coefficient functions, is relatively small. Since any model is only an approximation, there may, therefore, be applications for which it is worth the trouble of having negative interest rates if the tractability that is offered in return is sufficiently great”

Além disso, o modelo pode ser deduzido no contexto do paradigma de não arbitragem para HJM.

6.2 Calibração via Opções de IDI-BM&F

“Calibration is definitely more an art than science. Consequently, calibrating to the market can be highly subjective.” Ong (1996)

Calibrar um modelo de Finanças aos dados de mercado é uma arte, que envolve um certo grau de empirismo e intuição pois a tarefa de encontrar os parâmetros que melhor se ajustam a um conjunto de dados é função de uma série de fatores como quais instrumentos

derivativos considerar, como filtrar a amostra para evitar a presença de *outliers*¹, como escolher um critério para ser utilizado como peso, quais os “chutes” iniciais, quais restrições devemos submeter aos parâmetros e a escolha do algoritmo de otimização. Todos estes detalhes foram enfatizados na subseção de Calibração, no capítulo referente à implementação do modelo Hull-White. Como já foi mencionado no início do capítulo 4, todas as rotinas de otimização para a calibração do modelo Hull-White foram criadas no MATLAB pelo fato de o mesmo possuir grande capacidade computacional em prover respostas rápidas e com muita informação. Apesar disso, concluímos que, sem dúvida alguma, a calibração é a parte mais difícil de todo o conjunto relacionado ao apreçamento de um contrato derivativo de taxa de juros.

No mercado de derivativos de taxas de juros brasileiro, o único instrumento passível de fornecer estimativas para os parâmetros que desejamos calibrar e com preços divulgados ao público é a opção de IDI, negociada na BM&F. Todavia, é um mercado relativamente ilíquido se compararmos com outros mercados de opções, seja Bovespa (ações) ou BM&F (dólar, por exemplo). Portanto, devemos atribuir importância especial ao critério empregado para a seleção dos dados e constituição da amostra, dada a sua relativa liquidez, em termos de opções negociadas para poucos vencimentos e exercícios diferentes². Como consequência da análise dos preços das opções, foram observados alguns critérios preliminares para a coleta de dados:

- o fato de volume de negócios com opções de venda de IDI influírem minimamente

¹Aqui, estamos chamando de *outliers* os dados que embutem pouca ou nenhuma informação para a calibração. A manutenção dos mesmos no conjunto de dados para a calibração pode levar a estimativas totalmente viesadas para os parâmetros.

²Isto torna difícil, se não impossível, a tarefa de observar superfícies de volatilidades implícitas para as opções de IDI. Assim, as metodologias de Breeden-Litzenberger (1978), Banz-Miller (1978), Shimko (1991), Rubinstein (1994), Derman-Kani (1994) e Dupire (1994) não podem ser implementadas.

no total de negócios efetuados dentro do período da amostra nos fez desconsiderá-las para a otimização.

- escolhemos o preço médio das opções pelo motivo de o último preço ser passível de alguma “puxada” do preço de fechamento do pregão ou estar distorcido por fazer parte de alguma operação estruturada, na qual não se observa o preço individual de cada opção, mas sim o conjunto. Isto pode ocorrer devido a uma operação de arbitragem, por exemplo.
- seguimos a sugestão de Pelsser (1999), conforme citado anteriormente, e calculamos todos os preços em termos logarítmicos. A amplitude nos preços negociados justifica esta decisão por melhorar os resultados da otimização.
- para evitar a resolução de sistema com número de variáveis maior do que o número de observações, consideramos somente os dias em que há, no mínimo, mais de dois preços disponíveis, pois temos dois parâmetros para calibrar, (a) e (σ) .

Apenas para comprovar a qualidade do ajuste logarítmico mencionado acima na minimização dos resíduos quadráticos entre preços de mercado das opções e preço do modelo, comparamos os resultados dos resíduos ao quadrado com e sem o ajuste pelo logaritmo, de acordo com a figura 6.1. Os resíduos ao quadrado diminuem sensivelmente após a aplicação do logaritmo aos preços.

Porém, nesta primeira tentativa de calibração, os resultados ainda não foram bons, motivo que nos levou a investigar minuciosamente toda a informação contida na amostra. Esta rápida pesquisa concluiu que muitas observações, principalmente as opções muito

Amostra: 1.390 observações
 Chute Inicial: 50% e 100% (σ / a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (σ / a)
 restrição superior: 500% e 150% (σ / a)

Estatísticas	Função Objetivo: [mercado - modelo] ²				Função Objetivo: [log(mercado+1) - log(modelo+1)] ²			
	sem LOG				com LOG			
	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
Média	8.37%	121.59%	33,182	13	14.648%	129.549%	3	8
Desvio-padrão	7.35%	49.62%	125,819	4	11.354%	42.299%	7	3
Min	0.24%	10.00%	0	1	0.031%	10.000%	0	1
Q1	3.57%	132.03%	678	11	6.702%	136.715%	0	6
Mediana	6.77%	145.56%	5,114	12	11.809%	149.945%	1	7
Q3	10.84%	150.00%	21,346	16	20.412%	150.000%	3	8
Max	50.00%	150.00%	1,849,477	32	65.537%	150.000%	59	26

Figura 6.1: Exemplo com resultados de duas calibrações, com e sem a aplicação do log aos prêmios das opções

dentro/fora do dinheiro e as opções com prazo muito curto para o vencimento, poderiam estar prejudicando a performance do algoritmo de otimização. Diante disso, parecia mais adequado testar algumas alternativas de filtragem dos dados, da função objetivo usada na otimização e de algum tipo de peso que minimizasse de forma acentuada a importância dessas informações relativas às opções muito dentro/fora do dinheiro. A tabela a seguir exemplifica a existência de negócios com opções totalmente fora do dinheiro, sobre as quais devemos colocar em dúvida a validade de seus preços para a calibração. Nestes preços para a série MR05³, a coluna “r implícito” indica a taxa de juros anualizada, entre a data da cotação e a data de vencimento da opção, que é requerida para que a opção tenha *payoff* nulo, enquanto que a coluna “r mercado” mostra a taxa de juros negociada em mercado para o mesmo período. As diferenças entre as duas colunas são extremamente elevadas.

Diante disso, foram testadas diversas variações para a função objetivo com o intuito de ajustar melhor os prêmios das opções e estimar parâmetros estáveis para a volatilidade

³O termo MR05 é um código de negociação definido para opção de IDI cuja série é a 05 e o mês de vencimento março de 2000.

Data	Vencido	Tipo de série	Data Vencido	K	Último	Médio	r implícito (r _i)	r mercado (r _m)
14/01/00	MRO5	C	01/03/00	129,500	9	9	754.00%	18.96%
21/01/00	MRO5	C	01/03/00	129,500	5	5	840.01%	19.04%
26/01/00	MRO5	C	01/03/00	129,500	3	3	1104.88%	19.00%

Figura 6.2: Resumo dos negócios com o vencimento Março 05 de opção de IDI durante o mês de Janeiro de 2000.

(σ) e para a velocidade de reversão à média (a).

$$\min_{a, \sigma} \Phi_1 = \sum_{i=1}^n \left(\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right) - \log \left(P_i^{\text{modelo}} + 1 \right) \right)^2 \quad (6.1)$$

$$\min_{a, \sigma} \Phi_2 = \sum_{i=1}^n w_i \left(\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right) - \log \left(P_i^{\text{modelo}} + 1 \right) \right)^2 \quad (6.2)$$

$$\min_{a, \sigma} \Phi_3 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right)} \left(\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right) - \log \left(P_i^{\text{modelo}} + 1 \right) \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\min_{a, \sigma} \Phi_4 = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right) - \log \left(P_i^{\text{modelo}} + 1 \right)}{\log \left(P_i^{\text{mercado}} + 1 \right)} \right)^2 \quad (6.4)$$

Nas funções objetivo (6.1), (6.2), (6.3) e (6.4), empregadas na otimização não-linear, P_i^{mercado} é o preço médio da opção de IDI, P_i^{modelo} é o preço gerado pelo modelo para cada uma das n opções e w_i é um peso escolhido, cuja soma é igual a 1. Nas quatro funções acima, foi somado 1 para evitar que o log do preço fosse igual a zero quando o prêmio da opção era igual a 1. Portanto, é possível produzir diversas combinações entre as funções objetivo e várias alternativas para os pesos na busca pelas estimativas que sejam as mais estáveis e que minimizem os resíduos ao quadrado. Restringimo-nos a analisar três critérios para escolha do peso (w_i) na calibração:

- o vega calculado pelo modelo de Black (1976)⁴

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = F e^{-rT} N'(d_1) \sqrt{T-t} \quad (6.5)$$

⁴Os parâmetros para o cálculo do Vega foram definidos assim: F é uma estimativa para o preço futuro

- o *moneyness* da opção, definido aqui como

$$moneyness = \left(\frac{K_T P(t, T)}{IDI_t} \right) \quad (6.6)$$

onde K_T é o preço de exercício na data T de vencimento da opção, IDI_t é o preço do IDI calculado na data t e $P(t, T)$ é o fator de desconto, dado pela taxas projetadas no mercado futuro, que traz o preço de exercício a valor presente, da data T até a data t .

- e um tipo de peso, bastante original, que combina o absoluto da diferença relativa entre a taxa de juros requerida para que a opção seja exercida e a taxa de juros projetada no mercado futuro para a data de vencimento da opção, ajustada pelo prazo remanescente da opção. Esse peso será chamado a partir de agora de “ w_3 ”.

$$w_3 = \frac{1}{abs \left(\frac{J_K - J_M}{J_M} \right)} * \tau \quad (6.7)$$

onde J_K é o juros implícito para que a opção tenha *payoff* nulo e calculado de acordo com a fórmula abaixo

$$J_K = \text{Juros implícito para exercício (\% a.a)} = \left(\frac{K_T}{IDI_t} \right)^{\left(\frac{252}{du_{t,T}} \right)} - 1 \quad (6.8)$$

K_T é o preço de exercício na data T de vencimento da opção, IDI_t é o preço do IDI calculado na data t , $du_{t,T}$ é o número de dias úteis entre as datas t e T e 252 é um

parâmetro para seguir a convenção do mercado brasileiro de renda fixa em reais. J_M é do IDI na data de vencimento da opção, dada pelo valor atual do IDI multiplicado pelo fator equivalente à taxa de juros de mercado prevista no mercado futuro para o mesmo prazo. Os outros parâmetros são: r é a taxa de juros anualizada até a data de vencimento da opção, $T-t$ é o prazo para o vencimento da opção em termos de fração de ano, $N'(d_1)$ é a derivada da função de densidade cumulativa normal.

o juros de mercado, projetado pelo mercado futuro, entre as duas datas e τ representa o tempo para o vencimento da opção (fração do ano), de acordo com

$$\tau = \frac{du_{t,T}}{252} \quad (6.9)$$

A intuição existente neste peso é que diferenças relativas muito elevadas entre J_K e J_M (opções muito dentro ou fora do dinheiro), por estarem no denominador de (6.7) receberão peso inversamente proporcional. Ao contrário, quando a diferença entre J_K e J_M for muito pequena (opções no dinheiro), elas receberão peso consideravelmente maior. Adicionalmente, o termo τ pondera mais as opções com prazo mais longo. Por exemplo, se a diferença ($J_K - J_M$) for de 5% para duas opções diferentes, uma com 1 mês para o vencimento e a outra com 6 meses para o vencimento, é razoável supor que exista uma probabilidade maior de exercício para a opção mais longa e assim, ela deva receber maior peso, pois as chances de a taxa de juros subir 5% faltando apenas 1 mês para o vencimento da opção são menores. Entretanto, uma primeira pergunta que inevitavelmente surge é o motivo que nos levou a sugerir o critério anterior como uma ponderação para os resíduos quadráticos. A primeira inspeção visual das séries temporais dos três pesos mostrou que “ w_3 ” oscilava mais, efetuada uma análise estatística dos dados, verificou-se que, realmente, “ w_3 ” possui maior desvio-padrão e maior amplitude em seus dados. Pelo fato de o “ w_3 ” ser mais sensível, acreditávamos que ele conseguiria minimizar os erros e gerar estimativas melhores para (a) e (σ) .

Para comprovar a influência positiva da inclusão de pesos, rodamos a rotina de calibração para três funções-objetivo listadas anteriormente e para cada um dos quatro pesos, de modo que no final pudemos analisar os resultados de 12 calibrações diferentes.

	w_3	<i>Money</i> <i>ness</i>	Vega BLACK
Media	22.26	0.995	160.21
Desvio-padrão	185.26	0.023	113.63
Min	0.00	0.792	0.00
Q1	0.86	0.995	34.52
Mediana	2.65	0.999	178.10
Q3	8.87	1.001	254.15
Max	5.985.62	1.021	482.17

Figura 6.3: Estatísticas para os três tipos de pesos

Claramente, percebe-se que a média dos resíduos quadráticos é reduzida consideravelmente quando algum tipo de ponderação do erros é efetuada. Destacaram-se o vega e o “ w_3 ” como aqueles que apresentaram menor média e desvio-padrão para os resíduos da otimização. Desta forma, as conclusões preliminares indicam a superioridade dos resultados com o uso do log, de funções-objetivo com diferenças relativas e a ponderação pelo vega ou “ w_3 ”.

Considerando o fato de que esta seleção inicial dos dados apenas descartou os dias em que apenas um negócio foi efetuado, havia muitas opções totalmente fora do dinheiro que poderiam ser retiradas da amostra através de algum procedimento para filtrar essas informações. O objetivo principal é eliminar prêmios distorcidos ou de opções muito dentro/fora do dinheiro e assim obter estimativas estáveis para (a) e (σ). Filtramos a amostra usando um critério bastante empírico⁵ e que é o inverso de “ w_3 ”, ou seja, é a diferença percentual entre a taxa de juros para o exercício da opção e a taxa de juros de mercado para o mesmo prazo, ajustado pelo tempo para o vencimento.

$$filtro = abs \left(\frac{J_K - J_M}{J_M} \right) * \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (6.10)$$

Com base na equação (6.10), criamos três seleções diferentes de dados, aplicando filtros.

⁵Existem diversos procedimentos estatísticos que poderiam ser utilizados para filtrar os dados da amostra, tais como box-plot ou quantis da distribuição normal.

Função Objetivo: $[\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$			
Ponderação	Média	Desvio- padrão	Nº de vezes em relação a menor
			média
<i>sem peso</i>	2.369	6.778	29.322
<i>moneyness</i>	0.194	0.904	1.983
<i>vega + 1</i>	0.098	0.886	1.000
w_3	0.110	0.931	1.129

Função Objetivo: $1/\log(\text{mercado}+1) * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$			
Ponderação	Média	Desvio- padrão	Nº de vezes em relação a menor
			média
<i>sem peso</i>	0.327	0.642	62.568
<i>moneyness</i>	0.019	0.050	3.709
<i>vega + 1</i>	0.005	0.038	1.000
w_3	0.006	0.038	1.091

Função Objetivo: $[(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$			
Ponderação	Média	Desvio- padrão	Nº de vezes em relação a menor
			média
<i>sem peso</i>	0.327	0.642	62.568
<i>moneyness</i>	0.019	0.050	3.709
<i>vega + 1</i>	0.005	0.038	1.000
w_3	0.006	0.038	1.091

Figura 6.4: Comportamento dos resíduos quadráticos da otimização dos parâmetros a e σ , definidos arbitrariamente, de 100%, 50% e 40%. As otimizações, com a função dada pela equação (6.4) e as ponderações pelo vega e pelo “ w_3 ”, produziu resultados bastante semelhantes para as estimativas dos parâmetros de reversão à média, volatilidade e para os resíduos quadráticos como se pode depreender dos quadros inseridos no Apêndice deste trabalho, os quais resumem as principais estatísticas de cada uma das calibrações.

Com relação aos resultados da estimação, conclusões interessantes foram obtidas. A primeira constatação dos resultados é que se pode distinguir três períodos com comportamentos distintos para os resultados. O primeiro período, que chamaremos de P1, vai de 03/01/2000 até 30/11/2000, o segundo período, chamado de P2, compreende o período de 01/12/2000 até 15/03/2001, e o último período P3, de 16/03/2001 até 28/12/2001. Para o primeiro período P1, verificamos que praticamente todo o ano de 2000 gerou estimativas

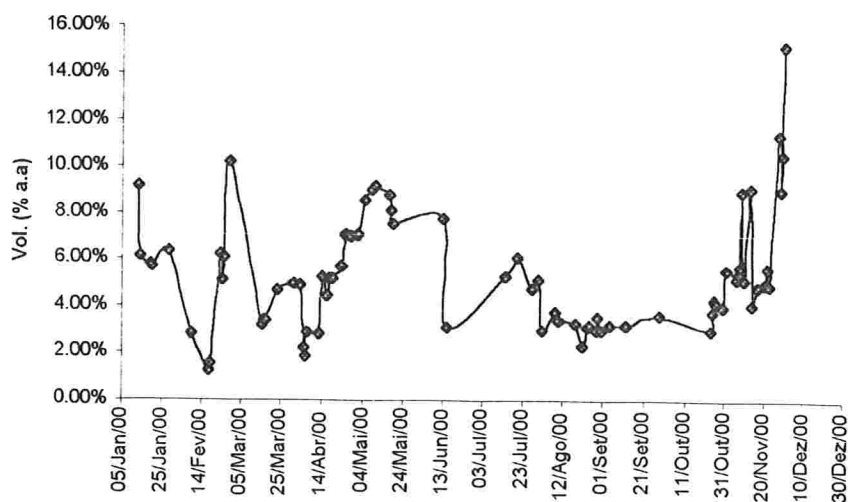


Figura 6.5: Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P1 (03/01/2000 até 30/11/2000)

instáveis e com excessivo desvio-padrão para (a) e (σ) , de acordo com as figuras 6.5 e 6.6.

Pode-se atribuir isto à pequena liquidez do mercado de opções de IDI no ano de 2000, a qual foi crescendo durante o ano, e à convergência da estrutura a termo das taxas de juros para condições menos voláteis, com taxas de juros menores e estrutura mais plana da curva somente no fim do ano citado, conforme figura 6.7⁶.

No período P2, a partir de dezembro de 2000 até março de 2001, as estimativas para a e σ surpreendentemente mostraram maior estabilidade, com queda da volatilidade de 8-9% a.a para 2-3% a.a e a velocidade de reversão à média entre 130-140% a.a. Um exemplo da redução da volatilidade das taxas de juros no período está presente na figura 6.7, a qual mostra a visível queda na volatilidade de novembro/2000 até março/2001. A outra série representa o *spread* entre a taxa de *swap* de 1 ano e a taxa diária do CDI, na

⁶A volatilidade da taxa de juros de 21 dias úteis foi calculada por alisamento exponencial e fator de decaimento igual a 0,94, com base nas taxas de *Swap* Pré x CDI - BM&F e o *spread*, medido em *basis-points*, é entre a taxa de *swap* de 1 ano e a taxa média diária anualizada do CDI-CETIP

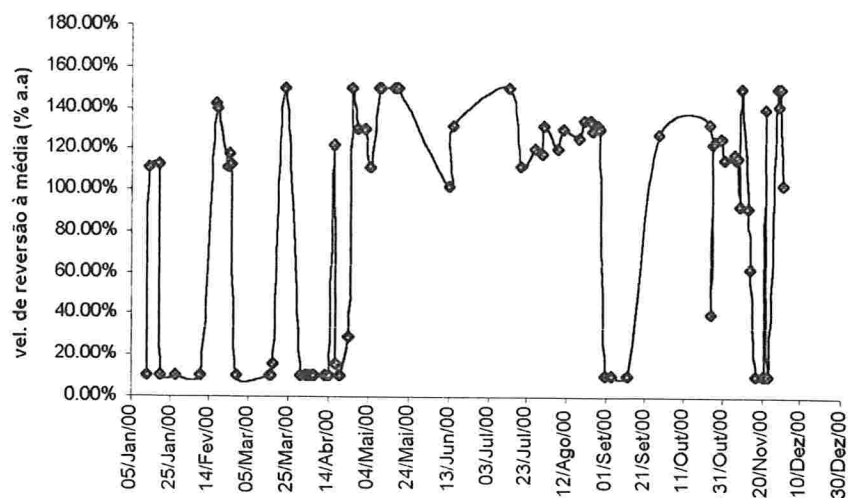


Figura 6.6: Parâmetro α (velocidade de reversão à média) no período P1 (03/01/2000 até 30/11/2000)

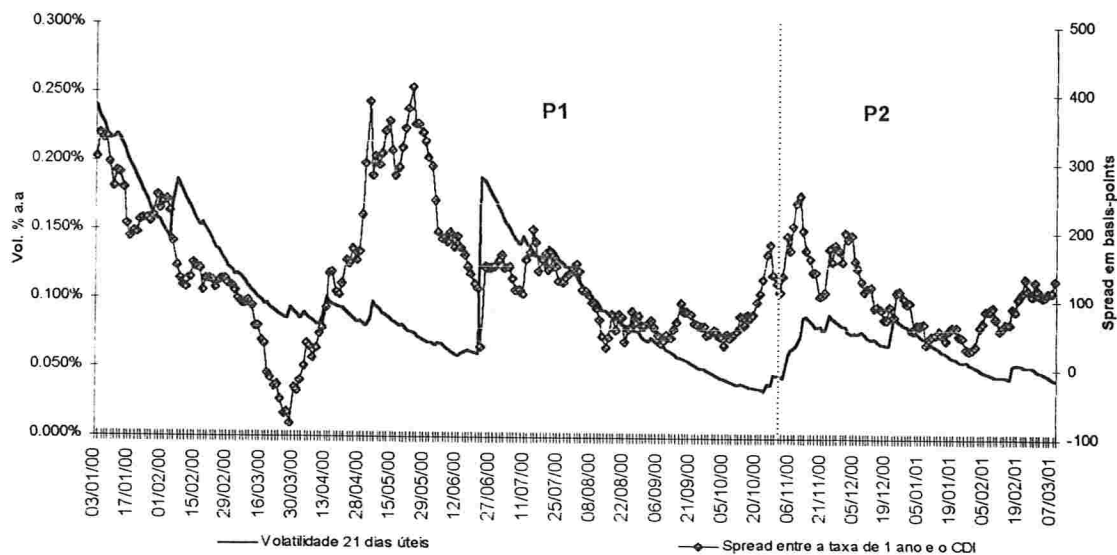


Figura 6.7: Volatilidade da taxa de juros de 21 dias úteis e *spread* entre a taxa de *swap* de 1 ano e a taxa de 1 dia, de 03/01/2000 até 15/03/2001

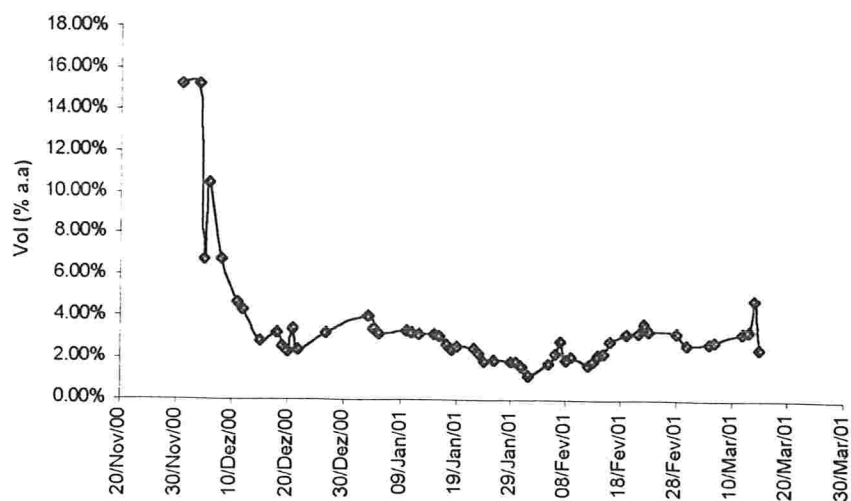


Figura 6.8: Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P2 (01/12/2000 até 15/03/2001)

qual verificamos a redução de 200 *basis-point* no início de novembro/2000 para a metade no início de março/2001. Essa redução nos *spreads* representa uma redução no prêmio de risco exigido para operações de prazo mais longo, ocorrendo em uma estrutura mais plana das taxas de juros. Portanto, no período em que houve relativa estabilidade no mercado de renda fixa, conforme descrição da curva de juros e sua volatilidade, foi possível inferir boas estimativas para os parâmetros. Nas figuras 6.8 e 6.9, apresentamos um dos resultados da calibração das opções de IDI para (a) e (σ), para o período de 01/12/2000 até 15/03/2001. A estabilidade da volatilidade é marcante a partir da metade de dezembro/2000, ocorrendo o mesmo para a velocidade de reversão à média, com exceção de algumas datas, as quais foram ressaltadas na figura 6.9. Apesar disso, conseguimos calibrar o parâmetro (a) para 90% dos casos.

O mais interessante é que no dia 15/03/2001, quando as inquietações com a situação argentina começaram a se agravar, ocorre uma ruptura neste comportamento mais

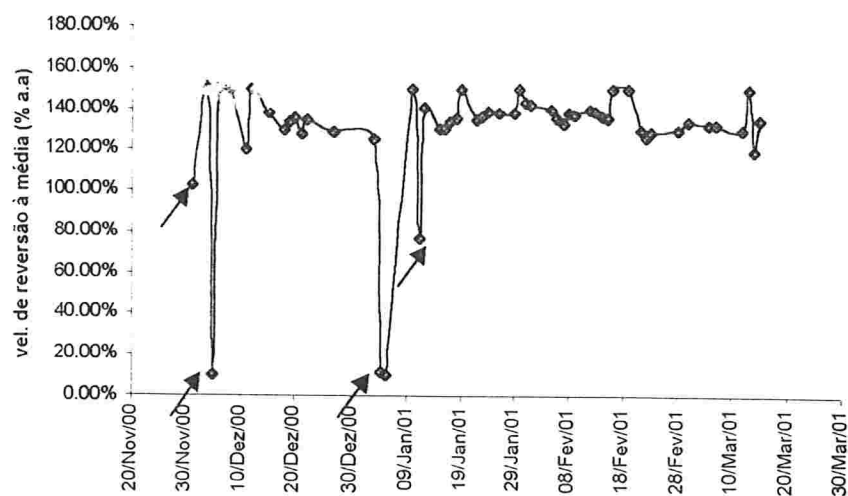


Figura 6.9: Parâmetro α (velocidade de reversão à média) no período P2 (01/12/2000 até 15/03/2001)

estável para as estimativas. A partir desta data, a ampliação do nervosismo em relação ao futuro econômico de nosso vizinho e o eventual contágio para o Brasil, a crise energética no segundo semestre e os atentados de 11 de setembro desestabilizaram completamente as estimativas geradas pela calibração diária, ilustradas nas figuras 6.10 e 6.11.

As figuras 6.12 e 6.13 conseguem ilustrar perfeitamente a magnitude do choque ocorrido no mercado de renda fixa brasileiro a partir de março de 2001. No primeiro dia do contágio do mercado de renda fixa brasileiro devido à crise argentina, a curva de juros deslocou-se para cima, praticamente de maneira paralela, cerca de 1 ponto percentual e o deslocamento para cima da estrutura a termo de juros continuou até o final do mês de março. Conseqüentemente, a volatilidade das taxas de juros aumentou expressivamente, por exemplo, a volatilidade da taxa de juros para 252 dias úteis, aproximadamente 1 ano, foi multiplicada por 6 vezes entre a metade e o final do mês de março de 2001. Certamente, nenhuma modelo de taxa de juros da família de um fator consegue ajustar-se a este choque.

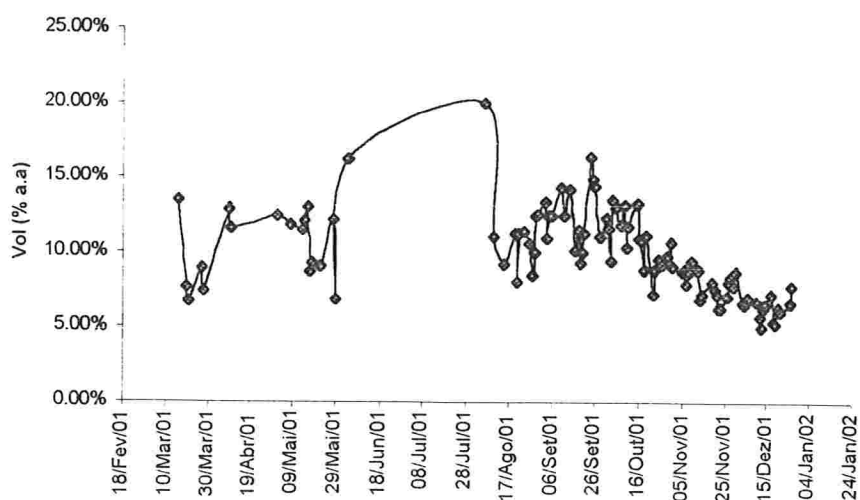


Figura 6.10: Parâmetro σ (volatilidade da taxa de juros de curto prazo) no período P3 (16/03/2001 até 28/12/2001)

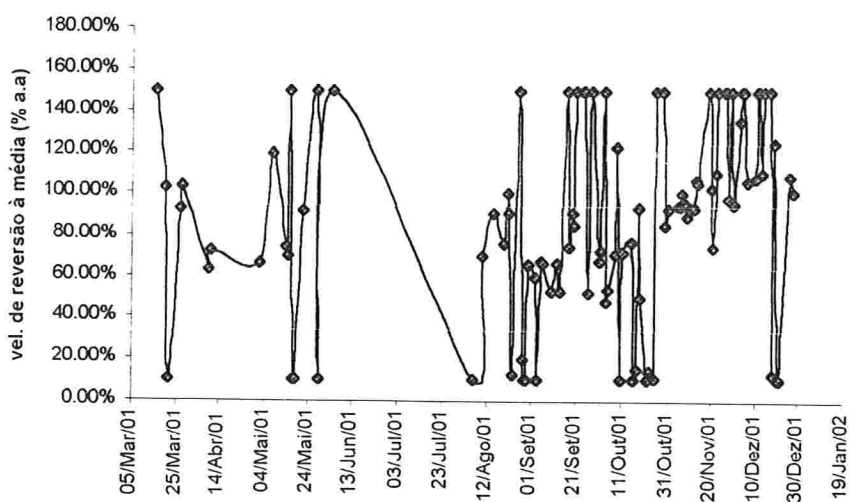


Figura 6.11: Parâmetro α (velocidade de reversão à média) no período P3 (16/03/2001 até 28/12/2001)

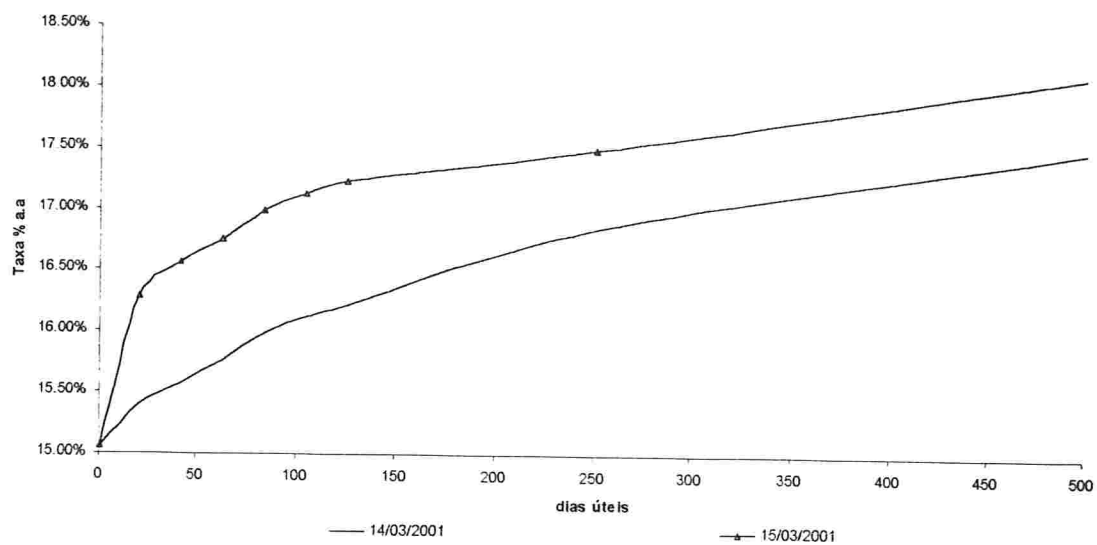


Figura 6.12: Curvas de taxas de juros (*Swaps Pré x CDI BM&F*) para 14/03/2001 e 15/03/2001

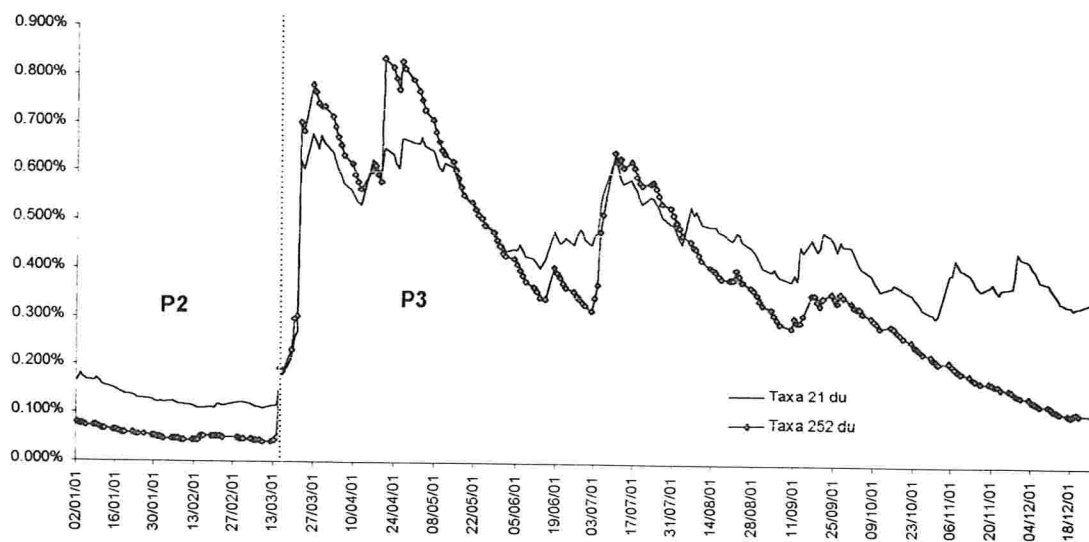


Figura 6.13: Volatilidade das taxas de juros de 21 e 252 dias úteis, de 02/01/2001 até 28/01/2001

Em virtude do cenário de excessiva volatilidade iniciado em março e prolongado devido à crise energética e aos atentados nos EUA, a impossibilidade em extrair estimativas estáveis para (a) e (σ) ficou patente. O processo de calibração do modelo Hull-White gerou estimativas enquanto a curva de juros era estável, praticamente plana e as volatilidades das taxas de juros estavam em trajetória declinante. Entretanto, concluímos também que o conjunto de condições adversas após março de 2001 impediu que o modelo proposto obtivesse o ajuste necessário de modo a fornecer parâmetros confiáveis para o apreamento e *hedge* de derivativos de taxa de juros.

Capítulo 7

Conclusão

Apesar da escassez de dados diários de opções de IDI, mostramos que é possível calibrar, de maneira razoavelmente robusta, o modelo de Hull-White em períodos de estabilidade econômico financeira. Mostramos também que em períodos com grande volatilidade ou pós-crise, o mesmo modelo gera parâmetros instáveis. A partir dos estudos realizados para a calibração, são necessários testes de apreçamento e *hedging*, o que não foi feito neste trabalho, para que se tenha argumentos a favor ou contra a qualidade da calibração e do modelo.

Certamente, se o mercado de opções de taxas de juros no Brasil, hoje representado somente pela opção de IDI, mostrar aumento significativo de liquidez, a tarefa de calibração será muito facilitada. Como sugestões de pesquisa futura na área de modelagem de derivativos de taxas de juros, existem inúmeros caminhos a serem seguidos. Um deles pode ser a construção de modelos que incorporem o caráter estocástico da volatilidade mais saltos discretos (*stochastic volatility jump diffusion model*), provocados pelas reuniões do COPOM,

por exemplo. Uma outra linha é a implementação de modelos unifatoriais da classe HJM, mas com especificações diferentes para a variância.

Bibliografia

- [1] Brigo, D. e F. Mercurio, 2001, Interest Rate Models: Theory and Practice, Primeira edição, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [2] Cassetari, A. e L. F. Neto, 2001, "A precificação de derivativos de taxa de juro no Brasil", Revista BM&F, nº 145, 35-47.
- [3] Clewlow, L. e C. Strickland, 1999, Implementing Derivatives Models, Segunda Edição, John Wiley e Sons, London
- [4] Cox, J. C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross, 1985, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53, 363-384.
- [5] Douady, R., 1999, "Model Calibration in the Monte-Carlo Framework", Working Paper, CNRS e Ecole Normale Supérieure, CMLA.
- [6] Duffie, Darrell, 1996, Dynamic Asset Pricing Theory, Segunda Edição. Princeton University Press, Princeton, New Jersey
- [7] Gibson, R., F.S. Lhabitant, D. Talay, 2001, "Modeling the term structure of interest rates: a review of literature", Working Paper, RiskLab, Zurich

- [8] Gupta, A. e M. Subrahmanyam, 2000, "An Examination of the Static and Dynamic Performance of Interest Rate Option Pricing Models in the Collar Cap-Floor Markets", Working Paper, Case Western Reserve University e New York University.
- [9] Hull, J. e A. White. 1994, "Single-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, 235-254.
- [10] Hull, J. e A. White, 1994, "Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models", *Journal of Derivatives*, Vol. 2, 7-16.
- [11] Hull, J. e A. White. 1996, *Hull-White on Derivatives A Compilation of Articles by John Hull e Alan White*, Primeira Edição, Risk Publications, London
- [12] Hull, J., 1997, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Terceira Edição, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey.
- [13] Hull, J. e A. White, 1996, "Using Hull-White Interest Rate Trees", *Journal of Derivatives*, Vol. 3, 26-36.
- [14] Hull, J. e A. White. 2000, "The General Hull-White Model and Super Calibration", Working Paper, University of Toronto Canada.
- [15] James, J. e Weber. N., 2000, *Interest Rate Modelling*, Primeira Edição, John Wiley e Sons, Chichester
- [16] Merton, R., 1973. "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, 141-183.

- [17] Musiela, M. e M. Rutkowski. 1998, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Segunda Edição, Springer-Verlag, Berlin
- [18] Neftci, S.N., 2000, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Segunda Edição, Academic Press. San Diego. California.
- [19] Neto, C. A. V., 1999, *Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e Avaliação de Contratos Derivativos*, Tese de Doutorado, FEA-USP.
- [20] Ong, M.K., 1996, "Volatility and Calibration in Interest Rate Models". Working Paper
- [21] Pelsler, A., 2000, *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Primeira Edição, Springer-Verlag, London
- [22] Rebonato, R., 1998, *Interest-Rate Option Models*, Segunda Edição, John Wiley e Sons, Chichester
- [23] Shreve, S., 1996, *Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance*, Carnegie Mellon University
- [24] Vasicek, O. A.. 1977. "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 177-188.

Apêndice A

Resultados da calibração com a aplicação do log aos prêmios das opções

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é valido
 Amostra: 1.390 obs.
 Calibração em
 Peso: nenhum
 Função Objetivo: [mercado - modelo]
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Média	4	8.374%	121.595%	33.182	13
Desvio-padrão	2	7.346%	49.619%	125.819	4
Min	2	0.238%	10.000%	0	1
Q1	3	3.568%	132.033%	678	11
Mediana	4	6.768%	145.555%	5.114	12
Q3	5	10.845%	150.000%	21.346	16
Max	10	50.000%	150.000%	1.849.477	32

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
03/Jan/00	2	50.00%	100.00%	483.986	1
05/Jan/00	3	50.00%	100.00%	35.103	1
06/Jan/00	3	50.00%	100.00%	24.653	1
10/Jan/00	2	7.72%	142.28%	144	9
13/Jan/00	2	9.92%	10.00%	1.709	15
14/Jan/00	4	6.30%	143.58%	1.312	9
19/Jan/00	3	6.16%	132.12%	906	20
20/Jan/00	4	6.54%	10.00%	2.548	13
21/Jan/00	3	7.36%	116.91%	25	11
26/Jan/00	3	7.77%	10.00%	94	14
27/Jan/00	2	7.24%	100.11%	0	12
28/Jan/00	3	6.28%	10.00%	620	14
31/Jan/00	2	8.35%	150.00%	45	13
01/Fev/00	2	8.35%	150.00%	74	12
02/Fev/00	2	7.95%	150.00%	76	12
03/Fev/00	2	7.71%	150.00%	52	13
04/Fev/00	2	7.94%	150.00%	61	13
08/Fev/00	3	6.75%	150.00%	75	13
09/Fev/00	3	5.38%	10.00%	1.310	13
10/Fev/00	2	6.77%	150.00%	64	12
15/Fev/00	4	7.55%	142.45%	26	9
17/Fev/00	3	1.30%	148.71%	61	12
18/Fev/00	3	1.61%	148.33%	64	12
23/Fev/00	3	6.30%	149.99%	695	12
24/Fev/00	2	5.06%	145.37%	471	17
25/Fev/00	2	6.06%	144.43%	527	17
28/Fev/00	4	14.66%	10.00%	408.771	12
10/Mar/00	3	3.94%	145.97%	1.023	11
15/Mar/00	5	3.34%	10.00%	1.805	16
16/Mar/00	4	3.41%	10.00%	1.202	15
17/Mar/00	4	3.32%	10.00%	1.212	16
23/Mar/00	2	4.17%	150.00%	303	13
27/Mar/00	3	4.49%	150.00%	100	12
29/Mar/00	2	4.58%	150.00%	99	12
31/Mar/00	5	5.51%	10.00%	30.674	13
03/Abr/00	4	5.42%	10.00%	30.922	13
04/Abr/00	2	4.75%	150.00%	224	12
05/Abr/00	3	3.29%	10.00%	2.102	13
06/Abr/00	3	3.65%	10.00%	4.563	13
07/Abr/00	5	3.92%	10.00%	6.615	13
13/Abr/00	3	4.63%	10.00%	2.915	12
14/Abr/00	3	6.04%	10.00%	1.706	13
17/Abr/00	2	4.20%	147.97%	359	18
18/Abr/00	3	5.67%	10.00%	209	16
20/Abr/00	3	5.91%	19.75%	444	14
24/Abr/00	3	5.52%	10.00%	608	13
26/Abr/00	3	6.83%	150.00%	991	12
28/Abr/00	3	7.16%	150.00%	698	12
02/Mai/00	3	7.32%	150.00%	561	12
05/Mai/00	3	9.10%	150.00%	468	12
09/Mai/00	4	7.50%	150.00%	6.792	11
10/Mai/00	3	8.04%	150.00%	6.648	11
15/Mai/00	2	13.83%	133.82%	205	19
17/Mai/00	3	7.85%	150.00%	4.524	11
18/Mai/00	3	7.34%	150.00%	5.635	11
19/Mai/00	3	7.57%	150.00%	5.541	11
22/Mai/00	2	8.84%	141.29%	625	8
02/Jun/00	2	6.73%	143.27%	25	9
13/Jun/00	4	7.89%	150.00%	2.366	11
14/Jun/00	2	10.51%	138.74%	1	9

Figura A.1: Calibração sem aplicação do log aos prêmios

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (α)	Resíduos ao quadrado	Iterações
15/Jun/00	7	3.21%	146.79%	541	20
20/Jun/00	3	14.32%	10.00%	548.806	10
21/Jun/00	2	8.11%	150.00%	2.356	12
28/Jun/00	4	10.12%	139.88%	20	9
14/Jul/00	8	4.71%	150.00%	5.183	12
20/Jul/00	3	6.76%	142.86%	463	16
27/Jul/00	2	5.05%	142.52%	401	19
31/Jul/00	4	5.56%	150.00%	10.377	11
01/Ago/00	4	3.31%	149.99%	10.827	11
03/Ago/00	3	20.19%	10.00%	1.849.477	21
07/Ago/00	2	46.58%	103.20%	165.391	5
08/Ago/00	2	3.95%	144.06%	132	21
09/Ago/00	2	45.07%	104.80%	89.855	5
10/Ago/00	2	3.46%	145.17%	52	18
18/Ago/00	4	3.61%	150.00%	345	12
21/Ago/00	2	2.59%	144.82%	437	22
24/Ago/00	7	3.31%	148.12%	42.691	10
25/Ago/00	2	3.45%	147.21%	216	18
28/Ago/00	2	3.26%	147.40%	265	18
29/Ago/00	2	3.80%	144.61%	293	21
30/Ago/00	2	32.31%	117.98%	861	7
31/Ago/00	3	3.37%	10.00%	473	15
01/Set/00	2	6.09%	143.91%	25	9
04/Set/00	3	3.58%	10.00%	375	15
12/Set/00	3	3.41%	10.00%	314	17
28/Set/00	2	3.65%	145.68%	126	20
24/Out/00	2	3.44%	138.28%	399	20
25/Out/00	5	3.59%	10.00%	711	14
26/Out/00	2	3.97%	144.82%	320	17
27/Out/00	2	4.89%	144.75%	297	17
30/Out/00	4	4.73%	150.00%	315	12
31/Out/00	2	5.15%	146.18%	18	19
01/Nov/00	2	6.48%	137.08%	346	20
06/Nov/00	2	5.94%	146.08%	235	18
07/Nov/00	2	5.56%	138.04%	254	20
08/Nov/00	5	4.93%	11.51%	446	22
09/Nov/00	2	8.38%	139.13%	308	19
10/Nov/00	3	5.24%	150.00%	5.216	11
13/Nov/00	2	10.41%	132.63%	402	19
14/Nov/00	3	4.89%	150.00%	339	13
17/Nov/00	3	6.03%	10.00%	409	14
20/Nov/00	3	5.95%	10.00%	321	14
21/Nov/00	4	6.57%	139.49%	364	10
22/Nov/00	4	5.77%	150.00%	476	12
23/Nov/00	3	5.89%	126.76%	281	11
28/Nov/00	8	9.43%	150.00%	14.475	10
29/Nov/00	3	8.32%	150.00%	2.192	11
30/Nov/00	3	9.79%	150.00%	19.607	10
01/Dez/00	3	10.58%	150.00%	24.157	10
04/Dez/00	3	10.09%	150.00%	27.830	10
05/Dez/00	2	6.77%	10.00%	100	15
06/Dez/00	5	9.26%	150.00%	52.172	10
08/Dez/00	3	6.82%	150.00%	539	12
11/Dez/00	2	4.81%	145.43%	2.584	18
12/Dez/00	4	3.89%	150.00%	5.078	12
14/Dez/00	2	15.41%	107.89%	67	21
15/Dez/00	7	3.79%	150.00%	3.753	14
18/Dez/00	3	3.54%	150.00%	803	13
19/Dez/00	2	2.54%	147.44%	929	12
20/Dez/00	6	2.47%	150.00%	1.853	14
21/Dez/00	6	3.10%	150.00%	1.033	13
22/Dez/00	3	2.87%	146.96%	1.196	11
27/Dez/00	2	3.70%	141.35%	384	19
03/Jan/01	3	4.16%	145.77%	524	10
04/Jan/01	5	3.46%	28.78%	3.854	14
05/Jan/01	6	3.30%	35.89%	3.912	14
08/Jan/01	2	4.45%	145.83%	226	11
09/Jan/01	2	3.18%	150.00%	231	12
10/Jan/01	3	3.46%	150.00%	1.742	12
11/Jan/01	5	3.64%	150.00%	1.936	12
12/Jan/01	5	3.34%	150.00%	1.707	12
15/Jan/01	6	3.44%	150.00%	1.419	12
16/Jan/01	2	3.43%	145.74%	589	20
17/Jan/01	4	3.05%	146.96%	3.571	10
18/Jan/01	6	2.30%	148.06%	7.031	19
19/Jan/01	4	2.68%	150.00%	993	13
22/Jan/01	6	2.49%	150.00%	7.178	12
23/Jan/01	5	2.57%	150.00%	6.279	13
24/Jan/01	3	2.31%	147.68%	5.159	11
26/Jan/01	3	2.41%	147.48%	3.282	12

Figura A.2: Continuação

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
29/Jan/01	5	2.52%	150.00%	5.479	14
30/Jan/01	7	1.95%	150.00%	4.015	14
31/Jan/01	9	1.80%	148.66%	3.813	12
01/Fev/01	8	1.12%	149.00%	6.001	17
05/Fev/01	6	1.62%	147.71%	6.984	21
06/Fev/01	7	2.15%	147.16%	13.487	20
07/Fev/01	8	2.73%	146.49%	12.251	19
08/Fev/01	4	1.99%	147.82%	4.301	18
09/Fev/01	4	2.50%	147.62%	8.150	12
12/Fev/01	3	1.74%	148.23%	3.344	11
13/Fev/01	5	2.11%	147.15%	3.858	20
14/Fev/01	3	2.22%	148.55%	3.673	19
15/Fev/01	5	2.39%	147.51%	11.323	12
16/Fev/01	8	2.29%	150.00%	7.680	13
19/Fev/01	8	2.54%	150.00%	11.402	12
20/Fev/01	2	0.24%	149.60%	1.218	9
21/Fev/01	3	2.46%	147.88%	3.598	19
22/Fev/01	3	3.59%	147.28%	6.674	19
23/Fev/01	2	2.83%	149.93%	2.595	19
28/Fev/01	2	2.52%	143.67%	3.577	17
02/Mar/01	2	2.38%	147.81%	2.700	10
06/Mar/01	2	2.45%	147.88%	2.708	18
07/Mar/01	2	2.72%	145.08%	2.387	18
12/Mar/01	4	2.80%	146.85%	7.642	11
13/Mar/01	6	2.78%	150.00%	10.878	12
14/Mar/01	4	4.56%	143.04%	8.996	17
15/Mar/01	4	1.73%	148.65%	153.501	16
16/Mar/01	5	11.33%	100.49%	1.217	10
20/Mar/01	5	7.60%	150.00%	4.041	11
21/Mar/01	5	8.85%	10.00%	7.154	11
22/Mar/01	7	0.95%	149.10%	825.593	5
23/Mar/01	5	15.86%	136.05%	144.312	7
26/Mar/01	4	13.12%	10.00%	9.368	12
27/Mar/01	4	9.13%	137.91%	4.334	17
28/Mar/01	4	6.14%	149.98%	10.859	11
29/Mar/01	5	3.34%	146.76%	198.352	12
30/Mar/01	3	17.68%	149.97%	1.918	10
02/Abr/01	4	20.72%	128.27%	22.589	17
03/Abr/01	2	15.18%	135.49%	222	17
04/Abr/01	4	4.90%	144.69%	5.148	17
05/Abr/01	4	10.81%	141.20%	4.071	17
06/Abr/01	5	7.39%	132.37%	1.969	20
09/Abr/01	3	12.73%	135.44%	2.468	18
10/Abr/01	4	11.44%	150.00%	7.260	10
12/Abr/01	4	9.46%	140.58%	613	9
18/Abr/01	3	1.05%	146.48%	12.206	12
20/Abr/01	3	22.41%	130.47%	756	15
23/Abr/01	2	16.15%	137.82%	186	17
24/Abr/01	3	3.00%	145.27%	11.192	7
26/Abr/01	4	2.44%	146.61%	2.740	15
27/Abr/01	3	0.59%	149.41%	7.006	6
30/Abr/01	2	1.08%	147.84%	21.229	6
02/Mai/01	5	14.40%	150.00%	2.519	11
04/Mai/01	3	10.91%	10.00%	2.482	12
07/Mai/01	4	1.31%	147.38%	21.697	7
08/Mai/01	6	10.09%	10.00%	2.905	14
09/Mai/01	3	12.79%	150.00%	9.834	11
10/Mai/01	5	12.89%	150.00%	1.681	12
11/Mai/01	6	9.12%	10.00%	45.399	11
14/Mai/01	6	10.84%	10.00%	4.218	13
15/Mai/01	5	13.71%	150.00%	4.191	11
16/Mai/01	7	11.27%	10.00%	18.929	13
17/Mai/01	7	8.85%	10.00%	24.302	12
18/Mai/01	5	10.06%	10.00%	23.093	12
21/Mai/01	2	3.04%	146.96%	1	9
22/Mai/01	8	8.17%	10.00%	18.113	13
23/Mai/01	3	0.82%	149.00%	10.634	7
24/Mai/01	3	6.70%	148.85%	542	18
25/Mai/01	2	0.76%	149.24%	76	7
28/Mai/01	7	3.59%	147.21%	14.498	15
29/Mai/01	10	5.25%	10.00%	50.646	12
30/Mai/01	4	10.22%	10.00%	7.717	12
31/Mai/01	4	0.97%	149.06%	31.978	6
01/Jun/01	2	12.93%	143.92%	162	16
04/Jun/01	4	2.66%	147.83%	19.375	16
05/Jun/01	5	4.16%	147.81%	15.797	13
06/Jun/01	5	0.86%	149.19%	5.372	7
07/Jun/01	2	4.97%	145.17%	1.600	9
08/Jun/01	2	12.27%	137.79%	100	8
12/Jun/01	2	37.31%	111.27%	115	5

Figura A.3: Continuação

Data	N° de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à		Iterações
			média (μ)	Resíduos ao quadrado	
19/Jun/01	4	3.70%	146.29%	5.654	17
20/Jun/01	3	5.48%	150.00%	968	12
21/Jun/01	3	5.20%	150.00%	2.388	12
22/Jun/01	3	3.61%	145.16%	10.178	13
26/Jun/01	5	1.21%	148.79%	23.677	8
27/Jun/01	6	0.81%	149.20%	63.700	6
04/Jul/01	2	2.50%	146.17%	16.002	6
05/Jul/01	2	3.87%	143.03%	1.077	12
06/Jul/01	3	21.51%	130.99%	14.365	7
10/Jul/01	2	3.14%	145.00%	65.606	5
11/Jul/01	4	11.90%	137.78%	173.449	14
12/Jul/01	2	2.23%	147.80%	97.719	4
13/Jul/01	3	13.23%	134.94%	819	18
16/Jul/01	2	30.23%	150.00%	18	11
17/Jul/01	2	12.16%	138.17%	1.072	16
19/Jul/01	4	11.82%	135.45%	91.566	14
20/Jul/01	4	11.66%	140.23%	22.032	20
23/Jul/01	6	14.14%	136.55%	9.629	18
24/Jul/01	2	2.33%	145.77%	57.687	5
25/Jul/01	4	17.16%	131.76%	13.070	15
26/Jul/01	4	15.97%	133.72%	13.657	7
27/Jul/01	3	19.08%	136.23%	25.249	17
30/Jul/01	4	24.54%	122.85%	5.309	17
31/Jul/01	4	21.00%	131.63%	20.458	16
01/Ago/01	2	25.00%	125.21%	5.119	6
03/Ago/01	3	25.78%	121.84%	14.747	14
08/Ago/01	3	21.34%	136.04%	4.377	17
07/Ago/01	4	24.04%	128.66%	11.889	16
09/Ago/01	5	13.95%	136.54%	10.522	17
10/Ago/01	5	12.64%	150.00%	5.245	11
13/Ago/01	2	12.09%	137.91%	1	9
14/Ago/01	3	18.34%	130.30%	8.289	8
15/Ago/01	5	9.42%	150.00%	34.694	11
16/Ago/01	2	11.58%	138.25%	2.898	10
17/Ago/01	4	10.46%	140.51%	3.873	11
20/Ago/01	4	11.57%	138.02%	4.834	18
21/Ago/01	3	6.33%	10.81%	10.840	14
22/Ago/01	6	11.71%	150.00%	3.313	11
24/Ago/01	7	12.68%	150.00%	10.837	11
27/Ago/01	8	7.75%	150.00%	29.322	10
28/Ago/01	8	10.38%	150.00%	16.629	11
29/Ago/01	7	10.03%	150.00%	54.951	10
30/Ago/01	8	12.33%	78.71%	58.133	10
31/Ago/01	5	11.00%	150.00%	48.177	11
03/Set/01	3	11.58%	140.43%	54.297	16
04/Set/01	8	12.20%	10.00%	63.587	13
05/Set/01	4	12.19%	136.10%	78.366	15
06/Set/01	3	10.90%	139.69%	31.492	16
10/Set/01	2	14.25%	135.83%	7.186	15
12/Set/01	3	13.43%	136.72%	122	18
14/Set/01	5	13.33%	150.00%	43.948	10
17/Set/01	8	13.43%	150.00%	288.815	10
18/Set/01	6	14.37%	150.00%	81.921	10
19/Set/01	2	8.59%	149.57%	5.552	9
20/Set/01	4	9.34%	141.03%	93.439	8
21/Set/01	9	8.23%	150.00%	168.095	9
24/Set/01	5	15.08%	150.00%	21.893	10
25/Set/01	7	14.04%	150.00%	27.664	10
26/Set/01	5	14.16%	140.56%	55.483	15
28/Set/01	7	9.15%	150.00%	24.472	11
01/Out/01	2	11.76%	138.62%	4.743	7
02/Out/01	3	12.36%	137.43%	15.693	17
03/Out/01	6	8.20%	150.00%	18.596	10
04/Out/01	4	12.16%	10.00%	23.152	12
05/Out/01	4	11.93%	10.00%	5.110	13
08/Out/01	3	12.49%	137.24%	8.136	7
09/Out/01	6	13.10%	121.83%	16.643	9
10/Out/01	6	10.79%	10.00%	20.197	12
11/Out/01	3	12.13%	137.29%	4.700	16
15/Out/01	7	14.12%	117.02%	11.441	9
16/Out/01	5	11.94%	10.00%	8.785	12
17/Out/01	5	12.96%	84.54%	7.887	11
18/Out/01	5	7.88%	142.42%	41.795	8
19/Out/01	5	13.37%	150.00%	5.942	11
22/Out/01	8	10.75%	10.00%	70.806	13
23/Out/01	6	9.18%	10.00%	19.237	14
24/Out/01	3	9.75%	139.22%	3.143	17
25/Out/01	6	11.29%	92.78%	17.407	10
26/Out/01	5	10.53%	150.00%	35.145	11
29/Out/01	4	8.68%	150.00%	13.214	11

Figura A.4: Continuação

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (α)	Resíduos ao quadrado	Iterações
30/Out/01	6	9.86%	40.87%	11.248	12
31/Out/01	8	10.71%	150.00%	43.728	11
01/Nov/01	3	14.65%	135.89%	4.411	9
05/Nov/01	5	10.87%	139.58%	37.567	16
06/Nov/01	6	9.85%	150.00%	15.088	11
07/Nov/01	7	9.37%	140.65%	88.594	10
08/Nov/01	5	8.79%	150.00%	23.043	11
09/Nov/01	7	9.56%	150.00%	70.619	11
12/Nov/01	4	8.98%	150.00%	35.749	11
13/Nov/01	8	7.76%	150.00%	69.475	12
14/Nov/01	6	7.03%	150.00%	35.883	11
16/Nov/01	3	12.77%	138.66%	6.244	10
19/Nov/01	9	9.56%	150.00%	64.011	12
20/Nov/01	10	6.65%	149.99%	128.397	11
21/Nov/01	8	7.92%	131.77%	33.313	12
22/Nov/01	4	6.98%	150.00%	31.981	12
23/Nov/01	4	5.40%	150.00%	3.565	12
26/Nov/01	7	4.08%	150.00%	91.133	12
27/Nov/01	9	2.80%	149.57%	309.239	32
28/Nov/01	9	7.92%	149.99%	108.075	11
29/Nov/01	6	3.59%	148.56%	435.314	26
30/Nov/01	9	9.97%	150.00%	21.755	11
03/Dez/01	8	4.52%	150.00%	86.204	11
04/Dez/01	6	2.51%	147.71%	139.780	17
05/Dez/01	6	3.26%	150.00%	84.459	12
06/Dez/01	4	6.12%	141.04%	25.945	19
07/Dez/01	2	26.81%	122.81%	92	7
10/Dez/01	4	6.84%	142.82%	35.679	13
11/Dez/01	7	0.89%	149.30%	372.573	16
12/Dez/01	6	2.62%	150.00%	90.698	13
13/Dez/01	3	5.79%	138.59%	6.318	19
14/Dez/01	5	4.95%	150.00%	32.054	12
17/Dez/01	6	6.80%	128.38%	25.878	11
18/Dez/01	7	6.03%	10.00%	138.798	15
19/Dez/01	8	7.09%	143.19%	18.576	11
20/Dez/01	5	6.43%	10.00%	36.895	13
21/Dez/01	6	7.08%	10.00%	27.143	14
26/Dez/01	5	7.63%	142.53%	15.380	10
27/Dez/01	6	8.35%	141.75%	2.091	9
28/Dez/01	2	6.37%	143.54%	9.886	12

Figura A.5: Continuação

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia e valido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: nenhum
 Função Objetivo: $[\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Média	4	14.648%	129.549%	2.87E+00	8
Desvio-padrão	2	11.354%	42.299%	6.78E+00	3
Min	2	0.031%	10.000%	5.24E-11	1
Q1	3	6.702%	136.715%	1.20E-01	6
Mediana	4	11.809%	149.945%	7.68E-01	7
Q3	5	20.412%	150.000%	2.91E+00	8
Max	10	65.537%	150.000%	5.91E+01	26

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
03/Jan/00	2	50.00%	100.00%	5.49E+01	1
05/Jan/00	3	50.00%	100.00%	5.91E+01	1
06/Jan/00	3	50.00%	100.00%	5.52E+01	1
10/Jan/00	2	7.72%	142.28%	6.58E+00	6
13/Jan/00	2	8.99%	10.00%	1.22E-01	9
14/Jan/00	4	7.65%	142.54%	5.47E+00	6
19/Jan/00	3	7.60%	142.01%	1.60E-01	6
20/Jan/00	4	6.76%	10.00%	1.70E-01	11
21/Jan/00	3	7.36%	116.91%	3.21E+00	7
26/Jan/00	3	7.83%	10.00%	2.02E+00	8
27/Jan/00	2	7.24%	100.12%	5.24E-11	7
28/Jan/00	3	6.89%	26.58%	3.91E-02	8
31/Jan/00	2	8.88%	150.00%	1.84E-02	7
01/Fev/00	2	9.13%	150.00%	3.81E-02	7
02/Fev/00	2	8.86%	150.00%	5.80E-02	7
03/Fev/00	2	8.59%	150.00%	6.54E-02	7
04/Fev/00	2	8.98%	150.00%	9.84E-02	7
08/Fev/00	3	8.44%	150.00%	9.29E-01	7
09/Fev/00	3	5.27%	10.00%	5.40E-01	9
10/Fev/00	2	8.99%	150.00%	7.70E-01	7
15/Fev/00	4	7.55%	142.45%	5.31E+00	5
17/Fev/00	3	3.25%	146.53%	4.39E+00	26
18/Fev/00	3	8.08%	142.42%	7.12E+00	21
23/Fev/00	3	10.37%	150.00%	2.35E+00	8
24/Fev/00	2	5.13%	145.90%	1.05E-02	9
25/Fev/00	2	6.78%	142.97%	1.08E-01	6
28/Fev/00	4	13.06%	62.28%	3.29E+00	15
10/Mar/00	3	7.22%	149.80%	3.92E+00	8
15/Mar/00	5	6.49%	150.00%	2.90E+00	7
16/Mar/00	4	6.32%	150.00%	2.30E+00	7
17/Mar/00	4	6.40%	150.00%	2.61E+00	7
23/Mar/00	2	5.33%	150.00%	5.21E-01	7
27/Mar/00	3	7.71%	150.00%	2.30E+00	7
29/Mar/00	2	8.00%	150.00%	2.19E+00	6
31/Mar/00	5	6.26%	10.00%	5.74E+00	9
03/Abr/00	4	8.60%	108.22%	3.36E+00	6
04/Abr/00	2	9.15%	150.00%	2.03E+00	8
05/Abr/00	3	3.00%	10.00%	5.87E-01	9
06/Abr/00	3	3.11%	10.00%	1.03E+00	9
07/Abr/00	5	9.53%	150.00%	9.00E+00	8
13/Abr/00	3	4.10%	10.00%	2.49E-01	8
14/Abr/00	3	5.60%	10.00%	5.93E-02	8
17/Abr/00	2	4.48%	148.00%	4.04E-02	6
18/Abr/00	3	5.76%	16.84%	2.01E-02	10
20/Abr/00	3	6.36%	64.90%	4.26E-02	7
24/Abr/00	3	5.50%	10.00%	3.85E-02	9
26/Abr/00	3	7.54%	150.00%	6.08E-02	8
28/Abr/00	3	7.73%	150.00%	5.63E-02	7
02/Mai/00	3	7.85%	150.00%	4.52E-02	7
05/Mai/00	3	9.67%	150.00%	3.27E-02	7
09/Mai/00	4	17.14%	150.00%	1.70E+00	7
10/Mai/00	3	10.90%	150.00%	3.08E-01	7
15/Mai/00	2	19.32%	132.31%	1.57E+00	14
17/Mai/00	3	11.08%	150.00%	3.67E-01	7
18/Mai/00	3	11.20%	150.00%	4.53E-01	7
19/Mai/00	3	11.79%	150.00%	4.00E-01	7
22/Mai/00	2	28.97%	150.00%	1.47E+00	6
02/Jun/00	2	36.14%	150.00%	6.99E+00	6
13/Jun/00	4	25.03%	150.00%	3.05E+00	6

Figura A.6: Calibração com aplicação do log aos prêmios

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
14/Jun/00	2	11.15%	143.68%	3.95E-01	13
15/Jun/00	7	10.77%	150.00%	1.24E+01	13
20/Jun/00	3	15.46%	10.00%	4.29E+00	8
21/Jun/00	2	9.11%	150.00%	8.17E-01	7
28/Jun/00	4	10.13%	140.98%	4.34E+00	5
14/Jul/00	8	9.75%	150.00%	2.34E+00	7
20/Jul/00	3	11.28%	138.61%	8.39E-01	5
27/Jul/00	2	5.13%	145.85%	8.98E-03	11
31/Jul/00	4	12.98%	150.00%	1.79E+00	7
01/Ago/00	4	12.69%	150.00%	4.50E+00	7
03/Ago/00	3	27.40%	10.00%	6.44E+00	7
07/Ago/00	2	35.83%	113.43%	8.34E-01	8
08/Ago/00	2	4.04%	146.34%	1.87E-02	9
09/Ago/00	2	36.33%	113.80%	5.92E-01	5
10/Ago/00	2	3.53%	144.66%	1.82E-02	7
18/Ago/00	4	6.49%	150.00%	1.47E+00	8
21/Ago/00	2	2.84%	148.66%	1.58E-01	15
24/Ago/00	7	20.65%	10.00%	5.80E+01	9
25/Ago/00	2	3.61%	144.26%	5.02E-02	6
28/Ago/00	2	3.45%	147.74%	5.91E-02	6
29/Ago/00	2	3.96%	142.64%	6.44E-02	6
30/Ago/00	2	35.62%	113.37%	1.64E-01	12
31/Ago/00	3	3.29%	10.00%	6.83E-02	11
01/Set/00	2	42.03%	150.00%	6.29E+00	6
04/Set/00	3	3.50%	10.00%	5.52E-02	9
12/Set/00	3	3.83%	68.34%	9.40E-02	9
29/Set/00	2	4.17%	150.00%	2.26E-01	8
24/Out/00	2	3.90%	140.13%	1.20E-01	16
25/Out/00	5	5.28%	150.00%	8.82E-01	7
26/Out/00	2	4.36%	147.17%	5.35E-02	8
27/Out/00	2	5.25%	142.19%	5.95E-02	6
30/Out/00	4	8.02%	150.00%	1.13E+00	8
31/Out/00	2	6.85%	146.47%	4.36E-01	15
01/Nov/00	2	6.84%	136.56%	5.39E-02	8
06/Nov/00	2	6.29%	137.19%	4.32E-02	14
07/Nov/00	2	6.00%	143.70%	4.38E-02	6
08/Nov/00	5	3.81%	10.00%	3.48E+00	18
09/Nov/00	2	8.75%	144.22%	2.08E-02	6
10/Nov/00	3	8.22%	150.00%	3.58E-01	8
13/Nov/00	2	10.88%	142.48%	3.84E-02	11
14/Nov/00	3	5.87%	150.00%	2.07E-01	7
17/Nov/00	3	6.27%	33.13%	2.01E-01	9
20/Nov/00	3	6.07%	19.97%	2.67E-01	10
21/Nov/00	4	6.77%	150.00%	3.18E-01	9
22/Nov/00	4	7.21%	150.00%	5.97E-01	7
23/Nov/00	3	7.13%	150.00%	3.77E-01	7
28/Nov/00	8	9.36%	82.56%	8.21E+00	8
29/Nov/00	3	9.18%	150.00%	7.48E-02	7
30/Nov/00	3	12.20%	150.00%	2.90E-01	7
01/Dez/00	3	13.34%	150.00%	3.41E-01	7
04/Dez/00	3	13.20%	150.00%	4.48E-01	7
05/Dez/00	2	6.68%	10.00%	9.26E-04	9
06/Dez/00	5	14.16%	150.00%	1.97E+00	7
08/Dez/00	3	7.61%	150.00%	1.77E-01	7
11/Dez/00	2	5.93%	149.93%	1.02E-01	10
12/Dez/00	4	6.38%	150.00%	6.17E-01	8
14/Dez/00	2	21.35%	129.77%	8.34E-01	15
15/Dez/00	7	5.50%	150.00%	1.19E+01	11
18/Dez/00	3	4.48%	25.86%	2.31E-01	10
19/Dez/00	2	5.02%	144.88%	7.67E-01	6
20/Dez/00	6	5.84%	150.00%	1.15E+01	9
21/Dez/00	6	6.39%	150.00%	1.29E+01	8
22/Dez/00	3	5.25%	138.59%	1.11E+00	10
27/Dez/00	2	3.88%	145.76%	5.05E-02	6
03/Jan/01	3	6.32%	144.99%	1.18E+00	14
04/Jan/01	5	5.69%	141.86%	1.30E+00	6
05/Jan/01	6	6.01%	150.00%	2.43E+00	8
08/Jan/01	2	6.75%	143.68%	9.13E-01	5
09/Jan/01	2	7.39%	150.00%	7.36E-01	7
10/Jan/01	3	7.51%	150.00%	1.11E+00	8
11/Jan/01	5	7.12%	150.00%	4.04E+00	7
12/Jan/01	5	7.11%	150.00%	4.16E+00	6
15/Jan/01	6	7.40%	150.00%	9.35E+00	10
16/Jan/01	2	3.48%	146.12%	1.37E-02	7
17/Jan/01	4	7.12%	150.00%	3.60E+00	7
18/Jan/01	6	2.72%	149.55%	2.05E+00	8
19/Jan/01	4	7.12%	150.00%	5.24E+00	7
22/Jan/01	6	6.72%	150.00%	7.69E+00	9
23/Jan/01	5	4.13%	150.00%	1.90E+00	8
24/Jan/01	3	2.95%	147.23%	4.97E-01	7
26/Jan/01	3	3.01%	147.56%	4.80E-01	7

Figura A.7: Continuação

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (α)	Resíduos ao quadrado	Iterações
29/Jan/01	5	4.89%	150.00%	6.14E+00	10
30/Jan/01	7	3.94%	150.00%	1.01E+01	9
31/Jan/01	9	4.65%	150.00%	1.97E+01	11
01/Fev/01	8	5.00%	150.00%	1.58E+01	8
05/Fev/01	6	9.78%	150.00%	1.37E+01	7
06/Fev/01	7	3.34%	148.63%	6.99E+00	13
07/Fev/01	8	3.74%	149.96%	1.35E+01	11
08/Fev/01	4	11.92%	150.00%	9.63E+00	7
09/Fev/01	4	3.53%	145.66%	8.45E-01	6
12/Fev/01	3	2.38%	147.49%	4.04E-01	7
13/Fev/01	5	2.55%	149.87%	3.56E+00	9
14/Fev/01	3	2.80%	147.24%	3.40E-01	7
15/Fev/01	5	3.61%	146.44%	4.15E+00	12
16/Fev/01	8	7.44%	150.00%	1.03E+01	9
19/Fev/01	8	7.91%	150.00%	1.09E+01	9
20/Fev/01	2	19.61%	150.00%	2.86E+00	7
21/Fev/01	3	2.88%	147.10%	7.80E-02	7
22/Fev/01	3	4.26%	146.09%	2.31E-01	7
23/Fev/01	2	3.20%	147.01%	1.03E-01	7
28/Fev/01	2	2.96%	146.34%	1.33E-01	7
02/Mar/01	2	2.87%	146.35%	1.96E-01	7
06/Mar/01	2	2.96%	146.96%	1.98E-01	7
07/Mar/01	2	3.21%	147.07%	1.69E-01	7
12/Mar/01	4	8.84%	150.00%	4.99E+00	7
13/Mar/01	6	5.34%	150.00%	5.31E+00	8
14/Mar/01	4	5.46%	144.66%	1.80E-01	7
15/Mar/01	4	2.14%	147.51%	1.09E+00	13
16/Mar/01	5	12.08%	150.00%	1.96E+00	9
20/Mar/01	5	14.73%	150.00%	2.30E+00	7
21/Mar/01	5	5.82%	10.00%	2.27E-01	9
22/Mar/01	7	0.92%	149.48%	5.83E-01	5
23/Mar/01	5	16.22%	134.46%	7.18E-02	6
26/Mar/01	4	11.60%	10.00%	1.31E-02	9
27/Mar/01	4	9.16%	140.84%	9.98E-03	10
28/Mar/01	4	34.77%	150.00%	2.65E+00	6
29/Mar/01	5	21.27%	150.00%	9.94E-01	7
30/Mar/01	3	43.13%	150.00%	5.81E-01	6
02/Abr/01	4	21.12%	131.04%	2.16E-02	7
03/Abr/01	2	15.14%	134.86%	2.00E-04	6
04/Abr/01	4	8.20%	141.60%	2.11E-02	5
05/Abr/01	4	54.75%	150.00%	3.12E+00	6
06/Abr/01	5	56.97%	150.00%	5.54E+00	7
09/Abr/01	3	13.01%	138.36%	8.67E-03	6
10/Abr/01	4	25.81%	150.00%	1.10E+00	7
12/Abr/01	4	9.35%	140.64%	1.53E-03	7
18/Abr/01	3	27.83%	150.00%	1.49E+00	6
20/Abr/01	3	22.22%	127.64%	7.69E+00	6
23/Abr/01	2	15.95%	133.92%	1.32E-04	7
24/Abr/01	3	29.91%	150.00%	1.33E-01	6
26/Abr/01	4	37.89%	150.00%	1.07E+00	6
27/Abr/01	3	2.02%	147.98%	5.04E-01	5
30/Abr/01	2	0.10%	149.80%	6.80E-02	5
02/Mai/01	5	16.60%	150.00%	1.09E-01	7
04/Mai/01	3	10.94%	10.00%	7.22E-03	9
07/Mai/01	4	2.02%	148.43%	1.16E-01	8
08/Mai/01	6	10.15%	10.00%	5.03E-01	14
09/Mai/01	3	12.83%	150.00%	3.32E-02	8
10/Mai/01	5	20.79%	150.00%	2.11E+00	7
11/Mai/01	6	20.52%	150.00%	2.76E+00	8
14/Mai/01	6	20.62%	150.00%	9.28E-01	7
15/Mai/01	5	13.95%	139.17%	1.75E-02	6
16/Mai/01	7	22.53%	150.00%	2.04E+00	7
17/Mai/01	7	23.10%	150.00%	3.82E+00	6
18/Mai/01	5	22.81%	150.00%	4.57E+00	6
21/Mai/01	2	5.07%	144.93%	4.63E-06	8
22/Mai/01	8	24.07%	150.00%	5.24E+00	6
23/Mai/01	3	0.03%	149.97%	6.56E-01	6
24/Mai/01	3	22.68%	10.00%	1.25E+00	7
25/Mai/01	2	1.90%	148.10%	4.82E-01	6
28/Mai/01	7	19.14%	10.00%	1.34E+00	8
29/Mai/01	10	25.96%	150.00%	9.02E+00	7
30/Mai/01	4	11.41%	10.00%	3.12E-01	7
31/Mai/01	4	20.29%	10.00%	8.88E-01	9
01/Jun/01	2	13.76%	146.34%	4.39E-03	7
04/Jun/01	4	22.24%	10.21%	1.17E+00	18
05/Jun/01	5	24.53%	150.00%	3.66E+00	6
06/Jun/01	5	31.81%	150.00%	1.35E+00	7
07/Jun/01	2	28.15%	150.00%	1.38E+00	7
08/Jun/01	2	34.22%	150.00%	5.71E+00	7
12/Jun/01	2	35.77%	108.39%	4.12E-03	7
19/Jun/01	4	27.79%	22.85%	4.93E-01	16

Figura A.8: Continuação

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
	observações		média (α)	quadrado	
20/Jun/01	3	23.02%	150.00%	2.98E-01	6
21/Jun/01	3	27.90%	150.00%	7.16E-01	6
22/Jun/01	3	34.58%	150.00%	1.75E+00	7
26/Jun/01	5	29.90%	150.00%	8.33E+00	7
27/Jun/01	6	32.99%	150.00%	6.90E+00	6
04/Jul/01	2	32.41%	150.00%	1.66E-01	6
05/Jul/01	2	31.52%	150.00%	4.59E-02	6
06/Jul/01	3	31.34%	150.00%	5.06E-02	6
10/Jul/01	2	30.77%	150.00%	7.75E-02	6
11/Jul/01	4	31.16%	150.00%	2.92E-01	7
12/Jul/01	2	32.11%	150.00%	7.39E-02	6
13/Jul/01	3	14.52%	135.54%	2.00E-02	5
16/Jul/01	2	37.43%	150.00%	5.51E-03	6
17/Jul/01	2	12.56%	137.38%	1.47E-03	6
19/Jul/01	4	43.96%	150.00%	1.30E+00	6
20/Jul/01	4	19.10%	149.35%	3.56E+00	9
23/Jul/01	6	18.21%	143.54%	3.32E+00	8
24/Jul/01	2	53.56%	150.00%	5.54E-01	6
25/Jul/01	4	19.76%	130.68%	5.80E+00	5
26/Jul/01	4	17.26%	133.02%	4.55E-02	5
27/Jul/01	3	22.14%	127.95%	1.20E-01	5
30/Jul/01	4	65.54%	150.00%	3.40E+00	9
31/Jul/01	4	24.15%	132.20%	5.88E-01	6
01/Ago/01	2	26.28%	122.81%	3.88E-02	5
03/Ago/01	3	28.68%	121.03%	7.89E-02	4
06/Ago/01	3	20.38%	129.27%	6.09E-02	5
07/Ago/01	4	27.42%	125.18%	5.84E-01	8
09/Ago/01	5	21.93%	127.71%	8.29E-01	5
10/Ago/01	5	15.75%	150.00%	5.48E-01	7
13/Ago/01	2	12.10%	137.91%	4.80E-01	7
14/Ago/01	3	24.49%	125.92%	2.78E-01	5
15/Ago/01	5	26.45%	150.00%	8.46E-01	7
16/Ago/01	2	16.81%	134.00%	2.28E-01	4
17/Ago/01	4	20.73%	128.91%	1.03E+00	7
20/Ago/01	4	23.08%	150.00%	7.87E-01	7
21/Ago/01	3	6.75%	10.94%	8.52E-03	12
22/Ago/01	6	24.30%	150.00%	2.13E+00	7
24/Ago/01	7	26.45%	150.00%	3.56E+00	6
27/Ago/01	8	18.28%	150.00%	2.23E+00	7
28/Ago/01	8	26.80%	150.00%	6.26E+00	5
29/Ago/01	7	12.61%	150.00%	2.85E-01	7
30/Ago/01	8	20.77%	150.00%	2.49E+00	7
31/Ago/01	5	23.62%	150.00%	1.99E+00	7
03/Set/01	3	12.77%	137.19%	6.31E-02	6
04/Set/01	8	25.61%	150.00%	4.99E+00	6
05/Set/01	4	14.18%	135.76%	1.72E-01	6
06/Set/01	3	12.05%	137.98%	5.28E-02	6
10/Set/01	2	14.68%	136.87%	1.24E-02	6
12/Set/01	3	13.36%	136.67%	4.25E-04	6
14/Set/01	5	18.45%	150.00%	2.32E-01	7
17/Set/01	8	49.62%	150.00%	1.52E+01	6
18/Set/01	6	62.96%	150.00%	1.32E+01	9
19/Set/01	2	9.16%	140.94%	1.92E-02	6
20/Set/01	4	12.17%	137.90%	2.56E-01	6
21/Set/01	9	21.02%	150.00%	2.34E+00	6
24/Set/01	5	22.34%	150.00%	4.87E-01	6
25/Set/01	7	17.88%	150.00%	2.84E+00	7
26/Set/01	5	13.00%	136.89%	9.14E-01	6
28/Set/01	7	21.63%	150.00%	5.66E+00	6
01/Out/01	2	12.44%	137.89%	1.85E-02	6
02/Out/01	3	14.06%	135.98%	9.51E-02	6
03/Out/01	6	23.95%	150.00%	4.24E+00	6
04/Out/01	4	12.32%	10.00%	6.58E-02	10
05/Out/01	4	12.27%	17.80%	1.84E-02	10
08/Out/01	3	13.89%	136.73%	4.38E-02	6
09/Out/01	6	30.67%	150.00%	4.31E+00	6
10/Out/01	6	14.90%	150.00%	3.21E-01	7
11/Out/01	3	13.57%	136.17%	4.84E-02	6
15/Out/01	7	38.81%	150.00%	8.49E+00	6
16/Out/01	5	14.81%	135.81%	1.92E-01	6
17/Out/01	5	15.61%	150.00%	2.44E-01	7
18/Out/01	5	16.30%	135.22%	1.37E+00	6
19/Out/01	5	15.55%	150.00%	3.14E-01	7
22/Out/01	8	10.78%	10.00%	3.44E-01	9
23/Out/01	6	15.11%	150.00%	1.02E+00	7
24/Out/01	3	15.57%	134.38%	6.27E-01	5
25/Out/01	6	20.00%	150.00%	2.68E+00	7
26/Out/01	5	12.36%	150.00%	3.34E-01	7
29/Out/01	4	13.50%	150.00%	4.36E-01	7
30/Out/01	6	11.66%	103.48%	4.47E-02	7
31/Out/01	8	13.00%	150.00%	1.10E+00	10

Figura A.9: Continuação

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
	observações		média (μ)	quadrado	
01/Nov/01	3	19.38%	129.44%	4.96E-01	8
05/Nov/01	5	12.39%	137.51%	4.25E-01	13
06/Nov/01	6	14.44%	150.00%	1.71E+00	7
07/Nov/01	7	12.61%	137.84%	9.16E-01	6
08/Nov/01	5	14.19%	150.00%	1.53E+00	7
09/Nov/01	7	18.52%	150.00%	3.97E+00	8
12/Nov/01	4	11.03%	150.00%	7.45E-01	7
13/Nov/01	8	20.34%	150.00%	9.09E+00	7
14/Nov/01	6	21.68%	150.00%	4.95E+00	6
16/Nov/01	3	22.47%	128.06%	7.98E-01	5
19/Nov/01	9	16.74%	150.00%	5.00E+00	7
20/Nov/01	10	21.74%	150.00%	1.15E+01	7
21/Nov/01	8	12.95%	150.00%	1.80E+00	7
22/Nov/01	4	14.91%	150.00%	2.43E+00	8
23/Nov/01	4	15.85%	150.00%	1.53E+00	7
26/Nov/01	7	26.84%	150.00%	1.20E+01	7
27/Nov/01	9	19.57%	150.00%	1.75E+01	25
28/Nov/01	9	28.22%	150.00%	1.15E+01	6
29/Nov/01	6	11.85%	150.00%	1.19E+00	8
30/Nov/01	9	14.69%	150.00%	1.29E+01	12
03/Dez/01	8	15.68%	150.00%	8.95E+00	25
04/Dez/01	6	18.33%	150.00%	4.14E+00	7
05/Dez/01	6	10.61%	150.00%	1.35E+00	7
06/Dez/01	4	8.15%	142.11%	2.38E-01	6
07/Dez/01	2	38.19%	117.00%	1.23E+00	13
10/Dez/01	4	13.42%	134.18%	1.51E+00	14
11/Dez/01	7	10.42%	150.00%	2.95E+00	7
12/Dez/01	6	11.96%	150.00%	2.54E+00	8
13/Dez/01	3	6.92%	144.14%	7.76E-02	6
14/Dez/01	5	8.58%	150.00%	5.47E-01	8
17/Dez/01	6	12.19%	150.00%	7.47E+00	8
18/Dez/01	7	9.61%	150.00%	7.01E-01	8
19/Dez/01	8	11.99%	143.15%	2.11E+00	9
20/Dez/01	5	8.21%	86.21%	5.60E-01	8
21/Dez/01	6	11.97%	150.00%	1.37E+00	6
26/Dez/01	5	12.31%	137.73%	8.06E-01	5
27/Dez/01	6	11.83%	138.03%	2.30E+00	5
28/Dez/01	2	11.43%	134.00%	5.97E-01	8

Figura A.10: Continuação

Apêndice B

Resultados da calibração variando a função objetivo e o critério de ponderação

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido

Amostra: 1.390 obs.

Filtro: nenhum

Peso: *moneyness*

Função Objetivo: $w * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$

Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton

Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)

restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)

restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (s)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
	observações		média (a)	quadrado	
Média	4	14.598%	129.575%	1.94E-01	7
Desvio-padrão	2	11.336%	42.054%	9.04E-01	3
Min	2	0.031%	10.000%	1.35E-11	1
Q1	3	6.614%	136.045%	1.35E-02	6
Mediana	4	11.801%	149.945%	5.01E-02	6
Q3	5	20.333%	150.000%	1.46E-01	7
Max	10	65.326%	150.000%	1.38E+01	39

Figura B.1: Calibração com a equação (6.2) e *moneyness*

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido

Amostra: 1.390 obs.

Filtro: nenhum

Peso: *vega + 1*

Função Objetivo: $w * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$

Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton

Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)

restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)

restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
	observações		média (a)	quadrado	
Média	4	8.311%	119.573%	9.78E-02	8
Desvio-padrão	2	7.155%	51.001%	8.86E-01	4
Min	2	0.113%	10.000%	5.92E-07	1
Q1	3	3.672%	128.680%	1.59E-03	6
Mediana	4	6.820%	144.430%	5.86E-03	7
Q3	5	10.477%	149.380%	2.21E-02	8
Max	10	50.000%	150.000%	1.37E+01	66

Figura B.2: Calibração com a equação (6.2) e (*vega + 1*)

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: "w₃"
 Função Objetivo: $w * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	9.543%	121.201%	1.10E-01	7
Desvio-padrão	2	7.885%	49.573%	9.31E-01	2
Min	2	0.074%	10.000%	1.16E-14	1
Q1	3	4.070%	130.368%	1.78E-03	6
Mediana	4	7.793%	145.140%	8.96E-03	7
Q3	5	12.224%	150.000%	2.93E-02	8
Max	10	50.000%	150.000%	1.46E+01	19

Figura B.3: Calibração com a equação (6.2) e "w₃"

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: nenhum
 Função Objetivo: $1/ \log(\text{mercado}+1) * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	16.883%	130.686%	3.27E-01	7
Desvio-padrão	2	13.984%	41.279%	6.42E-01	2
Min	2	0.041%	10.000%	3.78E-12	1
Q1	3	7.209%	137.310%	4.79E-03	6
Mediana	4	12.480%	150.000%	3.61E-02	6
Q3	5	23.027%	150.000%	2.31E-01	7
Max	10	81.433%	150.000%	3.91E+00	25

Figura B.4: Calibração com a equação (6.3) e sem ponderação

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: *moneyness*
 Função Objetivo: $w / \log(\text{mercado}+1) * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	16.680%	130.940%	1.94E-02	6
Desvio-padrão	2	13.529%	40.780%	5.02E-02	2
Min	2	0.041%	10.000%	9.70E-13	1
Q1	3	7.207%	137.338%	4.98E-04	5
Mediana	4	12.507%	149.970%	2.46E-03	6
Q3	5	22.915%	150.000%	1.26E-02	6
Max	10	78.357%	150.000%	5.00E-01	22

Figura B.5: Calibração com a equação (6.3) e *moneyness*

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: *vega + 1*
 Função Objetivo: $w / \log(\text{mercado}+1) * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	8.425%	121.120%	5.23E-03	6
Desvio-padrão	2	7.155%	48.427%	3.78E-02	2
Min	2	0.107%	10.000%	5.40E-08	1
Q1	3	3.729%	131.005%	6.14E-05	5
Mediana	4	6.907%	143.450%	2.41E-04	6
Q3	5	10.723%	147.943%	9.17E-04	7
Max	10	50.000%	150.000%	5.00E-01	16

Figura B.6: Calibração com a equação (6.3) e (*vega +1*)

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: "w₃"
 Função Objetivo: $w / \log(\text{mercado}+1) * [\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações			média (a)	quadrado	
Média	4	9.969%	123.490%	5.71E-03	6
Desvio-padrão	2	8.438%	47.317%	3.77E-02	2
Min	2	0.062%	10.000%	5.16E-10	1
Q1	3	4.347%	133.878%	7.30E-05	5
Mediana	4	8.105%	145.120%	4.61E-04	6
Q3	5	12.443%	149.980%	1.49E-03	7
Max	10	50.478%	150.000%	5.02E-01	19

Figura B.7: Calibração com a equação (6.3) e "w₃"

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: nenhum
 Função Objetivo: $[(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações			média (a)	quadrado	
Média	4	16.883%	130.686%	3.27E-01	7
Desvio-padrão	2	13.984%	41.279%	6.42E-01	2
Min	2	0.041%	10.000%	3.78E-12	1
Q1	3	7.209%	137.310%	4.79E-03	6
Mediana	4	12.480%	150.000%	3.61E-02	6
Q3	5	23.027%	150.000%	2.31E-01	7
Max	10	81.433%	150.000%	3.91E+00	25

Figura B.8: Calibração com a equação (6.4) e sem ponderação

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: moneyness
 Função Objetivo: $w * [(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	16.680%	130.896%	1.94E-02	6
Desvio-padrão	2	13.530%	40.780%	5.02E-02	2
Min	2	0.041%	10.000%	9.51E-13	1
Q1	3	7.207%	137.128%	4.98E-04	5
Mediana	4	12.507%	149.975%	2.46E-03	6
Q3	5	22.920%	150.000%	1.26E-02	6
Max	10	78.356%	150.000%	5.00E-01	22

Figura B.9: Calibração com a equação (6.4) e *moneyness*

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: vega + 1
 Função Objetivo: $w * [(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
observações		média (a)		quadrado	
Média	4	8.425%	121.035%	5.23E-03	6
Desvio-padrão	2	7.155%	48.373%	3.78E-02	2
Min	2	0.107%	10.000%	5.40E-08	1
Q1	3	3.710%	132.348%	6.14E-05	5
Mediana	4	6.907%	143.240%	2.41E-04	6
Q3	5	10.726%	147.910%	9.17E-04	7
Max	10	50.000%	150.000%	5.00E-01	16

Figura B.10: Calibração com a equação (6.4) e (*vega + 1*)

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 1.390 obs.
 Filtro: nenhum
 Peso: "w₃"
 Função Objetivo: $w * [(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
	observações		média (a)	quadrado	
Média	4	9.969%	123.123%	5.71E-03	6
Desvio-padrão	2	8.438%	47.637%	3.77E-02	2
Min	2	0.062%	10.000%	5.16E-10	1
Q1	3	4.345%	134.203%	7.30E-05	5
Mediana	4	8.105%	145.060%	4.61E-04	6
Q3	5	12.443%	149.973%	1.49E-03	7
Max	10	50.478%	150.000%	5.02E-01	21

Figura B.11: Calibração com a equação (6.4) e "w₃"

Apêndice C

Resultados da calibração com critério de ponderação e filtragem dos

dados

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 812 obs.
 Filtro: $\leq 100\%$
 Peso: vega + 1
 Função Objetivo: $w * ((\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1))^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
Média	2	6.478%	99.979%	9.44E-04	5
Desvio-padrão	2	3.347%	51.544%	2.01E-03	2
Min	0	1.335%	10.000%	7.17E-07	2
Q1	0	3.413%	67.294%	7.92E-05	4
Mediana	2	5.937%	122.035%	2.94E-04	5
Q3	3	9.245%	141.713%	8.94E-04	6
Max	6	14.853%	150.000%	2.22E-02	13

Figura C.1: Calibração com a equação (6.4), (vega + 1) e filtro de 100%

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 812 obs.
 Filtro: $\leq 100\%$
 Peso: " w_3 "
 Função Objetivo: $w * ((\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1))^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 50% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 500% e 150% (sigma e a)

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
Média	2	6.879%	101.594%	8.74E-04	5
Desvio-padrão	2	3.785%	51.105%	2.06E-03	1
Min	0	1.191%	10.000%	5.08E-08	3
Q1	0	3.299%	67.002%	5.33E-05	4
Mediana	2	6.301%	123.455%	3.09E-04	5
Q3	3	9.632%	149.970%	8.33E-04	6
Max	6	16.403%	150.000%	1.89E-02	12

Figura C.2: Calibração com a equação (6.4), " w_3 " e filtro de 100%

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 723 obs.
 Filtro: <= 50%
 Peso: vega + 1
 Função Objetivo: $w * ((\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1))^2$
 Algoritmo: Large scale ON - Gauss Newton
 Chute Inicial: 8% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 20% e 150% (sigma e a)

Média	2	6.536%	97.615%	1.02E-03	5
Desvio-padrão	2	3.468%	50.383%	2.29E-03	2
Min	0	1.335%	10.000%	1.21E-09	2
Q1	0	3.418%	66.511%	7.89E-05	4
Mediana	2	5.973%	116.790%	2.72E-04	5
Q3	3	9.068%	136.860%	8.77E-04	6
Max	6	19.415%	150.000%	2.22E-02	13

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao		Iterações
				média (a)	quadrado	
13/Jan/00	2	9.92%	10.00%	6.73E-05	9	
14/Jan/00	3	5.94%	112.28%	4.19E-04	4	
19/Jan/00	2	5.67%	111.07%	3.20E-04	4	
20/Jan/00	3	6.46%	10.80%	5.32E-04	4	
28/Jan/00	2	6.20%	10.00%	2.44E-04	6	
09/Fev/00	3	4.79%	10.00%	1.00E-02	5	
17/Fev/00	2	1.33%	141.84%	2.22E-02	12	
18/Fev/00	2	1.70%	139.46%	1.74E-02	11	
23/Fev/00	2	5.75%	114.22%	2.00E-04	4	
24/Fev/00	2	4.87%	119.58%	9.22E-05	4	
25/Fev/00	2	5.60%	115.04%	1.48E-04	4	
28/Fev/00	3	17.66%	23.62%	7.16E-05	7	
15/Mar/00	4	3.34%	10.03%	9.50E-05	8	
16/Mar/00	3	3.39%	10.00%	3.40E-04	7	
17/Mar/00	3	3.31%	10.00%	3.13E-04	7	
23/Mar/00	2	4.12%	150.00%	6.74E-05	6	
31/Mar/00	2	3.91%	10.00%	6.34E-03	7	
03/Abr/00	2	3.86%	10.00%	5.55E-03	7	
05/Abr/00	3	3.32%	10.00%	4.18E-03	6	
06/Abr/00	3	3.47%	10.00%	7.31E-03	9	
07/Abr/00	4	3.73%	10.00%	2.98E-03	6	
13/Abr/00	3	4.59%	10.00%	1.25E-03	8	
14/Abr/00	3	6.04%	10.00%	2.08E-04	4	
17/Abr/00	2	3.94%	122.77%	4.81E-04	5	
18/Abr/00	3	5.67%	10.03%	2.94E-05	7	
20/Abr/00	3	5.79%	10.02%	4.22E-05	7	
24/Abr/00	3	5.50%	10.10%	7.83E-05	6	
26/Abr/00	3	6.70%	150.00%	3.86E-05	5	
28/Abr/00	3	7.04%	150.00%	1.41E-05	6	
02/Mai/00	3	7.20%	147.47%	7.61E-06	5	
05/Mai/00	3	9.00%	147.95%	3.58E-06	4	
09/Mai/00	3	7.01%	150.00%	7.91E-05	5	
10/Mai/00	3	7.54%	150.00%	5.83E-05	5	
17/Mai/00	3	7.48%	150.00%	2.82E-05	5	
18/Mai/00	3	6.94%	150.00%	3.88E-05	5	
19/Mai/00	3	7.19%	150.00%	2.87E-05	5	
13/Jun/00	2	7.47%	103.30%	2.06E-05	3	
15/Jun/00	2	3.19%	129.53%	4.35E-04	5	
14/Jul/00	5	4.55%	131.88%	1.30E-04	4	
20/Jul/00	2	6.48%	113.90%	3.33E-04	4	
27/Jul/00	2	4.91%	119.34%	7.95E-05	4	
31/Jul/00	2	5.27%	117.08%	6.94E-05	4	
01/Ago/00	2	3.26%	131.88%	3.20E-04	5	
08/Ago/00	2	3.90%	130.58%	2.40E-04	6	
10/Ago/00	2	3.41%	126.19%	2.88E-04	7	
18/Ago/00	2	3.51%	125.01%	5.19E-04	5	
21/Ago/00	2	2.60%	134.95%	2.67E-03	5	
24/Ago/00	2	3.28%	139.62%	8.57E-04	6	
25/Ago/00	2	3.39%	133.20%	7.21E-04	6	
28/Ago/00	2	3.20%	132.20%	8.57E-04	5	
29/Ago/00	2	3.66%	123.32%	8.76E-04	5	
31/Ago/00	3	3.37%	10.00%	1.05E-04	6	
04/Set/00	3	3.56%	10.07%	1.27E-04	7	
12/Set/00	3	3.60%	37.31%	1.63E-04	6	
28/Set/00	2	3.69%	127.03%	5.50E-03	4	
24/Out/00	2	3.28%	128.83%	1.84E-03	5	
25/Out/00	4	3.57%	10.01%	2.02E-04	5	
26/Out/00	2	3.77%	128.14%	7.29E-04	5	
27/Out/00	2	4.56%	121.31%	6.95E-04	4	

Figura C.3: Calibração com a equação (6.4), (vega + 1) e filtro de 50%

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à		Resíduos ao	Iterações
			média (μ)	quadrado		
30/Oct/00	2	4.36%	122.61%	8.35E-04	4	
01/Nov/00	2	5.86%	113.40%	4.04E-04	3	
08/Nov/00	2	5.49%	119.89%	4.02E-04	4	
07/Nov/00	2	5.17%	118.35%	4.33E-04	4	
08/Nov/00	2	4.83%	116.50%	8.17E-04	4	
09/Nov/00	2	7.71%	101.79%	1.75E-04	2	
10/Nov/00	3	4.96%	149.98%	3.10E-04	5	
13/Nov/00	2	9.39%	89.22%	2.39E-04	4	
14/Nov/00	3	4.61%	121.46%	8.55E-06	4	
17/Nov/00	3	6.01%	10.00%	1.45E-04	4	
20/Nov/00	2	5.93%	10.01%	1.87E-04	5	
21/Nov/00	3	6.53%	136.86%	1.21E-05	5	
22/Nov/00	3	5.54%	119.27%	3.40E-05	4	
23/Nov/00	2	5.15%	20.90%	1.02E-05	5	
28/Nov/00	4	8.66%	150.00%	5.14E-04	4	
29/Nov/00	3	8.02%	150.00%	1.20E-04	4	
30/Nov/00	3	8.74%	150.00%	6.23E-04	5	
01/Dez/00	3	9.32%	150.00%	6.88E-04	5	
04/Dez/00	3	8.64%	150.00%	8.43E-04	4	
05/Dez/00	2	6.78%	10.13%	2.72E-06	6	
06/Dez/00	3	6.66%	150.00%	2.12E-03	5	
08/Dez/00	2	6.59%	150.00%	2.85E-05	6	
11/Dez/00	2	4.76%	120.28%	1.08E-03	4	
12/Dez/00	3	4.07%	145.05%	2.96E-03	5	
15/Dez/00	4	3.93%	130.37%	4.23E-03	5	
18/Dez/00	2	3.69%	127.33%	2.34E-03	4	
19/Dez/00	2	2.77%	132.56%	6.79E-03	6	
20/Dez/00	2	2.87%	132.21%	6.36E-03	5	
21/Dez/00	2	3.22%	129.79%	5.77E-03	5	
22/Dez/00	3	2.98%	131.41%	1.91E-03	5	
27/Dez/00	2	3.66%	131.74%	6.56E-04	5	
03/Jan/01	2	4.04%	124.67%	7.60E-04	4	
04/Jan/01	4	3.71%	10.00%	8.65E-04	7	
05/Jan/01	5	3.54%	10.00%	7.76E-04	7	
10/Jan/01	2	3.40%	150.00%	1.48E-04	6	
11/Jan/01	4	3.26%	82.62%	1.47E-04	6	
12/Jan/01	4	3.28%	149.91%	1.27E-04	6	
15/Jan/01	3	3.42%	150.00%	5.76E-05	6	
16/Jan/01	2	3.35%	129.17%	1.23E-04	5	
17/Jan/01	3	2.97%	130.68%	6.47E-04	5	
18/Jan/01	4	2.45%	134.92%	1.20E-03	5	
19/Jan/01	3	2.74%	150.00%	6.36E-04	5	
22/Jan/01	4	2.59%	133.70%	1.16E-03	5	
23/Jan/01	4	2.66%	132.94%	1.48E-03	5	
24/Jan/01	3	2.48%	134.40%	2.91E-03	5	
26/Jan/01	3	2.56%	134.01%	3.08E-03	4	
29/Jan/01	3	2.58%	133.97%	4.70E-03	4	
30/Jan/01	5	2.30%	150.00%	2.39E-03	5	
31/Jan/01	5	2.08%	137.12%	2.33E-03	5	
01/Fev/01	5	1.94%	137.98%	5.38E-03	5	
05/Fev/01	4	2.06%	136.91%	2.88E-03	4	
06/Fev/01	5	2.37%	135.15%	2.34E-03	4	
07/Fev/01	5	2.71%	133.06%	1.09E-03	4	
08/Fev/01	3	2.12%	136.86%	1.39E-03	5	
09/Fev/01	4	2.51%	133.34%	1.76E-03	5	
12/Fev/01	3	1.95%	137.92%	2.09E-03	5	
13/Fev/01	4	2.17%	136.48%	1.13E-03	5	
14/Fev/01	3	2.24%	136.34%	1.58E-03	5	
15/Fev/01	4	2.36%	135.22%	1.81E-03	5	
16/Fev/01	5	2.40%	139.06%	9.61E-04	5	
19/Fev/01	5	2.53%	138.17%	8.99E-04	5	
21/Fev/01	3	2.49%	134.61%	2.58E-04	5	
22/Fev/01	3	3.35%	129.08%	1.03E-03	4	
23/Fev/01	2	2.77%	132.67%	1.18E-03	5	
28/Fev/01	2	2.51%	134.05%	1.59E-03	5	
02/Mar/01	2	2.38%	134.77%	2.65E-03	5	
06/Mar/01	2	2.39%	134.57%	2.62E-03	5	
07/Mar/01	2	2.58%	133.19%	2.07E-03	5	
12/Mar/01	3	2.54%	133.28%	3.20E-03	4	
13/Mar/01	5	2.53%	150.00%	2.21E-03	5	
14/Mar/01	4	3.95%	125.31%	2.01E-04	4	
15/Mar/01	4	1.93%	139.91%	2.91E-03	9	
16/Mar/01	4	10.74%	51.87%	7.32E-06	4	
20/Mar/01	3	7.25%	104.69%	8.33E-06	3	
21/Mar/01	3	7.62%	44.89%	2.75E-05	2	
27/Mar/01	2	8.51%	96.21%	5.44E-05	2	
28/Mar/01	2	6.84%	107.27%	9.52E-05	3	
09/Abr/01	2	12.19%	68.63%	5.57E-05	4	
10/Abr/01	2	10.54%	81.26%	1.69E-04	4	
02/Mai/01	2	12.79%	64.07%	1.22E-05	5	
08/Mai/01	2	11.91%	119.38%	1.21E-09	6	

Figura C.4: Continuação

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à		Resíduos ao	Iterações
			média (a)	quadrado		
14/Mai/01	2	12.03%	89.78%	5.86E-05	5	
15/Mai/01	2	12.46%	66.53%	9.80E-05	5	
18/Mai/01	3	13.18%	149.99%	1.08E-05	6	
17/Mai/01	3	9.30%	11.15%	3.12E-04	5	
18/Mai/01	2	9.77%	10.02%	7.03E-04	6	
22/Mai/01	2	9.37%	89.93%	2.78E-04	4	
28/Mai/01	2	4.96%	145.72%	4.81E-04	13	
29/Mai/01	3	8.66%	10.00%	1.05E-03	4	
04/Jun/01	2	3.74%	124.54%	1.14E-03	8	
06/Ago/01	2	19.42%	14.39%	1.85E-04	8	
10/Ago/01	2	11.09%	68.99%	1.52E-09	4	
15/Ago/01	2	8.70%	94.75%	2.38E-05	3	
20/Ago/01	2	10.79%	78.96%	1.70E-05	4	
21/Ago/01	2	7.34%	104.11%	3.87E-05	2	
22/Ago/01	3	11.13%	105.15%	9.30E-06	4	
24/Ago/01	5	12.75%	150.00%	3.08E-05	5	
27/Ago/01	5	8.56%	150.00%	1.93E-04	3	
28/Ago/01	4	8.60%	14.34%	2.87E-05	5	
29/Ago/01	4	8.80%	35.63%	1.19E-04	3	
30/Ago/01	4	11.10%	10.00%	1.72E-04	6	
31/Ago/01	3	10.30%	82.71%	1.33E-04	3	
03/Set/01	3	10.80%	79.00%	1.79E-04	4	
04/Set/01	5	11.85%	10.00%	1.25E-04	6	
05/Set/01	4	11.26%	75.55%	2.41E-04	4	
06/Set/01	3	10.31%	82.64%	1.42E-04	4	
10/Set/01	2	13.05%	62.13%	7.35E-05	5	
12/Set/01	3	12.47%	66.47%	7.17E-07	5	
14/Set/01	3	11.86%	71.06%	9.23E-05	4	
17/Set/01	5	10.73%	150.00%	2.41E-03	5	
18/Set/01	4	12.81%	63.96%	4.18E-04	5	
19/Set/01	2	8.42%	97.04%	1.45E-04	3	
20/Set/01	3	10.18%	83.62%	5.16E-04	4	
21/Set/01	4	8.88%	150.00%	7.36E-04	5	
24/Set/01	4	14.85%	150.00%	4.41E-05	6	
25/Set/01	5	14.05%	150.00%	3.80E-05	6	
26/Set/01	4	12.98%	62.89%	2.16E-04	5	
28/Set/01	3	9.21%	150.00%	3.31E-04	4	
01/Ouv/01	2	11.19%	78.06%	1.38E-04	4	
02/Ouv/01	3	11.64%	72.73%	2.62E-04	4	
03/Ouv/01	4	8.10%	150.00%	2.07E-04	4	
04/Ouv/01	4	11.99%	10.13%	9.19E-05	6	
05/Ouv/01	4	11.90%	11.55%	2.29E-05	6	
08/Ouv/01	3	11.74%	71.92%	1.24E-04	4	
09/Ouv/01	4	12.00%	66.34%	7.13E-05	5	
10/Ouv/01	3	10.49%	10.07%	1.07E-04	5	
11/Ouv/01	2	10.88%	78.41%	7.94E-05	4	
15/Ouv/01	3	12.30%	30.66%	2.22E-05	6	
16/Ouv/01	3	11.73%	10.32%	1.31E-04	6	
17/Ouv/01	4	11.54%	13.89%	2.29E-05	7	
18/Ouv/01	2	9.18%	90.48%	8.30E-04	4	
19/Ouv/01	3	11.20%	35.91%	5.99E-06	6	
22/Ouv/01	5	10.50%	10.00%	1.56E-04	6	
23/Ouv/01	3	9.25%	14.62%	2.74E-05	6	
25/Ouv/01	4	9.96%	12.57%	2.16E-05	6	
26/Ouv/01	4	8.79%	28.38%	3.44E-04	5	
29/Ouv/01	3	8.81%	150.00%	2.92E-05	3	
30/Ouv/01	4	10.71%	101.94%	4.06E-05	4	
31/Ouv/01	5	9.68%	87.19%	1.45E-04	4	
05/Nov/01	4	9.77%	86.71%	1.31E-04	4	
06/Nov/01	4	9.19%	91.10%	9.85E-05	3	
07/Nov/01	5	8.86%	93.54%	3.93E-04	3	
08/Nov/01	3	8.54%	96.00%	3.95E-04	3	
09/Nov/01	4	9.06%	92.02%	8.33E-04	3	
12/Nov/01	3	8.29%	97.80%	4.82E-04	3	
13/Nov/01	5	7.81%	101.16%	7.56E-04	3	
14/Nov/01	3	6.96%	106.52%	5.68E-04	3	
19/Nov/01	5	9.08%	150.00%	4.68E-04	4	
20/Nov/01	6	7.05%	105.73%	3.37E-04	4	
21/Nov/01	5	7.55%	87.87%	1.14E-04	3	
22/Nov/01	2	6.95%	106.40%	2.53E-03	4	
23/Nov/01	2	5.38%	150.00%	1.62E-05	6	
26/Nov/01	4	5.04%	150.00%	5.18E-04	5	
27/Nov/01	5	4.77%	150.00%	1.33E-03	10	
28/Nov/01	4	7.30%	104.28%	3.45E-04	3	
29/Nov/01	5	4.77%	150.00%	4.63E-04	6	
30/Nov/01	4	9.09%	91.85%	4.04E-05	3	
03/Dez/01	5	5.48%	150.00%	4.96E-05	5	
04/Dez/01	4	3.28%	138.04%	4.19E-04	11	
05/Dez/01	5	4.46%	150.00%	2.66E-04	5	
06/Dez/01	4	6.38%	110.06%	2.98E-04	3	
10/Dez/01	2	6.34%	110.43%	1.80E-03	4	

Figura C.5: Continuação

Calibração das opções de IDI ao modelo Hull-White

Parâmetros

Amostra: Calibração Diária, apenas mais de 1 obs. por dia é válido
 Amostra: 723 obs.
 Filtro: <= 50%
 Peso: "w₃"
 Função Objetivo: $w \cdot [(\log(\text{mercado}+1) - \log(\text{modelo}+1)) / \log(\text{mercado}+1)]^2$
 Algoritmo: Large scale CN - Gauss Newton
 Chute Inicial: 8% e 100% (sigma e a)
 restrição inferior: 0.001% e 10% (sigma e a)
 restrição superior: 20% e 150% (sigma e a)

Média	3	6.849%	97.073%	9.05E-04	5
Desvio-padrão	1	3.792%	50.683%	2.53E-03	1
Min	2	1.191%	10.000%	1.35E-09	2
Q1	2	3.302%	66.062%	3.20E-05	4
Mediana	3	6.311%	115.750%	2.57E-04	5
Q3	4	9.285%	137.883%	7.73E-04	5
Max	6	20.000%	150.000%	2.51E-02	11

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (a)	Resíduos ao quadrado	Iterações
13/Jan/00	2	9.12%	10.00%	9.52E-04	7
14/Jan/00	3	6.17%	111.04%	3.57E-04	4
19/Jan/00	2	5.82%	112.81%	3.34E-04	4
20/Jan/00	3	5.75%	10.00%	3.15E-04	4
28/Jan/00	2	6.39%	10.00%	3.67E-04	8
09/Fev/00	3	2.63%	10.00%	1.30E-03	11
17/Fev/00	2	1.30%	141.81%	3.71E-03	7
18/Fev/00	2	1.59%	139.95%	5.54E-04	6
23/Fev/00	2	6.26%	110.70%	1.49E-03	4
24/Fev/00	2	5.10%	118.09%	7.35E-05	4
25/Fev/00	2	6.11%	112.70%	1.49E-03	4
28/Fev/00	3	10.19%	10.00%	8.11E-03	6
15/Mar/00	4	3.21%	10.00%	1.12E-04	8
16/Mar/00	3	3.42%	10.02%	3.12E-03	9
17/Mar/00	3	3.39%	15.77%	3.57E-03	8
23/Mar/00	2	4.65%	150.00%	8.08E-03	6
31/Mar/00	2	4.95%	10.00%	2.51E-02	6
03/Abr/00	2	4.89%	10.00%	2.32E-02	6
05/Abr/00	3	2.26%	10.00%	3.42E-03	6
06/Abr/00	3	1.86%	10.00%	2.46E-03	7
07/Abr/00	4	2.87%	10.00%	1.39E-03	6
13/Abr/00	3	2.86%	10.00%	8.45E-04	6
14/Abr/00	3	5.28%	10.00%	3.39E-04	5
17/Abr/00	2	4.49%	121.89%	4.48E-04	4
18/Abr/00	3	5.19%	15.92%	3.50E-05	5
20/Abr/00	3	5.18%	10.00%	9.10E-06	5
24/Abr/00	3	5.75%	29.85%	8.83E-05	6
26/Abr/00	3	7.07%	149.60%	1.49E-05	5
28/Abr/00	3	6.99%	129.43%	3.74E-06	4
02/Mai/00	3	7.05%	129.48%	3.59E-05	4
05/Mai/00	3	8.59%	110.92%	3.62E-06	3
09/Mai/00	3	8.97%	150.00%	9.56E-04	4
10/Mai/00	3	9.17%	150.00%	9.90E-04	5
17/Mai/00	3	8.81%	150.00%	1.07E-03	4
18/Mai/00	3	8.11%	150.00%	1.25E-03	4
19/Mai/00	3	7.52%	149.94%	4.92E-04	4
13/Jun/00	2	7.73%	101.66%	7.68E-06	3
15/Jun/00	2	3.16%	131.28%	4.32E-04	5
14/Jul/00	5	5.30%	149.96%	1.82E-04	5
20/Jul/00	2	6.10%	111.97%	1.30E-04	4
27/Jul/00	2	4.73%	120.43%	5.54E-05	4
31/Jul/00	2	5.10%	118.14%	4.91E-05	4
01/Ago/00	2	2.96%	131.52%	1.41E-04	5
08/Ago/00	2	3.80%	120.02%	2.20E-04	6
10/Ago/00	2	3.41%	129.54%	2.83E-04	5
18/Ago/00	2	3.27%	125.36%	2.53E-04	6
21/Ago/00	2	2.31%	134.15%	1.58E-03	5
24/Ago/00	2	3.15%	134.00%	6.94E-04	5
25/Ago/00	2	3.23%	128.89%	5.05E-04	5
28/Ago/00	2	2.94%	131.61%	3.79E-04	4
29/Ago/00	2	3.58%	129.83%	6.92E-04	5
31/Ago/00	3	2.96%	10.01%	4.01E-04	6
04/Set/00	3	3.23%	10.05%	3.34E-04	6
12/Set/00	3	3.21%	10.00%	3.60E-04	7
29/Set/00	2	3.64%	126.82%	5.24E-03	4
24/Out/00	2	2.96%	132.34%	1.05E-03	5
25/Out/00	4	3.83%	40.65%	3.28E-06	5
26/Out/00	2	4.30%	123.10%	7.29E-04	4
27/Out/00	2	4.19%	123.81%	9.77E-05	4

Figura C.6: Calibração com a equação (6.4), "w₃" e filtro de 50%

Data	N° de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à	Resíduos ao	Iterações
			média (μ)	quadrado	
30/Oct/00	2	4.00%	125.02%	1.61 E-06	5
01/Nov/00	2	5.61%	114.96%	3.57 E-05	4
06/Nov/00	2	5.22%	117.41%	1.47 E-04	4
07/Nov/00	2	5.45%	115.00%	6.29 E-04	4
08/Nov/00	2	5.72%	116.44%	9.79 E-04	4
09/Nov/00	2	8.94%	92.91%	1.29 E-04	4
10/Nov/00	3	5.13%	150.00%	5.29 E-04	5
13/Nov/00	2	9.08%	91.91%	1.36 E-05	4
14/Nov/00	3	4.08%	62.64%	1.63 E-05	6
17/Nov/00	3	4.85%	10.00%	9.01 E-04	5
20/Nov/00	2	4.97%	10.00%	1.48 E-03	5
21/Nov/00	3	5.01%	10.02%	1.17 E-04	4
22/Nov/00	3	5.65%	139.51%	2.37 E-05	5
23/Nov/00	2	4.93%	10.00%	8.37 E-05	7
28/Nov/00	4	11.42%	150.00%	6.76 E-04	5
29/Nov/00	3	9.01%	141.19%	2.82 E-07	4
30/Nov/00	3	10.46%	150.00%	1.03 E-03	5
01/Dez/00	3	15.21%	102.51%	6.54 E-06	6
04/Dez/00	3	15.24%	150.00%	4.86 E-04	7
05/Dez/00	2	6.79%	10.49%	1.98 E-06	6
06/Dez/00	3	10.44%	150.00%	6.50 E-03	7
08/Dez/00	2	6.80%	149.97%	1.23 E-04	5
11/Dez/00	2	4.72%	120.44%	1.05 E-03	4
12/Dez/00	3	4.37%	150.00%	2.83 E-03	5
15/Dez/00	4	2.88%	137.85%	8.89 E-05	5
18/Dez/00	2	3.30%	129.23%	3.63 E-04	5
19/Dez/00	2	2.61%	133.73%	4.13 E-03	6
20/Dez/00	2	2.35%	135.33%	2.23 E-05	5
21/Dez/00	2	3.47%	128.17%	9.22 E-03	5
22/Dez/00	3	2.41%	134.93%	3.52 E-04	5
27/Dez/00	2	3.30%	129.06%	2.03 E-04	5
03/Jan/01	2	4.02%	124.91%	7.33 E-04	4
04/Jan/01	4	3.42%	11.50%	4.37 E-04	7
05/Jan/01	5	3.14%	10.00%	5.16 E-04	7
10/Jan/01	2	3.38%	150.00%	8.64 E-05	6
11/Jan/01	4	3.22%	76.30%	4.39 E-05	6
12/Jan/01	4	3.21%	140.05%	2.23 E-05	5
15/Jan/01	3	3.16%	130.28%	5.08 E-06	5
16/Jan/01	2	3.10%	130.64%	2.20 E-08	5
17/Jan/01	3	2.65%	133.44%	1.13 E-04	5
18/Jan/01	4	2.39%	135.51%	6.07 E-04	5
19/Jan/01	3	2.61%	150.00%	1.37 E-03	7
22/Jan/01	4	2.52%	134.62%	7.66 E-04	5
23/Jan/01	4	2.22%	136.36%	1.62 E-03	5
24/Jan/01	3	1.80%	138.71%	1.69 E-03	5
26/Jan/01	3	1.88%	138.21%	1.01 E-03	5
29/Jan/01	3	1.88%	137.98%	2.22 E-03	5
30/Jan/01	5	1.81%	150.00%	1.29 E-03	6
31/Jan/01	5	1.57%	142.73%	1.59 E-03	5
01/Fev/01	5	1.19%	142.57%	9.50 E-04	6
05/Fev/01	4	1.72%	139.44%	2.00 E-03	6
06/Fev/01	5	2.24%	135.82%	1.99 E-03	5
07/Fev/01	5	2.85%	132.97%	8.73 E-04	5
08/Fev/01	3	1.97%	137.67%	6.61 E-04	5
09/Fev/01	4	2.11%	136.81%	2.69 E-04	5
12/Fev/01	3	1.71%	139.30%	2.10 E-05	6
13/Fev/01	4	1.85%	138.45%	1.13 E-05	6
14/Fev/01	3	2.21%	136.21%	1.25 E-04	5
15/Fev/01	4	2.25%	135.61%	1.46 E-03	5
16/Fev/01	5	2.84%	150.00%	1.25 E-03	6
19/Fev/01	5	3.15%	150.00%	7.75 E-04	5
21/Fev/01	3	3.25%	129.67%	2.85 E-05	5
22/Fev/01	3	3.68%	125.85%	3.17 E-04	5
23/Fev/01	2	3.35%	128.38%	6.80 E-04	5
28/Fev/01	2	3.29%	129.33%	2.79 E-04	5
02/Mar/01	2	2.70%	133.36%	2.52 E-03	5
06/Mar/01	2	2.77%	132.22%	2.54 E-03	5
07/Mar/01	2	2.80%	132.28%	2.22 E-03	5
12/Mar/01	3	3.28%	129.47%	1.61 E-03	4
13/Mar/01	5	3.31%	150.00%	2.19 E-03	5
14/Mar/01	4	4.86%	119.65%	1.94 E-05	4
15/Mar/01	4	2.49%	134.53%	7.73 E-04	5
16/Mar/01	4	13.49%	150.00%	3.92 E-05	6
20/Mar/01	3	7.63%	102.32%	8.56 E-06	3
21/Mar/01	3	6.74%	10.01%	1.56 E-05	4
27/Mar/01	2	9.00%	92.45%	4.00 E-05	3
28/Mar/01	2	7.46%	103.40%	6.71 E-05	3
09/Abr/01	2	12.89%	63.23%	3.49 E-05	5
10/Abr/01	2	11.66%	72.58%	7.39 E-05	4
02/Mai/01	2	12.49%	66.30%	2.37 E-06	5
08/Mai/01	2	11.92%	119.49%	1.35 E-09	6

Figura C.7: Continuação

Data	Nº de observações	Volatilidade (σ)	Reversão à média (α)	Resíduos ao quadrado	Iterações
14/Mai/01	2	11.49%	73.80%	1.52.E-05	5
15/Mai/01	2	12.04%	69.69%	6.08.E-05	5
16/Mai/01	3	13.03%	150.00%	1.05.E-05	6
17/Mai/01	3	8.72%	10.00%	5.14.E-04	5
18/Mai/01	2	9.26%	10.00%	1.83.E-03	6
22/Mai/01	2	9.07%	92.02%	2.81.E-04	4
28/Mai/01	2	12.19%	150.00%	1.81.E-05	6
29/Mai/01	3	6.89%	10.00%	2.33.E-04	5
04/Jun/01	2	16.28%	150.00%	1.88.E-03	6
06/Ago/01	2	20.00%	10.00%	2.87.E-04	8
10/Ago/01	2	11.08%	69.54%	4.41.E-09	4
15/Ago/01	2	9.23%	90.80%	1.57.E-05	3
20/Ago/01	2	11.27%	75.45%	1.09.E-05	4
21/Ago/01	2	8.01%	99.93%	2.33.E-05	2
22/Ago/01	3	11.32%	90.81%	1.50.E-06	5
24/Ago/01	5	11.34%	12.58%	1.55.E-04	5
27/Ago/01	5	10.56%	150.00%	2.87.E-04	5
28/Ago/01	4	8.45%	19.80%	2.50.E-05	5
29/Ago/01	4	9.95%	10.14%	1.29.E-04	5
30/Ago/01	4	12.39%	10.05%	1.63.E-04	6
31/Ago/01	3	12.60%	65.49%	3.63.E-05	5
03/Set/01	3	13.35%	59.91%	9.76.E-06	5
04/Set/01	5	10.92%	10.06%	2.67.E-04	5
05/Set/01	4	12.42%	66.88%	6.30.E-05	5
08/Set/01	3	12.50%	66.25%	1.01.E-05	5
10/Set/01	2	14.25%	53.11%	9.82.E-07	6
12/Set/01	3	12.50%	66.27%	1.78.E-06	5
14/Set/01	3	14.23%	53.30%	9.64.E-06	5
17/Set/01	5	10.15%	150.00%	4.47.E-03	4
18/Set/01	4	11.48%	73.87%	4.68.E-05	5
19/Set/01	2	9.28%	90.44%	2.66.E-06	4
20/Set/01	3	9.97%	85.23%	1.38.E-04	4
21/Set/01	4	11.23%	150.00%	3.59.E-04	5
24/Set/01	4	16.40%	149.99%	3.01.E-05	7
25/Set/01	5	14.92%	150.00%	7.22.E-05	7
26/Set/01	4	14.41%	51.94%	1.54.E-04	5
28/Set/01	3	11.06%	150.00%	5.02.E-04	5
01/Out/01	2	12.35%	67.37%	1.96.E-05	5
02/Out/01	3	11.68%	72.42%	3.43.E-05	5
03/Out/01	4	9.47%	149.99%	2.30.E-04	4
04/Out/01	4	13.44%	48.20%	7.68.E-06	5
05/Out/01	4	13.04%	54.20%	1.82.E-06	5
08/Out/01	3	11.89%	70.85%	2.01.E-05	5
09/Out/01	4	13.15%	123.13%	4.97.E-06	6
10/Out/01	3	10.37%	10.01%	3.39.E-04	5
11/Out/01	2	11.76%	71.82%	2.12.E-05	5
15/Out/01	3	13.30%	76.94%	2.58.E-05	5
16/Out/01	3	10.99%	10.01%	1.92.E-04	6
17/Out/01	4	10.81%	15.23%	2.91.E-05	5
18/Out/01	2	8.89%	93.22%	7.37.E-04	3
19/Out/01	3	11.22%	49.90%	2.29.E-07	5
22/Out/01	5	7.19%	10.06%	2.69.E-04	3
23/Out/01	3	8.86%	14.14%	1.19.E-05	5
25/Out/01	4	9.49%	10.61%	4.62.E-05	5
26/Out/01	4	9.17%	150.00%	1.25.E-04	4
29/Out/01	3	9.79%	150.00%	7.34.E-05	5
30/Out/01	4	10.66%	84.69%	2.23.E-06	4
31/Out/01	5	9.04%	92.23%	1.74.E-07	4
05/Nov/01	4	8.75%	94.35%	3.27.E-05	4
06/Nov/01	4	8.83%	93.81%	5.55.E-05	3
07/Nov/01	5	7.92%	100.43%	1.36.E-04	3
08/Nov/01	3	8.68%	94.93%	3.51.E-04	3
09/Nov/01	4	9.44%	89.21%	6.89.E-04	4
12/Nov/01	3	8.89%	93.18%	5.89.E-04	4
13/Nov/01	5	6.91%	106.81%	2.48.E-04	3
14/Nov/01	3	7.18%	105.10%	5.52.E-05	3
19/Nov/01	5	8.07%	150.00%	4.03.E-04	4
20/Nov/01	6	7.57%	102.66%	5.22.E-04	3
21/Nov/01	5	7.20%	73.79%	1.28.E-04	3
22/Nov/01	2	6.32%	110.58%	2.06.E-03	3
23/Nov/01	2	6.30%	150.00%	2.10.E-05	6
26/Nov/01	4	7.06%	150.00%	5.34.E-04	4
27/Nov/01	5	8.01%	150.00%	7.16.E-04	4
28/Nov/01	4	8.34%	97.49%	8.85.E-05	3
29/Nov/01	5	7.74%	150.00%	2.35.E-04	4
30/Nov/01	4	8.71%	94.70%	1.71.E-05	3
03/Dez/01	5	6.63%	135.61%	3.60.E-05	4
04/Dez/01	4	6.46%	150.00%	1.55.E-04	5
05/Dez/01	5	6.73%	150.00%	1.99.E-04	5
06/Dez/01	4	6.99%	106.31%	2.61.E-04	3
10/Dez/01	2	6.75%	107.80%	2.09.E-03	4

Figura C.8: Continuação