#### JOSÉ ROBERTO CARDOSO

Engenheiro Eletricista, EPUSP, 1974 Mestre em Engenharia Elétrica, EPUSP, 1979 Doutor em Engenharia Elétrica, EPUSP, 1985

# GROUND-3D: UMA CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DOS SISTEMAS DE ATERRAMENTO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Professor Livre Docente.

Área de Concentração: Engenharia Elétrica

São Paulo 1993

#### JOSÉ ROBERTO CARDOSO

Engenheiro Eletricista, EPUSP, 1974 Mestre em Engenharia Elétrica, EPUSP, 1979 Doutor em Engenharia Elétrica, EPUSP, 1985

# GROUND-3D: UMA CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DOS SISTEMAS DE ATERRAMENTO PELO MÉTODO DOS ÉLEMENTOS FINITOS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Professor Livre Docente junto ao Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

São Paulo 1993

"Se um dia você ver meu cortejo pode ter certeza, aí vai um sujeito contrariado."

A Ulysses Guimarães

#### **AGRADECIMENTOS**

O autor deseja expressar seus agradecimentos as pessoas que participaram diretamente no desenvolvimento deste trabalho, são elas:

-Prof. Dr. Giorgio Gambirásio, que foi o responsável pela viabilização da primeira versão do software objeto desta tese.

-Prof. Dr. Fernando Selles Ribeiro, que foi o responsável pelaimplementação de sua primeira versão.

-Eng. Mauricio Chamma da Figueiredo Ferraz Engenharia e Consultoria de Projetos Ltda, que confiou-nos o trabalho que permitiu validar este desenvolvimento.

-Eng. João Carlos M. Baptista de Oliveira, pela sua competência no desenvolvimento dos trabalhos computacionais desenvolvidos na versão final deste software.

-Aos colegas professores, Prof. Dr. Eduardo Cesar Senger e Prof. Duilio

Moreira Leite pelas discussões sobre o tema.

-Aos professores, Prof. Jean-Claude Sabonnadière, Prof. Jean-Louis Coulomb, Prof. Gerard Meunier e Dr. Jean-François Imhoff do Laboratoire de Electrotechnique de Grenoble pelas sugestões implementadas no software GROUND-3D.

-A todos os membros da Equipe de Simulação de Fenômenos Eletromagnéticos, pelas discussões, algumas calorosas, sobre a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de fenômenos eletromagnéticos: Prof. Luiz Natal Rossi, Prof. Luiz Lebensztajn, Angelo Pássaro, Nancy Mieko Abe, Prof. José Marcio Machado, Paulo Assis Benites, Rodney A. Repullo, Silvio Ikuyo Nabeta, Douglas Ricardo de Freitas Clabunde, Prof. Walter E. Scheibig, Prof. Jorge Alberto da Silva, Viviane Cristine Silva.

-Ao RHAE/CNPq, pelo suporte financeiro as bolsas de estudos que resultaram em trabalhos implementados no GROUND-3D.

-A FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro das bolsas de estudo e dos equipamentos computacionais que estão sendo utilizados na evolução deste trabalho.

# SUMÁRIO

# RESUMO

## "ABSTRACT"

1 11	VIRODUÇAO	1
2 F	ORMULAÇÃO MATEMÁTICA	4
2.1	Descrição do fenômeno: Equações	4
2.2	Funções de interpolação	9
2,2.	1 Simulação do subsolo	10
2.2.	2 Simulação dos elementos de placa	13
2.2.	3 Simulação dos condutores horizontais e verticais	14
2.3	A técnica de Galerkin	16
2.4	O potencial de passo	18
2.5	A resistência de aterramento	20
3 E	STRUTURA COMPUTACIONAL DO GROUND-3D	23
3.1	Módulo MESH	23
3.2	Módulo RESIST	24
3.3	Módulo TERRA	25
3.4	Módulo EXPLOR	26

4	APLICAÇÕES DO GROUND-3D	29
4.1	Introdução	29
4.2	P. Haste vertical em solo homogêneo	29
4.3	GROUND-3D versus IEEE-80	35
5	REPRESENTAÇÃO DO PONTO REMOTO - VERSÃO 2	43
5.1	Considerações	43
5.2	.1 Transformação na Região II	45
5.2	.2 Transformação na Região III	46
5.2	.3 Transformação na Região IV	47
5.2	.4 O MEF no domínio transformado	49
5.2	.5 Cálculo dos Elementos do Jacobiano	52
5.3	As condições de contorno	55
<b>6</b> (	GROUND-3D VERSÃO 2.0 x IEEE-80	
<b>0.∠</b>	Análise do caso IEEE-80	58
7 (	CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	66
7.1	Conclusão	66
7.2	Desenvolvimentos futuros	67
	Referências Bibliográficas	69

0

Ú

Ċ

Cad. Nº 2343261 FT-875

# RESUMO

VÁRLAS TÉCNICAS FORAM DESENVOLVIDAS PARA AVALIAR O DESEMPENHO DOS SISTEMAS DE ATERRAMENTO. FACE A COMPLEXIDADE NATURAL, DEVIDO A NÃO HOMOGENEIDADE DO SOLO, UMA SÉRIE DE APROXIMAÇÕES SÃO EFETUADAS, VINCULANDO, NA MAIORIA DOS ESTUDOS, UM NÚMERO MÀXIMO DE CAMADAS DE ESTRAFICAÇÃO.

EM ELEMENTOS FINITOS, SOBRE OS QUAIS É SATISFEITA A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE. NESTA FORMULAÇÃO, O DOMÍNIO DE ESTUDO É TRIDIMENSIONAL, O QUAL É DIVIDIDO ELIMINADOS, ISTO É, NÃO É FEITA NENHUMA SIMPLIFICAÇÃO, SEJA NO NÚMERO DE DEVIDO A GRANDE MASSA DE INFORMACÕES. FOI DESENVOI VIDO I IM SOFTWADE NA METODOLOGIA PROPOSTA, BASEADA NO M.E.F., TODOS ESTES VÍNCULOS SÃO CAMADAS, SEJA NA GEOMETRIA DO SISTEMA DE ATERRAMENTO.

contempladas por outras metodologias, desenvolvemos uma formulação matemática, baseada na aplicação de uma transformação de coordenadas adequada, de modo que o inconveniente do truncamento do domínio em estudo, exigido pela formulação tradicional pelo Método dos Elementos Finitos de fenômenos físicos de domínio aberto, não é necessário.

Além desta vantagem, esta metodologia, detalhadamente explicada no Capítulo V, permitiu reduzir ao máximo o domínio em estudo, possibilitando atingir um maior grau de precisão, face a uma melhor distribuição dos elementos no domínio.

Devido a dificuldade de se comparar os resultados, oriundos desta formulação, com os obtidos através de ensaios em campo, optou-se por compará-los com os resultados apresentados no IEEE Std 80, os quais foram obtidos por uma metodologia consagrada, desenvolvida pelo EPRI.

No Capítulo VI, estas comparações são apresentadas e os resultados obtidos confirmam a validade da formulação desenvolvida.

Os desenvolvimentos futuros são apresentados no final do texto, os quais serão implementados nas futuras versões do GROUND-3D, que é a designação desse produto utilizada para facilitar a apresentação deste trabalho.

#### ABSTRACT

The **Finite Element Method** modelling of ground systems is analysed in this work.

As the current difusion on the stratified soil is a unbounded phenomenon an efficient mapping is applied in order to consider the remote point (infinity) without shortening the domain in study.

It is presented the traditional formulation for the **Finite Element**Method modelling of ground systems in Chapter II and the original one in Chapter V.

For consistence check it is computed a standard ground mesh presented on the IEEE Std 80 performed by SGA package from EPRI.

Comparisons are examined in Chapter VI where the agreement between **GROUND-3D** update and the **SGA** package can be checked.

New developments of this package are discussed in Chapter VII where are put in relief the new software and hardware engineering that will be used in the next release.

### 1 INTRODUÇÃO

O dimensionamento e a análise dos sistemas de aterramentos, são os tópicos da engenharia de eletricidade mais cercados de incertezas, face as inúmeras hipóteses simplificadoras que são impostas em seus estudos.

A principal destas refere-se ao modelamento do solo, no qual o mesmo é considerado estratificado em camadas de condutividades distintas e paralelas, quando na realidade tal distribuição é totalmente diversa. Por outro lado, tais condutividades são fortemente influenciadas pelas condições climáticas, de modo que a adoção de um valor definido, válido para toda a existência da malha é, sem dúvida, muito pretensiosa.

Novos problemas têm surgido com a evolução industrial, cujas soluções não têm sido contempladas pelas metodologias atuais. Dentre estes, o advento dos equipamentos isolados a SF6, responsáveis pela redução da área das subestações (SE's), tem causado a adoção de soluções não convencionais para a dissipação da corrente de defeito cuja solução, na maioria das vezes, é implementada experimentalmente face a inexistência de uma metodologia adequada para sua simulação.

Um outro problema, que tem causado uma série de inseguranças para o projetista, é a presença de aterramentos naturais, tais como: redes metálicas de tubulações aéreas ou enterradas, ou ainda, malhas de terra estranhas à

instalação em estudo situadas em sua região de influência, pois todas as metodologias admitem a malha de terra isolada de qualquer outro sistema de aterramento, de modo que não é possível avaliar, com segurança, potenciais induzidos quando de um defeito no sistema em análise.

São várias as metodologias utilizadas nos projetos de um sistema de aterramento; as analíticas, em sua maior parte, são derivações do que é apresentado na IEEE Std 80<sup>[30]</sup>, as numéricas são baseadas em hipóteses de potencial constante em toda a malha e com número de camadas de estratificação limitado a duas.

Em ambos os casos, o sistema de aterramento é suposto isolado, de modo que, mediante aquelas metodologias, os efeitos de aterramentos secundários ou naturais, não conectados ao sistema em estudo não podem ser avaliados.

A solução proposta neste trabalho é fruto de uma experiência de sete anos no desenvolvimento do modelo e respectiva implementação computacional, do Método dos Elementos Finitos no estudo dos sistemas de aterramento.

A formulação matemática data de 1985 e foi por nós apresentada, pela primeira vez, no <u>Seminário sobre Cálculo de Campos Elétricos com Métodos Numéricos</u>, promovido pela Pirelli de Santo André, em julho daquele ano<sup>[1]</sup>.

A partir de então, iniciou-se o projeto da implementação de um software para a validação do modelo, face a receptividade encontrada no meio industrial.

A primeira versão foi implementada em 1986, utilizando-se elementos tetraédricos de primeira ordem<sup>[1]</sup>. Naquela ocasião, a malha de elementos finitos.

no plano do solo, foi gerada manualmente com elementos de quatro lados e os tetraedros para modelar o subsolo foram gerados automaticamente.

Ainda na primeira versão, não utilizamos elementos unidimensionais para a simulação dos condutores horizontais e hastes verticais, bem como não utilizamos elementos bidimensionais para a simulação de placas condutoras, tais como as camadas de brita de pequena espessura face às dimensões do domínio. A análise dos resultados foi feita de modo gráfico, sem no entanto utilizar os recursos da computação gráfica.

Os resultados obtidos naquela ocasião foram muito importantes, permitindo-nos analisar efeitos que não eram possíveis de serem avaliados a partir dos tratamentos usuais até hoje praticados nas análises dos sistemas de aterramento.

A plataforma computacional utilizada naquela ocasião foi um microcomputador IBM-XT e a linguagem utilizada na implementação foi o FORTRAN.

Finalmente, em 1989, foi iniciado o empreendimento de elaborar o software GROUND-3D, dotando-o de uma tecnologia de engenharia de software que contemplasse os recursos gráficos computacionais disponíveis.

### 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA - VERSÃO 1

#### 2.1 Descrição do fenômeno: Equações

O sistema de aterramento, submetido a uma situação de contingência, é responsável por uma injeção de altas correntes no solo condutor, cuja difusão neste meio é governada pela equação de Laplace

$$\nabla \cdot \sigma \nabla V_0 = 0 \quad \text{em} \quad \Delta \tag{2.1}$$

onde  $\Delta$ , a rigor é um domínio aberto estendendo-se ao infinito.

O truncamento deste domínio, para satisfazer as exigências da formulação, é fixado segundo critérios práticos consagrados extraídos da experiência.

Este truncamento implica na definição de superfícies adicionais, sobre as quais as condições de contorno aplicadas ao ponto remoto são transferidas.

A Figura 2.1 mostra o domínio truncado e as condições de contorno associadas nas partes da superfície que o envolve.

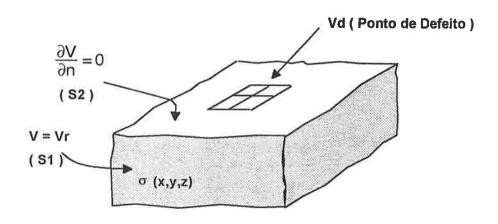


Fig. 2.1 - Domínio em Estudo

Assim sendo, a solução do problema consiste em se encontrar uma distribuição de potenciais que satisfaça:

$$\nabla. \ \sigma \ \nabla \ V_0 = 0 \quad \text{em} \quad \Delta$$
 
$$V_0 = \overline{V} \qquad \text{em} \quad S_1 \qquad (2.2)$$
 
$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{em} \quad S_2$$

com S =  $S_1$  U  $S_2$  sendo a superfície que delimita o domínio  $\Delta$ .

Demonstra-se que as condições expressas em (2.2) garantem a unicidade da solução.

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados [17], verifica-se sempre que:

$$\int_{\Delta} W_0 \left( \nabla . \sigma \nabla V_0 \right) d\Delta + \int_{S_1} W_1 \left( V_0 - \overline{V} \right) dS + \int_{S_2} W_2 \frac{\partial V_0}{\partial n} dS = 0$$
 (2.3)

onde  $W_0$ ,  $W_1$  e  $W_2$  são funções arbitrárias, das quais exigem-se apenas que tenham valor finito diferente de zero.

Notemos que em (2.3), cada uma das integrais são nulas, independentemente das funções W's.

Seja V uma solução aproximada de (2.2) que será obtida através de um método numérico, de modo que:

$$\|V_0 - V\| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Substituindo-se V<sub>0</sub> por V em (2.2) obtemos as seguintes funções:

$$R_0 = \nabla_{\cdot} \sigma \nabla V$$

$$R_1 = V - \overline{V} \tag{2.5}$$

$$R_2 = \frac{\partial V}{\partial n}$$

onde  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  são denominados resíduos de aproximação, respectivamente no domínio e em suas fronteiras.

É claro que os resíduos só são nulos na solução exata, de modo que a equação integral (2.3) para a solução aproximada se escreve:

$$\int_{\Delta} W_0 R_0 d\Delta + \int_{S_1} W_1 R_1 dS + \int_{S_2} W_2 R_2 dS \neq 0$$
 (2.6)

Considerando que quanto menores forem os resíduos, tanto melhor a aproximação feita, impõem-se seus anulamentos, em termos médios, distribuindo-os no domínio e na fronteira de acordo com as funções de ponderação ( $W_0$ ,  $W_1$  e  $W_2$ ), isto é:

$$\int_{\Delta} W_0 R_0 d\Delta + \int_{S_1} W_1 R_1 dS + \int_{S_2} W_2 R_2 dS = 0$$
 (2.7)

A equação integral (2.7), denominada equação geral dos resíduos ponderados, estabelece a ortogonalidade dos resíduos às funções de ponderação.

No Método dos Elementos Finitos, impõem-se que a solução sobre  $S_1$  seja exata, de modo que  $R_1 \cong 0$ , portanto:

$$\int_{\Delta} W_0 R_0 d\Delta + \int_{S_2} W_2 R_2 dS = 0$$
 (2.8)

Ainda no Método dos Elementos Finitos, o domínio é dividido, criteriosamente, em pequenos subdomínios de modo que (2.8) pode ser escrita como segue:

$$\sum_{e=1}^{NE} \left[ \int_{\Delta^e} W_0 \nabla . \sigma \nabla V d\Delta + \int_{S_2^e} W_2 \frac{\partial V}{\partial n} dS \right] = 0$$
 (2.9)

onde NE é o número total de elementos no qual o domínio foi discretizado.

Impondo-se ainda que (2.8) seja satisfeita em cada elemento, através da escolha adequada das funções de ponderação, podemos escrever:

$$\int_{\Delta^e} W_0 \nabla . \sigma \nabla V d\Delta + \int_{S_2^e} W_2 \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$$
 (2.10)

Considerando-se as identidades:

$$\nabla . W_0 \sigma \nabla V = W_0 \nabla . \sigma \nabla V + \sigma \nabla W_0 . \nabla V$$

$$\int_{\Delta^e} \nabla \cdot W_0 \, \sigma \nabla V \, d\Delta = \oint_{S^e} \sigma W_0 \, \frac{\partial V}{\partial n} \, dS$$

A equação (2.10) pode ser escrita como segue:

$$-\int_{\Delta^{\mathbf{e}}} \sigma \nabla W_0 \cdot \nabla V \, d\Delta + \oint_{S^{\mathbf{e}}} \sigma W_0 \, \frac{\partial V}{\partial n} \, dS + \int_{S_2^{\mathbf{e}}} W_2 \, \frac{\partial V}{\partial n} \, dS = 0 \qquad (2.11)$$

d.

Convém salientar que a manipulação matemática elaborada, impõe que a função de ponderação  $W_0$ , para que seja possível a primeira integral de (2.11), deve ter no mínimo continuidade  $C^1$ .

Escolhendo-se ainda  $\sigma W_0 = -W_2$ , face a arbitrariedade da escolha, a equação integral resultante é dada por:

$$-\int_{\Delta^{\mathbf{e}}} \sigma \nabla W_0 \cdot \nabla V \, d\Delta + \int_{S_1^{\mathbf{e}}} \sigma W_0 \, \frac{\partial V}{\partial n} \, dS = 0 \qquad (2.12)$$

Este resultado mostra que as condições de contorno sobre  ${\bf S}_2$  são automaticamente satisfeitas por este procedimento.

#### 2.2 Funções de interpolação

No Método dos Elementos Finitos, o valor da variável de estado, no caso a função potencial elétrico, num ponto qualquer no interior do elemento pode ser expressa através de uma interpolação de seus valores nos vértices do elemento<sup>[29]</sup>. A função de interpolação tem importância fundamental na qualidade da solução, particularmente no que se refere à precisão. A princípio, as interpolações de ordem superior levam a resultados mais precisos e, em geral, o esforço computacional é maior.

No caso do estudo dos sistemas de aterramento, sua geometria particular permitiu criar uma função de interpolação original, do tipo bilinear, que foi por nós

escolhida, face a facilidade de adaptá-la à metodologia de geração automática da malha bidimensional pelo algorítmo de Delaunay, já desenvolvida em trabalhos anteriores [6].

#### 2.2.1 Simulação do subsolo

O subsolo é estratificado em camadas paralelas de condutividade constante e o plano do solo é suposto horizontal. O sistema de referência adotado é tal que o plano do solo é paralelo ao plano x,y.

O elemento escolhido é o prisma de base triangular, de modo que suas bases são paralelas ao plano do solo e suas arestas paralelas ao eixo z, Figura 2.2.

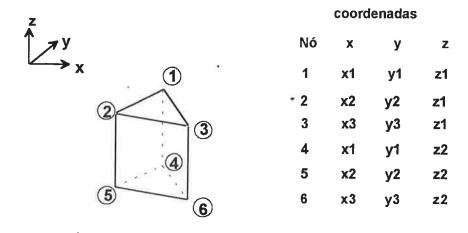


Fig. 2.2 - Elemento Prismático

As funções de interpolação para o elemento prismático são obtidas a partir de uma composição das funções de forma do elemento triangular e do elemeno unidimensional de primeira ordem.

Assim sendo, as funções α's, definidas por:

$$\alpha_i = \frac{1}{2\Delta} \left( a_i + b_i x + c_i y \right) \quad i = 1, 2, 3$$
 (2.13)

cujos coeficientes são encontrados em [17], são utilizadas para interpolar a função potencial na seção transversal do prisma triangular, ao passo que as funções:

$$\beta_1 = \frac{Z_2 - Z}{I}$$
 e  $\beta_2 = \frac{Z - Z_1}{I}$  (2.14)

com  $I = Z_1 - Z_2$ , são utilizadas para interpolar a função potencial num segmento paralelo as arestas do elemento prismático, estas dão origem a seis funções de interpolação, tais que:

$$N_i (x_j, y_i, z_j) = \delta_{ij}$$
 (2.15)

onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker definido como segue:

$$\delta_{ij} \, = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{se } i \, = \, j \\ \\ 0 \quad \text{se } i \, \neq \, j \end{array} \right.$$

As seis funções de forma, resultantes, são dadas por:

$$N_{1} = \alpha_{1} \beta_{1} \qquad N_{4} = \alpha_{1} \beta_{2}$$

$$N_{2} = \alpha_{2} \beta_{1} \qquad N_{5} = \alpha_{2} \beta_{2} \qquad (2.16)$$

$$N_{3} = \alpha_{3} \beta_{1} \qquad N_{6} = \alpha_{3} \beta_{2}$$

Isto posto, a função potencial calculada num ponto qualquer no interior do elemento, expressa em função de seus valores obtidos nos vértices do elemento, é escrita como segue:

$$V = \sum_{i=1}^{6} N_{i} V_{i}$$
 (2.17)

Notemos que as funções N<sub>i</sub>'s, definidas em (2.16), apesar de construídas em função de funções de forma de elementos de primeira ordem, não resultam funções de primeira ordem, não resultando também funções de segunda ordem, pois não apresentam elementos de ordem dois em seus polinômios.

Tais funções são denominadas bilineares, e apresentam a vantagem de produzirem uma boa precisão da solução associada ao fato de que sua

integração, no volume do elemento, resultar exata, sem a necessidade de se recorrer a algoritmos de integração numérica para calculá-las.

#### 2.2.2 Simulação dos elementos de placa

Os elementos de placa são muito úteis na simulação dos sistemas de aterramento pelo MEF, pois é frequente a presença de camadas condutoras de pequenas dimensões face as dimensões do domínio, tais como as camadas de brita, tanques metálicos, etc.

Nestes casos, os elementos prismáticos, não são convenientes para a simulação destas camadas condutoras; pois resultariam em prismas de altura reduzida, podendo comprometer o condicionamento da matriz global.

Para esta representação, utilizamos elementos bidimensionais triangulares com interpolação linear para se compatibilizar com as faces do elemento prismático.

Desta forma, as funções de interpolação utilizadas para este elemento são aquelas expressas por (2.13).

Neste caso é suposto que as camadas condutoras de pequena espessura estão situadas no plano do solo ou em planos paralelos a este.

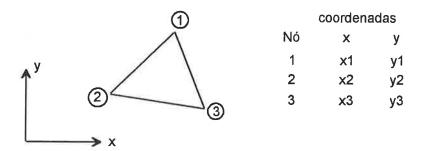


Fig. 2.3 - Elemento Triangular

Assim sendo, para estes elementos, podemos escrever:

$$N_i = \alpha_i$$
  $i = 1,2,3$  (2.18)

de modo que, à semelhança do elemento prismático, podemos escrever:

$$V = \sum_{i=1}^{3} N_{i} V_{i}$$
 (2.19)

# 2.2.3 Simulação dos condutores horizontais e verticais

Os condutores horizontais e as hastes verticais, que constituem as malhas de terra, possuem seções transversais de dimensões desprezíveis face as dimensões do domínio em estudo. Por esta razão a simulação destes elementos é implementada utilizando-se elementos unidimensionais.

A utilização deste tipo de elemento, num estudo tridimensional deve ser cercado de uma série de cuidados. O mais importante refere-se aos resultados do campo elétrico, que nas vizinhanças deste elemento não apresenta siginificado físico importante.

A Figura 2.4 mostra um elemento unidimensional retilíneo, de comprimento I.

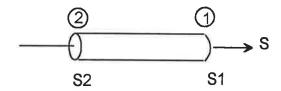


Fig. 2.4 - Elemento Unidimensional

As funções de forma deste elemento são idênticas aquelas apresentadas em (2.14), de modo que podemos escrever:

$$V = \sum_{i=1}^{2} N_i V_i$$
 (2.20)

onde  $N_i = \beta_i$ , i=1,2.

Assim sendo, independemente do tipo de elemento utilizado, o potencial num ponto qualquer no interior deste pode ser expresso genericamente, como segue:

$$V = \sum_{i=1}^{n} N_i V_i \tag{2.21}$$

onde n e N<sub>i</sub> dependem do tipo de elemento considerado.

#### 2.3 A técnica de Galerkin

A escolha das funções de ponderação W's, utilizadas na formulação pelo Método dos Resíduos Ponderados, leva-nos aos vários métodos numéricos de resolução de problemas de campos.

Sua escolha criteriosa está associada à complexidade da implementação computacional e aos recursos computacionais disponíveis.

No caso de fenômenos regidos por equações diferenciais, expressas mediante operadores auto-adjuntos, como é o caso dos fenômenos regidos pelas equações de Laplace ou Poisson (lineares ou não lineares), a técnica de Galerkin, aplicada ao Método dos Elementos Finitos, é muito conveniente pois leva-nos a obtenção de sistemas de equações algébricas com matrizes simétricas, facilitando em muito sua implementação computacional e viabilizando, em parte, a utilização de recursos micro-informáticos [17].

Na técnica de Galerkin, escolhe-se para a função de ponderação  $W_0$ , em cada elemento finito, uma variação arbitrária da variável de estado V, relativamente às variáveis nodais, como se segue:

$$W_0 = \delta V = \sum_{j=1}^{n} N_j \ \delta V_j$$
 (2.22)

Deste modo,  $V \in W_0$  utilizam-se das mesmas funções de interpolação, o que, no caso de operadores auto-adjuntos, dá origem a matrizes simétricas. Por outro lado,  $W_0$ , quando calculada sobre  $S_1^e$  resulta <u>nula</u>, visto que nesta superfíce o valor da variável de estado é imposta, implicando <u>sempre</u> numa variação nula nesta região.

Assim sendo, substituindo-se V e W<sub>0</sub> por seus valores em (2.12), resulta:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta^{e}} \sigma \nabla N_{j} \cdot \nabla N_{i} V_{i} d\Delta \right] \delta V_{j} = 0$$
 (2.23)

Como  $\delta V_j$  é uma variação arbitrária da variável nodal, a expressão (2.23) é satisfeita se, e somente se:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Delta^{\mathbf{e}}} \sigma \nabla N_{j} \cdot \nabla N_{i} V_{i} d\Delta = 0 \qquad j=1,2,...n$$
(2.24)

A expressão anterior é a representação de um sistema de equações local, do tipo:

$$[G^{e}][V^{e}] = 0$$
 (2.25)

onde:

$$G_{ij}^{e} = \int_{\Delta^{e}} \sigma \nabla N_{j} . \nabla N_{i} d\Delta \qquad i, j = 1, 2, ..., n$$

$$[V^{e}] = [V_{1} ... V_{n}]^{T}$$

$$(2.26)$$

A manipulação destas matrizes, segundo procedimento clássico<sup>[16]</sup>, leva-nos ao sistema global de equações linear, que após a introdução das condições de contorno pode ser escrito como segue:

$$[G][V] = [I]$$
 (2.27)

onde [ G ] é a matriz global do sistema de ordem NNxNN, onde NN é o número de nós do domínio discretizado.

A solução deste sistema fornece os potenciais de todos os vértices do domínio, cujo tratamento posterior permite analisar o desempenho do sistema de aterramento.

#### 2.4 O potencial de passo

O potencial de passo na região de influência do sistema de aterramento é obtido a partir os potenciais calculados na etapa anterior, através do cálculo do campo elétrico no plano do solo.

Sabendo-se que:

$$\vec{\mathsf{E}} = -\nabla \mathsf{V} \tag{2.28}$$

resulta para cada uma das suas componentes a seguintes relações:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i$$

$$E_{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_{i}}{\partial y} V_{i}$$
 (2.29)

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial z} V_i$$

Para o cálculo do potencial de passo no plano do solo são suficientes apenas as componentes  $E_x$  e  $E_y$  calculadas com  $z=z_s$ , onde  $z_s$  é a cota do plano do solo.

Assim sendo, podemos escrever:

$$V_{passo} = \left[ E_x^2 (z_s) + E_y^2 (z_s) \right]^{1/2}$$
 (V/m) (2.30)

No GROUND-3D, tal potencial é calculado nas faces triangulares dos elementos prismáticos presentes no plano do solo e, em vista das funções de interpolação escolhidas, o potencial de passo resulta constante no interior destes triângulos, facilitando sua apresentação gráfica mediante uma carta de cores graduada.

#### 2.5 A resistência de aterramento

A resistência de aterramento é avaliada a partir do cálculo da potência dissipada no sistema de aterramento.

A expressão:

$$P_d = \sigma E^2 (W/m^3) \tag{2.31}$$

representa a densidade de potência dissipada por efeito Joule. Sua integração no volume do elemento fornece a potência nele dissipada, isto é:

$$P_d^e = \int_{V^e} p_d dV \qquad (2.32)$$

Lembrando-se que:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{y}} = -\frac{\partial \mathsf{V}}{\partial \mathsf{y}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathsf{N}_{\mathsf{i}}}{\partial \mathsf{y}} \mathsf{V}_{\mathsf{i}} \tag{2.33}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial z} V_i$$

$$E^{2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{\partial N_{i}}{\partial x} \frac{\partial N_{i}}{\partial x} + \frac{\partial N_{i}}{\partial y} \frac{\partial N_{j}}{\partial y} + \frac{\partial N_{i}}{\partial z} \frac{\partial N_{j}}{\partial z} \right] V_{i} V_{j}$$
 (2.34)

Portanto:

$$P_{d}^{e} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{V^{e}} \sigma \left[ \frac{\partial N_{i}}{\partial x} \frac{\partial N_{i}}{\partial x} + \frac{\partial N_{i}}{\partial y} \frac{\partial N_{j}}{\partial y} + \frac{\partial N_{i}}{\partial z} \frac{\partial N_{j}}{\partial z} \right] V_{i} V_{j} dV \qquad (2.35)$$

ou ainda:

$$P_{d}^{e} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} G_{ij} V_{i} V_{j}$$
 (2.36)

Matricialmente,

$$\mathsf{P}_\mathsf{d}^\mathsf{e} = [\mathsf{V}^\mathsf{e}]^\mathsf{T}[\mathsf{G}^\mathsf{e}][\mathsf{V}^\mathsf{e}] \tag{2.37}$$

A potência total dissipada, no domínio em estudo, por efeito Joule será dada por:

$$P_{d} = \sum_{e=1}^{NE} P_{d}^{e}$$
 (2.38)

onde NE é o número total de elementos do domínio.

A potência total dissipada, relaciona-se com a resistência de aterramento através da expressão:

$$R_{at} = \frac{V_d^2}{P_d} \tag{2.39}$$

onde  $V_{\rm d}\,$  é a elevação de potencial do ponto de defeito.

#### 3 ESTRUTURA COMPUTACIONAL DO GROUND-3D

O GROUND-3D foi concebido para operar em microcomputadores, com recursos de processamento matemático e unidade de tratamento gráfico.

A linguagem de programação utilizada no seu desenvolvimento foi a linguagem C com o objetivo de ir de encontro à tendência internacional na elaboração de softwares com tecnologia CAD.

Em sua primeira versão, o GROUND-3D é constituído dos seguintes módulos:

#### 3.1 Módulo MESH

O módulo MESH é o módulo responsável pelo pré-processamento. Suas funções são as seguintes:

- Descrição da Geometria: Nesta etapa, realizada no modo gráfico, é definida a geometria do domínio em estudo. A definição da geometria, realizada com recursos da tecnologia CAD, permite desenhar a geometria do sistema de aterramento e definir os limites da região de influência e as cotas das diversas camadas de estratificação.
- Subdivisão da Geometria: Geração assistida de segmentos sobre a geometria do domínio, de modo a se obter uma malha de elementos finitos, com uma

distribuição de elementos que contemple as características físicas do fenômeno estudado.

- Malha de Elementos Finitos: Geração automática da malha de elementos finitos tridimensional, utilizando-se de elementos prismáticos de base triangular. O algorítmo aplicado nesta geração é o de Delaunay, adaptado para as características do sistema de aterramento [23].

#### 3.2 Módulo RESIST

O módulo RESIST do GROUND-3D é o responsável pela atribuição das propriedades físicas do sistema de aterrâmento.

Suas funções compreendem as seguintes etapas:

- **Resistividades do solo**: Atribuição de resistividades às diversas camadas de estratificação do solo.
- Resistividades de camadas finas: Atribuição de resistividades às diversas . camadas condutoras finas e suas respectivas espessuras.
- Resistividades dos condutores: Atribuição de resistividades aos condutores horizontais e hastes verticais e respectivas seções transversais.
- Condições de Contorno: Atribuição das condições de contorno tipo Dirichlet (Potencial Imposto) nas superfícies limítrofes do domínio e ao ponto onde ocorre o defeito. As condições de simetria (Neumann homogênea) são automaticamente impostas.

#### 3.3 Módulo TERRA

O módulo TERRA foi o que exigiu o maior esforço computacional na sua confecção, pois nesta etapa é resolvido o sistema de equações oriundo da formulação matemática do problema pelo Método dos Elementos Finitos.

Sua primeira intervenção no banco de dados, gerado pelos módulos anteriores, é a realização de uma ordenação dos nós da malha de elementos finitos de modo a se reduzir a banda da matriz global. Este procedimento melhora sensivelmente o processo de convergência utilizado na resolução do sistema de equações.

Uma boa gestão da memória disponível é conseguida com a aplicação de um critério de armazenamento, que explora a simetria e a esparsidade do sistema. Este critério consiste em se armazenar apenas os elementos não nulos da semi-banda superior da matriz global.

A aplicação deste critério, detalhadamente explicado por Nabeta [16], reduz ao mínimo a massa de memória necessária para o armazenamento destas informações, o que está possibilitando resolver problemas importantes com recursos computacionais modestos.

O algorítmo utilizado na resolução é o Método dos Gradientes Conjugados com Pré-Condicionamento por Fatorização Incompleta de Cholesky (ICCG). Este algorítmo, implementado na maioria dos softwares com tecnologia CAD/CAE, é

um método semi-iterativo que explora a esparsidade do sistema de equações e que se mostrou muito eficiente na resolução de sistemas de ordem elevada.

Os tempos de processamento encontrados são realmente reduzidos, permitindo ao projetista a análise de várias opções de um mesmo projeto em uma jornada.

Todo o desenvolvimento necessário para a implementação do ICCG, o leitor encontrará em Nabeta [16].

#### 3.4 Módulo EXPLOR

A exploração dos resultados é a etapa mais importante para o usuário, pois é nesta fase que o desempenho do sistema de aterramento é avaliado.

As diversas funções deste módulo compreendem:

- Equipotenciais: Traçado das linhas equipotenciais no plano do solo e em planos paralelos no subsolo. O GROUND-3D fornece o traçado de 20 linhas equipotenciais, de modo que a diferença de potencial entre duas linhas consecutivas é de 5% da elevação do potencial da malha.
- **Gráficos**: Traçado da distribuição de potenciais em um segmento escolhido pelo usuário. Este traçado é efetuado através do cálculo do potencial em 100 pontos, uniformemente espaçados, no segmento de reta definido. A partir deste gráfico são facilmente obtidos os potenciais de toque nos diversos pontos da malha.

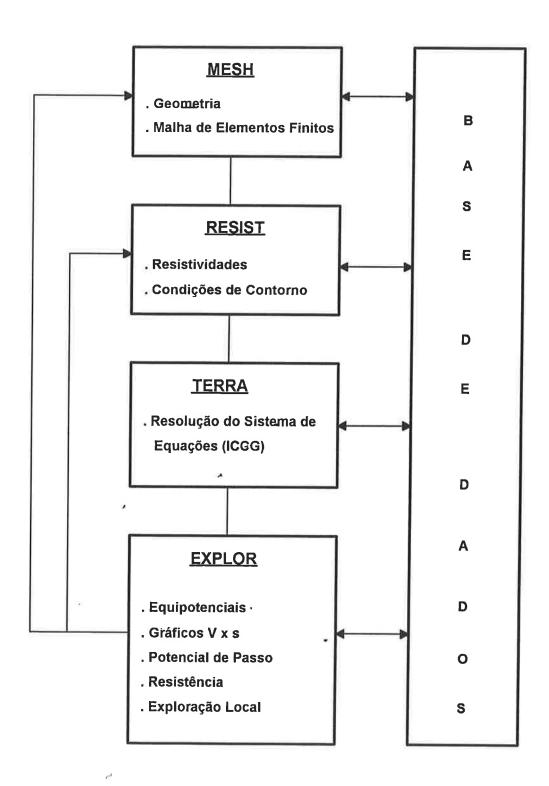


Fig. 3.1 - Estrutura do GROUND-3D

- Exploração Local: Obtenção do potencial e do potencial de passo num ponto de coordenadas fornecidos pelo usuário. A entrada das coordenadas é feita via teclado ou com auxílio de "mouse".
- Potencial de Passo: Coloração da superfície do solo através de uma carta de cores, indicativa da intensidade do potencial de passo na região.
- Resistência de Aterramento: Cálculo da Resistência de Aterramento vista pelo ponto de defeito.

A Figura 3.1 mostra como é realizada a integração dos diversos módulos do GROUND-3D.

# 4 APLICAÇÕES DO GROUND-3D

## 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar alguns casos com o GROUND-3D, com o objetivo inicial de validá-lo; comparar seus resultados com soluções obtidas por outras metodologias; evidenciar os cuidados que o projetista deve tomar na sua utilização e discutir os limites atuais do software face ao sistema operacional utilizado na sua confecção.

A dificuldade da realização de ensaios em campo confiáveis, levou-nos a compará-lo com dois problemas clássicos. O primeiro deles consiste na análise da distribuição de potencial produzida por uma haste enterrada verticalmente em solo homogêneo, cuja solução analítica é facilmente obtida, e um caso de uma malha regular, enterrada em solo estratificado em duas camadas, cujo desempenho é avaliado pelo software SGA do EPRI, que está apresentado no IEEE Std 80<sup>[30]</sup>

## 4.2 Haste vertical em solo homogêneo

Neste caso, vamos analisar a distribuição de potencial, bem como a resistência de aterramento de uma haste condutora enterrada verticalmente num

solo homogêneo de resistividade 300 ohms.m. As dimensões da haste são as seguintes: I = 2,5 m e r = 9,52 mm.

Para esta configuração, a resistência de aterramento desta haste vertical é obtida partir da expressão<sup>[29]</sup> :

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{2l}{r} \tag{4.1}$$

resultando R = 119 ohm.

A expressão analítica que descreve a variação do potencial no plano do solo, para a haste vertical é dada por:

$$V(y) = \frac{V_0}{2 \ln \frac{2l}{r}} \ln \frac{1 + (l^2 + y^2)^{1/2}}{-l + (l^2 + y^2)^{1/2}}$$
(4.2)

onde y é uma direção radial passando pelo centro da haste e é tal que y >r.

A Figura 4.1 mostra um primeiro estudo, onde foi utilizada uma malha com .

1162 nós (6 planos de estratificação) e 1908 elementos.

Os resultados para esta simulação revelaram um perfil de potenciais que diverge bastante da previsão teórica. Na Figura 4.2, podemos fazer uma comparação entre estes resultados.

A propagação deste erro é mais acentuada no cálculo da resistência de aterramento, onde o valor obtido foi de 53,42 ohms.

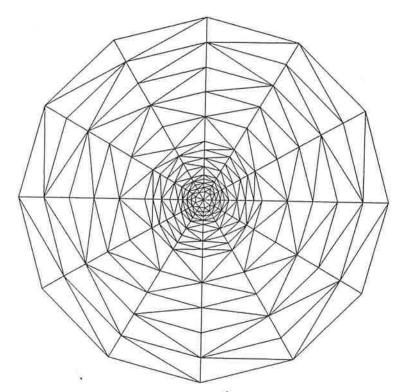


Fig. 4.1 - Malha de Elementos Finitos

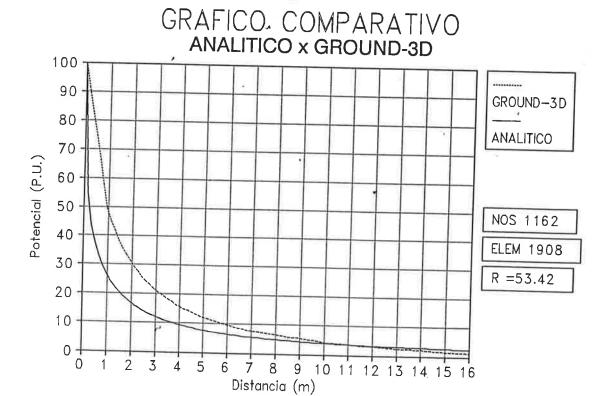


Fig. 4.2 - Perfil de Potenciais

A Figura 4.3 mostra a malha de elementos finitos utilizada numa segunda simulação. Neste caso foram utilizados 1834 nós, com 3060 elementos. Observa-se uma melhor aproximação da previsão teórica no que se refere ao perfil de potenciais, resultando para a resistência de aterramento um valor de 88,43 ohms, ainda inadequada para os nossos objetivos.

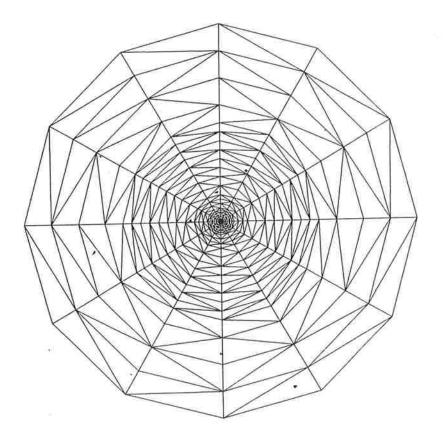


Fig. 4.3 - Malha de Elementos Finitos

A Figura 4.4 mostra o perfil de potenciais obtido nesta simulação, onde pode-se verificar uma melhor aproximação do valor teórico.

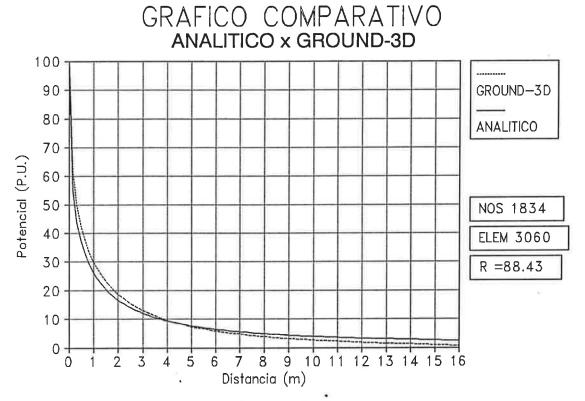


Fig. 4.4 - Perfil de Potenciais

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram a malha de elementos finitos e o perfil de potenciais obtidos numa terceira simulação do mesmo fenômeno. Neste caso foram utilizados 2422 nós, que é o limite atual do GROUND-3D, com 4068 elementos. Pode-se observar nesta situação uma excelente consistência dos resultados, particularmente no que se refere à distribuição de potenciais.

O valor da resistência de aterramento obtido nesta simulação foi de 100,13 ohms, algo em torno de 19% afastado do valor teórico.

A conclusão que se pode chegar é que os resultados são fortemente afetados pela qualidade da malha de elementos finitos, exigindo-se um refinamento substancial nas proximidades da haste.

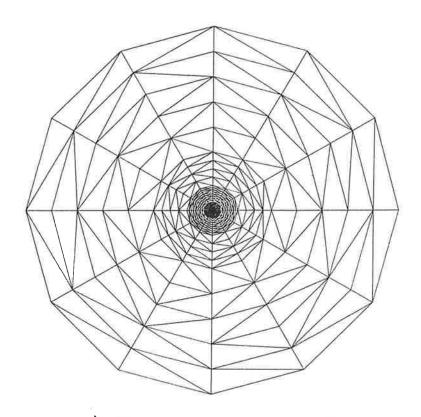


Fig. 4.5 - Malha de Elementos Finitos

# GRAFICO COMPARATIVO ANALITICO x GROUND-3D

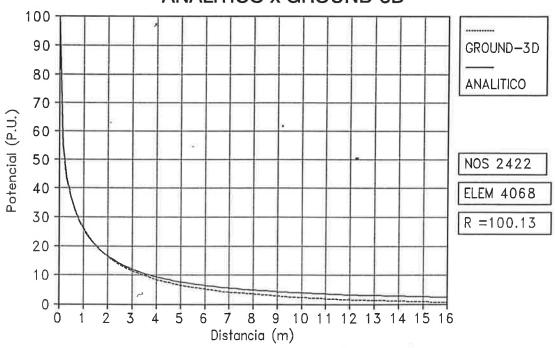


Fig. 4.6 Perfil de Potenciais

Com relação aos limites impostos, o número máximo de nós se deve a utilização do sistema operacional DOS, o qual não possibilita o acesso a um massa de memória básica além dos 640 kB.

No momento estamos investindo na utilização do ambiente WINDOWS, que possibilita o gerenciamento da memória expandida do microcomputador, que permitirá a resolução de problemas realmente complexos com recursos computacionais modestos.

#### 4.3 GROUND-3D versus IEEE-80

O IEEE Std 80<sup>[30]</sup> apresenta, em seu Apêndice A, a simulação de uma malha de terra regular, cujas características são apresentadas na Figura 4.7 que se segue, utilizando um software denominado SGA, desenvolvido pelo EPRI. A formulação utilizada neste pacote não é apresentada, no entanto é um produto consagrado internacionalmente, sendo utilizado pelas grandes empresas de energia elétrica.

Face a simetria da malha, apenas um quarto da mesma pode ser estudada.

A Figura 4.8 mostra uma vista superior do domínio e os planos de estratificação utilizados, o qual foi truncado, de modo a constituir um cilindro de 200m de raio e altura 96,64m. Na face externa deste cilindro, foi imposto potencial nulo, isto é condições do tipo Dirichlet, ao passo que nas faces de simetria a condição de contorno imposta foi do tipo Neumann.

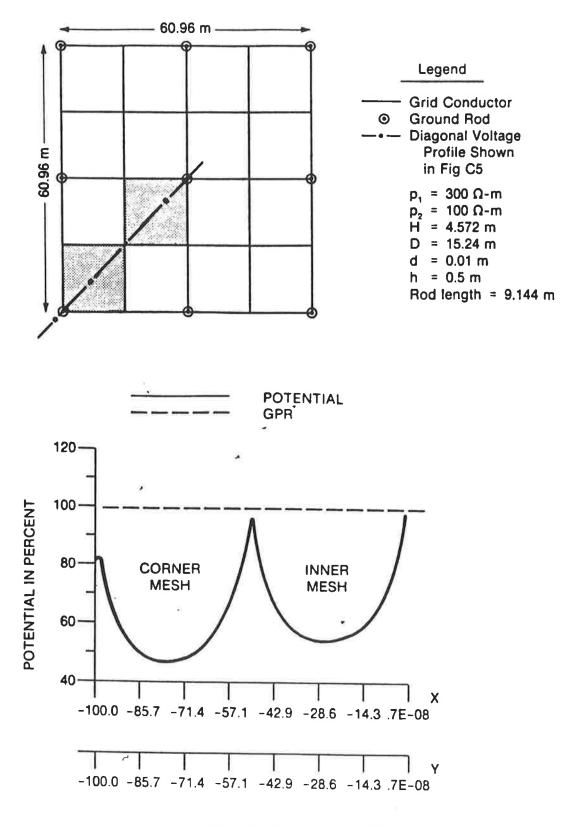
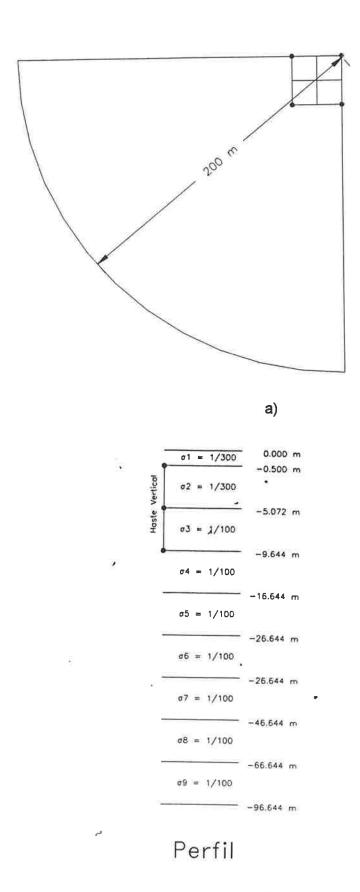


Fig. 4.7 - Caso IEEE-80[30]



b)
Fig. 4.8 - a) Domínio em Estudo ; b) Estratificação do solo

A Figura 4.9 mostra a malha de elementos finitos utilizada, na qual foram definidos 2080 nós, praticamente o limite do GROUND-3D.

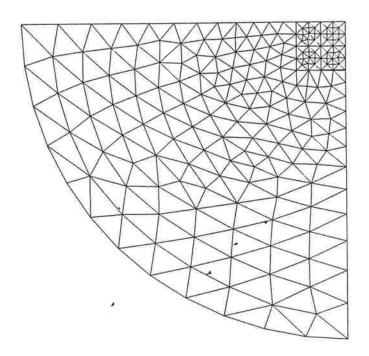
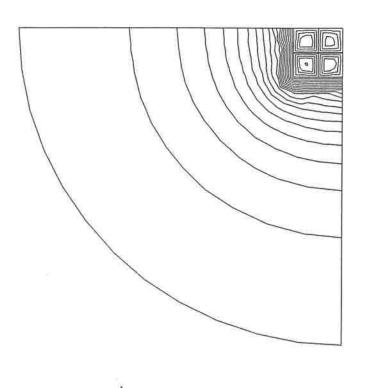
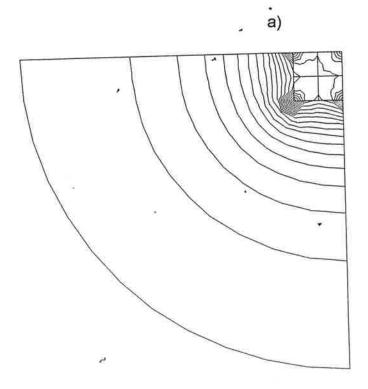


Fig. 4.9 - Malha de Elementos Finitos

A Figura 4.10 apresenta as linhas equipotenciais, distribuídas de modo que a diferença de potencial entre duas linhas consecutivas é constante e igual a 5% da elevação do potencial da malha, no plano do solo, que é a região de real interesse, bem como um mapeamento destas linhas no subsolo, a uma profundidade de 5,072m, para evidenciar os efeitos das hastes verticais.





b) Fig. 4.10 - a) Linhas Equipotenciais no plano do solo (z = 0) b) Linhas Equipotenciais no subsolo (z = -5,072 m)

A Figura 4.11 apresenta o perfil de potenciais obtido através desta simulação em uma linha correspondente à diagonal da malha. Este resultado deve ser comparado com o apresentado na Figura 4.7. Naquela figura, o potencial de toque resultou algo em torno de 50V, enquanto que pelo GROUND-3D, este mesmo valor resultou em 22V aproximadamente.

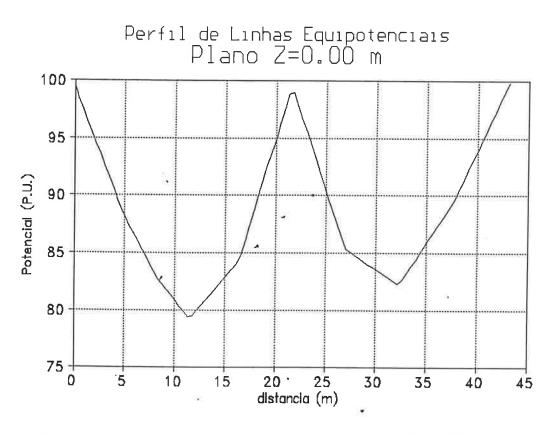


Fig. 4.11 - Perfil de Potenciais - GROUND-3D

Constata-se, neste estudo, uma substancial diferença entre os valores obtidos pelo IEEÉ Std 80 e os obtidos pelos GROUND-3D. Isto pode ser devido às seguintes razões:

- 1. O truncamento do domínio foi inadequado, devendo ser extendido a distâncias maiores;
- 2. Malha de elementos finitos com número reduzido de nós, face às peculiaridades da malha.

Das razões anteriormente expostas, acreditamos que a segunda seja a mais razoável, visto que os limites exteriores do domínio estão suficientemente afastados da malha, de modo a garantir potencial nulo sobre estes limites.

A Figura 4.12 mostra, mediante uma carta de cores, a distribuição do potencial de passo na superfície do solo, para uma corrente de curto-circuito de 2500A. Esta saída é de fundamental importância para o projetista, pois é nesta etapa que podem ser realizadas modificações locais para correção da geometria da malha.

Os métodos analíticos, apresentados pelo IEEE Std 80, não indicam as posições onde o potencial de passo atinge o seu valor máximo, e, no caso de uma violação de seus limites, o projetista é levado a um superdimensionamento da quantidade de cobre a ser utilizada na construção da malha, com reflexos diretos em seu custo.

As considerações finais sobre esta versão do GROUND-3D indicam que a sua capacidade atual, de 2400 nós, é adequada apenas para a solução de pequenos problemas, não sendo possível o dimensionamento de malhas de maior porte. Por outro lado, o sistema operacional DOS, o qual suporta este aplicativo, é muito limitante, razão pela qual estamos investindo, no momento, na sua

implementação através do ambiente WINDOWS, para que se possa ter acesso controlado à memória expandida.

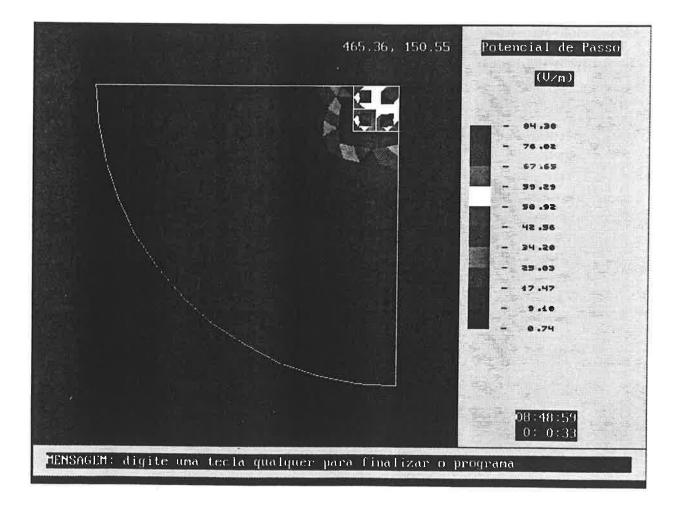


Fig. 4.12 - Distribuição do Potencial de Passo

implementação através do ambiente WINDOWS, para que se possa ter acesso controlado à memória expandida.

Fig. 4.12 - Distribuição do Potencial de Passo

# 5 REPRESENTAÇÃO DO PONTO REMOTO - VERSÃO 2

## 5.1 Considerações

A simulação dos sistemas de aterramento pelo Método dos Elementos Finitos, apresenta um problema que é a exigência de se ter um domínio fechado.

Esta exigência da formulação causa uma série de imprecisões na simulação de fenômenos eletromagnéticos em domínios abertos, como é o caso da difusão da corrente de defeito para o solo condutor sobre o qual o sistema está assentado.

Desta forma, para que a simulação de fenômenos eletromagnéticos em problemas cujo campo se extende ao infinito, pelo Método dos Elementos Finitos, leve a precisões aceitáveis, o truncamento deste deve ser realizado de forma criteriosa.

No presente estudo, como foi apresentado nos capítulos anteriores, o domínio é truncado de modo que a sua maior dimensão seja superior a 6 (seis) vezes a maior dimensão do sistema; tal procedimento garante uma boa solução.

Esta atitude causa um grande inconveniente na geração da malha de elementos finitos, pois uma grande quantidade de elementos é alocada numa região sem interesse, repercutindo em muito na ordem do sistema de equações a ser resolvido.

Em 1989, Freeman<sup>[11]</sup> e Imhoff <sup>[12]</sup>, propuseram transformações de coordenadas para problemas tridimensionais com domínio aberto, de modo que o infinito, mediante tal transformação, reduz-se a um ponto ou a uma linha.

Na proposta que se segue, os conceitos propostos por aqueles pesquisadores são extendidos para o caso tridimensional da análise dos sistemas de aterramento e os resultados obtidos são realmente encorajadores.

## 5.2 Formulação matemática

A Figura 5.1, mostra uma perspectiva e uma vista em corte do domínio em estudo.

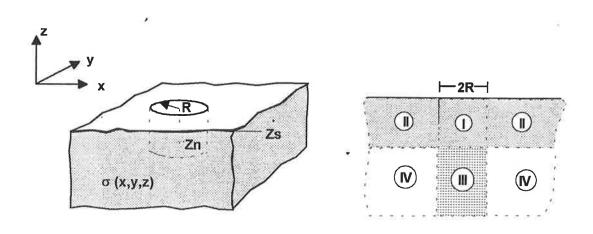


Fig. 5.1 - Domínio em Estudo

Neste domínio, vamos caracterizar 4(quatro) regiões distintas, tais que:

Região I - Região compreendida pelos pontos contidos no cilindro de raio R e altura  $h = z_s - z_n$ . Nesta região está contida toda instalação do sistema de aterramento a ser simulado.

**Região II** - Região compreendida pelos pontos externos à Região I e encerrados entre os planos delimitados pelas cotas  $z_s$  e  $z_n$ .

Região III - Região compreendida pelos pontos contidos no cilindro de raio R e com cotas inferiores a  $z_n$ .

**Região IV** - Região compreendida por todos os pontos externos ao cilindro de raio R e com cotas inferiores a  $z_n$ .

As regiões II, III e IV são aquelas que se extendem ao infinito e a elas vamos aplicar uma transfomação de coordenadas adequada, de modo que o infinito seja caracterizado por uma superfície definida.

# 5.2.1 Transformação na Região II

Nesta região, aplicamos uma transformação de coordenadas tridimensional, cuja relação com o sistema de coordenadas (x,y,z) é dada por:

$$r = \left[\frac{R_1}{d} - \frac{R(R_1 - R)}{d^2}\right] x$$

$$s = \left[\frac{R_1}{d} - \frac{R(R_1 - R)}{d^2}\right] y \tag{5.1}$$

t = z

com  $R_1 > R$  e d =  $(x^2 + y^2)^{1/2} \ge R$ .

Observa-se nesta transformação que para d tendendo ao infinito, resulta  $D=(r^2+s^2)^{1/2}$  tendendo a  $R_1$ . Observa-se também que não há alteração nas coordenadas z.

# 5.2.2 Transformação na Região III

Nesta região, a transformação de coordenadas a ser aplicada é dada por:

$$r = x$$
  
 $s = y$   
 $t = z_1 + \frac{z_n (z_n - z_1)}{z}$ 
(5.2)

$$com \quad z < z_n$$

$$z \neq 0$$

$$d \leq R$$

Observa-se nesta transformação que apenas a cota z é afetada, de modo que para z tendendo ao infinito, resulta  $t=z_1$ .

# 5.2.3 Transformação na Região IV

Nesta região, a transformação de coordenadas a ser aplicada é uma combinação das anteriores, de modo que as três coordenadas são afetadas. Esta transformação é a seguinte:

$$r = \left[\frac{R_1}{d} - \frac{R(R_1 - R)}{d^2}\right] x$$

$$s = \left[\frac{R_1}{d} - \frac{R(R_1 - R)}{d^2}\right] y \tag{5.3}$$

$$t=z_1+\frac{z_n(z_n-z_1)}{z}$$

com

$$Z \leq Z_n$$

$$z \neq 0$$

Alocando-se o sistema de referência (r, s, t), coincidente com o sistema (x,y,z), o mapeamento das regiões II, III e IV neste novo sistema de referência é tal que o "ponto remoto" (x, y, z)  $\rightarrow \infty$  será representado por uma superfície cilíndrica de raio  $R_1$  e altura  $z_s$  -  $z_1$ , como mostra a Figura 5.2.

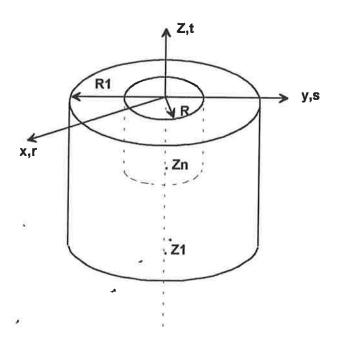


Fig. 5.2 - Domínio Transformado

Esta contração do domínio é muito conveniente, pois elimina os problemas de delimitação, muitas vezes subjetiva e arbitrária, como ocorre na versão 1.

## 5.2.4 O MEF no domínio transformado

Para o cálculo do elemento genérico da matriz do elemento, o ponto de partida é a forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados, dada por:

$$\int_{\Delta} \sigma \nabla W_0 . \nabla V \, dx \, dy \, dz = 0 \tag{5.4}$$

Definindo o operador:

$$D_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$
 (5.5)

A equação (5.4) pode ser escrita como segue:

$$\int_{\Delta} \sigma D_{xyz}^{T} W_{0} D_{xyz} V dx dy dz = 0$$
 (5.6)

onde já está implícito que a técnica de escolha das funções de aproximação é a de Galerkin.

De modo análogo, definimos o operador:

$$D_{rst} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}$$
 (5.7)

A relação entre os operadores D<sub>rst</sub> e D<sub>xyz</sub> é dada por:

$$D_{xyz} = J D_{rst}$$
 (5.8)

onde J é o Jacobiano da transformação de coordenadas e expresso por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix}$$
(5.9)

Por outro lado, demonstra-se que:

$$dx dy dz = |J^{-1}| dr ds dt (5.10)$$

onde  $\left|J^{-1}\right|$  é o módulo do determinante da inversa do Jacobiano da transformação de coordenadas.

Assim sendo, reescrevendo (5.6) em função das coordenadas do novo sistema de referência, resulta:

$$\int_{\Delta_t} D_{rst}^T W_0 \sigma_t D_{rst} V dr ds dt = 0$$
 (5.11)

onde

$$\sigma_{t} = J^{\mathsf{T}} \sigma J |J^{-1}| \tag{5.12}$$

Comparando-se o resultado obtido em (5.11) com o obtido em (5.6) observa-se que o aspecto formal de ambas equações integrais é idêntico.

Assim sendo, podemos admitir, que no domínio transformado, a equação que governa o fenômeno pode ser expressa como segue:

$$\nabla' \cdot \sigma_t \, \nabla' \, V = 0 \tag{5.13}$$

onde

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial}{\partial s} \vec{u}_s + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_t$$

Esta equação é a equação de difusão em um meio contínuo e anisotrópico, visto que neste caso a condutividade tem uma característica tensorial.

Desta forma, podemos aplicar as mesmas funções de interpolação utilizadas no domínio original para o domínio transformado, isto é:

$$V = \sum_{i=1}^{6} N_{i} (r, s, t) V_{i}$$

$$W_{0} = \sum_{j=1}^{6} N_{j} (r, s, t) \delta V_{j}$$
(5.14)

Substituindo-se (5.14) em (5.11) e seguindo-se o mesmo procedimento indicado no Capítulo 2, resulta para o elemento genérico da matriz do elemento no domínio transformado a expressão:

$$G_{ij}^{e} = \int_{\Delta_{t}} D_{rst}^{T} N_{i} \sigma_{t} D_{rst} N_{j} dr ds dt$$
 (5.15)

# 5.2.5 Cálculo dos Elementos do Jacobiano

Na sua forma geral, a matriz Jacobiano da transformação de coordenadas, independentemente da região considerada é do tipo:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 \\ J_2 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}$$
 (5.16)

visto que, face à símetria da transformação resulta, sempre:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial y} = 0$$

A análise a ser desenvolvida será aplicada à Região IV, visto que nesta região a transformação é a mais geral possível.

A transformação aplicada na Região IV tem a sua inversa dada por:

$$x = \frac{R(R_1 - R)}{D(R_1 - D)} r$$

$$y = \frac{R(R_1 - R)}{D(R_1 - D)} s$$

$$z = \frac{Z_n(Z_n - Z_1)}{t - Z_1}$$
(5.17)

Derivando-se (5.3) em relação às coordenadas correspondentes e utilizando-se dos resultados obtidos em (5.17) resulta, após alguns desenvolvimentos:

$$J_{1} = K_{1} \cos^{2}\theta + K_{2} \sin^{2}\theta$$

$$J_{2} = (K_{1} - K_{2}) \sin\theta \cos\theta$$

$$J_{3} = K_{2} \cos^{2}\theta + K_{1} \sin^{2}\theta$$

$$J_{4} = -\frac{(t - Z_{1})^{2}}{Z_{1}(Z_{1} - Z_{1})}$$
(5.18)

onde

$$K_1 = \frac{2(R_1 - D)^2}{R(R_1 - R)}$$

$$K_2 = \frac{R_1 (R_1 - D)}{R (R_1 - R)}$$

$$\cos\theta = \frac{\Gamma}{D}$$

$$sen\theta = \frac{s}{D}$$

Para as demais regiões, obtemos:

# . Região II

$$J_1 = K_1 \cos^2\theta + K_2 \sin^2\theta$$

$$J_2 = (K_1 - K_2) \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$J_3 = K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta$$

$$J_4 = 1$$

# . Região III

$$J_1 = 1$$

$$J_2 = 0$$

$$J_3 = 1$$

$$J_4 = -\frac{(t-Z_1)^2}{Z_n(Z_n-Z_1)}$$

Observa-se também que a Região I, que é a região de real interesse, é um caso particular da transformação de coordenadas propostas, onde:

$$J_1 = J_3 = J_4 = 1$$

$$J_{2} = 0$$

# 5.3 As condições de contorno.

As condições de contorno, no domínio transformado, exigem algumas reflexões face a transformação de coordenadas implementadas.

No que se refere às condições de Dirichlet, a variável de estado é imposta em alguns pontos da superfície que delimita o domínio. Como o valor da variável não é afetado pela transformação, este mesmo valor é imposto no ponto devidamente transformado.

Com relação às condições de Neumann, algumas considerações devem ser feitas, pois neste caso é especificado o valor da derivada normal na superfície.

No domínio original, a variável de estado procurada deve satisfazer:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla V = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$V = \overline{V}$$
 em  $S_1$  (5.19)

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$
 em  $S_2$ 

onde S =  $S_1$  +  $S_2$  é a superfície externa que delimita o domínio  $\Omega$ .

A solução de (5.19) pode ser obtida de forma indireta, através do cálculo do extremo de uma funcional, com relação a variável de estado, tal que (5.19) seja a Equação de Euler a ela associada<sup>[14]</sup>.

Assim sendo, podemos demonstrar que a funcional<sup>[14]</sup>, cujo extremo satisfaz (5.19), é dada por: ,

$$F = \int_{\Omega} [\nabla V].[\sigma \nabla V] d\Omega$$
 (5.20)

Aplicando a transformação proposta a funcional (5.20), obtemos, em termos das coordenadas do domínio transformado, o que se segue:

$$F = \int_{\Omega_{tr}} \left[ \nabla' V' \right] \cdot \left[ \sigma_t \nabla' V \right] d\Omega_{tr}$$
 (5.21)

onde V' é V mas dependente de r, s, t.  $\nabla'$  é operador nabla relativo ao novo sistema de coordenadas. O tensor  $\sigma_t$  é aquele expresso em (5.12).

Por raciocínio inverso, a equação de Euler associada a funcional (5.21) é dada por:

$$\nabla'$$
 .  $\sigma_t \nabla' V' = 0$  em  $\Omega_{tr}$ 

$$V' = \overline{V}$$
 em  $S_{1 tr}$ 

$$\sigma_t \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$
 em  $S_{2tr}$ 

Desta forma, verifica-se que as imposições das condições de contorno no domínio transformado são feitas de forma idêntica as realizadas para o domínio original.

## 6 GROUND-3D VERSÃO 2.0 x IEEE-80

## 6.1 Introdução

Neste capítulo, vamos novamente simular a malha de terra estudada no Capítulo IV, utilizando desta vez a formulação matemática desenvolvida no capítulo anterior.

O ambiente computacional utilizado neste aplicativo foi o determinante no desenvolvimento desta nova formulação, visto que com esta metodologia, as dimensões do domínio são reduzidas ao máximo.

Os resultados obtidos são realmente encorajadores, como veremos a seguir.

## 6.2 Análise do caso IEEE-80

A Figura 6.1, mostra a geometria do domínio, no qual apenas um quarto da malha foi modelada, face a simetria estabelecida.

A região julgada de interesse está encerrada num cilindro de raio 60 metros e profundidade 26,64 metros, centrado no centro geométrico da malha. A parte do domínio no qual foi aplicada a transformação está contido na coroa

cilíndrica de raios 60 e 90 metros e altura 96,64 metros, locado na base da região de interesse.

A Figura 6.2 mostra a malha de elementos finitos utilizada nesta simulação. Notamos um detalhamento mais acentuado na região de interesse, ou seja nas proximidades da malha de terra. O número de nós resultante foi de 2200, praticamente o limite do GROUND-3D, com 10 planos de estratificação.

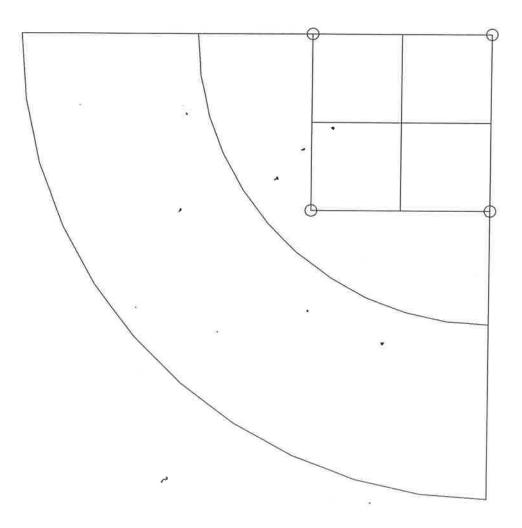


Fig. 6.1 - Domínio em estudo

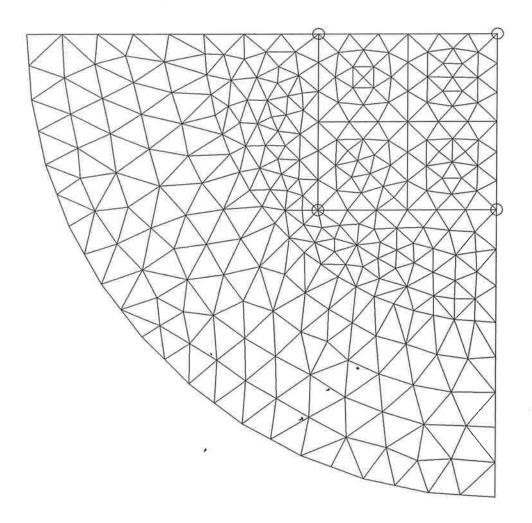


Fig. 6.2 - Malha de elementos finitos

A Figura 6.3 apresenta as equipotenciais obtidas no plano do solo, desenhadas apenas na região de interesse. O detalhamento neste caso é bem mais adequado e leva a uma maior precisão dos resultados, como veremos a seguir.

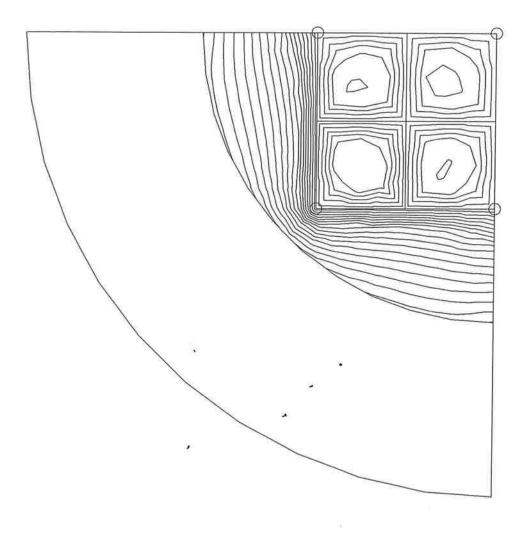


Fig. 6.3 - Equipotenciais (plano do solo)

A Figura 6.4 apresenta as equipotenciais no subsolo, num plano situado a 5.072 m de profundidade. A finalidade da apresentação desta figura é a de evidenciar os efeitos das hastes verticais.

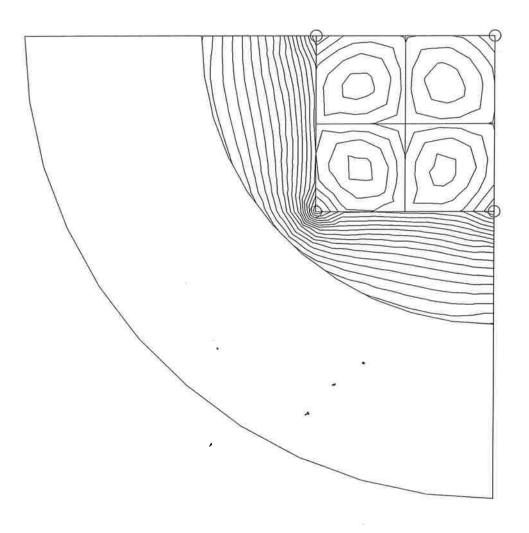


Fig. 6.4- Equipotenciais (subsolo)

A Figura 6.5 mostra o perfil de potenciais na diagonal da malha. Comparando este resultado com o obtido pelo software SGA do EPRI, observa-se uma melhor concordância entre ambos, particularmente no que se refere ao potencial de toque no centro da malha.

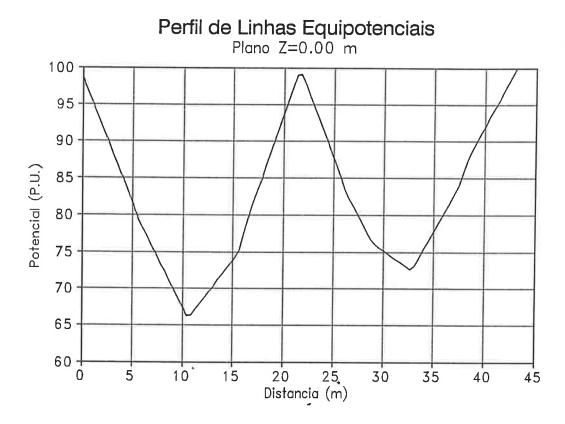


Fig. 6.5 - Perfil de potenciais (plano do solo)

A Figura 6.6 apresenta a carta de cores graduada, em termos do potencial de passo, para uma corrente de curto-circuito de 2500A.

A seguir apresentamos um quadro comparativo entre os resultados de maior interesse, obtidos pelas duas metodologias com os obtidos pelo SGA, bem como os tempos de processamento do módulo TERRA, responsável pela solução do sistema de equações oriundo da formulação pelo Método dos Elementos Finitos.

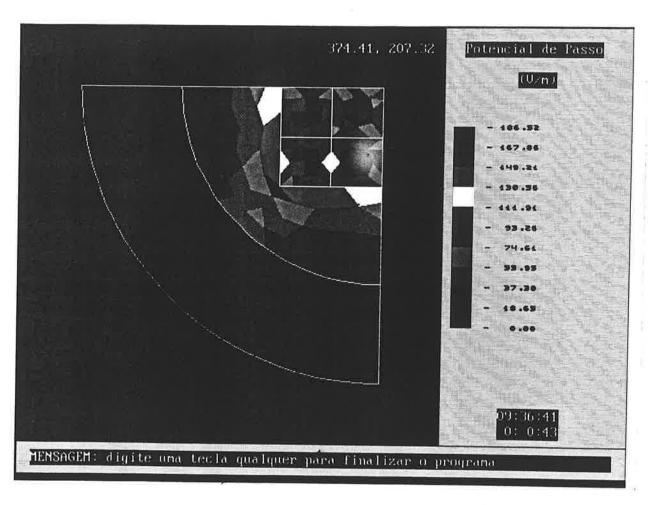


Fig. 6.6 - Distribuição do potencial de passo

# QUADRO COMPARATIVO - CASO IEEE-80 GROUND-3D

	Versão 1.0	Versão 2.0	SGA/EPRI
No. de Nós	2080	2200	-
No. de Elementos	3300	3375	-
No. de Planos	10	10	-
V <sub>toque</sub>	22 V	34 V	~ 50 V
Resistência	0,6	0,5	1,1
Tempo (min)*	35	42	-

<sup>\*</sup>Tempo obtido com IBM-PC 486, 33MHz.

Fig. 6.6 - Distribuição do potencial de passo

# QUADRO COMPARATIVO - CASO IEEE-80 GROUND-3D\*

	Versão 1.0	Versão 2.0	SGA/EPRI
No. de Nós	2080	2200	-
No. de Elementos	3300	3375	-
No. de Planos	10	10	-
V <sub>toque</sub> .	22 V	34 V	~ 50 V
Resistência	0,6	0,5	1,1
Tempo (min)*	35	42	-

<sup>\*</sup>Tempo obtido com IBM-PC 486, 33MHz.

Como conclusão extraída do quadro comparativo anteriormente apresentado, observa-se que a transformação matemática permitiu um melhor detalhamento da região de interesse, para (aproximadamente) um mesmo número de nós utilizado na primeira versão. Como consequência, conseguimos uma boa aproximação do perfil de potenciais obtido pelo SGA/EPRI, tomado como referência. No entanto, o valor da resistência de terra obtido via GROUND-3D está muito afastado daquele obtido pelo EPRI. Isto se deve, essencialmente, a ainda precária qualidade da malha de elementos finitos utilizada, face as limitações do sistema operacional. A possibilidade da utilização da expansão da memória, através de outro ambiente computacional, que permita atingir limites a ordem de 30.000 nós, garantirá uma simulação com extrema precisão.

# 7 CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

### 7.1 Conclusão

Como conclusão deste trabalho pudemos constatar que o Método dos Elementos Finitos pode se tornar uma ferramenta definitiva para a simulação de sistemas de aterramento, face a versatilidade que este apresenta. É possível com este método simular sistemas de aterramento assentados em solo de múltiplas camadas, bem como sistemas multiaterrados, com suas malhas interligadas ou não. A possibilidade de modelar aterramentos com geometria genérica, possibilita ainda a análise dos efeitos de transferência de potencial a aterramentos naturais, normalmente não considerados nas demais formulações analíticas ou mesmo numéricas.

A exigência para a garantia de um bom resultado está vinculada a qualidade da malha de elementos fintios, particularmente na obtenção do valor da resistência de aterramento, que é fortemente afetada pela qualidade desta. Para resolver este problema, deverão ser aplicados recursos computacionis avançados, não só de software, através da utilização de rotinas especiais que contemplem um tratamento especializado dos dados e um técnica de comunicação homem x máquina eficiente, extraída de uma engenharia de software de alto nível, como também recursos adequados de hardware, para

suportar a grande massa de dados de entrada e gerados durante o processo de concepção do projeto, como também deve ser dotado de recursos gráficos para uma melhor e mais rápida simulação do fenômeno em estudo.

#### 7.2 Desenvolvimentos futuros

A experiência adquirida no desenvolvimento do GROUND-3D permitiu avaliar as necessidades para torná-lo mais eficiente e preciso. Para atingir estes objetivos, dois caminhos serão seguidos. O primeiro deles, mais imediato, consiste em utilizar um ambiente computacional que possibilite o acesso à memória expandida do micro-computador, limitada fortemente pelo sistema operacional DOS, utilizado neste desenvolvimento. Para tal, duas formas se apresentam, a primeira consiste na mudança do sistema operacional, utilizando o sistema UNIX por exemplo, e uma segunda possibilidade consiste na utilização do ambiente WINDOWS, que foi a opção adotada pela facilidade de implementação, face a sua popularidade junto a comunidade técnica e um suporte efetivo da MICROSOFT no desenvolvimento deste aplicativo.

A outra possibilidade, esta um pouco mais demorada, consiste na implementação do GROUND-3D em estações de trabalho de alto desempenho. Esta opção também está sendo implementada nas estações gráficas SUN, obtidas pelo nosso grupo de pesquisas junto a FAPESP, nas quais é utilizado o

sistema operacional UNIX, o que possibilitará a simulação de sistemas de aterramento de grandes dimensões.

Com relação a simulação de outros fenômenos presentes em sistemas de aterramento, tais como os efeitos de surto atmosféricos e fenômenos associados a interferência eletromagnética, fazem parte do horizonte de estudos da equipe de simulação de fenômenos eletromagnéticos, e exigirão esforços coordenados de uma equipe realmente motivada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CARDOSO, J.R. O método dos elementos finitos aplicado à determinação da resistência de aterramento. In: SEMINÁRIO SOBRE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS COM MÉTODOS NUMÉRICOS. Santo André, 1985. Anais. Santo André, Jun. 1985.
- [2] CARDOSO, J.R.; RIBEIRO, F.S.; GAMBIRÁSIO, G. Análise de sistemas de aterramento pelo método dos elementos finitos. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA A ENGENHARIA, 7, São Carlos, 1986. Anais. São Carlos, Nov. 1986.
- [ 3] CARDOSO, J.R.; RIBEIRO, F.S.; GAMBIRÁSIO, G. Um procedimento versátil para o cálculo de malhas de terra pelo método dos elementos finitos. In: JORNADA DE INGINIERIA ELECTRICA E ELECTRÔNICA. Quito, 1987. Anais. Quito, 1987.
- [4] CARDOSO, J.R.; RIBEIRO, F.S.; GAMBIRÁSIO, G. O método dos elementos finitos no modelamento de sistemas de aterramento em solos de múltiplas camadas. In: ŞEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA, 9. Belo Horizonte, 1987. SNPTEE: anais. Belo Horizonte, 1987.
- [5] CARDOSO, J.R. Finite element modelling of ground systems. In: BIENNIAL IEEE CONFERENCE ON ELECTROMAGNETIC FIELD COMPUTATION, 3. Washington, 1987. CEFC: proceedings. Washington, 1987.
- [6] CARDOSO, J.R.; LEBENSZTAJN, L.; ANTONIO, J.M. Geração automática de elementos: uma experiência com a triangulação de Delaunay. In: SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO SOBRE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS, 2, São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, EPUSP, Mar. 1989.
- [7] CARDOSO, J.R.; RIBEIRO, F.S.; GAMBIRÁSIO, G. Determinação da distribuição de potenciais em tubulações metálicas enterradas pelo MEF. In: SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO SOBRE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS, 2, São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, EPUSP, Mar. 1989.
- [8] CARDOSO, J.R. La méthode des elements finis dans les etudes de prises de terre. Rapport LEG/ENSIEG INPG-Grenoble, França-Jun. 88.

- [9] CARDOSO, J.R.; OLIVEIRA, J.C.M.B. GROUND-3D: Um sistema CAD/CAE para análise de Sistemas de aterramento. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA, 11. Rio de Janeiro, 1991. SNPTEE: anais. Rio de Janeiro, 1991.
- [10] CARDOSO, J.R.; OLIVEIRA, J.C.M.B. GROUND-3D: A FEM CAD/CAE system for ground systems analysis. In: BIENNIAL IEEE CONFERENCE ON ELECTROMAGNETIC FIELD COMPUTATION, 5. Los Angeles, 1992.
  CEFC: proceedings. Los Angeles, 1992.
- [11] FREEMAN, E.M.; LOWTHER, D.A. An open boundary technique for axisymmetric and 3D magnetic and electric fields problems. IEEE Transactions on Magnetics, v.25, n.5, p.4135-37, Oct. 1989.
- [12] IMHOFF, J.F. Modelisation magnetique et mecanique des machines electriques par la methode des elements finis. Grenoble, 1989. 120p. Thèse (Docteur) Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [13] BRUNOTTE, X.; MEUNIER, G.; IMHOFF, J.F. Finite element modelling of umbounded problems using transformations; a rigorous, powerfull and easy solution. In: CONFERENCE ON THE COMPUTATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS, 8. Sorrento, 1991. COMPUMAG: proceedings. Sorrento, 1991.
- [14] SABONNADIERE, J.C.; COULOMB, J.L. Elements finis et CAO. Paris, Hermes, 1986.
- [15] HOOLE, S.R.H. Computer-aided analysis and design of electromagnetic devices. New York, Elsevier, 1989.
- [16] NABETA, S.I. Solução de problemas magnetostáticos com a utilização do ICCG. São Paulo, 1990. 67p. Dissertação (Mestrado) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [17] CARDOSO, J.R. **Problemas de campos eletromagneticos estáticos e dinâmicos:** uma nova abordagem pelo método dos elementos finitos. São Paulo, 1985. 159p. Tese (Doutorado) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [18] VIOLA, JC.; NETO, A.R. How to apply the FEM to win the large green. Int. J. of Hoak Faithful, Little Farm. 1984.
- [19] STOCHNIOL, A. A general transformation for open boundary finite element method for electromagnetic devices. In: CONFERENCE ON THE

- COMPUTATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS, 8. Sorrento, 1991. COMPUMAG: proceedings. Sorrento, 1991.
- [20] RISLER, J.J. Methodes mathematiques pour la CAO. Paris, Masson, 1991.
- [21] BASTOS, J.P.A. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. Florianópolis, Editora da UFSC, 1989.
- [22] SILVESTER, P.P.; FERRARI, R.L. Finite element for electrical engineers. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.
- [23] COULOMB, J.L. Maillages 2D et 3D. La triangulation de Delaunay. In: SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO SOBRE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS, 2. São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, EPUSP, Mar. 1989.
- [24] PORTELA, C. Interação entre fenômenos elétricos, térmicos e eletrosmóticos em eletrodos de sistema de corrente contínua. In: SIMPÓSIO FRANCO-BRASILEIRO SOBRE CÁLCULO DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS, 2. São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, EPUSP, Mar. 1989.
- [25] TUMA, J.J. Handbook of numercal calculations in engineering. New York, MacGraw Hill, 1989.
- [26] MESQUITA, R.C. Método dos gradientes conjugados com précondicionamento na solução de sistemas de equações geradas por elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ELETRO-MAGNETISMO APLICADO, Belo Horizonte, 1992. Anais. Belo Horizonte, PUC/MG, Jun. 1992.
- [27] CLABUNDE, D.R.F. LMAG-2D: Um software de elementos finitos 2D para cálculo de campos eletromagnéticos. Dissertação (Mestrado). / A ser defendida na Escola Politécnica, Universidade de São Paulo /
- [28] MACHADO, J.M. LMAG-3D: Um software CAD/CAE para eletromagnetismo baseado no método dos elementos finitos. Tese (Doutorado). / A ser defendida na Escola Politécnica, Universidade de São Paulo /
- [29] ORSINI, L.Q. Eletromagnetismo. EPUSP/1989 Apostila do curso.
- [30] ANSI/IEEE Std 80 -1986 IEEE Guide for safety in AC substation grounding-Pub. by IEEE. New York, John Wiley, 1986.