

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

LINDA LEE HO

CONTRIBUIÇÕES EM CONTROLE ESTATÍSTICO
DE PROCESSO E CONFIABILIDADE

Texto de sistematização crítica de parte da obra da candidata apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para o Concurso de Livre-docência.

Área: Qualidade e Engenharia de Produto
Departamento: Engenharia de Produção.

SÃO PAULO
FEVEREIRO DE 2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Ho, Linda Lee

Contribuições em controle estatístico de processo e confiabilidade / L.L. Ho. – São Paulo, 2006.

163 p.

Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

**1.Controle estatístico de processo 2.Confiabilidade 3.Control
on-line de processo 4.Índice de capacidade 5.Prazo
de prateleira 6.Confiabilidade estrutural 7.Métodos bayesianos
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia de Produção II. t.**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



REITORIA

Proc. USP nº 90.1.837.3.4
Portaria nº 1650
1891/vfm

A REITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, usando de suas atribuições legais, **EXPEDE** a presente Portaria para declarar que tendo LINDA LEE HO, Professor Doutor, ref. MS-3, do QDUSP-PG, em Regime de Dedicção Integral à Docência e à Pesquisa, lotada na Escola Politécnica (Departamento de Engenharia de Produção), obtido o título de Livre-Docente, conforme elementos constantes do Processo USP nº 90.1.837.3.4, fica, a contar de 19/09/2006, designada para exercer a função de Professor Associado, ref. MS-5, do mesmo Quadro, Parte, Regime e Lotação, nos termos do artigo 84 do Estatuto da Universidade de São Paulo.

28 SET 2006

Reitoria da Universidade de São Paulo,

SUELY VILELA
REITORA

Por Delegação da M. Reitora
Art. 42 do Estatuto da USP
FRANCO MARIA LAJOLA
Vice-Reitor

*Ao meu marido José Alberto,
Aos meus filhos Marcelo e Daniel,
À minha Mãe.*

Agradecimentos

- A Fapesp pelo financiamento do projeto de pesquisa;
- Aos Professores e amigos Osiris Turnes, Roberto Quinino e Marta A. Freitas pelos incentivos e sugestões;
- Ao Prof. José Alberto Quintanilha, pelo apoio;
- Aos meus ex-orientados: Vitor, Gladys, Bulba, Aldy, Pledson, Amazoneida, Carlos;
- Ao meu atual orientado Anderson pela MAX ajuda;
- Aos professores e amigos do Departamento de Engenharia de Produção, pelo apoio e insistência.

Resumo

Este texto de sistematização crítica descreve sobre as contribuições em controle estatístico de qualidade. Embora este tema seja bastante vasto, as atividades de pesquisas e produtos estão concentradas em dois assuntos: controle estatístico de processo e confiabilidade. Em relação ao controle estatístico de processo, estão detalhadas algumas contribuições sobre controle *on-line* de processos (por atributos e por variáveis) e índices de capacidade. Em relação ao tema confiabilidade, estão os resultados sobre correção de vício em estimadores de tempo médio de falha; proposição de modelos para determinação de prazo de prateleira em alimentos desidratados e procedimentos inferenciais bayesianos da confiabilidade estrutural.

O uso das técnicas da estatística clássica e das simulações (para suprir resultados aproximados quando os analíticos forem difíceis de serem obtidos ou para confirmar resultados teóricos) foram ferramentas comuns empregadas na maioria das atividades aqui descritas.

Palavras-chave: controle estatístico de qualidade; controle estatístico de processo, controle *on-line* de processos; índices de capacidade; confiabilidade; prazo de prateleira; confiabilidade estrutural; métodos bayesianos.

Abstract

Here contributions about statistical quality control are related. As many topics are related to this subject, the described results are concentrated mainly on two themes: statistical process control and reliability. About statistical process control, they are concerning on-line process control (for attributes and for variables) and capability indices. About reliability, contributions about bias corrections of mean time to failure estimator and percentiles; models to determine shelf life for dehydrated food and Bayesian inferential procedure for structural reliability are depicted.

The usage of classical statistical methods and simulations (to provide approximate results when the analytical ones are difficult to obtain or to confirm some theoretical results) are present in most of results.

Key-words: Statistical quality control; statistical process control; on-line process control; shelf life model; reliability; structural reliability; capability index, Bayesian methods.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
2 Controle <i>on-line</i> de processos por atributos e por variáveis	7
2.1 Introdução	7
2.2 Controle <i>on-line</i> de processos por atributos	8
2.2.1 Modelos de Taguchi e Naybepour & Woodall	8
2.2.2 Controle <i>on-line</i> de atributos com erros de classificação	10
2.2.3 Controle de processo <i>on-line</i> por atributos com erros de classificação e classificações repetidas	12
2.2.4 Exemplo Numérico	24
2.3 Controle <i>on-line</i> de processo por variáveis	30
2.3.1 Controle <i>on-line</i> de processo por variáveis – proposição de Taguchi	30
2.3.2 Uma abordagem alternativa para o controle <i>on-line</i> de processo por variáveis	33
2.3.3 Função perda L_P	38
2.3.4 Exemplo numérico do novo procedimento.	41
2.A Função de distribuição de ξ	46
2.B Número esperado de itens não conforme	48

2.B.1	$f(k, j)$, para $0 \leq j < km$ e $k \geq 1$	50
2.B.2	$f(k, j)$ para $km \leq j < km + l$	51
2.B.3	$f(k, j)$ para $j \geq km + l$	52
3	Índices de Capacidade	53
3.1	Introdução	53
3.2	Índice de capacidade não paramétrico de Clements (procedimentos inferenciais)	55
3.3	Índice de capacidade para processos normais auto-correlacionados (procedimentos inferenciais através da reamostragem: <i>bootstrap</i>)	63
3.4	Índices de capacidade para variável de resposta não observável, mas é função conhecida de variáveis de entrada (procedimentos inferenciais).	74
3.5	Índice de capacidade para processos assimétricos proposto por Boyle (procedimentos inferenciais)	81
3.6	Índices de capacidades para processos não normais calibrados com a fração não conforme.	92
4	Confiabilidade: Contribuições em procedimentos inferenciais	105
4.1	Introdução	105
4.2	Correção de vício nos estimadores de percentis e do tempo médio de vida num modelo de regressão Weibull	107
4.3	Modelos de prazo de prateleira	124
4.4	Confiabilidade estrutural: procedimentos bayesianos	134
4.A	Modelo de Prazo de Prateleira: Expressões das primeiras e segundas derivadas.	150
5	Considerações finais	153
	Referências Bibliográficas	155

Lista de Figuras

2.1	Sistema de inspeção com classificações repetidas.	13
2.2	Custo versus m - sem erro de classificação.	25
2.3	Custo versus m - com e sem erro de classificação.	26
2.4	Custo versus m sem restrição ao número de repetições.	26
2.5	Custo versus m sem restrição ao número de repetições e critério.	27
2.6	Descrição do processo de inspeção.	34
2.7	$E(\xi)$ versus d , fixando $p = 0,02; 0,1; 0,2$ e $0,5$, $\varepsilon = 0,1$ e $m = 10$	37
2.8	Função perda de Taguchi e proposta para $\varepsilon = 0,1$; $d = 3$; $p = 0,05$ e $\Delta = 3,5$	44
3.1	Comportamento do índice e correlação em função dos valores de q	61
3.2	Distribuição empírica versus à amostral aproximada.	62
3.3	Modelos AR(1) e AR(2): Valores de EQM em função do tamanho da amostra.	70
3.4	Modelos MA(1) e MA(2): Valores de EQM em função do tamanho da amostra.	72
3.5	Modelo ARMA(1,1)- EQM para C_p e C_{pk}	72
4.1	Valores médios das estimativas de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e dos percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e dados censurados tipo I).	120
4.2	Raiz quadrada do erro quadrático médio dos estimadores de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e dados censurados tipo I).	121
4.3	Valores médios das estimativas de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e dos percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e 25% dados censurados tipo I).	122

4.4	Raiz quadrada do erro quadrático médio dos estimadores de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e 25% dados censurados tipo I).	123
4.5	Estimativas bayesianas e limites de confiança de p_r	142

Lista de Tabelas

2.1	Distribuição de Probabilidade de V e T.	18
2.2	Resumo dos resultados do exemplo numérico.	27
2.3	Determinação de m^o , r^o , w^o e $E[K]$ para a variação individual dos parâmetros do modelo.	28
2.4	Intervalos ótimos de inspeção fixando limites de controle	42
2.5	Limites ótimos de controle fixando intervalo de inspeção.	42
2.6	Valores ótimos de (m, d) para $\Delta = 3,5$ e $4,5$	43
3.1	Parâmetros das distribuições.	60
3.2	Valor dos parâmetros das séries temporais utilizadas nas simulações.	65
3.3	Modelo AR(1) - Limite inferior dos intervalos de confiança.	69
3.4	Modelo AR(2): Limite inferior dos intervalos de confiança.	69
3.5	Modelo MA(1): Limite inferior dos intervalos de confiança.	70
3.6	Modelo MA(2): Limite inferior dos intervalos de confiança.	71
3.7	Modelo ARMA(1,1): Limite inferior dos intervalos de confiança.	73
3.8	Proporção de cobertura dos intervalos de confiança	80
3.9	Resultados da simulação.	86
3.10	Valores das médias amostrais empregados no estudo da simulação.	89
3.11	Estimativa e intervalo de confiança de S_{pm} através do <i>SIR</i>	91
3.12	Índices de capacidade com mesma fração não conforme.	92
3.13	Pesos de componente de borracha.	96

4.1	Vício relativo do estimador de MV e do estimador corrigido (BCE) de $MTTF$ e dos quantis t_p , $p=5\%$ e 10% no modelo de regressão Weibull ($\beta_0 = \beta_1 = 2$ e sem mecanismos de censura)	118
4.2	Menor tamanho de amostra usado no estudo de simulação para obter estimadores não viciados para $MTTF$, $t_{0,05}$ e $t_{0,10}$ (planos tradicional e compromisso).	119
4.3	Valores dos parâmetros escolhidos nos estudos de simulação	131
4.4	Plano amostral	133
4.5	Plano amostral	138
4.6	Parâmetros das distribuições simuladas	141
4.7	Estimativas bayesianas da confiabilidade estrutural - dados do Draper & Smith (1981)	146
4.8	Estimativas bayesianas da confiabilidade estrutural no modelo de regressão.	147
4.9	Estimativa bayesiana de confiabilidade estrutural na condição normal de uso (testes acelerados)	148

Contribuições em controle estatístico de processo e confiabilidade

Profa. Dr. Linda Lee Ho

Departamento de Engenharia de Produção
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

1. Introdução

Vários são os temas de pesquisa do Grupo de Qualidade e Engenharia do Produto do Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Entre eles pode-se destacar o tema: Aplicações dos Métodos Estatísticos na Engenharia Industrial. Este texto de sistematização crítica descreve as atividades de pesquisas e produtos relacionados ao tema acima que constituem uma parte importante da atuação da Professora Dra. Linda Lee Ho como pesquisador e docente. Nesse texto, pesquisas e produtos foram alocados em duas linhas de pesquisas:

Controle de estatístico de processo O primeiro contato que a docente teve com este assunto (especificamente com cartas de controle e inspeção por amostragem) foi numa disciplina de graduação, em 1977 (como aluna de graduação). Nesta época estavam começando a aparecer os primeiros conceitos sobre qualidade e o uso do controle estatístico de qualidade era bastante incipiente e que só acabou ganhando força na década de 80 com a implantação dos círculos de qualidade e das ISO's.

Em função da grande oferta de novos produtos e serviços, a qualidade tem sido um critério de decisão empregado tanto pelo consumidor como pelo produtor. Desta forma, as empresas têm feito esforços para melhorar a qualidade de seus produtos através de programas de garantia de qualidade.

Uma grande parte destes esforços está centrada no Controle Estatístico de Processo (CEP). É uma disciplina de gestão que tem como objetivo intervir em processos para evitar uma produção grande de itens não conformes. Geralmente utilizam-se cartas de controle que têm como função detectar desvios no comportamento estável das características específicas de um processo. De modo bem sucinto, carta de controle é uma representação gráfica progressiva de uma característica de qualidade medida (pode ser atributo ou variável) ou calculada a partir de observações extraídas do processo periodicamente ao longo do tempo, utilizando-se as seguintes retas de referência:

$$LS(\text{limite superior de controle}) = \mu_D + d\sigma_D$$

$$LC(\text{linha central}) = \mu_D$$

$$LI(\text{linha inferior de controle}) = \mu_D - d\sigma_D$$

onde D é uma estatística associada a uma característica de qualidade; d é uma constante previamente escolhida, μ_D e σ_D são respectivamente a média e o desvio padrão de D . Caso o valor da estatística D esteja registrado dentro dos limites de controle é dito que o processo está sob controle estatístico; caso contrário é dito que o processo está fora de controle. Nesse caso, geralmente pára-se a produção para investigar (ajuste ou falso alarme). Costuma-se supor que itens são produzidos um a um e amostras de tamanho n são coletadas em intervalos regulares de duração m . O planejamento de uma carta de controle é feito através da determinação dos valores de n , d e m , satisfazendo critérios tanto estatísticos como econômicos. Os critérios estatísticos estão associados às probabilidades do falso alarme ou número de amostras após a ocorrência do desvio (da característica específica do processo) até a sua detecção enquanto que critérios econômicos procuram valores dos parâmetros (ótimos) tal que minimize uma função-objetivo geralmente associada aos custos de operação (inspeção, de falso alarme, ajuste, retrabalho, etc.).

Um dos trabalhos pioneiros em empregar critérios econômicos para planejamento de carta de controle foi de Duncan (1956). Em planejamentos econômicos, muitos trabalhos já foram escritos, porém talvez o procedimento econômico *on-line* mais conhecido seja o proposto por Taguchi (1985) devido a sua simplicidade e de fácil implantação. O procedimento de Taguchi foi desenvolvido para monitorar tanto características variáveis assim

como atributos (veja Taguchi et al., 1989). O procedimento consiste em retirar um único item da linha produção a cada intervalo fixo de m itens produzidos. Se o valor da característica interesse do item examinado estiver fora dos limites de controle (ou se o item for não conforme, no caso de atributos), pára-se o processo para investigação. Ainda segundo Taguchi, este sistema de controle de qualidade *on-line* deve ser empregado de modo que os valores alvos desejados da característica de qualidade possam ser economicamente controlados. O problema consiste em determinar o intervalo ótimo m e a constante ótima d (apenas para o controle de variáveis) tal que minimize uma função objetivo. A proposição de Taguchi para monitorar processo *on-line* foi alvo de muitas críticas em função das suposições (muitas vezes implícitas) e aproximações empregadas. Por exemplo, no controle *on-line* para variáveis, Taguchi fez a suposição (implícita) que a característica de interesse segue uma distribuição uniforme no intervalo $[-d, +d]$, o que nem sempre descreve o comportamento de muitas características de qualidade de interesse em situações práticas. Além disso, o modelo de Taguchi não deixa claro como ocorre uma mudança do parâmetro do processo.

Também no início dos anos 70, para processos estáveis (sob controle estatístico) os índices de capacidade foram introduzidos para medir o quanto o processo é capaz de atender às especificações exigidas. Assim diversas funções da média do processo μ e do desvio padrão σ foram propostas como índices de capacidade, entre eles, podem ser citados:

$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma}$$

proposto por Juran (1974); o índice

$$C_{pm} = C_p \div \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}$$

proposto por Hsiang & Taguchi (1985); o índice

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{\mu - L}{3\sigma}, \frac{U - \mu}{3\sigma} \right\}$$

de Kane (1986) e o proposto por Pearn (1992)

$$C_{pmk} = C_{pk} \div \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}$$

onde U e L representam, respectivamente o limite superior e inferior de especificação; T , o valor alvo do processo. Tal coleção ilustra as várias tentativas de definir medidas de capacidade de processo. Uma boa referência sobre índices pode ser encontrada no livro de Kotz & Johnson (1993). A partir dessas iniciativas, esforços foram feitos por vários pesquisadores para desenvolver procedimentos estatísticos específicos para avaliar a capacidade do processo a partir dos dados coletados do processo. Nos procedimentos inferenciais desenvolvidos para os índices de capacidade sempre vão requerer conhecimento da distribuição da característica de interesse e algumas suposições são usualmente feitas. Em não atendendo a estes quesitos, os usuários podem estar tomando decisões erradas, afirmando que o processo é capaz de atender às especificações quando a verdade não é capaz de atender, ou o contrário. Para exemplificar, é geralmente suposto que a característica de interesse obedeça a uma distribuição Normal, ou as observações do processo devam ser independentes.

Embora controle estatístico de processo seja um tema bastante vasto, nesse texto serão discutidas contribuições em dois assuntos: **controle *on-line* de processos** (por atributos e por variáveis) e **índices de capacidade**, nos Capítulos dois e três, respectivamente.

Confiabilidade Atualmente os fabricantes têm, entre outros, o desafio de desenvolver novos produtos num curto prazo usando tecnologias modernas e simultaneamente continuar a fazer esforços na melhoria da qualidade. Melhorar a confiabilidade de um produto é sem dúvida um importante aspecto num programa de qualidade. Ela é definida como sendo a probabilidade de bom funcionamento de um produto sob certas condições, num determinado tempo fixo. No entanto, muitas vezes para fazer referência à confiabilidade, além da probabilidade, outras quantidades podem ser utilizadas como o tempo médio de falhas ou percentis. Por exemplo, na indústria de alimentos, prazo de prateleira é empregado para garantir a qualidade de seus produtos. Além do controle microbiológico, as empresas fazem avaliações sensoriais como odor, sabor e aparência e utilizam os dados sensoriais para estimar prazos de prateleiras. Estas quantidades são estimadas empregando-se métodos estatísticos clássicos como o método da máxima verossimilhança que podem apresentar vícios, principalmente se os dados foram obtidos mediante uso de algum tipo de mecanismo de censura (uma situação bastante comum em confiabilidade além de empregar poucas unidades em experimentos de confiabilidade devido ao fator custo). Em muitas situações, a confiabilidade não está necessária associada ao tempo, por exemplo, quer saber a chance de um determinado material apresentar resistência superior a um dado patamar. Este é o caso da confiabilidade estrutural.

Confiabilidade é também um tema bastante vasto. Nesse texto, porém, serão abordadas apenas contribuições nos seguintes assuntos: confiabilidade estrutural; modelos para prazos de prateleira; correção de vício em estimadores de máxima verossimilhança (MV) do tempo médio de falha (MTTF) e percentis de um modelo de regressão Weibull, no Capítulo 4.

O texto está organizado em capítulos que estão divididos em seções, subseções. Detalhes de alguns resultados foram colocados em algumas seções especiais no fim do próprio capítulo para leitores interessados. Eles não foram colocados no texto para não tornar a leitura tediosa.

O principal propósito de contribuir nestas duas linhas de pesquisa é apresentar procedimentos condizentes com situações práticas. Por exemplo, em controle estatístico de processo, como monitorar processos *on-line* por variáveis cuja característica de qualidade obedeça a distribuições normais, ou como diminuir o impacto de avaliações errôneas no caso de estar monitorando processos *on-line* por atributos; como avaliar a capacidade de um processo se a característica de interesse não é observável ou no caso das observações não serem independentes. Em confiabilidade, por exemplo, como corrigir o vício de uma estimativa do tempo médio oriundo de poucas observações ou a partir de qual tamanho de amostra, os vícios passam a ser desprezíveis.

A relevância dessas duas linhas de pesquisa para a docente pode ser medida pela quantidade de artigos publicados a partir de 1998. Foram vários (em torno de 25) artigos publicados em periódicos internacionais e trabalhos apresentados em eventos e congressos; foram assuntos de (cinco) orientações completas de doutoramento e duas em andamento. É assunto do atual projeto de renovação da bolsa de produtividade e pesquisa do CNPq em 2005, cujo título é: “Controle *on-line* no sistema de produção: uma alternativa ao procedimento proposto por Taguchi”. Foi também assunto do projeto anterior de bolsa de produtividade e pesquisa no período de 2002 a 2005 cujo título era “Estimativa da confiabilidade estrutural no modelo de interferência envolvendo resistência e solicitação aleatórias”. Embora a docente tenha trabalhado e ainda venha desenvolvendo pesquisas e atividades docentes em outros assuntos, os escolhidos para sistematização neste texto são aqueles nos quais têm mais se dedicado e produzido nos últimos quatro anos.

Outros assuntos, como os citados a seguir, embora tenham sido objetos de pesquisas recentes desenvolvidas pela docente, não serão tratados neste texto. Esses temas são:

- **Contagens Multivariadas** - Este tema foi objeto do doutorado junto a EPUSP,

sob a orientação do Prof. Dr. P. L. O. Costa Neto e co-orientação do Prof. Dr. J.M. Singer (IME-USP) que gerou uma significativa produção bibliográfica: dois artigos internacionais (Ho & Singer, 1997 e Ho & Singer, 2001), três boletins técnicos, além de trabalhos apresentados em eventos.

- **Planejamento econômico de cartas de controle** - este tema é o resultado de uma parceria bem sucedida com a Profa. Dr. Osiris Turnes da UnB que têm gerado muitos produtos: foram quatro artigos em periódicos internacionais (Turnes & Ho, 2005; Turnes, Ho & Imana, 2004 e 2002; Borges, Ho & Turnes, 2001; Turnes & Ho, 2004) além de um boletim técnico e trabalhos apresentados em eventos.
- **Inspeção zero-defeitos com retificação** - este tema é também resultado de uma parceria bem sucedida com profs. do Departamento de Estatística da UFMG (Prof. Dr. R.C. Quinino e Prof. Dr. E. Suyama). Como produtos podem ser citados, dois artigos em periódicos internacionais foram publicados [um na *European Journal of Operational Research* (Quinino & Ho, 2004) e o outro na *Pesquisa Operacional* (Quinino, Ho & Suyama, 2005)], quatro relatórios técnicos e vários trabalhos apresentados em eventos.
- **Métodos estatísticos aplicados a processamento de imagens de satélites e base de dados espaciais** em parceria com professores do Departamento de Engenharia de Transportes da EPUSP. Neste tema foram produzidos dois trabalhos apresentados em eventos internacionais; um artigo aceito no periódico *Environmetrics* (Quintanilha & Ho, 2005); um outro submetido (Quinino, Ho & Quintanilha, 2005) e um relatório técnico.

Nas últimas décadas mudanças significativas têm ocorrido em várias áreas das ciências. Em algumas áreas, novas técnicas demoraram muito tempo para serem desenvolvidas ao passo que em outras, foram quase instantâneas. Em relação aos métodos estatísticos, o atual desenvolvimento se deve em grande parte ao aparecimento de equipamentos com alta velocidade de processamento. Este fato ajudou muito a alavancar uma das ferramentas poderosas para a estatística: a simulação. Muitas vezes resultados analíticos são difíceis de serem calculados, no entanto, com a ajuda da simulação podem ser demonstrados ou facilmente aproximados. Por exemplo, através de um procedimento de reamostragem, estimadores viciados de quantidades importantes em confiabilidade puderam ser corrigidos. Uma das áreas que cresceu muito refere-se aos métodos bayesianos, principalmente algoritmos como o amostrador de Gibbs e Metropolis Hastings muito empregados nas técnicas denominadas Monte Carlo Markov Chain (MCMC). Muitos dos resultados apresentados nos capítulos a seguir puderam ser obtidos graças à simulação.

2 *Controle on-line de processos por atributos e por variáveis*

2.1 Introdução

Este capítulo tratará de controle *on-line* de processo por atributos e por variáveis. Na seção 2.2 será dedicado ao controle de processo por atributos. Serão brevemente descritas as proposições de Taguchi et al. (1989) e Naybepour & Woodall (1993), as quais supõem um sistema perfeito de classificação o que não é uma suposição muito realista. Borges, Ho & Turnes (2001) apresentaram um modelo para controle *on-line* de processos por atributos permitindo a presença de erros de diagnóstico e mostraram o impacto desses erros no planejamento do controle do processo e no valor do custo médio cujos resultados estão resumidos na seção 2.2. Em muitas situações, principalmente em ensaios não destrutivos, é possível executar classificações repetidas e independentes na mesma unidade examinada. A seção 2.2 termina descrevendo os resultados obtidos por Quinino, Ho & Trindade (2005) utilizando este recurso para diminuir o impacto dos erros de classificações no controle *on-line* de processos por atributos.

A seção 2.3 versará sobre o controle *on-line* por variáveis. A proposição pioneira de Taguchi para controle *on-line* por variáveis será brevemente apresentada. Essa proposição recebeu inúmeras críticas por usar aproximações e suposições não realistas. Ho, Medeiros & Borges (2005a, 2005b) apresentam um planejamento econômico para controle *on-line* para variáveis supondo que a mudança do parâmetro da média do processo ocorra segundo uma distribuição geométrica. Nessa seção serão descritos os resultados obtidos que foram comparados com os de Taguchi. De modo geral o modelo proposto apresentou um melhor desempenho econômico e mais condizente com a realidade que o de Taguchi.

2.2 Controle *on-line* de processos por atributos

2.2.1 Modelos de Taguchi e Naybepour & Woodall

Taguchi (1974, 1981, 1985) e Taguchi et al. (1989) propuseram um planejamento econômico para monitorar processos *on-line* por atributos. O ciclo inicia-se com uma fração inicial de defeitos igual a zero e em algum instante aleatório muda de fração zero defeitos para algum valor maior que zero. Itens são produzidos independentemente e uma única peça é examinada de cada m peças produzidas. Se a peça examinada for conforme a inspeção continua; caso contrário interrompe-se a produção para fazer ajuste. Entre o instante da sinalização e a parada total do processo para o ajuste, são produzidos mais L itens (atraso). Após a parada (ajuste ou falso alarme), o processo volta a ter fração de defeito igual a zero e o ciclo descrito se repete.

O intervalo de inspeção é escolhido tal que minimize a função custo L_T^A proposta por Taguchi:

$$L_T^A = \frac{C_A}{u} + \frac{C_I}{m} + \frac{C_{NC}}{u} \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \quad (2.1)$$

Derivando (2.1), o intervalo ótimo de inspeção é dado por: $m_T^A = \sqrt{\frac{2uC_I}{C_{NC}}}$ com:

u = número médio de itens produzidos num ciclo;

C_A = custo de ajuste;

C_I = custo de inspeção;

C_{NC} = custo de não conformidade.

Esta proposta recebeu várias críticas, pois Taguchi não explicitou na sua modelagem como ocorre a mudança de parâmetros (mudar de zero % a fração de defeitos para maior que zero). Nayebpour & Woodall (1993) apresentaram um modelo para controle *on-line* de atributos assumindo que o tempo de mudança do parâmetro ocorre segundo uma distribuição geométrica de parâmetro igual a π . Empregaram os mesmos custos que o modelo (2.1) e utilizaram como função objetivo o resultado baseado na Teoria da Renovação (detalhes em Ross, 2000), ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V^*(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[V^*(t)]}{t} = \frac{E[V^*]}{E[T^*]} \quad (2.2)$$

onde T^* é o número de itens produzidos por ciclo entre ajustes e V^* é o custo do ciclo entre ajustes. A obtenção do mínimo de (2.2) é geralmente obtida através de busca direita. Além disso, nesse modelo admite-se uma procura retrospectiva nos itens produzidos a partir do resultado do último item examinado não conforme (que produziu uma parada para ajuste). No entanto, nestas duas propostas admite-se um sistema perfeito de classificação dos produtos e em condições ideais, mesmo com técnicos altamente experientes podem cometer erros que podem superar 25%. Segundo Burke et al. (1995) erros estão longe de serem considerados desprezíveis em muitas tarefas de classificação. Vários autores dão exemplos de erros de classificações na avaliação de atributos (avaliação de processo de produção), [veja Burke et al. (1995); Bross, (1954); Kemp & Kemp (1988)].

Considere:

- p = probabilidade de ser conforme;
- e_1 = elemento conforme ser classificado como não-conforme;
- e_2 = elemento não-conforme ser classificado como conforme.

Assim as probabilidades de registrar um item como conforme e não conforme são respectivamente:

$$p(1 - e_1) + (1 - p)e_2 = q;$$

$$pe_1 + (1 - p)(1 - e_2) = 1 - q.$$

Porém, os efeitos dos erros de classificação não podem ser desprezados. Bross (1954), por exemplo, mostrou que os estimadores clássicos de p baseados em proporções amostrais são viciados. Quando e_1 e e_2 são conhecidos e uma amostra de n elementos com r itens conformes, o estimador de máxima verossimilhança (MV) de p é dado por:

$$\hat{p} = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{[(r/n) - e_2]}{(1 - e_1 - e_2)} > 1; \\ \frac{[(r/n) - e_2]}{(1 - e_1 - e_2)}, & \text{se } 0 \leq \frac{[(r/n) - e_2]}{(1 - e_1 - e_2)} \leq 1; \\ 0, & \text{se } \frac{[(r/n) - e_2]}{(1 - e_1 - e_2)} < 0; \end{cases}$$

Note que isto difere muito da proporção amostral r/n . Na prática e_1 e e_2 são desconhecidos

(e admite-se serem inferiores a 0,5) e daí fica mais complicada a estimação do parâmetro p , pois segundo o método da máxima verossimilhança, não existe um único estimador. Uma alternativa é considerar, por exemplo, os estimadores pelos métodos bayesianos sugeridos por Gaba & Winkler (1992). Minton (1972) obteve expressões para analisar o efeito de uma inspeção ineficiente e propôs correções no poder dos planos de inspeção dando ênfase para as classificações de não conformidade como conformes. Maiores detalhes sobre erro de classificação ver Johnson & Kotz (1988); Johnson, Kotz & Wu (1991) e Evans *et al.* (1996).

2.2.2 Controle *on-line* de atributos com erros de classificação

Borges, Ho & Turnes (2001) apresentaram um modelo para controle *on-line* de processo por atributos com as mesmas suposições do modelo de Naybepour & Woodall, ou seja, assumindo uma distribuição geométrica (de parâmetro igual π) na mudança da fração de itens conformes; inspecionar uma única peça de cada m peças produzidas, porém assumindo a possibilidade de ter erros de classificação:

- p = probabilidade de ser conforme;
- e_1 = elemento conforme ser classificado como não-conforme;
- e_2 = elemento não-conforme ser classificado como conforme.

processo	classificação	
	conforme	não conforme
conforme (p)	$1 - e_1$	e_1
não conforme ($1 - p$)	e_2	$1 - e_2$

Diferente do modelo proposto por Nayebpour & Woodall, o último item inspecionado e os L itens produzidos após a sinalização são descartados nesta proposição, visto que como há erro de classificação, não é efetiva uma procura retrospectiva a partir do último item inspecionado (que resultou numa parada), como era a proposição de Nayebpour & Woodall (1993). Embora pareça simples essa alteração, no entanto provocou uma grande modificação na modelagem. Houve necessidade de introduzir vários custos antes inexistentes nas propostas anteriores, embora a função objetivo seja a mesma empregada por Nayebpour & Woodall (1993). Os custos:

- C_{A1} = custo de ajuste se o desvio do parâmetro do processo ocorreu durante o ciclo;
- C_{A2} = custo de ajuste se o desvio do parâmetro do processo não ocorreu durante o ciclo;
- C_I = custo de inspeção;

já estavam incluídos nos modelos anteriores e os seguintes foram introduzidos no modelo de Borges, Ho & Turnes (2001):

- $C_{D_{NC}}$ = custo de descartar itens defeituosos;
- C_{D_C} = custo de descartar itens não defeituosos;
- $C_{ND_{NC}}$ = custo de não descartar itens defeituosos.

O intervalo ótimo de inspeção é determinado por um valor de m tal que minimize a função (2.2). Diferente da função custo de Taguchi, que apresenta solução analítica, a determinação de m também será através de busca direta. Para exemplificar o impacto dos erros de diagnóstico, considere um exemplo com os seguintes custos:

- $C_{A1} = C_{A2} = \$ 4000$ (custos levam em consideração o correto ajuste se o desvio do parâmetro do processo ocorreu durante um ciclo assim como uma parada indevida do processo devido a um alarme falso);
- $C_I = \$ 150$;
- $C_{D_{NC}} = \$ 5$;
- $C_{D_C} = \$ 5,5$ (uma perda extra em descartar itens conformes);
- $C_{ND_{NC}} = \$ 5$;
- Mudança de fração conforme: $p = 1$ para $p = 0$;
- Probabilidade de não mudança de parâmetro: $(1 - \pi) = 0,999661$;
- $L = 1000$ itens produzidos entre o sinal e a completa parada do processo;

Os valores ótimos estão a seguir.

Modelo	Intervalo ótimo (m)	Custo médio
$e_1 = e_2 = 0,01$	714	2,735
$e_1 = e_2 = 0,00$	595	2,669

Esse exemplo ilustra o impacto dos erros de classificação: um aumento no intervalo de inspeção e no custo médio.

Considere agora que é possível classificar repetidamente e independente cada item examinado (não é um ensaio destrutivo). Intuitivamente, quanto mais classificações forem feitas, mais preciso deve ser o diagnóstico sobre o verdadeiro estado da peça examinada e menores devem ser os erros de diagnóstico. Porém pode-se tornar economicamente inviável por causa do custo de inspeção. Este assunto será tratado a seguir, ou seja, utilizar os resultados das classificações repetidas para diminuir o impacto dos erros de classificação. Anteriormente Greenberg & Stokes (1995) propuseram classificações repetidas admitindo apenas o erro e_2 .

2.2.3 Controle de processo *on-line* por atributos com erros de classificação e classificações repetidas

Quinino, Ho & Trindade (2005) e Trindade, Ho & Quinino (2005) propuseram o uso dos resultados das classificações repetidas de modo a diminuir o impacto dos erros de diagnóstico no controle de processo *on-line* por atributos. Semelhante às propostas anteriores:

- Uma peça é examinada a cada m peças produzidas;
- A peça examinada é repetidamente e independentemente classificada r vezes;
- Em cada exame ela é classificada em conforme ou não conforme;
- Se $a > 0,5r$, então a peça examinada é declarada conforme, caso contrário, a peça é declarada não conforme;
- Se a peça examinada é declarada não conforme, toma-se a decisão de parar o processo; caso contrário continua inspecionar a próxima m -ésima peça.

O sistema de inspeção descrito será modelado através de cadeia de Markov. Considere o espaço de estados (s, k) ,

$$s = \begin{cases} 1, & \text{se } p = p_1; \\ 2, & \text{se } p = p_2; \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{se item declarado conforme;} \\ 2, & \text{se item declarado não-conforme.} \end{cases}$$

A Figura 2.1 ilustra o sistema de inspeção com a notação adotada: s_1 se $s = 1$; s_2 se $s = 2$; k_1 se $k = 1$ e k_2 se $k = 2$;

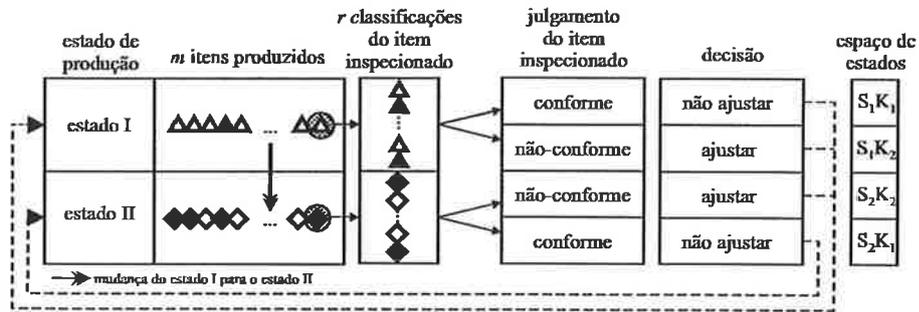


Figura 2.1: Sistema de inspeção com classificações repetidas.

A matriz das probabilidades de transição de estado (s, k) para estado (s^*, k^*) é dada por

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 k_1 & s_1 k_2 & s_2 k_2 & s_2 k_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 k_1 \\ s_1 k_2 \\ s_2 k_2 \\ s_2 k_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

com

$$A_1 = P\{\Theta_m = p_1\} [p_1 P\{Y \geq w | \Phi = 1\} + (1 - p_1) P\{Y \geq w | \Phi = 0\}];$$

$$A_2 = P\{\Theta_m = p_1\} [p_1 P\{Y < w | \Phi = 1\} + (1 - p_1) P\{Y < w | \Phi = 0\}];$$

$$A_3 = (1 - P\{\Theta_m = p_1\}) [p_2 P\{Y < w | \Phi = 1\} + (1 - p_2) P\{Y < w | \Phi = 0\}];$$

$$A_4 = (1 - P\{\Theta_m = p_1\}) [p_2 P\{Y \geq w | \Phi = 1\} + (1 - p_2) P\{Y \geq w | \Phi = 0\}];$$

$$A_{15} = P(E_{i+1} = S_2 K_2 | E_i = S_2 K_1) = p_2 P\{Y < w | \Phi = 1\} + (1 - p_2) P\{Y < w | \Phi = 0\};$$

e

$$A_{16} = 1 - A_{15}$$

onde

$$P\{Y \geq w | \Phi = 1\} = 1 - B_{w-1}(r, 1 - e_1)$$

é a probabilidade do item examinado ser julgado conforme dado que a peça é conforme ($\Phi = 1$);

$$P\{Y \geq w | \Phi = 0\} = 1 - B_{w-1}(r, e_2)$$

é a probabilidade do item examinado ser julgado conforme dado que a peça é não conforme ($\Phi = 0$);

$$P\{\Theta_m = p_1\} = P\{\Theta_0 = p_1, \Theta_1 = p_1, \dots, \Theta_m = p_1\} = (1 - \pi)^m$$

é a probabilidade do processo estar sob controle (processo com fração de conformidade igual $p=p_1$) num ciclo de inspeção e

$$B_j(y, x) = \sum_{z=0}^j \binom{y}{z} x^z (1-x)^{y-z}$$

denota a distribuição binomial acumulada até j em y tentativas com probabilidade de sucesso igual a x .

Como cada vez que um item é declarado não conforme, é feita uma parada (para ajuste se for o caso), necessariamente o processo volta ao estado I, segue que valem as igualdades:

$$A_1 = A_5 = A_9;$$

$$A_2 = A_6 = A_{10};$$

$$A_3 = A_7 = A_{11};$$

$$A_4 = A_8 = A_{12}.$$

Além disto: $A_{13}=0$ e $A_{14}=0$, pois o processo não volta ao estado I a não ser por ajuste. Neste sentido,

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1K_1 & s_1K_2 & s_2K_2 & s_2K_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1K_1 \\ s_1K_2 \\ s_2K_2 \\ s_2K_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & A_{15} & A_{16} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pode-se mostrar que $\mathbf{Q} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}^u$ existe e todas as linhas de \mathbf{Q} são iguais. Seja $\mathbf{E} = [Q_1; Q_2; Q_3; Q_4]$ a primeira linha de \mathbf{Q} , $\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ é a solução sistema de equações $\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{P}$ com a restrição $(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 1)$ sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 - 1 & A_1 & A_1 & 0 \\ A_2 & A_2 - 1 & A_2 & 0 \\ A_3 & A_3 & A_3 - 1 & A_{15} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cada elemento E_i pode ser interpretado como sendo a proporção de tempo de um sistema de produção permanecer no estado i , $i = (s_1; k_1), (s_1; k_2), (s_2; k_2)$ e $(s_2; k_1)$ num número

grande de inspeções.

A seguir será calculado o custo médio do sistema de controle. Considere a seguinte notação:

- o processo de renovação $N(t) = \#$ de ajustes realizados até a produção do t -ésimo item, $t \geq 0$;
- $T^* = \#$ de itens produzidos entre ajustes sucessivos;
- $T_n^* = \#$ de itens produzidos entre os ajustes $n - 1$ e n (com $n \geq 1$);
- Segue que $E[T^*] = E[T_n^*]$;
- $V^* =$ custo associado ao sistema de controle a cada ajuste;
- $V_n^* =$ o custo associado ao n -ésimo ajuste;
- Similarmente, $E[V^*] = E[V_n^*]$.

O custo total do sistema de controle após t itens produzidos é dado por

$$V^*(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} V_n^*.$$

Pela Teoria da Renovação (detalhes em Ross, 2000),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V^*(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[V^*(t)]}{t} = \frac{E[V^*]}{E[T^*]}.$$

Ou seja, após um número suficientemente grande de itens produzidos, o custo médio do sistema de controle por item produzido $\frac{E[V^*]}{t}$ é igual a razão entre o custo médio do ciclo entre ajustes ($E[V^*]$) e o número médio de itens produzidos por ciclo entre ajustes ($E[T^*]$). No entanto, as informações fornecidas pela cadeia de Markov anteriormente construída dizem respeito aos itens produzidos entre inspeções, e não entre ajustes. Assim, será necessário fazer algumas adaptações. Seja

- $V =$ variável aleatória que representa o custo entre duas inspeções sucessivas;
- $V_i =$ o custo entre as inspeções $i - 1$ e i ;

- $m = \#$ de inspeções ocorridas até que o n -ésimo ajuste tenha ocorrido;
- O custo total após n ajustes é dado pela soma dos custos das m inspeções realizadas até então ($m \geq n$), ou seja

$$\sum_{i=1}^n V_i^* = \sum_{i=1}^m V_i;$$

- $T =$ variável aleatória representando $\#$ de itens produzidos entre inspeções;
- $T_i = \#$ de itens produzidos entre as inspeções $i - 1$ e i .

Utilizando o mesmo argumento, o número de itens produzidos até o n -ésimo ajuste corresponde a soma dos itens produzidos nas m inspeções já realizadas, ou seja

$$\sum_{i=1}^n T_i^* = \sum_{i=1}^m T_i.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Assim,

$$\frac{E[V^*]}{E[T^*]} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^*}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^*} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i^*}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n T_i^*} = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m V_i}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m T_i} = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i}{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_i} = \frac{E[V]}{E[T]}.$$

Portanto, o custo médio do sistema de controle por item produzido pode ser expresso como a razão entre o custo médio por ciclo de inspeção e o número médio de itens produzidos por ciclo de inspeção.

Os valores assumidos pelas variáveis T e V são discretos e diretamente relacionados aos estados da cadeia de Markov, como mostra a Tabela 2.1.

Assim, o valor esperado de T é

$$E[T] = \sum_{i=1}^4 T_i Q_i = mQ_1 + (m + L)Q_2 + (m + L)Q_3 + mQ_4. \quad (2.3)$$

A variável V assume diferentes valores para cada um dos estados da cadeia. Os custos considerados são os mesmos do modelo proposto por Borges, Ho & Turnes, (2001), especificamente:

Tabela 2.1: Distribuição de Probabilidade de V e T.

Estado	Valor de V	Valor de T	Probabilidade
S_1K_1	V_1	$T_1 = m$	Q_1
S_1K_2	V_2	$T_2 = m + L$	Q_2
S_2K_2	V_3	$T_3 = m + L$	Q_3
S_2K_1	V_4	$T_4 = m$	Q_4

- C_I - custo de uma classificação do item inspecionado;
- C_{ND_NC} - custo de produzir e enviar um item não-conforme para o mercado;
- C_A - custo de ajuste do processo;
- C_{D_NC} - custo de produzir e eliminar um item não-conforme;
- C_{D_C} - custo de produzir e eliminar um item conforme.

A seguir está detalhada a composição de cada custo:

Custo V_1 associado ao estado (S_1K_1)

O processo permanece todo o ciclo no estado I ($S = 1, \Theta_m = p_1$) e não há ajuste (o item examinado foi declarado conforme: K_1). A expressão do custo deve conter:

- Custo de r classificações repetidas do item inspecionado;
- Custo dos itens não-conformes produzidos e enviados para o mercado;
- Custo de descarte do item inspecionado.

A expressão de custo V_1 é dada por:

$$V_1 = rC_I + (1 - p_1)(m - 1)C_{ND_NC} + C_{D_NC}p_{0|1}^I + C_{D_C}p_{1|1}^I \quad (2.4)$$

sendo

$$\begin{aligned}
p_{1|1}^I &= P\{\Phi = 1 | (Y \geq w, \Theta_m = p_1)\} \\
&= \frac{p_1 P\{Y \geq w | \Phi = 1\}}{p_1 P\{Y \geq w | \Phi = 1\} + (1 - p_1) P\{Y \geq w | \Phi = 0\}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

a probabilidade do item inspecionado (produzido no estado I) ser conforme dado que foi julgado conforme;

$$p_{0|1}^I = P\{\Phi = 0 | (Y \geq w, \Theta_m = p_1)\} = 1 - p_{1|1}^I \tag{2.6}$$

a probabilidade do item inspecionado (produzido no estado I) ser não conforme dado que foi julgado conforme;

$$P\{Y \geq w | \Phi = 1\} = 1 - B_{w-1}(r, 1 - e_1); \quad P\{Y \geq w | \Phi = 0\} = 1 - B_{w-1}(r, e_2);$$

$B_j(y, x) = \sum_{z=0}^j \binom{y}{z} x^z (1-x)^{y-z}$ denota a distribuição binomial acumulada até j em y tentativas com probabilidade de sucesso igual a x .

Custo V_2 associado ao estado $(S_1 K_2)$

O processo permanece todo o ciclo no estado I (S_1), porém há ajuste visto que o item inspecionado foi julgado não conforme (K_2). Esse custo deve conter:

- Custo das classificações repetidas;
- Custo dos itens não conformes produzidos e enviados para o mercado;
- Custo de ajuste;
- Custo de descarte do item inspecionado;
- Custo relacionado ao descarte dos itens produzidos durante o atraso e calcular o número esperado de itens produzido em cada um dos estados, pois existe a possibilidade de que ocorra a mudança de estado do processo durante a produção desses itens.

A expressão final do custo V_2 é

$$\begin{aligned}
V_2 = & rC_I + (1 - p_1)(m - 1)C_{ND_NC} + C_{D_NC}p_{0|0}^I + C_{D_C}p_{1|0}^I + C_A \\
& + P\{\Theta_L = p_1\} (pC_{D_C} + (1 - p_1)C_{D_NC}) E[\Psi_L|\Theta_L = p_1] \\
& + P\{\Theta_L = p_2\} [(p_1C_{D_C} + (1 - p_1)C_{D_NC}) E[\Psi_L|\Theta_L = p_2] \\
& + (p_2C_{D_C} + (1 - p_2)C_{D_NC}) (L - E[\Psi_L|\Theta_L = p_2])]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

com

$$p_{0|0}^I = P\{\Phi = 0 | (Y < w, \Theta_m = p_1)\} = \frac{(1 - p_1) P\{Y < w | \Phi = 0\}}{p_1 P\{Y < w | \Phi = 1\} + (1 - p_1) P\{Y < w | \Phi = 0\}} \tag{2.8}$$

denotando a probabilidade do item inspecionado ser não conforme (produzido no estado I) dado que foi julgado não conforme;

$$p_{1|0}^I = P\{\Phi = 1 | (Y < w, \Theta_m = p_1)\} = 1 - p_{0|0}^I \tag{2.9}$$

a probabilidade do item inspecionado ser conforme dado que foi julgado não conforme e

$$P\{Y < w | \Phi = 1\} = B_{w-1}(r, 1 - e_1); \quad P\{Y < w | \Phi = 0\} = B_{w-1}(r, e_2);$$

Ψ_L denota o número de itens produzidos no estado I ao longo do atraso L . Desse modo, o valor esperado de Ψ_L é

$$E[\Psi_L|\Theta_L = p_1] = L; \tag{2.10}$$

e

$$E[\Psi_L|\Theta_L = p_2] = \sum_{i=1}^L (i - 1) \frac{(1 - \pi)^{i-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^L} = \frac{1 - \pi}{\pi} - \frac{L(1 - \pi)^L}{1 - (1 - \pi)^L} \tag{2.11}$$

sendo

$$\begin{aligned}
P\{\Theta_{m+L} = p_1 | \Theta_m = p_1\} &= P\{\Theta_{m+1} = p_1, \dots, \Theta_{m+L} = p_1 | \Theta_m = p_1\} \\
&= P\{\Theta_1 = p_1, \dots, \Theta_L = p_1\} = P\{\Theta_L = p_1\} = (1 - \pi)^L
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

a probabilidade que o processo permaneça no estado I durante a produção dos L itens no atraso e conseqüentemente, a probabilidade do processo mudar de estado em algum ponto do atraso é $P\{\Theta_L = p_2\} = 1 - (1 - \pi)^L$.

Custo V_4 associado ao estado (S_2K_1)

O item inspecionado foi produzido no estado II e não vai haver ajuste (K_1 , o item inspecionado foi declarado conforme). Os custos devem conter:

- Custo de classificações repetidas do item inspecionado;
- Custo dos itens não conformes produzidos e enviados para o mercado considerando duas possibilidades: o ciclo atual iniciou-se no estado II então todos os itens produzidos foram produzidos no estado II ou o ciclo atual iniciou-se no estado I e em algum instante aleatório ocorreu a mudança para o estado II;
- Custo de descarte do item inspecionado produzido no estado II.

O custo V_4 pode ser compilado como

$$\begin{aligned}
V_4 &= rC_I + p_{II \rightarrow II}^{S_2K_1} C_{ND_NC} [(m-1)(1-p_2)] \\
&\quad + p_{I \rightarrow II}^{S_2K_1} [C_{ND_NC} (1-p_1) E[\Psi_m | \Theta_0 = p_1, \Theta_m = p_2] \\
&\quad + C_{ND_NC} (1-p_2) [m-1 - E[\Psi_m | \Theta_0 = p_1, \Theta_m = p_2]]] \\
&\quad + C_{D_NC} p_{0|1}^I + C_{D_C} p_{1|1}^I
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

onde

$$p_{I \rightarrow II}^{S_2K_1} = P\{E_i = S_2K_1 | E_{i-1} \neq S_2K_1\} = \frac{(Q_1 + Q_2 + Q_3) A_4}{(Q_1 + Q_2 + Q_3) A_4 + Q_4 A_{16}}
\tag{2.14}$$

denota a probabilidade de mudança do estado I para o estado II no ciclo atual;

$$p_{II \rightarrow II}^{S_2 K_1} = P \{E_i = S_2 K_1 | E_{i-1} = S_2 K_1\} = 1 - p_{I \rightarrow II}^{S_2 K_1} \quad (2.15)$$

é a probabilidade do ciclo atual ter iniciado estado II, visto que para um número de inspeções suficientemente grande, a fração do número de inspeções observada em cada um dos estados é dada pelo vetor E ;

Ψ_m denota o número de itens produzidos no estado I ao longo dos m itens que precedem e incluem o item inspecionado. Deste modo o valor esperado de Ψ_m é

$$E[\Psi_m | \Theta_0 = p_2] = 0 \quad (2.16)$$

e

$$E[\Psi_m | \Theta_0 = p_1, \Theta_m = p_2] = \sum_{i=1}^m (i-1) \frac{(1-\pi)^{i-1} \pi}{1 - (1-\pi)^m} = \frac{1-\pi}{\pi} - \frac{m(1-\pi)^m}{1 - (1-\pi)^m}; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} p_{1|1}^{II} &= P \{ \Phi = 1 | (Y \geq w, \Theta_m = p_2) \} \\ &= \frac{p_2 P \{ Y \geq w | \Phi = 1 \}}{p_2 P \{ Y \geq w | \Phi = 1 \} + (1-p_2) P \{ Y \geq w | \Phi = 0 \}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

denota a probabilidade do item inspecionado ser conforme (produzido no estado II) dado que foi julgado conforme e

$$p_{0|1}^{II} = P \{ \Phi = 0 | (Y \geq w, \Theta_m = p_2) \} = 1 - p_{1|1}^{II}; \quad (2.19)$$

é a probabilidade do item inspecionado ser ao conforme (produzido no estado II) dado que foi julgado conforme.

Custo V_3 associado ao estado ($S_2 K_2$)

O item inspecionado foi produzido no estado II (S_2) e declarado não conforme (K_2 , vai haver ajuste). Os custos devem conter:

- Custo das classificações repetidas;

- Custo de ajuste;
- Custo dos itens não conformes produzidos e enviados para o mercado considerando que o ciclo atual começou no estado II, ou seja, todos os itens foram produzidos no estado II ou iniciou-se no estado I e em algum instante ocorreu a mudança;
- Custo de descartar o item examinado;
- Custos referentes ao descarte dos itens produzidos durante o atraso. Como o item inspecionado foi produzido no estado II então todos os itens que compõem o atraso são produzidos neste estado.

A expressão final para o custo V_3 é

$$\begin{aligned}
V_3 = & rC_I + p_{II \rightarrow II}^{S_2K_2} C_{ND_NC} [(m-1)(1-p_2)] + \\
& p_{I \rightarrow II}^{S_2K_2} C_{ND_NC} (1-p_1) E[\Psi_m | \Theta_0 = p_1, \Theta_m = p_2] + \\
& p_{I \rightarrow II}^{S_2K_2} C_{ND_NC} (1-p_2) [(m-1) - E[\Psi_m | \Theta_0 = p_1, \Theta_m = p_2]] + C_A + \\
& C_{D_NC} p_{0|0}^H + C_{D_C} p_{1|0}^H + C_{D_NC} (1-p_2)L + C_{D_C} p_2 L
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde

$$p_{I \rightarrow II}^{S_2K_2} = P \{E_i = S_2K_2 | E_{i-1} \neq S_2K_1\} = \frac{(Q_1 + Q_2 + Q_3) A_3}{(Q_1 + Q_2 + Q_3) A_3 + Q_4 A_{15}} \tag{2.21}$$

denota a probabilidade do ciclo atual ter iniciado no estado I e mudado para o estado II;

$$p_{II \rightarrow II}^{S_2K_2} = P \{E_i = S_2K_2 | E_{i-1} = S_2K_1\} = 1 - p_{I \rightarrow II}^{S_2K_2} \tag{2.22}$$

é a probabilidade do ciclo atual ter iniciado no estado II;

$$p_{0|0}^H = P \{\Phi = 0 | (Y < w, \Theta_m = p_2)\} = \frac{(1-p_2) P \{Y < w | \Phi = 0\}}{p_2 P \{Y < w | \Phi = 1\} + (1-p_2) P \{Y < w | \Phi = 0\}} \tag{2.23}$$

é a probabilidade do item inspecionado ser não conforme dado que foi julgado não conforme (produzido no estado II) e

$$p_{1|0}^H = P\{\Phi = 1 | (Y < w, \Theta_m = p_2)\} = 1 - p_{1|0}^H \quad (2.24)$$

a probabilidade do item inspecionado ser conforme dado que foi julgado não conforme (produzido no estado II).

Determinado cada um dos componentes de V , pode-se calcular $E[V]$ como

$$E[V] = \sum_{i=1}^4 V_i Q_i = V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + V_3 Q_3 + V_4 Q_4. \quad (2.25)$$

Seja K uma variável que representa o custo do sistema de controle por item produzido. De acordo com a equação (2.2), $E[K]$ pode ser escrito como

$$E[K] = \frac{E[V]}{E[T]}.$$

O objetivo é determinar os valores de m , r que minimizam $E[K]$, ou seja

$$(m^o, r^o) = \arg \min_{m,r} E[K]. \quad (2.26)$$

Como não é possível obter uma expressão analítica para (2.26), utiliza-se a busca computacional exaustiva para determinação dos parâmetros ótimos.

2.2.4 Exemplo Numérico

Para ilustrar o modelo proposto com um exemplo numérico, considere um caso em que:

- Custo de inspeção: $C_I = \$0,25$;
- Custo de não descartar peças não conformes: $C_{ND_NC} = \$20$;
- Custo de ajuste: $C_A = \$100$;
- Custo de descartar peças não conformes: $C_{D_ND} = \$2,0$;
- Custo de descartar peças conformes: $C_{D_C} = \$2,5$;
- $p_1 = 0,999$; $p_2 = 0,001$; $\pi = 0,0001$; $L = 10$.

Para simplificar a execução do modelo, o intervalo ótimo de inspeção e o número ótimo de repetições foram obtidos considerando que o item será julgado conforme caso mais da metade das r classificações sejam conformes, ou seja, $w = [0, 5r]$ nas seguintes situações:

a) Sem erro de classificação.

O intervalo ótimo é dado por $m = 54$ e $r = 1$ com custo médio de \$ 0,1363. A Figura 2.2 ilustra o comportamento de custo versus o intervalo amostral.

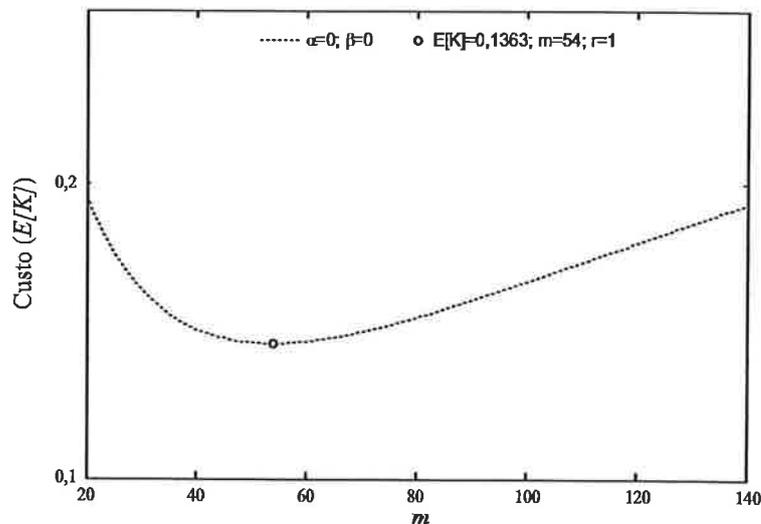


Figura 2.2: Custo versus m - sem erro de classificação.

b) Com erros de classificação $e_1 = e_2 = 0,01$ e adotar a política de fazer uma única classificação, ou seja, $r = 1$.

Neste caso o melhor intervalo é $m = 63$ com um custo aumentado para \$ 0,1596, conforme ilustra a Figura 2.3. Caso os parâmetros do item a (isto é $m = 54$; $r = 1$) fossem empregados numa situação com erro de classificação (com $e_1 = e_2 = 0,01$), o custo médio aumentaria para \$ 0,1612.

c) Com erros de classificação iguais ao item b, porém sem restrição do número de repetições.

Nessa situação, a melhor política é inspecionar a cada $m = 58$ itens e fazer $r = 3$ classificações repetidas no item inspecionado. Isto reduzirá o custo para \$0,1471, conforme ilustra a Figura 2.4.

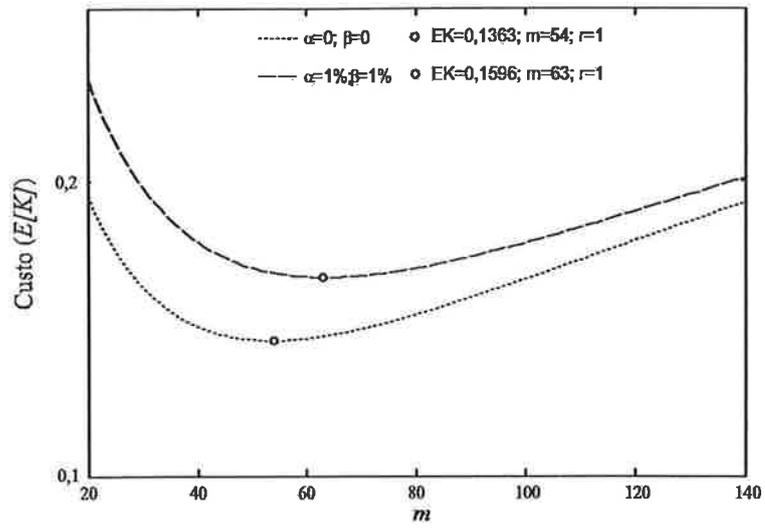


Figura 2.3: Custo versus m - com e sem erro de classificação.

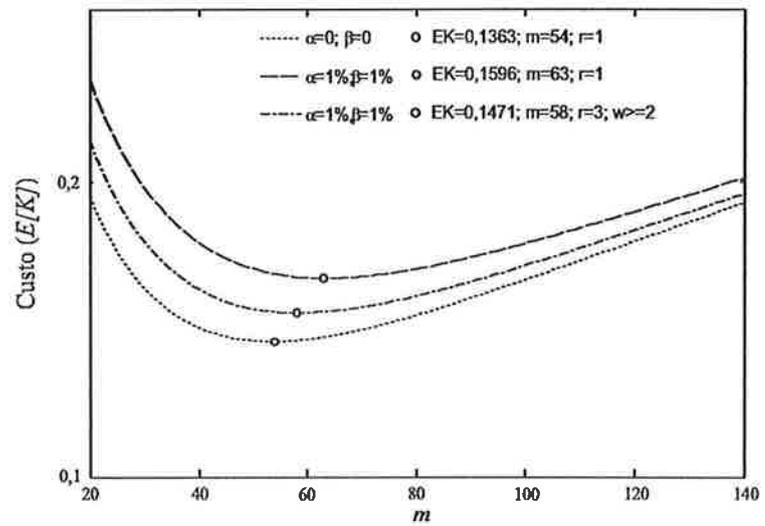


Figura 2.4: Custo versus m sem restrição ao número de repetições.

d) Com erros de classificação iguais ao item b, sem restrição do número de repetições e sem restrição de critério,

Isto é, determinar valores de m , r e w tal que minimize $E(K)$,

$$(m^o, r^o, w^o) = \arg \min_{m,r,w} E[K] \quad (2.27)$$

Neste caso, a melhor política é inspecionar a cada $m = 55$ itens; cada item inspecionado fazer 2 classificações repetidas ($r = 2$) e adotar o critério de classificar como conforme se em duas classificações pelo menos uma classificação for conforme ($w = 1$). Isto corresponde a um custo médio de \$ 0,1444, conforme ilustra Figura 2.5. O resumo dos resultados obtidos nas várias situações está na Tabela 2.2.

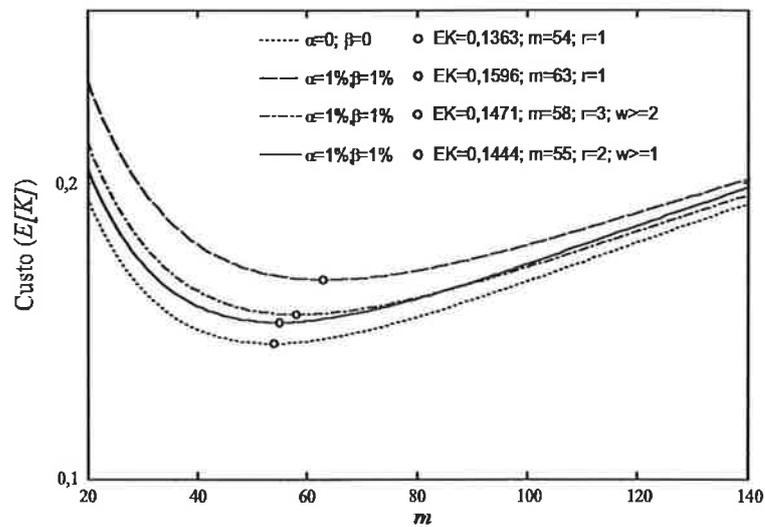


Figura 2.5: Custo versus m sem restrição ao número de repetições e critério.

Tabela 2.2: Resumo dos resultados do exemplo numérico.

Critério	Erros	m	r	Custo
$w = [0, 5r]$	$e_1=e_2=0,01$	58*	3*	0,1471
		63*	1	0,1596
	$e_1=e_2=0$	54*	1*	0,1363
		54	1	0,1612
$w=1^*$	$e_1=e_2=0,01$	55*	2*	0,1444

A Tabela 2.3 mostra os valores ótimos de m (intervalo amostral), r (número de classificações repetidas) e w (critério de classificar o item examinado baseado nos resultados das classificações repetidas) variando-se um parâmetro especificado, com os demais parâmetros mantidos constantes nos valores utilizados no exemplo numérico. Apesar da faixa de variação escolhida ser arbitrária, respeitam-se as seguintes condições que tornam as combinações utilizadas razoáveis:

- Fração de itens conformes no estado II é inferior a do estado I ($p_2 < p_1$);
- Custo de descartar um item conforme é maior que um item não-conforme ($C_{D,C} > C_{D,NC}$);
- Custo de ajuste é muito maior que o custo de inspeção ($C_A \gg C_I$);
- Custo de enviar um item não-conforme para o mercado é maior que o custo de descartá-lo ($C_{ND,NC} > C_{D,NC}$).

Tabela 2.3: Determinação de m° , r° , w° e $E[K]$ para a variação individual dos parâmetros do modelo.

$\pi(\times 10^3)$	$E[K]$	m°	r°	w°	p_1	$E[K]$	m°	r°	w°	p_2	$E[K]$	m_o	r_o	w_o
0,100	0,1444	55	2	1	0,900	2,2104	109	2	1	0,050	0,1470	54	2	1
0,325	0,2592	30	2	1	0,923	1,7497	100	2	1	0,088	0,1490	53	2	1
0,550	0,3440	23	2	1	0,945	1,2853	90	2	1	0,125	0,1509	52	2	1
0,775	0,4165	20	2	1	0,968	0,8158	78	2	1	0,163	0,1528	51	2	1
1,000	0,4821	17	2	1	0,990	0,3387	62	2	1	0,200	0,1546	50	2	1
e_1	$E[K]$	m°	r°	w°	e_2	$E[K]$	m°	r°	w°	C_I	$E[K]$	m_o	r_o	w_o
0,010	0,1444	55	2	1	0,010	0,1444	55	2	1	0,10	0,1388	52	2	1
0,033	0,1466	56	2	1	0,033	0,1474	58	3	2	0,45	0,1515	58	2	1
0,055	0,1502	56	3	1	0,055	0,1481	58	3	2	0,80	0,1630	64	2	1
0,078	0,1508	57	3	1	0,078	0,1490	57	3	2	1,15	0,1730	70	1	1
0,100	0,1520	57	3	1	0,100	0,1503	57	3	2	1,50	0,1779	73	1	1
$C_{ND,NC}$	$E[K]$	m°	r°	w°	C_A	$E[K]$	m°	r°	w°	$\frac{C_{D,C}}{C_{D,NC}}$	$E[K]$	m_o	r_o	w_o
5,00	0,0735	110	2	1	100	0,1444	55	2	1	2	0,1444	55	2	1
13,75	0,1192	66	2	1	575	0,2007	59	2	1	4	0,1467	55	2	1
22,50	0,1537	52	2	1	1050	0,2563	63	2	1	6	0,1489	55	2	1
31,25	0,1833	44	2	1	1525	0,3114	67	2	1	8	0,1511	55	2	1
40,00	0,2100	39	2	1	2000	0,3660	71	2	1	10	0,1534	55	2	1

Os parâmetros r° e w° mostram-se insensíveis aos custos C_{ND_NC} , C_A e C_{D_C}/C_{D_NC} nas faixas utilizadas, enquanto o aumento do custo de cada classificação (C_I) leva a uma redução do número de classificações a que o item inspecionado é submetido, como esperado. Já o parâmetro m° apresenta comportamento distinto para cada um dos custos avaliados. Um aumento no custo de inspeção (C_I) ou no custo de ajuste (C_A) leva ao aumento de m° , o que reduz a frequência das inspeções e a ocorrência de ajustes desnecessários (ajustar o processo que opera no estado I). Um aumento no custo de envio de itens defeituosos para o mercado (C_{ND_NC}) leva à redução do intervalo entre inspeções, ou seja, ao aumento na frequência das inspeções, com o objetivo de detectar mais prontamente a ocorrência da mudança de estado do processo. Para a faixa pesquisada, C_{D_C}/C_{D_NC} não altera a estratégia ótima de inspeção.

Uma redução na fração de itens conformes produzidos no estado I (p_1) leva a um aumento no intervalo entre inspeções. Isso ocorre porque, com mais itens não-conformes sendo produzidos no estado I, aumenta a ocorrência de ajustes desnecessários, pois mais itens não-conformes são amostrados. Já o aumento na fração de itens conformes produzidos no estado II (p_2) reduz-se a probabilidade de detectar a ocorrência da mudança, pois mais itens conformes são amostrados. Como resposta, as inspeções tornam-se mais frequentes, ou seja, há uma redução no valor de m° . Estes comportamentos ficam claros quando o objetivo do sistema de controle é revisto: detectar a mudança de estado do processo tão logo ela ocorra, sendo π o parâmetro que controla a mudança do processo. Como mostra a Tabela 2.3, o aumento deste parâmetro leva à redução no intervalo entre inspeções, já que aumenta a ocorrência de mudanças de estado.

O uso de classificações repetidas (r) e de um critério para declarar um item conforme (w) atuam sobre a existência dos erros e_1 e e_2 . Um aumento de e_1 eleva a probabilidade de declarar um item conforme como não-conforme. A estratégia ótima contrapõe este aumento exigindo, proporcionalmente, que um número menor de classificações resulte em conformidade para julgar o item conforme. Para $e_1=1\%$, pelo menos $w^\circ/r^\circ=50\%$ das classificações devem ser conformes para julgar o item conforme. Quando $e_1=10\%$, a razão cai para $w^\circ/r^\circ=33,3\%$. Comportamento oposto é observado com o aumento do erro e_2 , classificar um item defeituoso como conforme. Quando $e_2=1\%$, no mínimo $w^\circ/r^\circ=50\%$ das classificações ser conformes para julgar o item conforme. Quando $e_2=10\%$ este valor passa a $w^\circ/r^\circ=66,6\%$ devido ao maior número de falsas conformidades.

Nos casos em que existem erros de classificação no sistema de inspeção por atributos, o modelo desenvolvido considerando o uso de classificações repetidas e um critério para o

juízo do item conforme proporciona uma estratégia de controle tão ou mais eficiente que os modelos de inspeção simples. O que determina o quão mais eficiente será o modelo desenvolvido é a combinação específica dos fatores de custo, das probabilidades de produção nos estados I e II, da probabilidade de mudança de estado e dos erros de inspeção no sistema de controle em questão. Em linhas gerais, quanto menor for o custo de uma inspeção (C_I) e quanto maior a incidência dos erros e_1 e e_2 , maior será a diferença observada entre a estratégia obtida com o modelo desenvolvido e aquelas de inspeção simples. Para o exemplo numérico adotado, erros da ordem de 1% causam uma redução de 9,5% no custo médio do sistema de controle.

Para trabalhos futuros sugerem-se a inclusão no modelo da decisão, descarte ou envio para o mercado os itens que compõem o atraso e o item inspecionado, o uso de uma amostra com dois ou mais itens. Esta modificação deve aumentar significativamente a complexidade do modelo, pois passa a existir a probabilidade de ocorrência da mudança de estado entre os itens que compõem a amostra.

2.3 Controle *on-line* de processo por variáveis

2.3.1 Controle *on-line* de processo por variáveis – proposição de Taguchi

Segundo Taguchi (1985), o sistema de *controle de qualidade on-line* deve ser empregado de modo que os desejados valores alvos das características do produto, possam ser economicamente controlados.

Um procedimento para monitorar processos *on-line* para variáveis foi introduzido por Taguchi (1985). Utilizando uma função perda, o objetivo do método de Taguchi é determinar o intervalo ótimo de diagnóstico m e o limite ótimo de controle d , de modo que o custo da qualidade por item L seja minimizado. Taguchi et al. (1989) procurou determinar a política de controle para minimizar a perda esperada, por item, dentro de um ciclo. Esta perda esperada (o custo total da qualidade por item produzido) foi definida como:

$$L_T = \frac{C_A}{u} + \frac{C_I}{m} + a \left[\frac{d^2}{3} + \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{d^2}{u} \right] \quad (2.28)$$

onde: $a = \frac{C_{NG}}{\Delta^2}$ é denominado coeficiente de custo; Δ é a tolerância da característica do produto; u é o número médio de itens produzidos em um ciclo; m é o intervalo de medição

ou diagnóstico; d é o limite de controle; l é o atraso, em número de itens produzidos, entre o ponto no qual se decide intervir no processo e a parada do processo para ajuste; C_{NC} é o custo devido à produção de um item não conforme; C_I é o custo de cada inspeção (medição da característica do produto) e C_A é o custo de cada ajuste.

Para interpretar a função perda (2.28), seus componentes devem ser analisados separadamente. Primeiramente, o custo esperado de inspeção em um ciclo por item produzido, é dado por C_I/m , ou seja, a cada m itens produzidos há um acréscimo C_I no custo do procedimento de controle. O custo do ajuste por produto, ou o custo médio de ajuste em um ciclo, por item produzido, é dado por C_A/u , isto é, a cada ciclo há um acréscimo C_A no custo do procedimento de controle. Para melhor entendimento do terceiro termo de (2.28) associado à perda devido à variação em torno do valor alvo, supõe-se que os limites de controle para ajustes no processo sejam fixados em $\pm d$ e as características medidas sigam uma distribuição uniforme neste intervalo ($\pm d$). Se o processo de produção estiver sob controle durante a inspeção (isto é, características do produto dentro do limite controle), então o desvio quadrático médio do valor alvo é aproximadamente $\sigma^2 = d^2/3$, supondo $t = \text{média} = 0$. Assim, a perda esperada por item está relacionada apenas ao valor do desvio da característica de qualidade em relação ao valor alvo, visto que nenhum item está fora dos limites de controle, e a perda causada por desvio quando o processo está sob controle é obtida fazendo $\sigma^2 = d^2/3$, ou seja,

$$L_1 = a\sigma^2 = a \frac{d^2}{3} = \frac{C_{NC}}{\Delta^2} \times \frac{d^2}{3}. \quad (2.29)$$

Segundo Adams & Woodall (1989), o terceiro termo de (2.28) aproxima a perda esperada por item devido aos desvios da característica de qualidade com relação ao valor alvo. Ainda segundo eles, Taguchi justifica esta aproximação assumindo que a característica de qualidade de cada item é uniformemente distribuída no intervalo $(-d, d)$, exceto para alguns dos itens na seqüência de m itens que imediatamente precedem uma observação fora dos limites de controle $\pm d$. Metade dos valores nesta seqüência e aqueles produzidos durante o atraso l são assumidos como estando fora do limite de controle d . O terceiro termo pode ser obtido, exatamente, assumindo que a perda esperada é $d^2/3$ para cada item anterior ao intervalo de amostragem final e para cada um dos primeiros $(m-1)/2$ itens do intervalo de amostragem final. Este é um resultado sobre a suposição de uniformidade em $(-d, d)$. Cada um dos últimos $(m+1)/2$ itens no intervalo de amostragem final e os l itens do atraso podem então ser assumidos estar a dois desvios padrões, ou a $(2/\sqrt{3})d$ unidades, do valor alvo. Esta suposição pode ser explicada pelo fato de que ao considerar um desvio

padrão, o valor pertencia ao intervalo $(-d, d)$ e não fora, como é o caso. Se o processo de produção estiver fora de controle durante a inspeção, então o desvio quadrático médio é:

$$\sigma^2 = \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{d^2}{u}. \quad (2.30)$$

De acordo com Adams & Woodall (1989), a equação (2.30) estabelece que o desvio quadrático médio é proporcional ao número de produtos fora de controle entre sucessivas inspeções, enquanto que Taguchi et al. (1989) consideram proporcional ao número de produtos não-conformes. Segundo Taguchi et al. (1989), como a mudança de estado no processo ocorre no último intervalo de diagnóstico, o número de itens não-conformes (fora de controle para Adams & Woodall) produzidos em um ciclo pode variar entre 1 e m , de tal forma que são produzidos, em média, $\frac{1}{m}(1 + \dots + m) = \frac{m+1}{2}$ itens não-conformes entre inspeções sucessivas, sendo l o atraso (em itens).

É interessante observar que estas peças produzidas fora de controle são ponderadas pelo custo de não conforme C_{NC} , em (2.28). Conceitualmente isto não parece correto, pois mudar de estado (produzir itens fora de controle) não implica que os itens a serem produzidos sejam não conformes. Utilizando (2.30), tem-se a outra parcela do terceiro termo de (2.28):

$$L_2 = \frac{C_{NC}}{\Delta^2} \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{d^2}{u} = a \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{d^2}{u} \quad (2.31)$$

Para minimizar (2.28) com relação a m e d , Taguchi et al. (1989) assumiu que o número médio previsto de produtos entre ajustes sucessivos, u , é:

$$u = (d^2/d_0^2) u_0 \quad (2.32)$$

onde, d_0 é o valor inicial para o limite de controle e u_0 é o valor inicial para o número médio de itens produzidos, em um ciclo. Note que o efeito do intervalo de amostragem m , sobre o intervalo médio entre ajustes u é ignorado em (2.32).

Substituindo-se (2.32) em (2.28), calculando-se a derivada da equação (2.28) com relação a m e igualando-se a zero, o intervalo ótimo para inspeção ou diagnóstico m_T é obtido:

$$m_T = \sqrt{\frac{2u_0 C_I}{C_{NC}}} \times \frac{\Delta}{d_0} = \left(\frac{2 \times u_0 C_I}{a d_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.33)$$

Admitindo-se a equação (2.32), derivando a equação (2.28) com relação a d e igualando a derivada a zero, o limite ótimo de controle d_T é obtido:

$$d_T = \left(\frac{3C_A}{C_{NC}} \times \frac{d_0^2}{u_0} \times \Delta^2 \right)^{1/4} = \left(\frac{3C_A}{a} \times \frac{d_0^2}{u_0} \right)^{1/4}. \quad (2.34)$$

Nenhum desses valores ótimos m_T e d_T depende diretamente do atraso l , mas o valor de l é refletido indiretamente pelo valor de u_0 . Para valores de m_T e d_T diferindo substancialmente dos valores correntes, Taguchi recomenda que novos valores de m e d sejam colocados em algum valor intermediário. Assim, o desempenho do procedimento de Taguchi dependerá dos valores iniciais m_0 e d_0 .

Apesar de Taguchi ter obtido expressões simples para m e d , porém o modelo de Taguchi recebeu várias críticas em função de aproximações e suposições nem sempre explícitas. Adams & Woodall (1989) argumentaram que o modelo de Taguchi não é adequado para modelos com passeio aleatório ou para qualquer modelo não estacionário. Neste sentido, Adams & Woodall (1989) apresentaram procedimentos alternativos para controle de processo *on-line* sob um modelo de passeio aleatório. Neste caso, valores da característica de qualidade são descritos por $Z_i = Z_{i-1} + \alpha_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$; α_i 's variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas $N(0, \sigma^2)$. Eles modificaram uma função perda proposta por Box & Jenkins (1963) introduzindo um custo por inspeção (ausente no modelo de Box & Jenkins). O intervalo ótimo e o limite ótimo de controle são obtidos através de busca direta e apresentados na forma de tabelas (ver Adams & Woodall, 1989). Uma aproximação de segunda ordem para essa função perda proposta por Srivastava & Wu (1991, 1995) permitiu obter expressões analíticas para o intervalo ótimo e o limite ótimo de controle.

2.3.2 Uma abordagem alternativa para o controle *on-line* de processo por variáveis

Nessa seção um procedimento alternativo para monitorar processo *on-line* por variáveis proposto por Ho, Medeiros & Borges (2005a, 2005b) está descrito. Itens são produzidos independentemente e similar à proposta de Taguchi, apenas um único item é examinado de cada m itens produzidos, conforme ilustra Figura 2.6.

O i -ésimo item está associado a um vetor aleatório (X_i, Θ_i) , $i \geq 0$; X_i é uma variável aleatória contínua associada a uma característica de interesse; Θ_i é uma variável não

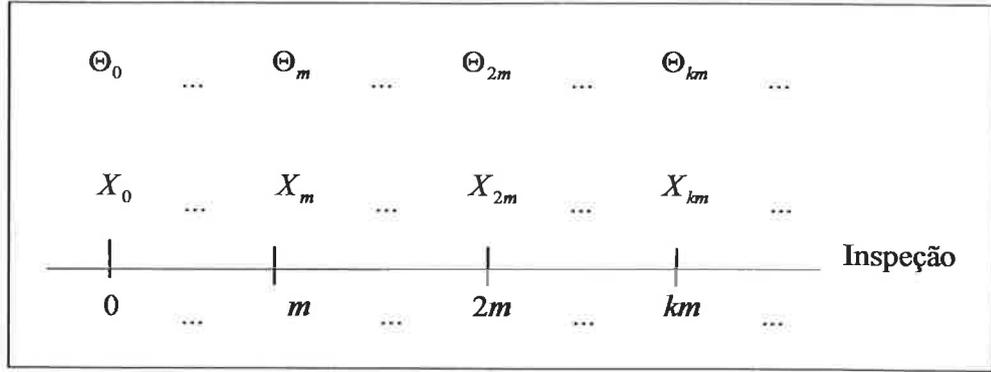


Figura 2.6: Descrição do processo de inspeção.

observável associada à média do processo $[(\Theta_i = \mu_i)]$. Assume-se que a seqüência $\{\Theta_i : i \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov homogênea com espaço de dois estados $E = \{0, \varepsilon\}$ regido por uma matriz de probabilidade de transição Π .

$$\Pi = \begin{bmatrix} P(\Theta_i = 0 | \Theta_{i-1} = 0) & P(\Theta_i = \varepsilon | \Theta_{i-1} = 0) \\ P(\Theta_i = 0 | \Theta_{i-1} = \varepsilon) & P(\Theta_i = \varepsilon | \Theta_{i-1} = \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No instante i , p é a probabilidade da média do processo mudar de $\mu_{i-1}=0$ (o processo está sob controle) para $\mu_i = \varepsilon$ (o processo fora de controle), $0 < p < 1$. Além disso, se o processo está fora de controle, vai continuar fora de controle até o ajuste, uma vez que $P(\Theta_i = \varepsilon | \Theta_{i-1} = \varepsilon) = 1$.

O atual modelo foi desenvolvido assumindo:

- X_i é uma variável aleatória observável associada à característica de interesse com as seguinte suposições:
 - (a) No instante $t = 0$, o processo está sob controle.
Especificamente, $P\left\{\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d | \Theta_0 = \mu_0\right\} = I_0(\mu_0) \times I_{(-d,d)}\left(\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma}\right)$, $-d$ e d são os limites de controle; $I_0(\mu_0) = 1$, se $\mu_0 = 0$, caso contrário $I_0(\mu_0) = 0$; $I_{(-d,d)}\left(\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma}\right) = 1$, se $-d \leq \frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d$, caso contrário $I_{(-d,d)}\left(\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma}\right) = 0$.
 - (b) $X_{im} | (\Theta_{im} = \mu_{im}) \sim N(\mu_{im}, \sigma^2)$ é o valor de variável observável na i -ésima inspeção; $\mu_{im} \in E$; m é o intervalo amostral;
 - (c) X_0, X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias condicionalmente independentes dado $\Theta_0 = \mu_0, \Theta_1 = \mu_1, \dots, \Theta_n = \mu_n$;

- (d) A probabilidade do i -ésimo item está condicionado apenas ao estado da média do processo no instante i : $P \left\{ \frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_0 = \mu_0, \dots, \Theta_i = \mu_i, \dots, \Theta_{km} = \mu_{km} \right\} = P \left\{ \frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_i = \mu_i \right\}$;
- (e) O processo é parado para investigação na k -ésima inspeção se $\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d$; d é o limite de controle, μ_{km} é a média do processo do item inspecionado; m é intervalo amostral. Após a investigação (ajuste ou falso alarme), o processo começa sob controle e um novo ciclo se inicia.
- (f) Entre a sinalização e a completa parada do processo, l itens são produzidos e não é feita nenhuma inspeção retrospectiva nos itens produzidos no último intervalo inspecionado e nem nos itens produzidos no atraso.
- (g) X_i é classificado como não conforme se $X_i \notin [-\Delta, +\Delta]$, $-\Delta, +\Delta$ são os limites de especificação do processo.

- Ψ denota o ponto de mudança da média do processo, ou seja

$$\Psi = \inf \{k \geq 1 : \Theta_k = \varepsilon\}$$

e descrito pelo comportamento assintótico de $\{\Theta_i : i \geq 0\}$. Especificamente $\Theta_i = 0$, se $1 \leq i < \Psi$ e $\Theta_i = \varepsilon$, se $i \geq \Psi$. Usando propriedades da cadeia de Markov, segue que $\Psi \sim \text{geom}(p)$ uma vez que $P(\Psi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$ e $P(\Psi \geq k) = (1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$.

- ξ denota o ponto de alerta, ou seja

$$\xi = \inf \left\{ km : k \geq 1; \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \right\},$$

k , o número de inspeções; m , o intervalo amostral e d , os limites de controle. O número de inspeções pode ser expresso por $k = \xi/m$ e o critério de parada anteriormente mencionado corresponde à parada do processo para investigação na observação X_ξ .

Para $k \geq 1$, a distribuição de probabilidade de ξ pode ser obtida como

$$P\{\xi = km\} = \sum_{\substack{(\Theta_0 = \mu_0, \Theta_1 = \mu_1, \\ \dots, \Theta_{km} = \mu_{km})}} P \left\{ \frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_m - \mu_m|}{\sigma} \leq d, \dots, \right. \\ \left. \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d, \Theta_0 = \mu_0, \Theta_1 = \mu_1, \dots, \Theta_{km} = \mu_{km} \right\} \quad (2.35)$$

Se j denota o ponto antes da mudança da média do processo, segue que os vetores $(\Theta_0 = \mu_0, \Theta_1 = \mu_1, \dots, \Theta_{km} = \mu_{km})$ podem ser de dois tipos:

- $(\Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon)$ para $0 \leq j < km$, ($\Psi = j+1 \leq km = \xi$ indica que foi feita uma parada no processo após uma mudança na média, ou seja, $\xi \geq \Psi$.)
- $(\Theta_0 = 0, \Theta_1 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0)$ para $j \geq km$, ($\Psi = j+1 > km = \xi$ indica que houve uma parada do processo antes da mudança da média).

Utilizando estas notações em (2.35), obtém-se:

$$P\{\xi = km\} = P\{\xi = km, \Psi \leq km\} + P\{\xi = km, \Psi > km\}$$

$$P\{\xi = km, \Psi \leq km\} = (1-q)(1-B) \times \frac{B^k - (qA)^k}{B - qA}$$

$$P\{\xi = km, \Psi > km\} = (qA)^k \frac{1-A}{A}, \text{ se } 0 < \frac{qA}{B} < 1 \quad (2.36)$$

$q = (1-p)^m$; $A = P\left\{\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right\}$ é a probabilidade do valor de X estar dentro dos limites de controle e o processo está sob controle; $B = P\left\{\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = \varepsilon\right\}$ é a probabilidade do valor observado de X estar dentro dos limites de controle dado que o processo está fora de controle e a mudança ainda não foi detectada (neste caso implica $A > B$). Detalhes da obtenção de (2.36) estão na Seção 2.A, no fim deste capítulo para os leitores interessados.

O valor esperado $E(\xi)$ pode ser também determinado

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} kmP\{\xi = km\} = m \sum_{k=1}^{\infty} k \times \left[(1-q)(1-B) \times \frac{B^k - (qA)^k}{B - qA} + (qA)^k \frac{1-A}{A} \right] \\
&= \frac{m(1-q)(1-B)}{B - qA} \left[\sum_{k=1}^{\infty} kB^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \times [qA]^k \right] + \frac{m(1-A)}{A} \sum_{k=1}^{\infty} k \times [qA]^k \\
&= m \times \left[\frac{(1-q)B}{(B - qA)(1-B)} - \frac{(1-q)(1-B)qA}{(B - qA)(1 - qA)^2} + \frac{(1-A)q}{(1 - qA)^2} \right], \text{ se } 0 < \frac{qA}{B} < 1.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Para ilustrar o comportamento de $E(\xi)$, Figura 2.7 apresenta o gráfico de $E(\xi)$ versus o limite de controle d , fixando $\varepsilon = 0,1$; $m = 10$ e $p = 0,02$; $0,1$; $0,2$ e $0,5$. Da Figura 2.7, aumentando o limite de controle d , $E(\xi)$ aumenta visto que demorará mais tempo para interromper o processo conforme esperado. Embora não fique claro na Figura 2.7, porém aumentando valores de p causa uma leve redução em $E(\xi)$, significando que a intervenção será mais rápida se houver um aumento nas probabilidades de mudanças dos estados.

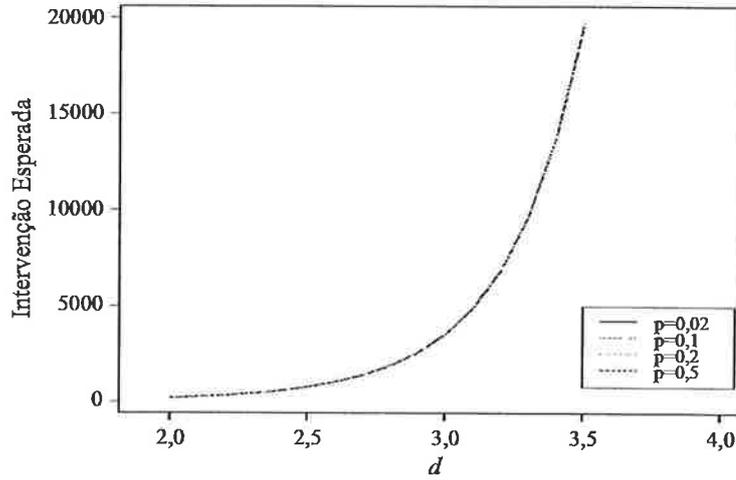


Figura 2.7: $E(\xi)$ versus d , fixando $p = 0,02$; $0,1$; $0,2$ e $0,5$, $\varepsilon = 0,1$ e $m = 10$.

Uma vez apresentadas as variáveis Ψ e ξ , o evento $\xi \geq \Psi$ indica uma correta investigação no processo e seu evento complementar (o evento $\xi < \Psi$) pode ser interpretado como a ocorrência de um alarme falso (o processo é parado para uma investigação desnecessária) e a probabilidade deste evento é dada por:

$$P\{\xi < \Psi\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = km, \Psi > km\} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k A^{k-1} (1-A) = \frac{(1-A)q}{1 - qA} \tag{2.38}$$

onde $q = (1 - p)^m$; $A = P \left\{ \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0 \right\}$.

De (2.38), à medida que p (probabilidade de uma mudança na média) aumenta, a probabilidade do falso alarme diminui (a probabilidade de uma investigação necessária aumenta). Semelhança observação pode ser feita em relação a A e m .

A determinação do valor ótimo de m e o limite ótimo d é baseada numa função perda que leva em consideração os seguintes custos: inspeção, número de itens não conformes, de ajuste e falso alarme. Este será o assunto da próxima seção.

2.3.3 Função perda L_P

Nesta seção a função perda L_P será determinada usando as suposições apresentadas na seção anterior. Considerando que o processo retorna ao seu estado inicial (o processo sob controle) após uma investigação (portanto é um processo de renovação) o custo esperado por item manufaturado L_P é dado por:

$$L_P = \frac{E(C)}{E(N)}, \quad (2.39)$$

C , uma variável aleatória que representa o custo do procedimento proposto num ciclo; $N = \xi + l$, o número de itens produzidos num ciclo. O intervalo ótimo m_P e o limite ótimo de controle d_P são valores que minimizam L_P .

Como $N = \xi + l$, o valor esperado de N pode ser obtido aplicando a expressão (2.37). Para determinar C foram considerados os seguintes custos:

- C_I , o custo de inspecionar uma peça;
- C_{NC} , o custo de produzir um item não conforme;
- C_A , o custo de ajuste do processo;
- C_F , o custo de um falso alarme.

Segue que a função custo C é expressa por

$$C = C_{NC} \left(\sum_{i=1}^{\xi+l} I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} \right) + C_I \frac{\xi}{m} + C_A (1 - I_{\{\xi < \Psi\}}) + C_F (I_{\{\xi < \Psi\}}). \quad (2.40)$$

O termo $\left(\sum_{i=1}^{\xi+1} I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} \right)$ é igual ao número de itens não conformes; $I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} = 1$ se $\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)$, caso contrário $I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} = 0$; $\frac{\xi}{m}$, o número de inspeções; $I_{\{\xi < \Psi\}} = 1$ se $\{\xi < \Psi\}$, caso contrário $I_{\{\xi < \Psi\}} = 0$.

Para obter o valor esperado de (2.40), o valor esperado de cada termo de (2.40) será necessário, ou seja,

$$E(C) = C_{NC} \left(E \left[\sum_{i=1}^{\xi+1} I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} \right] \right) + C_I \frac{E(\xi)}{m} + C_A(1 - P\{\xi < \Psi\}) + C_F(P\{\xi < \Psi\}) \quad (2.41)$$

Os valores do segundo até o quarto termo do lado direito da igualdade de (2.41) podem ser obtidos aplicando (2.37) e (2.38). O único termo desconhecido é

$$E \left[\sum_{i=1}^{\xi+1} I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right)} \right] \quad (2.42)$$

Antes de obter (2.42) uma breve comparação entre as duas propostas pode ser feita. No modelo de Taguchi, não há um custo relacionado com a ocorrência do falso alarme e o custo de não conformidade foi introduzido de um modelo diferente. Além disto, uma breve discussão sobre as posições relativas entre os limites de controle e limites de especificação é interessante. Um valor X_i fora dos limites de controle não indica uma peça não conforme, uma vez que uma peça é dita não conforme se o valor de X_i estiver fora dos limites de especificação Δ . Conseqüentemente, se $d < \Delta$, o processo é parado quando um item inspecionado apresentar valores fora dos limites de controle, embora nenhum item não conforme tenha sido produzido. Por outro lado se $d > \Delta$ itens não conforme podem ser produzidos, contudo o processo não foi parado para ajuste, uma vez que uma parada ocorre somente se $\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > d$. Estas possibilidades devem ser levadas em consideração na determinação de (2.42).

A expressão (2.42) pode se reescrita como

$$\begin{aligned}
E \left[\sum_{i=1}^{\xi+l} I \left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right) \right] &= E \left[E \left[\sum_{i=1}^{\xi+l} I \left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right) \mid \xi = km, \Psi = j + 1 \right] \right] \\
&= E [f(k, j)] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(k, j) P(\xi = km, \Psi = j + 1); \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(k, j) &= E \left[\sum_{i=1}^{\xi+l} I \left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \right) \mid \xi = km, \Psi = j + 1 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{km+l} P \left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \xi = km, \Psi = j + 1 \right) \quad (2.44)
\end{aligned}$$

e a função de distribuição conjunta

$$P \{ \xi = km, \Psi = j + 1 \} = p(1-p)^j A^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} B^{k - \lfloor \frac{j}{m} \rfloor - 1} (1-B), \text{ se } 0 \leq j < km \text{ e } \xi = km, k \geq 1 \quad (2.45)$$

ou

$$P \{ \xi = km, \Psi = j + 1 \} = p(1-p)^j A^{k-1} (1-A), \text{ se } j \geq km \text{ e } \xi = km, k \geq 1. \quad (2.46)$$

Somando (2.44) em i ; aplicando (2.45) e (2.46) em (2.43); somando-o em j e k e após algumas manipulações algébricas, segue que a expressão (2.42)

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{i=1}^{\xi+l} I_{\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta\right)} \right] = \\
& \frac{(1-B)(1-q)}{(B-Aq)} \left\{ \left[\frac{(\delta_1 - \delta_2)(1-m)Aq}{B-Aq} + l(1-\delta_2) - \frac{(\delta_1 - \delta_2)((1-p)(1-q) - mpq)}{p(1-q)} \right] \right. \\
& \left. \left(\frac{B}{1-B} - \frac{Aq}{1-Aq} \right) + \frac{(\delta_1 - \delta_2)(1-m)Aq}{(1-Aq)^2} + (m-1)(1-\delta_2) \left(\frac{B}{(1-B)^2} - \frac{Aq}{(1-Aq)^2} \right) \right\} \\
& + \frac{q(1-A)}{(1-Aq)^2} \{ (1-q_l) [(m-1)(1-\delta_1) + l(1-\delta_2)(1-Aq)] + q_l(1-\delta_1) [m-1 + (1-Aq)l] \\
& - (\delta_1 - \delta_2)(1-Aq) [(1-p)(1-q_l) - plq_l] p^{-1} \} \\
& + \left\{ \left[\frac{B(\delta_2 - \delta_1 q)}{(B-Aq)} \left(\frac{B}{1-B} - \frac{Aq}{1-Aq} \right) + \frac{(A\delta_2 - B\delta_1)q}{(1-Aq)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + (B - \delta_2) \left(\frac{B}{(1-B)^2} - \frac{Aq}{(1-Aq)^2} \right) \right] \frac{(1-B)(1-q)}{B(B-Aq)} + \frac{(1-\delta_1 q)(1-A)q}{(1-Aq)^2} \right\} I_{(d > \Delta)} \\
& + \left\{ \frac{(1-\delta_2)(1-q)}{B-Aq} \left(\frac{B}{1-B} - \frac{Aq}{1-Aq} \right) + \frac{(1-\delta_1)q}{1-Aq} \right\} I_{(d \leq \Delta)}, \text{ se } 0 < \frac{qA}{B} < 1
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde $\delta_1 = P \left\{ \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq \Delta \mid \Theta_{im} = 0 \right\}$; $\delta_2 = P \left\{ \frac{|X_{im}|}{\sigma} \leq \Delta \mid \Theta_{im} = \varepsilon \right\}$; δ_1 e δ_2 são respectivamente probabilidades similares a A e B; elas foram calculadas usando Δ ao invés de d . Neste sentido, se $\Delta > d$ então $A < \delta_1$ e $B < \delta_2$; se $\Delta < d$ então $A > \delta_1$ e $B > \delta_2$; $q = (1-p)^m$; $q_l = (1-p)^l$. Detalhes da determinação de (2.47) estão na seção 2.B no final deste capítulo para os leitores interessados.

Com todos os elementos de (2.39) conhecidos, a função perda L_P pode ser determinada. Os valores de intervalo ótimo e dos limites ótimos não podem ser analiticamente obtidos, mas determinados através de uma busca direta. Para ilustrar o modelo proposto considere o exemplo descrito na seção 2.3.4.

2.3.4 Exemplo numérico do novo procedimento.

Um fabricante de circuito integrado para computadores quer instalar um sistema para controlar uma determinada dimensão de interesse. Após uma pesquisa nos seus arquivos, ele obteve os seguintes valores de custo:

- Custo para produzir uma peça não conforme - US\$ 6,00 ($C_{NC} = 6$);
- Custo para inspecionar uma única peça - US\$ 1,50 ($C_I = 1,5$);

- Custo de um falso alarme - US\$ 0,80 ($C_F=0,80$);
- Custo para ajustar o processo - US\$ 12,00($C_A = 12$);
- Uma produção de 3 itens ($l = 3$) entre o sinal e a completa parada do processo;
- Limites de especificação $\Delta=1,6; 2,0$ e $3,5$; média do processo (fora de controle) $\varepsilon=0,5$ e a probabilidade da média do processo mudar $p=0,05$.

Intervalos ótimos de inspeção m (denotados por m_P) por busca direta foram obtidos fixando-se os limites de controle $d=1; 1,7; 2,0; 2,5; 3,0$ e $3,3$.

Para fins de comparação, os intervalos ótimos segundo a proposta de Taguchi foram obtidos (denotados por m_T) e colocados na Tabela 2.4. Similarmente limite de controle ótimo, d (denotado por d_P) e o limite controle ótimo segundo a proposta de Taguchi foram obtidos (denotados por d_T) fixando-se intervalos amostrais $m=5; 10; 15; 30; 100$ e 1000 . Estes resultados foram colocados na Tabela 2.5.

Da Tabela 2.4, intervalos maiores de inspeções (inspeções mais espaçadas) são requeridos na proposta apresentada, indicando uma inspeção menos freqüente que a de Taguchi.

Tabela 2.4: Intervalos ótimos de inspeção fixando limites de controle

	$d = 1,0$		$d = 1,7$		$d = 2,0$		$d = 2,5$		$d = 3,0$		$d = 3,3$	
Δ	m_P	m_T										
1,6	298	113	629	67	527	57	438	45	405	38	398	34
2,0	699	141	383	83	312	71	249	57	226	47	221	43
3,5	888	247	452	146	353	124	267	99	235	82	229	75

Tabela 2.5: Limites ótimos de controle fixando intervalo de inspeção.

	$m = 5$		$m = 10$		$m = 15$		$m = 30$		$m = 100$		$m = 1000$	
Δ	d_P	d_T	d_P	d_T	d_P	d_T	d_P	d_T	d_P	d_T	d_P	d_T
1,6	1	1 (0,2-0,36)	3,03	1 (-)	2,89	1 (-)	2,64	1 (-)	1,67	1 (-)	1,09	1 (-)
2,0	3,13	1 (0,22-0,4)	2,91	1 (-)	2,76	1 (-)	2,50	1 (-)	2,55	1 (-)	1	1 (-)
3,5	3,25	1 (0,29-0,53)	3,03	1 (-)	2,89	1 (-)	2,64	1 (-)	2,70	1 (-)	1	1 (-)

Conforme (2.34), o limite de controle ótimo do modelo de Taguchi depende do valor inicial d_0 . Assim, os limites obtidos através de (2.34) podem fornecer valores não apropriados

conforme havia sido apontado por Adams & Woodall (1989). Para ilustrar este fato, os limites de controle ótimos aplicando (2.34) e fixando $d_0=1$ e 3,3 foram calculados e colocados entre parênteses (coluna 3-Tabela 2.5). Para $\Delta=3,5$, os limites são respectivamente 0,29 e 0,53. Eles não são adequados e não devem ser adotados em situações práticas (probabilidade de estar dentro dos limites de controle respectivamente iguais a 0,16 e 0,44). Comparando os resultados da Tabela 2.5, os limites de controle da proposta são sempre mais largos que os de Taguchi. Isto implica uma maior severidade nas paradas do processo, resultando em menos interrupções. Além disto, conforme m aumenta, o limite decresce. No modelo de Taguchi, contudo, os limites *não* mudam uma vez que eles não dependem do intervalo de amostragem.

Finalmente os pares ótimos (m, d) foram determinados apenas para $\Delta= 3,5$ e 4,5 mantendo fixos $\varepsilon=0,5$; $p=0,05$ e os custos. Os resultados estão na Tabela 2.6. Analisando os resultados da Tabela 2.6, o método proposto apresenta valores mais razoáveis de limite de controle e de intervalo de inspeção assim como fornece melhores custos nos casos analisados. Para $\Delta= 3,5$, o intervalo amostral do método proposto é muito similar ao resultado de Taguchi, no entanto os limites de controle são muito diferentes. O método proposto fornece limites mais amplos e condizentes com a realidade que os de Taguchi, uma vez que limites iguais a $d = 1$ são inviáveis. Para $\Delta= 4,5$, um aumento no intervalo de amostral foi observado nos dois métodos, sendo os dois valores muito similares. Os limites de controle não apresentaram mudanças expressivas. No entanto, o custo decresceu para o modelo proposto e o de Taguchi aumentou.

Tabela 2.6: Valores ótimos de (m, d) para $\Delta= 3,5$ e 4,5.

Δ	Método	m	d	L
3,5	Taguchi	247	1	0,177
	Proposto	229	3,248	0,007
4,5	Taguchi	318	1	0,189
	Proposto	319	3,277	0,005

A função perda L_P é função de dois tipos de parâmetros: um relacionado com custos (C_I , C_A , C_{NC} e C_F) e outro relacionado com $(p, m, l, d, \Delta, \varepsilon, \sigma)$. Para analisar o comportamento de L_P pode-se proceder de muitas maneiras. Por exemplo, fixar os custos C_I , C_A , C_{NC} e C_F e variar os parâmetros $p, m, l, d, \Delta, \varepsilon, \sigma$ ou fixar estes e variar os custos. Uma desvantagem da função L_P , em (2.39), é o fato de expressão a ser minimizada não ser tão

simples quanto a proposta por Taguchi. Além disso, é necessário um programa computacional para que seja possível a sua utilização na prática, visto que a mesma envolve o cálculo de várias probabilidades. No método de Taguchi os valores ótimos m_T e d_T são obtidos através da derivação de L_T , enquanto que no método proposto os valores ótimos de m e d , denotados por m_P e d_P , serão obtidos através de uma busca direta nos possíveis valores de m e d , tal que minimizem a perda proposta L_P . A não obtenção de m_P e d_P através da derivação da função perda L_P dada em (2.39), se deve a complexidade das referidas expressões. Na Figura 2.8 apresenta-se uma comparação das perdas proposta e de Taguchi quando $\varepsilon = 0, 1$; $d = 3$; $p = 0, 05$ e $\Delta = 3, 5$.

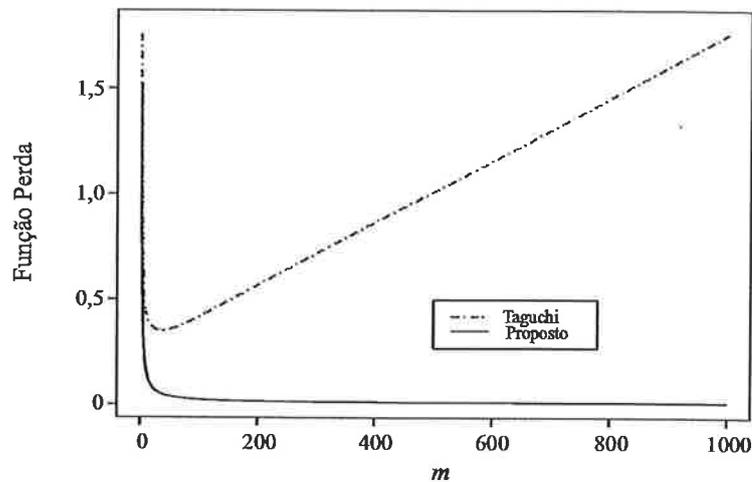


Figura 2.8: Função perda de Taguchi e proposta para $\varepsilon = 0, 1$; $d = 3$; $p = 0, 05$ e $\Delta = 3, 5$.

Observa-se na Figura 2.8 que a perda proposta é menor que a de Taguchi. De uma forma geral, a perda proposta é sempre menor que a de Taguchi. Este resultado é importante pois, significa que o custo da qualidade por item produzido é menor quando utiliza-se o método proposto neste trabalho.

De acordo com Adams & Woodall (1989), um exame detalhado do primeiro termo da função perda de Taguchi revela a razão do método de Taguchi ter um desempenho pobre para m grande e d pequeno.

Taguchi aproximou a perda esperada associada com desvios em torno do valor alvo por uma função de d^2 , que dá pequenos valores para d pequeno. O resultado é uma subestimação da perda esperada, por item, em um ciclo de produção. Nota-se que quando o limite de controle d aproxima-se de 0, a função perda indicará a inexistência de perda devido ao desvio do valor alvo. Como $u \geq m$, nota-se também que a perda esperada de Taguchi pode, de fato, ser feita arbitrariamente próxima de 0, deixando d se aproximar

de zero e aumentando m . Assim, um sistema de controle seria obviamente impraticável.

A modelagem proposta explicita na sua composição uma parcela referente a não conformidade [o número esperado de itens não conformes como multiplicador do custo de não conforme (C_{NC})], ao invés de usar uma função dos desvios em relação ao valor alvo t (dispersão do processo), como feito por Taguchi.

De uma forma geral, pode-se dizer que a perda proposta é sempre menor que a de Taguchi, o que é um resultado importante, pois significa que o custo da qualidade por item produzido é menor quando o método proposto neste trabalho for utilizado. Além disso, a abordagem proposta faz uma modelagem probabilística do processo a partir de uma cadeia de Markov, o que dá o formalismo e a precisão ao método proposto, ao contrário de método de Taguchi que é caracterizado como uma proposta intuitiva e carente de uma formalização matemática.

A abordagem proposta também expressou de forma mais adequada a parcela associada ao custo C_{NC} através da obtenção da expressão do número de itens não conformes, o que acaba refletindo no cálculo de um valor mais coerente para a perda. A incorporação do custo de falso alarme é conceitualmente importante pois, incorpora a idéia de que há um custo associado ao fato de que o processo pode ser parado desnecessariamente.

Em relação à determinação do par ótimo (m, d) o método proposto apresentou uma perda ótima menor que a de Taguchi, para valores próximos de m e um limite d mais adequado.

2.A Função de distribuição de ξ

A expressão (2.35) pode ser reescrita como

$$P\{\xi = km\} = P\{\xi = km, \Psi \leq km\} + P\{\xi = km, \Psi > km\}$$

com

$$\begin{aligned} P\{\xi = km, \Psi > km\} &= P\left\{\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_m - \mu_m|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \right. \\ &\quad \left. \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d, \Theta_0 = 0, \Theta_1 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0\right\} \\ &= P\{\Theta_0 = 0, \Theta_1 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0\} \times P\left\{\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_m - \mu_m|}{\sigma} \leq d, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_0 = 0, \Theta_1 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0\right\} \\ &= P\{\Theta_0 = 0, \Theta_1 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0\} \times \prod_{i=0}^{k-1} P\left\{\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right\} \\ &\quad \times P\left\{\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = 0\right\} \\ &= (1-p)^{km} \left[1 \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 2\bar{\Phi}(d))\right] \times 2\bar{\Phi}(d) = q^k [1 - 2\bar{\Phi}(d)]^{k-1} 2\bar{\Phi}(d), j \geq km \end{aligned} \tag{A.1}$$

Seja

$$A = [1 - 2\bar{\Phi}(d)]; \quad B = \left[\Phi\left(d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right] \tag{A.2}$$

Introduzindo (A.2) em (A.1), obtém-se

$$P\{\xi = km, \Psi > km\} = (1-p)^{km} A^{k-1} (1-A) = q^k A^{k-1} (1-A), j \geq km$$

e

$$\begin{aligned}
P\{\xi = km, \Psi \leq km\} &= \sum_{j=0}^{km-1} P \left\{ \frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m} - \mu_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m}|}{\sigma} \leq d, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d, \Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} P\{\Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon\} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{km-1} P \left\{ \frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m} - \mu_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m}|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \right. \\
&\quad \left. \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} P\{\Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon\} \times \left[\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} P \left\{ \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0 \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1} P \left\{ \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = \varepsilon \right\} \times P \left\{ \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon \right\} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} p(1-p)^j \times 1 \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} [1 - 2\bar{\Phi}(d)] \prod_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1} \left[\Phi\left(d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right] \times \left[1 - \Phi\left(d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(-d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} p(1-p)^j \times [1 - 2\bar{\Phi}(d)]^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \\
&\quad \times \left[\Phi\left(d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right]^{k - \lfloor \frac{j}{m} \rfloor - 1} \times \left[1 - \Phi\left(d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(-d - \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right], \text{ se } 0 \leq j < km
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$\lfloor \frac{j}{m} \rfloor$ denota o maior inteiro $\leq \frac{j}{m}$. Introduzindo (A.2) em (A.3) obtém-se

$$P\{\xi = km, \Psi \leq km\} = \sum_{j=0}^{km-1} p(1-p)^j A \left[\frac{j}{m} \right] B^{k - \left[\frac{j}{m} \right] - 1} (1-B), \quad 0 \leq j < km \tag{A.4}$$

A expressão (A.4) pode ser reescrita como

$$P\{\xi = km, \Psi \leq km\} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} p(1-p)^j A^i B^{k-i-1} (1-B) \quad (\text{A.5})$$

Somando (A.5) em j e depois em i , obtém-se

$$\begin{aligned} P\{\xi = km, \Psi \leq km\} &= (1-q) B^{k-1} (1-B) \times \frac{1 - [qA/B]^k}{1 - [qA/B]} \\ &= (1-q) B^{k-1} (1-B) \times \frac{B^k - [qA]^k}{B^{k-1} [B - qA]} \\ &= (1-q) (1-B) \times \frac{[B^k - q^k A^k]}{[B - qA]}, \text{ se } 0 < \frac{qA}{B} < 1 \text{ e } 0 \leq j < km \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

2.B Número esperado de itens não conforme

A expressão (2.42) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{\xi+1} I \left(\frac{|x_i|}{\sigma} > \Delta \right) \right] &= E \left[E \left[\sum_{i=1}^{\xi+1} I \left(\frac{|x_i|}{\sigma} > \Delta \right) \mid \xi = km, \Psi = j+1 \right] \right] \\ &= E[f(k, j)] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(k, j) P(\xi = km, \Psi = j+1) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

A função de distribuição conjunta $P(\xi = km, \Psi = j+1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} &P\{\xi = km, \Psi = j+1\} \\ &= P \left\{ \frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m} - \mu_{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m}|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \right. \\ &\quad \left. \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d, \Theta_0 = 0, \dots, \Theta_j = 0, \Theta_{j+1} = \varepsilon, \dots, \Theta_{km} = \varepsilon \right\} \\ &= p(1-p)^j A^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} B^{k - \lfloor \frac{j}{m} \rfloor - 1} (1-B), \text{ se } 0 \leq j < km \text{ e } \xi = km, k \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e,

$$\begin{aligned}
P\{\xi = km, \Psi = j + 1\} &= P\left\{\frac{|X_0 - \mu_0|}{\sigma} \leq d, \frac{|X_m - \mu_m|}{\sigma} \leq d, \dots, \frac{|X_{(k-1)m} - \mu_{(k-1)m}|}{\sigma} \leq d, \right. \\
&\quad \left. \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d, \Theta_0 = 0, \dots, \Theta_{km} = 0, \dots, \Theta_{j+1} = \varepsilon\right\} \\
&= p(1-p)^j A^{k-1}(1-A), \text{ se } j \geq km \text{ e } \xi = km, k \geq 1
\end{aligned} \tag{B.3}$$

A função $f(k, j)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
f(k, j) &= E\left[\sum_{i=1}^{\xi+l} I\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta\right) \mid \xi = km, \Psi = j + 1\right] \\
&= \sum_{i=1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \xi = km, \Psi = j + 1\right)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

A expressão (B.4) foi obtida considerando três eventos:

1. para $0 \leq j < km$ (a média mudou antes da inspeção);
2. para $km \leq j < km + l$ (a média mudou durante o tempo de atraso);
3. para $j \geq km + l$ (a média mudou depois do tempo de atraso).

2.B.1 $f(k, j)$, para $0 \leq j < km$ e $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 f(k, j) &= \sum_{i=1}^{km+1} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \xi = km, \Psi = j + 1\right) \\
 &= \left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \left(\frac{P\left(\Delta < \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)}\right) + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1} \left(\frac{P\left(\Delta < \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = \varepsilon\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = \varepsilon\right)}\right) \right] \times I_{(d > \Delta)} \\
 &+ \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor - 1} \sum_{y=1}^{m-1} P\left(\frac{|X_{im+y} - \mu_{im+y}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im+y} = 0\right) + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m + 1}^j P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = 0\right) \right] \\
 &+ \left[\sum_{i=j+1}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m + m - 1} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = \varepsilon\right) + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1} \sum_{y=1}^{m-1} P\left(\frac{|X_{im+y} - \mu_{im+y}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im+y} = \varepsilon\right) \right. \\
 &\left. + \sum_{i=km+1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = \varepsilon\right) \right] + \frac{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > \Delta, \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)}{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)} \\
 & \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > \Delta, \frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)}{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)} &= \frac{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)}{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)} \times I_{(d > \Delta)} \\
 &+ \frac{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)}{P\left(\frac{|X_{km} - \mu_{km}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{km} = \varepsilon\right)} \times I_{(d \leq \Delta)}
 \end{aligned}$$

Comentários referentes aos componentes de (B.5):

- Os termos dados por quociente de duas probabilidades se referem aos itens inspecionados. $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor}$ - esta soma se refere aos itens inspecionados antes da mudança da média;
- $\sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1}$ - ela se refere aos itens inspecionados após a mudança da média exceto o km -ésimo item;

Como um único item é inspecionado a cada m itens, $(m - 1)$ não são inspecionados em

cada bloco de m itens.

- $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor - 1} \sum_{y=1}^{m-1}$ - ela se refere aos blocos de $(m-1)$ itens não inspecionados anteriores ao bloco que contém a mudança da média;
- $\sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m + 1}^j$ - ela se refere aos itens não inspecionados (produzidos antes da mudança da média) dentro do bloco onde houve a mudança da média;
- $\sum_{i=j+1}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor m + m - 1}$ - ela se refere aos itens não inspecionados (produzidos após a mudança da média) dentro do bloco em que houve a mudança da média;
- $\sum_{i=\lfloor \frac{j}{m} \rfloor + 1}^{k-1} \sum_{y=1}^{m-1}$ - ela se refere aos blocos de $(m-1)$ itens não inspecionados após o bloco em que houve mudança na média;
- $\sum_{i=km+1}^{km+l}$ - ela se refere aos itens produzidos no atraso.

2.B.2 $f(k, j)$ para $km \leq j < km + l$ (a mudança foi durante o atraso) e $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
f(k, j) &= \sum_{i=1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \xi = km, \Psi = j + 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{P\left(\Delta < \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)} \right) \times I_{(d > \Delta)} \\
&\quad + \left[\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{y=1}^{m-1} P\left(\frac{|X_{im+y} - \mu_{im+y}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im+y} = 0\right) \right] \\
&\quad + \sum_{i=km+1}^j P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = 0\right) \times I_{(d > \Delta)} + \frac{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im} = 0\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{im} = 0\right)} \times I_{(d \leq \Delta)} \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = \varepsilon\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

2.B.3 $f(k, j)$ para $j \geq km + l$ (a mudança foi após o tempo de atraso) e $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
f(k, j) &= \sum_{i=1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \xi = km, \Psi = j + 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{P\left(\Delta < \frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} \leq d \mid \Theta_{im} = 0\right)} \right) \times I_{(d > \Delta)} \\
&\quad + \left[\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{y=1}^{m-1} P\left(\frac{|X_{im+y} - \mu_{im+y}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im+y} = 0\right) \right] \\
&\quad + \sum_{i=km+1}^{km+l} P\left(\frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_i = 0\right) + I_{(d > \Delta)} + \frac{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} > \Delta \mid \Theta_{im} = 0\right)}{P\left(\frac{|X_{im} - \mu_{im}|}{\sigma} > d \mid \Theta_{im} = 0\right)} \times I_{(d \leq \Delta)}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Somando (B.5), (B.6) e (B.7) em i para obter (B.4); aplicando (B.3) e (B.2) em (B.1); somando (B.1) em j e k e após algumas manipulações algébricas, a expressão (2.42) pode ser obtida.

3 Índices de Capacidade

3.1 Introdução

No início dos anos 70, os índices de capacidade foram introduzidos para medir o quanto um processo é capaz de atender às especificações exigidas. Assim diversas funções da média do processo μ e do desvio padrão σ foram propostas como índices de capacidade, entre elas, podem ser citados:

$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma}$$

proposto por Juran (1974); o índice

$$C_{pm} = C_p \div \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}$$

proposto por Hsiang & Taguchi (1985); o índice

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{\mu - L}{3\sigma}, \frac{U - \mu}{3\sigma} \right\}$$

de Kane (1986) e o proposto por Pearn (1992)

$$C_{pmk} = C_{pk} \div \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}$$

onde U e L , representam respectivamente, o limite superior e inferior de especificação; T, o valor alvo do processo. Tal coleção ilustra as várias tentativas de definir medidas de capacidade de processo. Uma boa referência sobre índices pode ser encontrada no livro de Kotz & Johnson (1993) e nos artigos de Kotz & Johnson (2002) e Spiring et al.

(2003). A partir destas iniciativas, esforços têm sido envidados por vários pesquisadores para desenvolver novos procedimentos estatísticos para avaliar a capacidade de processo a partir dos dados coletados. No entanto, todos os procedimentos inferenciais desses índices sempre vão requerer, além de um processo estável:

- Conhecimento da distribuição da característica de interesse;
- Observações da característica de interesse devem ser independentes;
- Valor da característica de interesse deve ser observável;
- Limites de especificação associados com a fração de conformidade do processo.

Em não atendendo a estes quesitos, os usuários podem estar tomando decisões erradas, por exemplo, afirmando que o processo é capaz de atender às especificações quando a verdade não é capaz de atender, ou o contrário. Para exemplificar, supõe-se, geralmente, que a característica de interesse obedeça a uma distribuição Normal, ou que as observações devem ser independentes. Neste capítulo discorrerá as contribuições da Profa. Dr. Linda Lee Ho sobre índice de capacidade nas seguintes situações:

- O índice de capacidade não paramétrico proposto por Clements (1989) emprega estatísticas de ordem e assim sendo não é necessário conhecer a distribuição da característica de interesse. Na seção 3.2 estão apresentados os procedimentos inferenciais do índice de Clements desenvolvidos por Borges & Ho (2000).
- Em processos com um alto volume de produção, os valores da característica de interesse podem não ser independentes, porém auto-correlacionados. Na seção 3.3 estão os procedimentos inferenciais sobre os índices de capacidade em processos normais com observações não independentes apresentados por Ramos & Ho (2003).
- Em alguns processos, a variável de interesse não é observável, mas obtida a partir de alguma função conhecida de variáveis de entrada. Por exemplo, o volume de uma esfera pode não ser medida, mas obtida a partir do raio da esfera. Procedimentos inferenciais de índices de capacidade propostos por Bulba & Ho (2004, 2006) para este tipo de processo estão descritos na seção 3.4.
- A coleção de índices de capacidade apresentada na introdução desta seção reflete a dificuldade em medir a capacidade de um processo e a maioria deles enfoca os processos com especificações simétricas. Uma especificação é dita simétrica se $m =$

$(U + L)/2$. Desse modo, $U - m = m - L$ e esta quantidade é conhecida como tolerância. No entanto, existem muitos casos com $T \neq (U + L)/2$ tal que justifique especificações assimétricas, ou seja, existem duas distintas tolerâncias $D_L = T - L$ e $D_U = U - T$. Para processos assimétricos, vários autores propuseram uma série de índices de capacidade, inclusive Boyle (1994) propôs uma família de índices. Na seção 3.5 estão apresentados os procedimentos inferenciais desse índice de capacidade desenvolvidos por Ho (2003).

- Em processos normais, os índices mais conhecidos e utilizados como C_p e C_{pk} estão calibrados com a fração de não conformidade, no entanto esta propriedade não é válida para características de interesse que não sigam distribuições normais. Na seção 3.6 estão apresentados alguns índices alternativos similares aos índices C_p e C_{pk} para processos não normais com especificações bilaterais e unilaterais, mas calibrados com a fração não conforme desenvolvidos por Borges & Ho (2001) e Ho, Borges & Barriga (2004).

3.2 Índice de capacidade não paramétrico de Clements (procedimentos inferenciais)

Para processos não normais, Clements (1989) propôs o índice

$$C_c = \min \left\{ \frac{\xi_{0,5} - L}{\xi_{0,5} - \xi_q}, \frac{U - \xi_{0,5}}{\xi_{1-q} - \xi_{0,5}} \right\} \quad (3.1)$$

onde ξ_q indica o q -ésimo quantil. Um estimador natural de (3.1) é dado por

$$\hat{C}_c = \min \left\{ \frac{\hat{\xi}_{0,5} - L}{\hat{\xi}_{0,5} - \hat{\xi}_q}, \frac{U - \hat{\xi}_{0,5}}{\hat{\xi}_{1-q} - \hat{\xi}_{0,5}} \right\} \quad (3.2)$$

onde $\hat{\xi}_q$ corresponde ao q -ésimo quantil amostral.

Borges & Ho (2000) obtiveram a distribuição amostral de \hat{C}_c . Partindo da distribuição assintótica que o vetor $\sqrt{n} \left((\hat{\xi}_q - \xi_q) \quad (\hat{\xi}_{0,5} - \xi_{0,5}) \quad (\hat{\xi}_{1-q} - \xi_{1-q}) \right)$ tem distribuição Normal $(\mathbf{0}, \Sigma)$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{q(1-q)}{f^2(\xi_q)} & \frac{0,5q}{f(\xi_q)f(\xi_{0,5})} & \frac{q^2}{f(\xi_q)f(\xi_{1-q})} \\ \frac{0,5q}{f(\xi_q)f(\xi_{0,5})} & \frac{0,25}{f^2(\xi_{0,5})} & \frac{0,5q}{f(\xi_{1-q})f(\xi_{0,5})} \\ \frac{q^2}{f(\xi_q)f(\xi_{1-q})} & \frac{0,5q}{f(\xi_{1-q})f(\xi_{0,5})} & \frac{q(1-q)}{f^2(\xi_{1-q})} \end{bmatrix}$$

segue que o vetor $\sqrt{n}((X_1 - \mu_1) \ (X_2 - \mu_2))$ com $X_1 = \frac{\xi_{0,5}-L}{\xi_{0,5}-\xi_q}$; $\mu_1 = \frac{\xi_{0,5}-L}{\xi_{0,5}-\xi_q}$; $X_2 = \frac{U-\xi_{0,5}}{\xi_{1-q}-\xi_{0,5}}$ e $\mu_2 = \frac{U-\xi_{0,5}}{\xi_{1-q}-\xi_{0,5}}$, também vai seguir uma distribuição Normal $(\mathbf{0}, \Sigma^*)$ com

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_1^{2*} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^{2*} \end{bmatrix} \text{ dados por}$$

$$\sigma_1^{2*} = (\xi_{0,5} - \xi_q)^{-4} [(\xi_{0,5} - L)^2 \sigma_{11} + 2\sigma_{12}(\xi_{0,5} - L)(L - \xi_q) + (L - \xi_q)^2 \sigma_{22}];$$

$$\sigma_{22}^{2*} = (\xi_{1-q} - \xi_{0,5})^{-4} [(U - \xi_{1-q})^2 \sigma_{22} + 2\sigma_{23}(U - \xi_{1-q})(\xi_{0,5} - U) + (\xi_{0,5} - U)^2 \sigma_{33}]$$

e

$$\sigma_{12}^* = \frac{[\sigma_{12}(U - \xi_{1-q}) + \sigma_{13}(\xi_{0,5} - U)](\xi_{0,5} - L) + [\sigma_{22}(U - \xi_{1-q}) + \sigma_{23}(\xi_{0,5} - U)](L - \xi_q)}{(\xi_{1-q} - \xi_{0,5})^2 (\xi_{0,5} - \xi_q)^2}$$

sendo σ_{ij} elementos da matriz Σ . Como $\hat{C} = \min(X_1, X_2)$ segue que

$$P(\hat{C}_c > z) = P(X_1 > z, X_2 > z) \cong P(W_1 > \sqrt{n}(z - \mu_1), W_2 > \sqrt{n}(z - \mu_2))$$

com $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ seguindo uma distribuição Normal com $(\mathbf{0}, \Sigma^*)$. Além disto, se T, U_1, U_2 são variáveis aleatórias independentes normal padrão, a transformação $Y_1 = (\rho T + U_1 \sqrt{1 - \rho^2}) \sigma_1^*$ e $Y_2 = (\rho T + U_2 \sqrt{1 - \rho^2}) \sigma_2^*$ produzirá o vetor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ com a mesma distribuição de \mathbf{W} (ver Johnson, Kotz & Balakrishnan, 1995) com $\rho = \frac{\sigma_{12}^*}{\sigma_1^* \sigma_2^*}$, ou seja

$$|\rho| = \left[\left(\left(\sqrt{\frac{q}{1-2q}} + \frac{f(\xi_q)(L - \xi_q)}{2f(\xi_{0,5})(\xi_{0,5} - L)\sqrt{q(1-2q)}} \right)^{-2} + 1 \right) \times \left(\left(\sqrt{\frac{q}{1-2q}} + \frac{f(\xi_{1-q})(U - \xi_{1-q})}{2f(\xi_{0,5})(\xi_{0,5} - U)\sqrt{q(1-2q)}} \right)^{-2} + 1 \right) \right]^{-0,5}$$

Segue que

$$\begin{aligned} P(\hat{C}_c > z) &\cong P\left(\rho T + U_1\sqrt{1-\rho^2} > \sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^*}\right), \rho T + U_2\sqrt{1-\rho^2} > \sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^*}\right)\right) \\ &= P\left(U_1 > \frac{\sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^*}\right) - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}, U_2 > \frac{\sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^*}\right) - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = E[f(T)] \end{aligned}$$

com

$$f(T) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^*}\right) - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] \times \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^*}\right) - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right].$$

Empregando expansão em séries de Taylor pode-se escrever

$$E[f(T)] \cong f(T) + \frac{\partial^2}{\partial T^2} f(T) Var(T)|_{T=E(T)=0}$$

que após algumas manipulações algébricas, a distribuição de (3.2) resulta em

$$P(\hat{C}_c > z) \cong \bar{\Phi}(z_1)\bar{\Phi}(z_2) + \frac{\rho^2}{1-\rho^2}[\phi(z_1)(\phi(z_2) - z_1\bar{\Phi}(z_2)) + \phi(z_2)(\phi(z_1) - z_2\bar{\Phi}(z_1))] \quad (3.3)$$

com $z_i = \sqrt{n}\left(\frac{z-\mu_i}{\sigma_i^*}\right)\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}$, $i = 1, 2$.

Uma condição necessária de (3.3) é que a característica de interesse tenha uma distribuição absolutamente contínua cuja densidade não seja nula em ξ_q ; $\xi_{0,5}$ e ξ_{1-q} . Em termos práticos, é interessante obter valores do índice para valores pequenos de q e conhecer o comportamento da aproximação da distribuição amostral de \hat{C}_c nestas condições.

Contudo, isto depende do comportamento da função densidade no quantil q .

Considere dois pontos, a e b , tal que $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Nestas condições, $|\rho| \rightarrow 1$ conforme $q \rightarrow 0$, uma vez que $\left| \frac{f(\xi_q)(L-\xi_q)}{\sqrt{q}} \right|$ e $\left| \frac{f(\xi_{1-q})(L-\xi_{1-q})}{\sqrt{q}} \right|$ crescem conforme $q \rightarrow 0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} P(\hat{C}_c > z) &\cong P(W_1 > \sqrt{n}(z - \mu_1), W_2 > \sqrt{n}(z - \mu_2)) \\ &\cong P(W_1 > \sqrt{n}(z - \mu_1), \rho_0 \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} W_1 > \sqrt{n}(z - \mu_2)) \\ &= \bar{\Phi} \left(\max \left[\frac{\sqrt{n}(z - \mu_1)}{\sigma_1^*}, \frac{\sqrt{n}(z - \mu_2)}{\rho_0 \sigma_2^*} \right] \right) \end{aligned}$$

com $\rho_0 = \pm 1 = \lim_{q \rightarrow 0} \rho$. Por outro lado, se $f(a) \approx 0$, então nestas condições $|\rho| \rightarrow 0$ conforme $q \rightarrow 0$, uma vez que $\left| \frac{f(\xi_q)(L-\xi_q)}{\sqrt{q}} \right| \rightarrow 0$ e $\left| \frac{f(\xi_{1-q})(L-\xi_{1-q})}{\sqrt{q}} \right| \rightarrow 0$ conforme $q \rightarrow 0$. Desde modo,

$$P(\hat{C}_c > z) \cong \bar{\Phi} \left(\frac{\sqrt{n}(z - \mu_1)}{\sigma_1^*} \right) \times \bar{\Phi} \left(\frac{\sqrt{n}(z - \mu_2)}{\sigma_2^*} \right).$$

Para obter o intervalo de confiança exato de C_c é particularmente difícil, no entanto Borges & Ho (2000) obtiveram intervalos de confiança aproximados e conservativos para este índice de capacidade conforme a seguir. Considere $x_i = 1 + z_{(\alpha/4)} \frac{\sigma_i^*}{\mu_i \sqrt{n}}$ e $y_i = 1 + z_{(1-\alpha/4)} \frac{\sigma_i^*}{\mu_i \sqrt{n}}$, onde $z_{(q)}$ denota o quantil de ordem q de uma normal padrão. Segue que

$$\begin{aligned} P \left(x_i \leq \frac{X_i}{\mu_i} \leq y_i \right) &= P [(x_i - 1)\mu_i \leq X_i - \mu_i \leq (y_i - 1)\mu_i] \\ &= P \left(z_{(\alpha/4)} \leq \frac{\sqrt{n}(X_i - \mu_i)}{\sigma_i^*} \leq z_{(1-\alpha/4)} \right) \cong 1 - \alpha/2, \end{aligned}$$

ou seja, $V_i = X_i - z_{(1-\alpha/4)} \frac{\sigma_i^*}{\sqrt{n}}$ e $W_i = X_i - z_{(\alpha/4)} \frac{\sigma_i^*}{\sqrt{n}}$ é um intervalo de confiança aproximado para μ_i com confiança de $1 - \alpha/2$. Como

$$\begin{aligned}
P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 (V_i \leq \mu_i \leq W_i) \right\} &= P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \left(x_i \leq \frac{X_i}{\mu_i} \leq y_i \right) \right\} \\
&= 1 - P \left\{ \bigcup_{i=1}^2 \left(x_i \leq \frac{X_i}{\mu_i} \leq y_i \right)^c \right\} \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^2 P \left\{ \left(x_i \leq \frac{X_i}{\mu_i} \leq y_i \right)^c \right\} \cong 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

e,

$$\bigcap_{i=1}^2 \{V_i \leq \mu_i \leq W_i\} \Rightarrow \{\min(V_1, V_2) \leq C_c \leq \min(W_1, W_2)\}.$$

Assim,

$$\{\min(V_1, V_2) \leq C_c \leq \min(W_1, W_2)\}$$

é um intervalo confiança conservativo aproximado de C_c com nível de confiança $1 - \alpha$. O mesmo argumento pode ser usado para construir limites de confiança aproximados para C_c , em particular fixando $\alpha = 2q$. Empregando as definições de V_i e W_i acima, tem-se que

$$\min(V_1, V_2) \quad \text{e} \quad \hat{C}_c - z_{(1-q/2)} \frac{\max(\sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\sqrt{n}}$$

são limites inferiores conservativos aproximados de C_c com nível confiança $(1 - q)$.

Para ilustrar o comportamento do índice de Clements e da correlação ρ em função dos quantis, um conjunto de distribuições foi selecionado cujos parâmetros estão resumidos na Tabela 3.1. Foram adotados como limites de especificação $L = 100$ e $U = 104$ tal que $P(X \leq L) = P(X \geq U) = 0,0228$ nas distribuições listadas na Tabela 3.1. Gráficos dos valores de C_c e ρ versus $0 < q < 0,25$ estão na Figura 3.1.

Pode-se observar na Figura 3.1 que $C_c \uparrow 1$ e $\rho \rightarrow -1$ quando $q \rightarrow 0$ para as distribuições Uniforme e Beta e para outras distribuições $\rho \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow 0$. Para avaliar a distribuição amostral aproximada proposta, foram feitas comparações com a distribuição empírica de \hat{C}_c gerada de distribuições uniforme e exponencial com número de repetições

$r=200, 400$ e 800 e tamanho de amostras $n=2500, 5000$ e 10000 . Figura 3.2 ilustra o comportamento da distribuição amostral do estimador versus a empírica (os resultados para a distribuição exponencial estão na coluna esquerda; os da coluna direita se referem à distribuição uniforme; os resultados com $r=200$ estão na primeira linha, $r=400$, na segunda linha e $r=800$, na terceira linha). Em todos os casos, a distribuição empírica e a aproximada são bastante próximas e, conforme esperado, esta diferença diminui à medida que aumenta o tamanho da amostra. Isto mostra que a distribuição amostral aproximada proposta é uma boa aproximação da distribuição amostral do estimador de C_c .

Tabela 3.1: Parâmetros das distribuições.

Distribuição	Função densidade	Valor dos parâmetros
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-0,5 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$\mu = 102$ $\sigma = 1$
t-Student	$f(x) = \frac{1}{\eta} t_{(2)}\left(\frac{x-\theta}{\eta}\right)$ $t_{(2)}$, distribuição t-Student com 2 g.l.	$\eta = 0,44235783$ $\theta = 102$
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right)}$	$\alpha = 102$ $\beta = 0,14350213$
Exponencial Dupla	$f(x) = \frac{1}{2\eta} \exp\left(-\left \frac{x-\theta}{\eta}\right \right)$	$\theta = 102$ $\eta = 0,64770037$
Weibull	$f(x) = \frac{\alpha}{\eta} \left(\frac{x-\theta}{\eta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\theta}{\eta}\right)^\alpha\right)$ $x \geq \theta$	$\alpha = 0,5$ $\theta = 99,66112389$ $\eta = 2,23138348$
Exponencial	$f(x) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{x-\theta}{\eta}\right)$ $x \geq \theta$	$\eta = 1,06441555$ $\theta = 99,97545038$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{x-A}{\eta}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x-A}{\eta}\right)^{\beta-1}$ $A \leq x \leq B$	$\alpha = \beta = 0,25$ $A = 99,99998723$ $B = 104,00001277$ $\eta = B - A$
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$ $\alpha \leq x \leq \beta$	$\alpha = 99,90444258$ $\beta = 104,09555742$

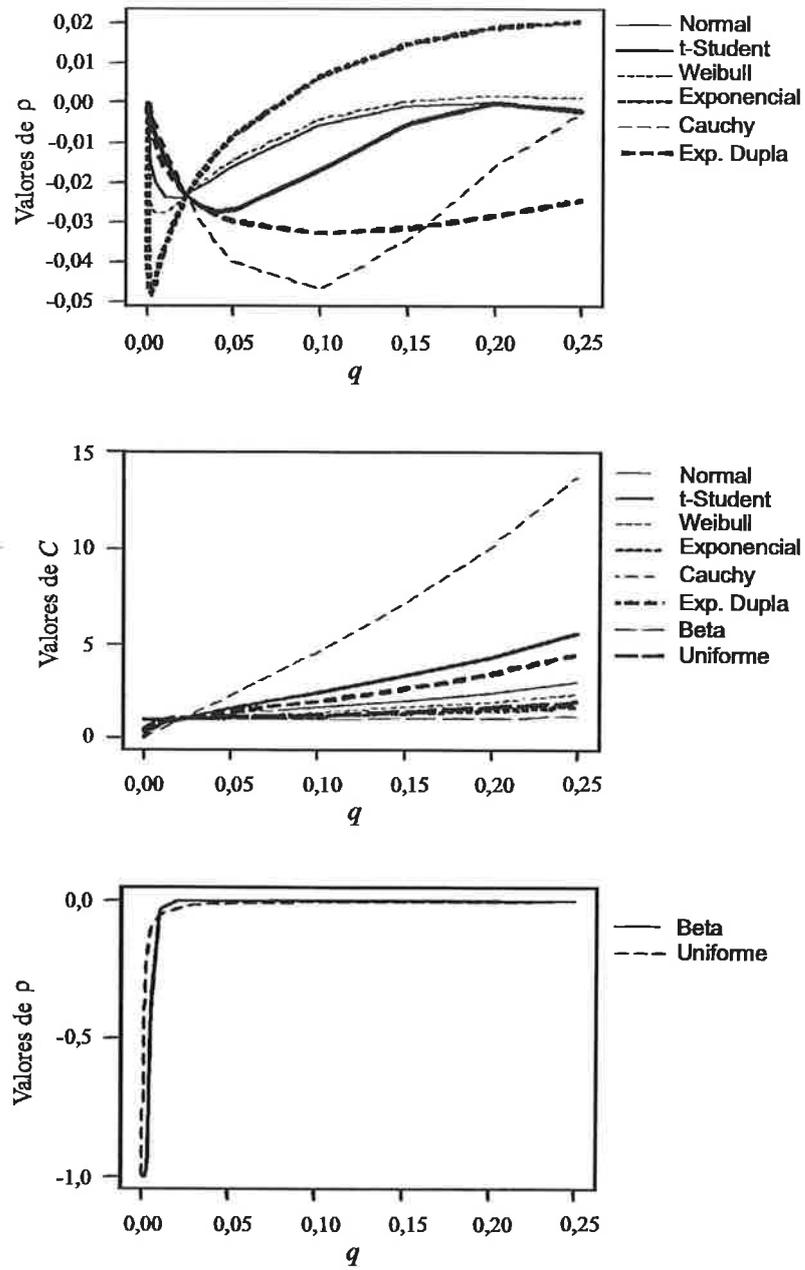


Figura 3.1: Comportamento do índice e correlação em função dos valores de q .

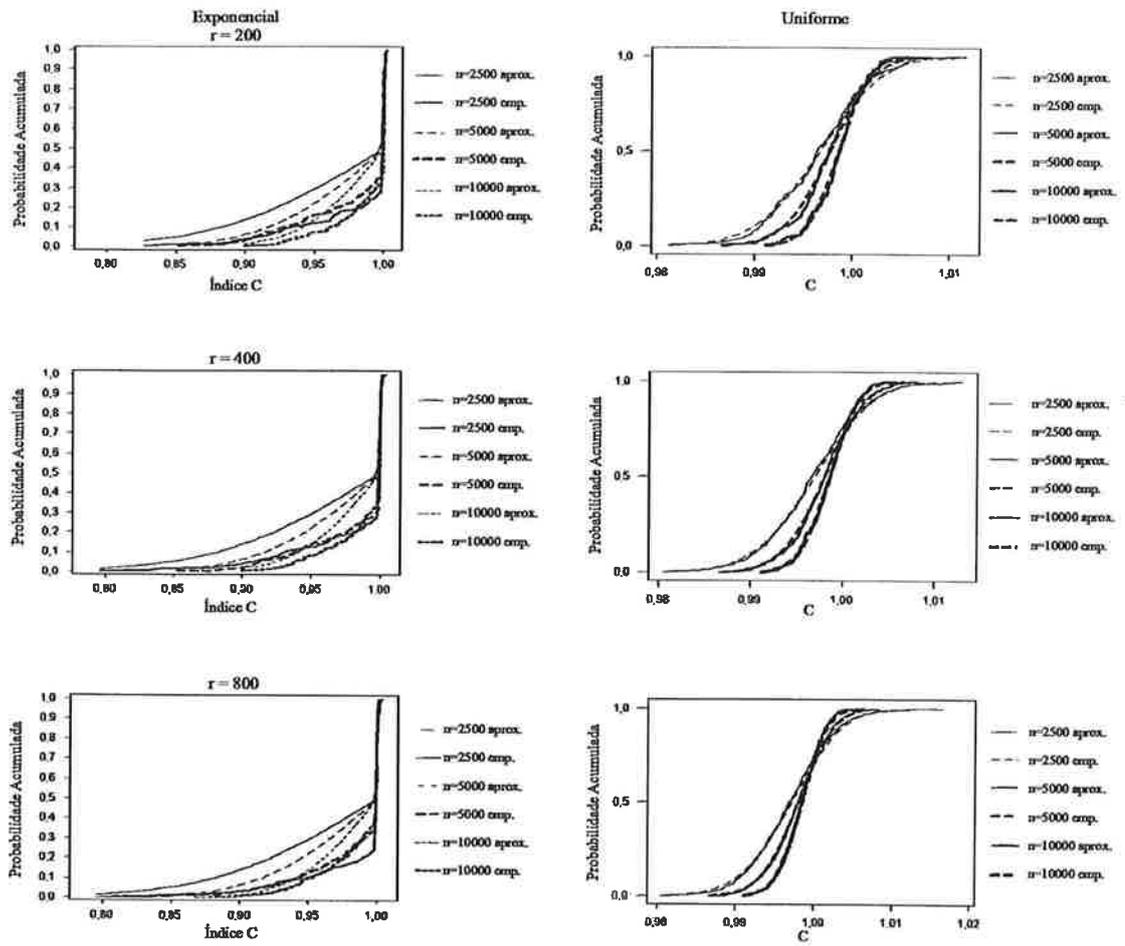


Figura 3.2: Distribuição empírica versus à amostral aproximada.

3.3 Índice de capacidade para processos normais auto-correlacionados (procedimentos inferenciais através da reamostragem: *bootstrap*)

Em relação à avaliação da capacidade de processos com dados autocorrelacionados, o interesse pelo assunto ainda é recente, segundo Zhang (1996), e mesmo alguns autores de renome, tais como Kotz & Johnson (1993) referem-se pouco a este problema específico. Diversos autores, como Rodrigues (1992), Franklin & Wasserman (1992) e Constable & Yen (1991), têm sugerido a utilização de técnicas de simulação, para avaliação da capacidade em situações especiais. Dentre os métodos de simulação, um parece ser de particular interesse: o método de reamostragem (*Bootstrap*). Embora o método já seja conhecido há algum tempo, sua aplicação a dados autocorrelacionados tem sido incipiente e não têm sido feitas comparações quanto a sua eficiência e robustez nesta situação.

Ramos & Ho (2003) apresentam procedimentos inferenciais para os índices de capacidade para características de qualidade autocorrelacionadas normalmente distribuídos via *bootstrap* para alguns modelos de séries temporais mais realistas na indústria. Segundo Montgomery & Runger (1994), das várias séries temporais estacionárias, merecem destaque as séries: auto-regressivo de primeira ordem AR(1); auto-regressivo de segunda ordem AR(2); média móvel de primeira ordem MA(1); média móvel de segunda ordem MA(2); auto-regressivo de primeira ordem e média móvel de primeira ordem ARMA(1,1) por serem as mais comumente encontradas no campo da engenharia. Assim, optou-se por avaliar somente estas com resíduos normais. Por outro lado, deve-se lembrar que uma das restrições dos modelos ARMA é a exigência de que os resíduos sejam independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância constante, ou seja, $e_t \sim \text{IID}(0, \sigma_e^2)$.

O método originalmente proposto por Efron & Tibshirani (1986) foi modificado para atender a estruturas de dados mais complexas, em virtude da existência de dependência serial. É necessário eliminar a estrutura interna existente entre os dados (autocorrelação) através do ajuste de um modelo adequado ARIMA. Se tal modelo for eficiente na extração da informação contida na série temporal, os resíduos devem mostrar-se estatisticamente independentes (ruído branco). Assim sendo, o procedimento de reamostragem para dados autocorrelacionados é constituído das seguintes etapas:

1. Gerar uma amostra com n valores segundo NIID (0,1);
2. Gerar uma série temporal segundo o modelo *ARIMA* (p,q) selecionado;

3. Obter a(s) estimativa(s) do(s) parâmetro(s) do modelo *ARIMA* (p, q) selecionado, pelo método dos mínimos quadrados;
4. Ajustar o modelo aos dados, obtendo os resíduos estimados $\hat{\varepsilon}_i = x_i - \hat{x}_i$, e definir como amostra original $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$ a estes;
5. Obter uma reamostra $\hat{\varepsilon}_1^*, \hat{\varepsilon}_2^*, \hat{\varepsilon}_3^*, \dots, \hat{\varepsilon}_n^*$, mediante a amostragem (com reposição) dos resíduos da etapa d;
6. Reconstituir a série temporal *ARIMA* (p, q) , utilizando a reamostra dos resíduos $\hat{\varepsilon}_1^*, \hat{\varepsilon}_2^*, \hat{\varepsilon}_3^*, \dots, \hat{\varepsilon}_n^*$ e a(s) estimativa(s) do(s) parâmetro(s) obtida(s);
7. Calcular as estimativas dos índices de capacidade $C_p^{(i)}$ e $C_{pk}^{(i)}$;
8. Repetir as etapas de 1 até 7, B vezes;
9. Obter as médias amostrais de C_p e C_{pk} e os respectivos desvios-padrões $s_{C_p}^*$ e $s_{C_{pk}}^*$;
10. Construir intervalos de confiança para C_p e C_{pk} , segundo as três formas que são:

- A primeira é denominada de Método Padrão, dada por:

$$\bar{\psi}^* \pm z_{\alpha/2} s_{\psi}^* \quad (3.4)$$

- a segunda forma denominada de Método Percentil

$$[\psi^*(\alpha/2); \psi^*(1 - \alpha/2)]; \quad (3.5)$$

- e a terceira forma denominada de Método Percentil Corrigido dada por

$$[\hat{\psi}^*(p_i B); \hat{\psi}^*(p_s B)] \quad (3.6)$$

onde $\hat{\psi}^*(q)$ denota o q -ésimo quantil amostral das estimativas dos índices de capacidade de interesse; $\bar{\psi}$ e s_{ψ}^* denotam respectivamente a média e desvio amostral das estimativas dos parâmetros de interesse;

$$p_i = \Phi^{-1}(2z_0 - z_{\alpha/2}); \quad p_s = \Phi^{-1}(2z_0 + z_{\alpha/2}); \quad z_0 = \Phi^{-1}(p_0)$$

e p_0 é a probabilidade de uma estimativa de $\hat{\psi}^*(j)$ ser inferior à estimativa pontual da amostra original.

Para ilustrar o procedimento proposto, três tamanhos de amostra foram utilizados: $n = 50, 100$ e 250 . Tamanhos superiores a estes não costumam ser comuns na execução de estudos de capacidade de curto-prazo, em função do custo de sua obtenção e interferência na produção normal. Nos casos simulados, a quantidade de repetições (B) foi mantida constante e igual a 1000. Os limites inferior e superior de especificação foram fixados em -3 e $+3$, respectivamente. Na Tabela 3.2 estão os valores dos parâmetros utilizados na simulação. Foram escolhidos de modo que as séries fossem estacionárias, as autocorrelações positivas e $\xi = 0$.

Tabela 3.2: Valor dos parâmetros das séries temporais utilizadas nas simulações.

Série	Valor dos parâmetros	Variância da característica (σ^2)	
AR(1)	$\phi_1 = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ e $0,9$	$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$	(3.7)
AR(2)	$\phi_1 = 0,1; 0,2; \dots$ e $0,8;$ $\phi_2 = 0,9 - \phi_1$	$\frac{\sigma_\varepsilon^2(1 - \phi_2)}{(1 - \phi_2^2)[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}$	(3.8)
MA(1)	$\theta_1 = -1,5; -1,3; -0,9; -0,5$ e $-0,1$	$\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2)$	(3.9)
MA(2)	$(\theta_1, \theta_2) = (-1,5; -1,3); (-1,5;$ $-0,9); (-1,1; -0,9); (-1,1; -0,5);$ $(-0,7; -1,3); (-0,7; -0,1); (-0,3;$ $-1,5)$ e $(-0,3; -0,1)$	$\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$	(3.10)
ARMA(1,1)	$\theta_1 = 0,1; 0,5$ e $0,9$ combinados com $\phi_1 = 0,1; 0,5$ e $0,9$	$\frac{\sigma_\varepsilon^2(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)}{[1 - \phi_1^2]}$	(3.11)

Para avaliar os resultados obtidos na simulação via *Bootstrap*, o erro quadrático médio dado por

$$EQM = \sum_{i=1}^B \frac{(\hat{\psi}_i - \psi)^2}{B-1} = \sum_{i=1}^B \frac{(\hat{\psi}_i - \bar{\psi})^2}{B-1} + \frac{B(\bar{\psi} - \psi)}{B-1} = s_{\hat{\psi}}^2 + \frac{B(\bar{\psi} - \psi)}{B-1}$$

foi calculado, B é o número de repetições feitas na simulação e $\hat{\psi}_i$ o valor da *i*-ésima estimativa de parâmetro de interesse.

Nas Figuras 3.3 a 3.5 estão os valores de *EQM*'s de C_p e C_{pk} dos vários modelos de séries em função do tamanho da amostra e nas Tabelas 3.3 a 3.7, encontram-se os resultados obtidos, no tocante às estimativas de $C_p(\bar{C}_p^*)$ e $C_{pk}(\bar{C}_{pk}^*)$. Constam, ainda, os valores teóricos de $C_p = C_{pk}$, os valores de σ^2 conforme as expressões (3.7) a (3.11) e os limites inferiores dos intervalos de confiança (*IC*) a 95%, segundo os três métodos: padrão, percentil e corrigido conforme expressões (3.4) a (3.6). Para fins comparativos, os limites inferiores de intervalo de confiança de C_p e C_{pk} (ver Kotz & Johnson, 1993) dados respectivamente por

$$P \left(C_p \geq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1);(1-\alpha)}^2}{n-1}} \right) = 1 - \alpha$$

e

$$P \left[C_{pk} \geq \hat{C}_{pk} \left(1 - z_{\alpha} \sqrt{(9n\hat{C}_{pk})^{-1} + [2(n-1)]^{-1}} \right) \right] = 1 - \alpha$$

também foram calculados e referenciados como *Bissel* nas Tabelas 3.3 a 3.7. Da análise dos resultados, pode-se constatar que

Modelos Auto Regressivos (AR)

- O *EQM* diminui sensivelmente com o aumento do tamanho da amostra nos dois modelos autoregressivos. Em geral, a queda é mais acentuada quando se aumenta o tamanho da amostra de 50 para 100, especialmente para valores altos de ϕ nos modelos AR(1). No modelo AR(2), os valores de *EQM* para C_{pk} são menores do que para C_p .
- Nos dois modelos autoregressivos, as três diferentes formas para construir *IC* fornecem valores muito próximos entre si, demonstrando coerência entre os três métodos.
- No modelo AR(1), no caso do C_p o método padrão fornece valores mais próximos do *IC* de *Bissel* para valores baixos de ϕ (0,1 ou 0,3). Contudo, à medida que ϕ aumenta, o método do percentil corrigido torna-se preferível. O método corrigido

tende a fornecer *IC*'s mais próximos dos de *Bissel*, com exceção de $\phi = 0,1$, quando os métodos padrão ou percentil são melhores no caso de C_{pk} .

- No modelo AR(2), o método percentil corrigido revelou-se superior a todos os demais no caso do C_{pk} . Além disso, os valores determinados por este método indicaram sempre uma cobertura maior do que os 95% de confiança de *Bissel*.

Modelos Médias Móveis (MA)

- Há um decréscimo dos *EQM*'s com o aumento de n , mais acentuado quando este vai de 50 para 100 nos dois índices. Estes *EQM*'s são similares em valor tanto para C_p como C_{pk} .
- Nos modelos de médias móveis, não há um método (padrão, percentil ou corrigido) que seja superior aos demais na obtenção dos *IC*'s para C_p , já que este varia em função do n e θ selecionados. Contudo, quando $n > 50$, os valores dos *IC*'s são muito próximos entre si para que se possa dizer que haja uma diferença prática entre estes resultados. As mesmas considerações são também válidas para o caso de C_{pk} ;
- No modelo MA(1), os *IC*'s obtidos contiveram os valores reais dos parâmetros estimados em todos os casos analisados; no modelos MA(2), a mesma observação é válida, além de apresentarem uma cobertura ligeiramente superior àquela fornecida pelos *IC*'s de *Bissel* (95% de confiança).

Modelos Auto Regressivos e Médias Móveis (ARMA)

- Há queda nos *EQM*'s com o aumento de n e esta é mais acentuada quando o tamanho da amostra vai de 50 para 100, mas não em todas as combinações de ϕ e θ .
- Em geral, no caso de C_p , o método padrão é aquele que proporciona resultados mais próximos do *IC* unilateral de *Bissel* (exceto para $\phi=0,1$ e $\theta=0,1$) e, quando n aumenta, os três diferentes métodos fornecem resultados semelhantes. Contudo, para ϕ 's maiores, os valores dos *IC*'s tendem a ficar muito diferentes do valor teórico, proporcionando uma cobertura inferior aos 95% de confiança;
- No caso de C_{pk} , o método padrão também fornece valores mais próximos dos de *Bissel*, embora haja algumas situações em que o obtido pelo método corrigido se revela ligeiramente superior a este;

- Por várias vezes os IC 's obtidos não contiveram o valor teórico do parâmetro estimado.

Os métodos tradicionais existentes para avaliação de capacidade de processo falham quando os dados são autocorrelacionados. Os procedimentos para realizar inferências nos índices de capacidade devem ser modificados de forma a compensar não somente a variabilidade do processo, cujos dados são coletados, mas também a dispersão adicional introduzida pela correlação serial.

A utilização da técnica *Bootstrap* é uma alternativa viável para contornar a dificuldade de realizar inferências com os índices C_p e C_{pk} . As simulações revelaram que há uma sensível redução do erro quadrático médio (EQM) quando o tamanho da amostra (n) passa de 50 para 100. Esta queda já não é tão acentuada quando n aumenta de 100 para 250 elementos, (quando a distribuição normal adere bem aos dados).

Nos três diferentes métodos avaliados para construção de intervalos de confiança (IC 's) (padrão, percentil e percentil corrigido) observa-se uma tendência: o primeiro gera IC 's mais fechados e o último, mais abertos. Nenhum dos três se revelou ser sistematicamente superior aos demais para qualquer um dos modelos ARMA (p,q) simulados, em termos de obtenção de limites próximos àqueles fornecidos pelos IC 's teóricos.

Nos modelos AR(1), com $\phi < 0,5$, o método padrão demonstrou ser ligeiramente superior ao método corrigido; nos modelos AR(2), os métodos percentil e corrigido são superiores ao método padrão.

Nos modelos MA(1) e MA(2), nenhum dos três apresentou o melhor resultado em todas as situações analisadas. Nos modelos ARMA (1,1), quando ϕ e θ aumentam, qualquer um dos métodos avaliados conduz a IC 's muito mais fechados do que o IC teórico. Embora haja uma vantagem do método padrão sobre os demais, a simulação *bootstrap* demonstrou fraco desempenho nesta última situação.

Tabela 3.3: Modelo AR(1) - Limite inferior dos intervalos de confiança.

ϕ	n	σ	$C_p = C_{pk}$	Intervalo de confiança de C_p				Intervalo de confiança de C_{pk}			
				Bissel	padrão	percentil	corrigido	Bissel	padrão	percentil	corrigido
0,1	50	1,005	0,995	0,82	0,86	0,88	0,91	0,81	0,81	0,82	0,85
	100			0,88	0,9	0,91	0,92	0,87	0,87	0,88	0,89
	250			0,92	0,93	0,93	0,94	0,91	0,91	0,91	0,92
0,3	50	1,0483	0,9539	0,78	0,79	0,81	0,83	0,76	0,73	0,74	0,77
	100			0,84	0,85	0,85	0,87	0,83	0,81	0,81	0,82
	250			0,89	0,89	0,9	0,9	0,88	0,86	0,87	0,88
0,5	50	1,1547	0,866	0,7	0,67	0,69	0,71	0,68	0,58	0,59	0,67
	100			0,76	0,75	0,75	0,77	0,74	0,69	0,7	0,73
	250			0,82	0,81	0,82	0,83	0,81	0,78	0,78	0,8
0,7	50	1,4003	0,7141	0,58	0,51	0,54	0,56	0,56	0,38	0,4	0,4
	100			0,62	0,58	0,59	0,61	0,6	0,5	0,5	0,52
	250			0,71	0,69	0,69	0,7	0,7	0,65	0,65	0,66
0,9	50	2,2942	0,4359	0,47	0,37	0,4	0,43	0,44	0,13	0,14	0,19
	100			0,39	0,34	0,36	0,37	0,37	0,16	0,15	0,18
	250			0,48	0,45	0,46	0,46	0,47	0,37	0,37	0,39

Tabela 3.4: Modelo AR(2): Limite inferior dos intervalos de confiança.

ϕ_1	ϕ_2	n	σ	$C_p = C_{pk}$	Intervalo de confiança de C_p				Intervalo de confiança de C_{pk}			
					Bissel	padrão	percentil	corrigido	Bissel	padrão	percentil	corrigido
0,1	0,8	50	1,9245	0,5196	0,62	0,61	0,63	0,66	0,6	0,43	0,44	0,46
		100			0,48	0,46	0,48	0,5	0,47	0,3	0,3	0,31
		250			0,59	0,55	0,56	0,57	0,58	0,47	0,46	0,5
0,2	0,7	50	1,8787	0,5323	0,64	0,62	0,63	0,66	0,62	0,42	0,43	0,45
		100			0,5	0,49	0,49	0,52	0,48	0,32	0,31	0,31
		250			0,61	0,57	0,58	0,58	0,6	0,49	0,49	0,5
0,3	0,6	50	1,8898	0,5291	0,63	0,6	0,61	0,65	0,61	0,42	0,42	0,44
		100			0,5	0,48	0,49	0,52	0,48	0,29	0,3	0,32
		250			0,61	0,57	0,57	0,59	0,6	0,48	0,48	0,51
0,4	0,5	50	1,9245	0,5196	0,61	0,58	0,59	0,61	0,59	0,38	0,38	0,42
		100			0,49	0,46	0,46	0,49	0,47	0,25	0,26	0,29
		250			0,6	0,55	0,56	0,56	0,59	0,47	0,47	0,49
0,5	0,4	50	1,9739	0,5066	0,59	0,53	0,54	0,56	0,57	0,33	0,34	0,37
		100			0,47	0,45	0,46	0,48	0,45	0,24	0,24	0,26
		250			0,58	0,54	0,54	0,55	0,57	0,46	0,46	0,48
0,6	0,3	50	2,0352	0,4914	0,56	0,49	0,5	0,54	0,43	0,3	0,31	0,34
		100			0,45	0,41	0,42	0,46	0,55	0,23	0,24	0,26
		250			0,56	0,52	0,53	0,54	0,51	0,44	0,44	0,44
0,7	0,2	50	2,1082	0,4743	0,53	0,46	0,49	0,52	0,51	0,26	0,27	0,31
		100			0,43	0,39	0,4	0,42	0,41	0,21	0,21	0,21
		250			0,58	0,49	0,5	0,51	0,52	0,42	0,42	0,45
0,8	0,1	50	2,1938	0,4558	0,5	0,42	0,44	0,47	0,48	0,2	0,2	0,25
		100			0,41	0,37	0,38	0,4	0,39	0,19	0,18	0,22
		250			0,51	0,47	0,48	0,49	0,5	0,4	0,4	0,42

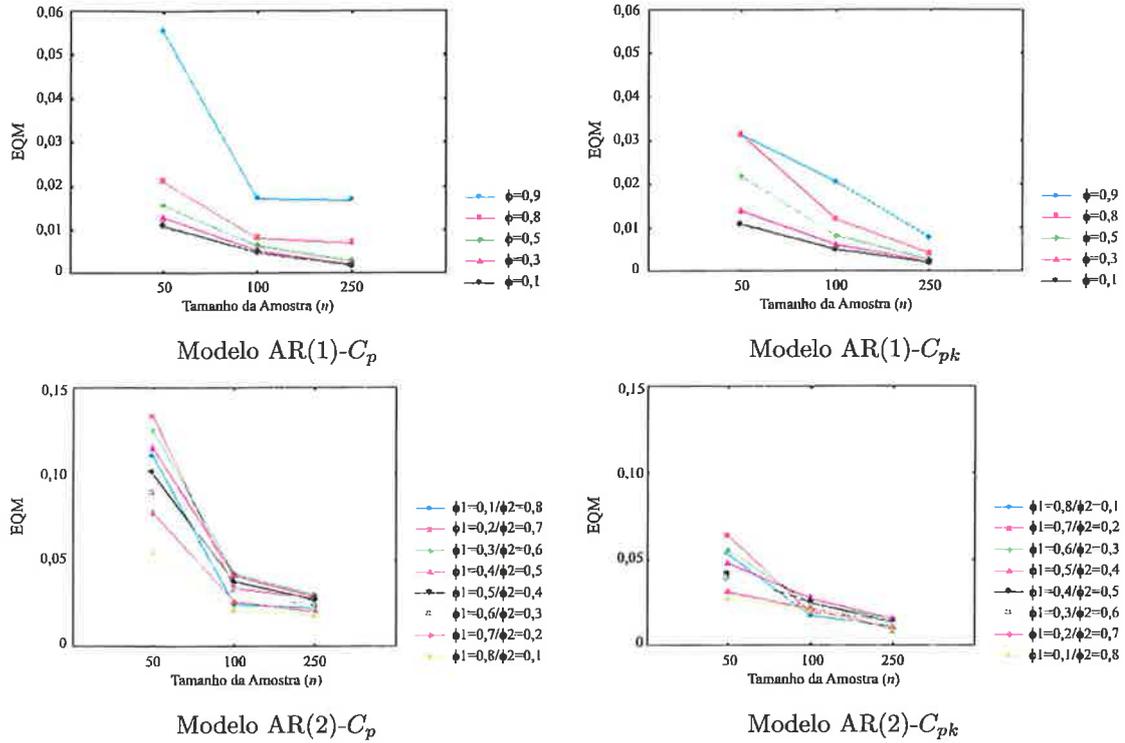


Figura 3.3: Modelos AR(1) e AR(2): Valores de EQM em função do tamanho da amostra.

Tabela 3.5: Modelo MA(1): Limite inferior dos intervalos de confiança.

θ	n	σ	$C_p = C_{pk}$	Intervalo de confiança de C_p				Intervalo de confiança de C_{pk}			
				Bissel	padrão	percentil	corrigido	Bissel	padrão	percentil	corrigido
0,1	50	1,005	0,995	0,82	0,85	0,87	0,9	0,81	0,81	0,82	0,85
	100			0,88	0,9	0,91	0,92	0,87	0,87	0,88	0,89
	250			0,92	0,93	0,93	0,94	0,91	0,9	0,91	0,92
0,5	50	1,118	0,8944	0,73	0,73	0,74	0,78	0,71	0,68	0,69	0,72
	100			0,79	0,81	0,82	0,83	0,78	0,77	0,78	0,79
	250			0,82	0,82	0,82	0,83	0,81	0,79	0,79	0,8
0,9	50	1,3454	0,7433	0,61	0,63	0,65	0,68	0,59	0,57	0,58	0,61
	100			0,66	0,67	0,68	0,7	0,64	0,63	0,64	0,66
	250			0,68	0,69	0,69	0,7	0,67	0,66	0,66	0,67
1,3	50	1,6401	0,6097	0,51	0,47	0,49	0,52	0,48	0,41	0,43	0,46
	100			0,54	0,54	0,55	0,57	0,52	0,5	0,51	0,52
	250			0,56	0,56	0,56	0,57	0,55	0,53	0,53	0,54
1,5	50	1,8028	0,5547	0,46	0,44	0,45	0,47	0,44	0,37	0,39	0,41
	100			0,49	0,5	0,51	0,51	0,47	0,45	0,46	0,46
	250			0,51	0,51	0,5	0,51	0,5	0,48	0,48	0,48

Tabela 3.6: Modelo MA(2): Limite inferior dos intervalos de confiança.

θ_1	θ_2	n	σ	C_p C_{pk}	Intervalo de confiança de C_p				Intervalo de confiança de C_{pk}			
					Bissel	padrão	percentil	corrigido	Bissel	padrão	percentil	corrigido
0,3	0,1	50	1,0488	0,9535	0,78	0,8	0,82	0,84	0,76	0,74	0,75	0,78
		100			0,84	0,85	0,86	0,88	0,83	0,81	0,82	0,83
		250			0,88	0,81	0,82	0,85	0,87	0,8	0,79	0,81
	1,5	50	1,8276	0,5472	0,46	0,47	0,48	0,49	0,43	0,4	0,4	0,42
		100			0,47	0,46	0,47	0,48	0,45	0,41	0,42	0,43
		250			0,51	0,49	0,5	0,51	0,5	0,46	0,46	0,48
0,7	0,1	50	1,2247	0,8165	0,67	0,66	0,68	0,71	0,65	0,61	0,62	0,65
		100			0,72	0,72	0,73	0,73	0,71	0,67	0,68	0,7
		250			0,75	0,69	0,7	0,71	0,74	0,67	0,67	0,71
	1,3	50	1,7833	1,786	0,47	0,45	0,47	0,5	0,44	0,38	0,39	0,5
		100			0,48	0,47	0,48	0,49	0,46	0,42	0,42	0,44
		250			0,52	0,48	0,48	0,49	0,51	0,45	0,44	0,46
1,1	0,5	50	1,5684	0,6376	0,52	0,53	0,55	0,6	0,5	0,46	0,48	0,5
		100			0,56	0,54	0,55	0,56	0,54	0,49	0,5	0,51
		250			0,59	0,54	0,54	0,55	0,58	0,51	0,5	0,52
	0,9	50	1,7378	0,5754	0,47	0,49	0,51	0,54	0,45	0,41	0,43	0,45
		100			0,5	0,49	0,49	0,5	0,48	0,43	0,43	0,45
		250			0,53	0,49	0,5	0,52	0,52	0,47	0,46	0,47
1,5	0,9	50	2,0149	0,4963	0,41	0,42	0,43	0,45	0,38	0,34	0,34	0,36
		100			0,43	0,43	0,44	0,44	0,41	0,37	0,38	0,38
		250			0,46	0,41	0,42	0,43	0,44	0,38	0,38	0,39
	1,3	50	2,2226	0,4499	0,38	0,39	0,41	0,43	0,34	0,31	0,31	0,34
		100			0,39	0,38	0,39	0,4	0,37	0,32	0,32	0,33
		250			0,42	0,4	0,4	0,41	0,4	0,36	0,36	0,37

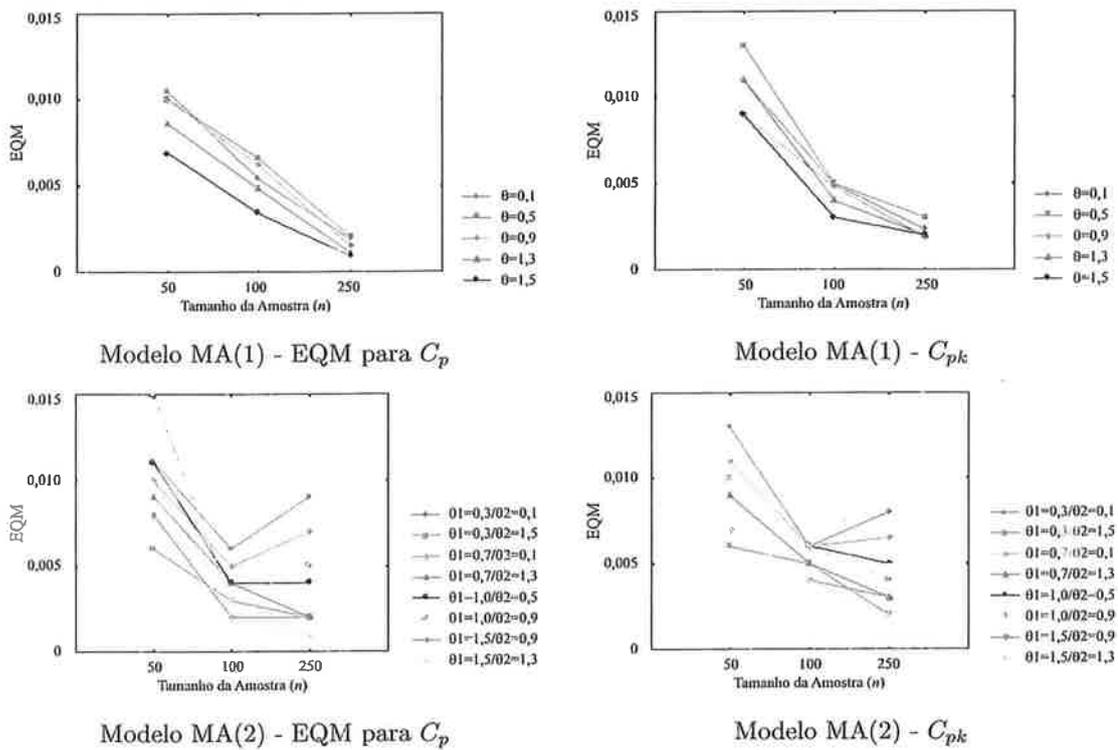


Figura 3.4: Modelos MA(1) e MA(2): Valores de EQM em função do tamanho da amostra.

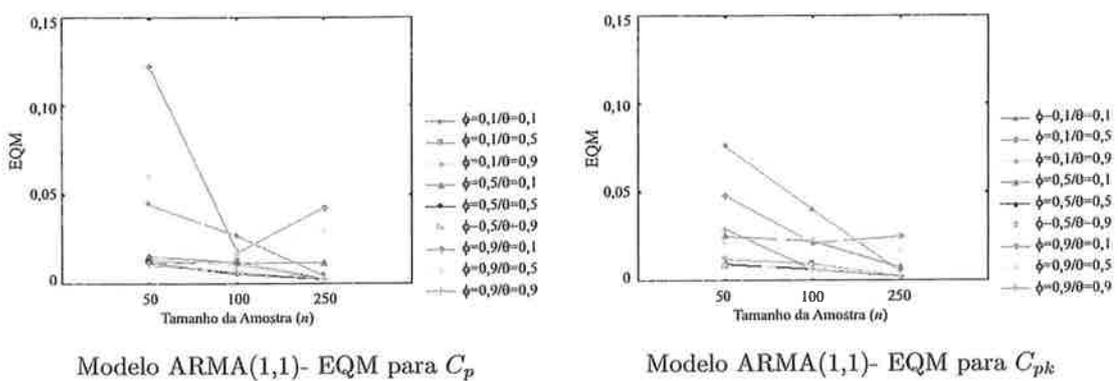


Figura 3.5: Modelo ARMA(1,1)- EQM para C_p e C_{pk} .

Tabela 3.7: Modelo ARMA(1,1): Limite inferior dos intervalos de confiança.

ϕ	θ	n	σ	C_p C_{pk}	Intervalo de confiança de C_p				Intervalo de confiança de C_{pk}				
					Bissel	padrão	percentil	corrigido	Bissel	padrão	percentil	corrigido	
0,1	0,1	50	1	1	0,8063	0,64	0,65	0,68	0,79	0,56	0,58	0,6	
		100			0,8674	0,73	0,74	0,75	0,86	0,68	0,69	0,7	
		250			0,9047	0,88	0,89	0,9	0,9	0,87	0,88	0,89	
	0,5	50	1,0778	0,9278	0,6987	0,74	0,76	0,78	0,68	0,73	0,74	0,77	
		100			0,7566	0,9	0,91	0,93	0,74	0,88	0,89	0,91	
		250			0,7871	0,85	0,85	0,86	0,78	0,84	0,84	0,85	
	0,9	50	1,2831	0,7793	0,5799	0,68	0,7	0,72	0,56	0,68	0,69	0,72	
		100			0,623	0,74	0,75	0,76	0,61	0,73	0,75	0,76	
		250			0,6478	0,72	0,73	0,74	0,64	0,72	0,72	0,73	
0,5	0,1	50	1,1015	0,9078	0,6589	0,69	0,72	0,74	0,64	0,6	0,62	0,65	
		100			0,7155	0,7	0,71	0,73	0,7	0,65	0,65	0,67	
		250			0,7788	0,93	0,93	0,94	0,77	0,91	0,91	0,92	
	0,5	50	1	1	0,527	0,89	0,9	0,92	0,5	0,85	0,86	0,89	
		100			0,5681	0,89	0,9	0,92	0,55	0,85	0,85	0,87	
		250			0,6243	0,93	0,93	0,94	0,61	0,91	0,92	0,93	
	0,9	50	1,1015	0,9078	0,4276	0,81	0,82	0,85	0,4	0,8	0,81	0,83	
		100			0,4569	0,85	0,86	0,88	0,44	0,84	0,85	0,87	
		250			0,5027	0,83	0,83	0,84	0,49	0,83	0,83	0,84	
	0,9	0,1	50	2,0901	0,4785	0,4341	0,55	0,56	0,58	0,41	0,37	0,36	0,39
			100			0,356	0,37	0,4	0,42	0,33	0,2	0,2	0,23
			250			0,4454	0,57	0,58	0,58	0,43	0,51	0,51	0,52
0,5		50	1,3572	0,7368	0,3314	0,76	0,78	0,82	0,3	0,62	0,64	0,66	
		100			0,2653	0,57	0,59	0,6	0,24	0,44	0,45	0,47	
		250			0,3337	0,81	0,81	0,82	0,32	0,75	0,75	0,76	
0,9		50	1	1	0,2654	0,81	0,82	0,84	0,23	0,72	0,73	0,76	
		100			0,2102	0,9	0,91	0,92	0,18	0,86	0,86	0,88	
		250			0,2645	0,93	0,93	0,94	0,25	0,92	0,92	0,93	

3.4 Índices de capacidade para variável de resposta não observável, mas é função conhecida de variáveis de entrada (procedimentos inferenciais).

Considere uma situação onde quer avaliar a capacidade de um processo cuja variável resposta Y não é observável, mas, obtida através de relação funcional e de um conjunto de variáveis de entrada $(X_1; X_2; X_3; \dots; X_k)$, isto é: $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$. Por exemplo, quer avaliar a variável resposta Y (área de uma placa de aço) como função das variáveis de entrada: comprimento X_1 e largura X_2 . Neste caso μ_{X_1} , μ_{X_2} , σ_{X_1} e σ_{X_2} estão disponíveis, mas μ_Y e σ_Y não. Desenvolver procedimentos inferenciais ou fornecer uma estimativa ou limites de confiança do índice da capacidade da variável de resposta Y não observada pode ser uma tarefa um tanto complicada, uma vez que eles serão estimados a partir de dados das variáveis de entrada. A situação fica mais complicada se a relação funcional não for uma função linear.

Os procedimentos inferenciais desenvolvidos por Bulba & Ho (2004, 2006) descritos a seguir estão restritos às condições estabelecidas:

- As variáveis de entrada e a variável de saída são normalmente distribuídas ou muito próximas de uma distribuição normal.
- As variáveis de entrada são independentes.
- A relação funcional entre as variáveis de entrada e a variável de saída é conhecida.
- Para funções não lineares, as tolerâncias e as variâncias das variáveis de entrada assumem valores favoráveis a uma linearização local com erros desprezíveis.
- Variâncias e tolerâncias são simétricas a um valor alvo.

Os procedimentos inferenciais foram desenvolvidos apenas para os índices de capacidade $C_p = \frac{U-L}{6\sigma}$ e $C_{pk} = \min\left(\frac{U-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-L}{3\sigma}\right)$ da variável não observada Y , U e L , são respectivamente os limites superior e inferior de especificação; μ e σ , respectivamente a média e o desvio padrão do processo. Os dois índices estão relacionados através da transformação $C_{pk} = (1 - k)C_p$, com $k = \frac{2|\mu-T|}{D}$; $D = U - L$; D , a tolerância determinística e T , valor alvo do processo.

A notação empregada nesta seção está detalhada a seguir

- C_{pY}, C_{pkY} – índice de capacidade C_p e C_{pk} para a variável aleatória resposta não observável Y ;
- μ_Y, σ_Y – média e desvio padrão da variável resposta não observável Y ;
- D_Y – tolerância determinística de Y ;
- μ_{X_i}, σ_{X_i} – média e desvio padrão da variável aleatória de entrada X_i ;
- $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ – amostra aleatória da variável de entrada X_i ;
- D_{X_i} – tolerância determinística de X_i .

Empregando a notação apresentada, o índice de capacidade para a variável resposta Y é $C_{pY} = \frac{D_Y}{6\sigma_Y}$ e um estimador natural para C_{pY} é dado por

$$\hat{C}_{pY} \cong \frac{D_Y}{6\hat{\sigma}_Y} \quad (3.12)$$

Utilizando aproximações lineares, um estimador para σ_Y^2 é dada por

$$\hat{\sigma}_Y^2 \cong \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i=\hat{\mu}_{X_i}} \right)^2 \hat{\sigma}_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^K \sum_{j=i+1}^K \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \hat{\sigma}_{X_i} \hat{\sigma}_{X_j} \hat{\rho}_{X_i, X_j} \quad (3.13)$$

com $\hat{\sigma}_{X_i} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^n (X_{im} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$; $\hat{\rho}_{X_i, X_j} = \frac{\sum (X_{im} - \bar{X}_i)(X_{jm} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{m=1}^n (X_{im} - \bar{X}_i)^2 \sum_{m=1}^n (X_{jm} - \bar{X}_j)^2}}$; \bar{X}_i e \bar{X}_j , as médias amostrais. Quando X_i e X_j forem variáveis aleatórias independentes, o segundo termo da expressão (3.13) é omitida. Pode-se notar que C_{pY} é uma função de σ_Y^2 , assim métodos usados para desenvolver intervalos de confiança para C_{pY} podem ser os mesmos para construir intervalo de confiança para σ_Y^2 . Serão consideradas duas situações: Y como função de uma única variável X , isto é, $Y = f(X)$ e Y como função de um conjunto de v.a. independentes $(X_1; X_2; X_3; \dots; X_k)$. No primeiro caso, um estimador de σ_Y pode ser:

$$\hat{\sigma}_Y \cong \sqrt{\left(\frac{df}{dX} \Big|_{x=\hat{\mu}_x} \right)^2 \hat{\sigma}_X^2}$$

com $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$, X_i valores de uma amostra aleatória de X . Se X obedecer a uma distribuição normal, então $\hat{\sigma}_X^2$ tem uma distribuição χ_ν^2 com $\nu = n - 1$ graus de liberdade. Deste modo, um intervalo de confiança para C_{pY} pode ser obtido:

$$\frac{D_Y}{6\hat{\sigma}_Y} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2;\nu}^2}{\nu}} \leq C_{p_Y} \leq \frac{D_Y}{6\hat{\sigma}_Y} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;\nu}^2}{\nu}} \quad (3.14)$$

$\chi_{\alpha/2}^2$ e $\chi_{(1-\alpha)/2}^2$ são constantes de uma distribuição χ_ν^2 com $\nu = n - 1$. No segundo caso, quando Y não for uma função linear das variáveis de entrada, $\hat{\sigma}_Y^2$ não terá distribuição Qui-quadrado e intervalos de confiança exato não podem ser obtidos para σ_Y^2 [Graybill & Wang (1980)]. Assim, intervalos de confiança aproximados de σ_Y^2 serão desenvolvidos baseados na distribuição assintótica de $\hat{\sigma}_Y^2$ e pelos métodos propostos por Satterthwaite (1941) e Graybill & Wang (1980).

O método de Satterthwaite (1941) considera que $\hat{\sigma}_Y^2$ segue uma distribuição $\chi_{\nu_Y}^2$ e ν_Y igual ao número de graus de liberdade equivalente, cuja estimativa é dada por

$$\hat{\nu}_Y = \frac{(\hat{\sigma}_Y^2)^2}{\sum_{i=1}^K \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i=\hat{\mu}_{X_i}} \right)^2 \hat{\sigma}_{X_i}^2 \right] \frac{1}{(n_i-1)}}$$

$\hat{\sigma}_Y^2 \cong \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i=\hat{\mu}_{X_i}} \right)^2 \hat{\sigma}_{X_i}^2$; $\hat{\sigma}_{X_i}^2$ é uma estimativa de $\sigma_{X_i}^2$; n_i , o tamanho da amostra de x_i , $i = 1, \dots, k$. Segundo Kragten (1994), tal aproximação produz uma boa precisão na maioria dos casos práticos. Usando este resultado, um intervalo confiança aproximado para C_{p_Y} pode ser obtido:

$$\frac{D_Y}{6\hat{\sigma}_Y} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2;\nu_Y}^2}{\nu_Y}} \leq C_{p_Y} \leq \frac{D_Y}{6\hat{\sigma}_Y} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;\nu_Y}^2}{\nu_Y}} \quad (3.15)$$

onde D_Y denota a tolerância determinística de Y .

O intervalo de confiança para σ_Y^2 pelo método proposto por Graybill & Wang (1980) é dado por

$$\hat{\sigma}_Y^2 - \sqrt{\sum_{i=1}^k G_{X_i}^2 c_{X_i}^2 \hat{\sigma}_{X_i}^4} \leq \sigma_Y^2 \leq \hat{\sigma}_Y^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^k H_{X_i}^2 c_{X_i}^2 \hat{\sigma}_{X_i}^4} \quad (3.16)$$

$c_{X_i} = a_i^2 \cong \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i=\hat{\mu}_{X_i}} \right)^2$; $G_{X_i} = 1 - (F_{\alpha/2;\nu_{X_i},\infty})^{-1}$; $H_{X_i} = (F_{1-\alpha/2;\nu_{X_i},\infty})^{-1} - 1$; $F_{\alpha/2;\nu_{X_i},\infty}$ e $F_{1-\alpha/2;\nu_{X_i},\infty}$, valores da distribuição de Fisher & Snedecor nos quantis $\alpha/2$ e $(1 - \alpha/2)$, com $\nu_{X_i} = (n_i - 1)$ graus de liberdade no numerador e ∞ graus de liberdade no denominador, ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Deste modo, um intervalo de confiança para C_{p_Y} pode

ser obtido:

$$\frac{D_Y}{6\sqrt{\hat{\sigma}_Y^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^k H_{X_i}^2 c_{X_i}^2 \hat{\sigma}_{X_i}^4}}} \leq C_{p_Y} \leq \frac{D_Y}{6\sqrt{\hat{\sigma}_Y^2 - \sqrt{\sum_{i=1}^k G_{X_i}^2 c_{X_i}^2 \hat{\sigma}_{X_i}^4}}}. \quad (3.17)$$

Empregando a relação entre as distribuições Qui-quadrado e Fisher & Snedecor ($\chi_{\alpha/2; \nu}^2 = \nu F_{\alpha/2; \nu, \infty}$), a expressão (3.16) pode ser reescrita como

$$\hat{\sigma}_Y^2 - \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(c_{X_i} \hat{\sigma}_{X_i}^2 - \frac{\nu_{X_i} c_{X_i} \hat{\sigma}_{X_i}^2}{\chi_{\alpha/2; \nu_{X_i}}^2} \right)^2} \leq \sigma_Y^2 \leq \hat{\sigma}_Y^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\nu_{X_i} c_{X_i} \hat{\sigma}_{X_i}^2}{\chi_{1-\alpha/2; \nu_{X_i}}^2} - c_{X_i} \hat{\sigma}_{X_i}^2 \right)^2} \quad (3.18)$$

Pode-se observar em (3.18) que os limites do intervalo de confiança de σ_Y^2 são funções dos limites de confiança dos desvios padrão de cada variável de entrada X_i ponderados pelas constantes C_{X_i} ($i = 1, 2, 3, \dots, k$).

Sob algumas condições de regularidade, a distribuição assintótica de $\hat{\sigma}_Y^2$ segue uma distribuição normal. A partir daí, um intervalo de confiança para σ_Y^2 pode ser construído utilizando-se a distribuição normal padrão $z = \frac{(\hat{\sigma}_Y^2 - \sigma_Y^2)}{\sqrt{Var(\hat{\sigma}_Y^2)}}$, isto é

$$\hat{\sigma}_Y^2 - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\sigma}_Y^2)} \leq \sigma_Y^2 \leq \hat{\sigma}_Y^2 + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\sigma}_Y^2)} \quad (3.19)$$

com $Var(\hat{\sigma}_Y^2) \cong \sum_{i=1}^K \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i = \hat{\mu}_{X_i}} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right] \frac{2}{(n_i - 1)}$. Com esta desigualdade, o intervalo de confiança para C_{p_Y} pode ser facilmente obtido (este método é recomendável para grandes amostras).

Diferentes autores têm feito contribuições para o desenvolvimento de procedimentos inferenciais para C_{pk} quando a característica de interesse é observável, no entanto, o resultado proposto por Bissel (1990) é o mais conhecido e dado por

$$\hat{C}_{pk} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}} \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}} \quad (3.20)$$

O índice C_{pk} para variável resposta não observável pode ser escrita como $C_{pk_Y} = C_{p_Y} (1 - k_Y)$, $k_Y \cong \frac{2|\mu_Y - T_Y|}{D_Y}$ e um estimador natural para este índice é dado por

$$\hat{C}_{pk_Y} \cong \hat{C}_{p_Y} (1 - \hat{k}_Y) \quad (3.21)$$

com \hat{C}_{p_Y} dado em (3.12); $\hat{k}_Y \cong \frac{2|\hat{\mu}_Y - T_Y|}{D_Y}$; $(\hat{\mu}_Y - T_Y) = \sum_{i=1}^K (\hat{\mu}_{X_i} - T_{X_i})$; $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_i = \hat{\mu}_{X_i}}\right)$; $\hat{\mu}_{X_i}$, um estimador de μ_{X_i} , que pode ser obtido a partir das cartas de controle, por exemplo; T_{X_i} , o valor nominal de X_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). O procedimento adotado para obter intervalo de confiança de C_{pk_Y} é similar ao adotado para C_{p_Y} . No primeiro caso quando Y é uma função de uma única variável, os intervalos de confiança podem ser obtidos aplicando (3.21) e em seguida (3.20) para obter respectivamente uma estimativa e os limites do intervalo de confiança.

No caso de $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$, o estimador \hat{C}_{pk_Y} dependerá de mais aproximações. O procedimento proposto está restrito ao emprego do número de graus de liberdade equivalente ν_Y e à extensão dos resultados de *Bissel* e *Satterthwaite* para construir os intervalos de confiança para C_{pk_Y} . Nominalmente os limites do intervalo de confiança são:

$$\hat{C}_{pk_Y} - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{9(\nu_Y+1)} + \frac{\hat{C}_{pk_Y}^2}{2((\nu_Y+1)-1)}} \leq C_{pk_Y} \leq \hat{C}_{pk_Y} + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{9(\nu_Y+1)} + \frac{\hat{C}_{pk_Y}^2}{2((\nu_Y+1)-1)}} \quad (3.22)$$

Para avaliar o grau de cobertura dos procedimentos propostos, foi utilizado um estudo de simulação, considerando o caso em que o interesse é avaliar a área Y de uma placa de aço como função do comprimento X_1 e da largura X_2 , isto é: $Y = X_1 X_2$. Os parâmetros das variáveis de entrada estão dados a seguir:

- O vetor das médias $\begin{pmatrix} \mu_{X1} \\ \mu_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99, 97 \\ 199, 98 \end{pmatrix}$;
- O vetor das tolerâncias $\begin{pmatrix} D_{X1} \\ D_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$;
- O vetor dos valores alvo: $\begin{pmatrix} T_{X1} \\ T_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$;
- Vetores de desvio padrão: $\begin{pmatrix} \sigma_{X1} \\ \sigma_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 01 \\ 0, 02 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0, 01 \\ 0, 07 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0, 02 \\ 0, 03 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0, 03 \\ 0, 02 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0, 05 \\ 0, 02 \end{pmatrix}$;
 $\begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 3 \end{pmatrix}$;

Com este conjunto de parâmetros, resultaram os seguintes valores de C_{p_Y} e C_{pk_Y} :

$$\begin{pmatrix} C_{p_Y} \\ C_{pk_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,53 \\ 2,59 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,37 \\ 1,00 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2,00 \\ 1,47 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,58 \\ 1,15 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0,98 \\ 0,72 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,15 \end{pmatrix};$$

Dez mil amostras foram geradas a partir de duas distribuições normais independentes com os seguintes tamanhos de amostra:

$$\begin{pmatrix} n_{X1} \\ n_{X2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix};$$

Para cada amostra, intervalos de confiança de C_{pk_Y} e C_{p_Y} pelos métodos: assintótico, Satterthwaite e Graybill & Wang, (respectivamente denotados por C_p -As; C_p -SW and C_p -GW) foram obtidos com nível de confiança de 90% e 95%. Na Tabela 3.8 estão as porcentagens de cobertura. Dessa tabela, alguns resultados podem ser extraídos:

- Para o índice de capacidade C_{p_Y} :
 - O método proposto por Graybill & Wang alcança o nível nominal (porcentagens de cobertura superiores aos níveis de confiança teóricos) independente do tamanho de amostra e do valor da variância do conjunto de proposto;
 - Quando as variâncias e os tamanhos das amostras das variáveis de entrada são próximos, o método proposto por Satterthwaite alcança o nível nominal.
 - O método baseado na distribuição assintótica alcança o nível nominal apenas para grandes tamanhos de amostras, conforme esperado.
- Para o índice C_{pk_Y} o método proposto atinge o nível nominal exceto quando os desvios padrão das variáveis de entradas estiverem próximos aos valores das tolerâncias.

Embora os resultados apresentados tenham como base um exemplo de função não linear, é interessante estender as propostas apresentadas para outros tipos funções não lineares que são muito comuns na engenharia.

Tabela 3.8: Proporção de cobertura dos intervalos de confiança

n_{X1}	n_{X2}	ν_Y	σ_{X1}	σ_{X2}	90%				95%			
					C_{p-As}	C_{p-SW}	C_{p-GW}	C_{pk}	C_{p-As}	C_{p-SW}	C_{p-GW}	C_{pk}
5	5	8	0,01	0,02	-	92,8	91,7	92	-	96,6	94,9	96,6
		4,6	0,01	0,07	-	88,9	91,4	88,5	-	93,5	95,6	94,1
		7,4	0,02	0,03	-	92,4	91,7	91,7	-	96,7	95,5	96,4
		4,9	0,03	0,02	-	89,0	91,4	89,2	-	94,1	96,1	94,7
		4,3	0,05	0,02	-	88,2	90,3	89,3	-	93,9	95,6	94,7
		7,4	0,2	0,3	-	91,7	91,8	88,1	-	96,3	95,3	93
10	10	18	0,01	0,02	87,1	91,4	92,4	90,9	90,4	96,0	94,9	95,6
		10,5	0,01	0,07	82,7	89,4	90,5	88,9	86,1	94,2	95,1	94,5
		16,7	0,02	0,03	86,5	91,1	91,1	90	90	95,8	95,5	95
		11	0,03	0,02	83,4	88,8	90,2	88,9	86,8	94,3	95,5	94,2
		9,7	0,05	0,02	82,8	89,3	90,0	89,4	86,3	94,0	94,9	94,6
		16,7	0,2	0,3	86,4	90,9	90,9	88,9	89,7	94,8	95,2	93,1
10	15	21,9	0,01	0,02	88,3	91,1	90,8	91,1	91,5	95,6	94,6	95,8
		16,2	0,01	0,07	85	89,6	90,3	89,1	88,6	94,6	95,2	94,6
		18,2	0,02	0,03	86,1	90,6	90,7	89,8	89,9	95,5	95,3	95
		11	0,03	0,02	82,9	88,7	90,2	88,6	86,3	94,1	95,3	94,1
		9,7	0,05	0,02	83,2	88,6	89,4	89,5	86,6	94,3	95,1	94,8
		18,2	0,2	0,3	86,6	90,1	90,2	88,6	89,8	95,5	95,4	93
20	10	24,4	0,01	0,02	87,7	90,5	90,6	90,3	91,2	95,6	95,0	95,3
		10,5	0,01	0,07	83,4	88,7	90,1	88,9	86,8	93,8	95,0	93,7
		27,8	0,02	0,03	88,2	91,2	91,0	89,7	91,9	95,7	95,1	94,7
		22,8	0,03	0,02	87,5	90,1	91,8	89,7	91	95,1	95,7	94,7
		20,4	0,05	0,02	86,9	89,6	90,0	90	90,7	95,0	95,2	94,7
		27,8	0,2	0,3	88,7	90,9	91,7	87,5	92,2	95,9	95,3	91,8
10	30	27,5	0,01	0,02	87,7	90,0	90,1	89,9	90,9	95,1	95,0	94,8
		33,2	0,01	0,07	88	89,1	89,9	89,4	92,1	95,4	95,9	94,7
		20	0,02	0,03	85,3	88,7	90,4	88,2	88,5	93,7	95,1	93,4
		11	0,03	0,02	83	88,5	90,2	89,1	86,4	93,5	94,9	94,3
		9,7	0,05	0,02	82,3	89,4	89,9	89,5	85,5	94,3	95,1	94,6
		20	0,2	0,3	85,1	88,6	90,3	89,1	88,8	93,4	94,8	93,1
30	10	27,5	0,01	0,02	87,9	90,3	90,7	90	91,3	94,9	94,6	95,1
		10,5	0,01	0,07	82	89,0	90,2	88,6	85,4	93,9	95,0	94,1
		20	0,02	0,03	88,8	90,8	90,6	89,1	92,5	95,6	95,2	94,5
		34,4	0,03	0,02	88,1	89,7	90,4	88,8	92	95,0	95,6	94,4
		31,2	0,05	0,02	88,2	89,7	89,9	89,2	92,1	95,0	95,2	94,5
		35,1	0,2	0,3	88,5	91,0	90,8	87,3	92,1	95,8	94,8	92,1
30	30	58	0,01	0,02	89,3	90,4	90,4	90,2	93,4	95,3	95,1	95,2
		33,7	0,01	0,07	87,9	89,4	89,7	89,7	91,7	94,9	95,2	94,9
		53,8	0,02	0,03	89	90,3	90,6	89,2	93,7	94,9	94,9	94,5
		35,4	0,03	0,02	87,3	89,7	90,2	89,1	91,5	94,4	94,8	94,4
		31,3	0,05	0,02	88	89,5	89,7	89,8	91,6	94,8	95,0	94,5
		53,8	0,2	0,3	89,3	90,2	90,4	88,6	93,6	95,3	95,2	92,9
20	40	51,1	0,01	0,02	89	90,9	90,8	89,7	93,1	95,3	95,1	95,1
		45	0,01	0,07	88,7	90,0	90,1	89,2	92,6	94,6	95,1	94,2
		40,2	0,02	0,03	88,3	90,1	90,4	89	92,2	94,4	95,0	94,4
		23,3	0,03	0,02	87,5	89,4	90,2	89,1	90,9	94,8	95,3	94,4
		20,5	0,05	0,02	86,5	89,6	89,9	89,7	90,1	94,6	95,0	95
		40,2	0,2	0,3	88	89,3	89,9	89,2	91,7	94,8	95,0	93,4
40	40	78	0,01	0,02	89,3	90,6	90,4	89,6	94,1	95,3	95,1	94,7
		45,3	0,01	0,07	88,1	89,9	90,1	89,1	92,4	94,7	95,1	94,2
		72,3	0,02	0,03	89,8	90,3	90,3	89,8	94,1	95,4	94,9	94,8
		47,6	0,03	0,02	89,2	89,9	90,2	89,7	93,3	94,9	94,9	95
		42,1	0,05	0,02	88,4	89,4	89,6	89,6	92,5	94,7	94,8	94,8
		72,3	0,2	0,3	89,9	90,0	90,0	87,3	94,1	94,8	94,8	92,1
100	100	198	0,01	0,02	90	90,3	90,3	89,8	94,7	95,0	95,1	94,8
		115	0,01	0,07	89,3	89,8	89,9	89,5	94	94,7	94,7	94,7
		184	0,02	0,03	89,9	89,7	89,7	88,8	94,6	94,9	95,1	94,3
		121	0,03	0,02	89	90,1	90,3	89,2	93,7	95,1	95,2	94,6
		107	0,05	0,02	89,3	90,0	90,0	89,1	93,9	95,2	95,3	94,4
		183	0,2	0,3	90,2	90,0	90,2	81,1	94,6	94,9	94,9	89,6

3.5 Índice de capacidade para processos assimétricos proposto por Boyle (procedimentos inferenciais)

A coleção de índices de capacidade apresentada na seção 3.1 reflete a dificuldade em medir a capacidade de um processo e a maioria deles enfoca os processos com especificações simétricas. Uma especificação é dita simétrica se $m = (U + L)/2$, U e L são os limites superior e inferior de especificação. Desse modo, $U - m = m - L$ e esta quantidade é conhecida como tolerância. No entanto existem situações com $T \neq (U + L)/2$ tal que justifique especificações assimétricas, ou seja, existem duas distintas tolerâncias $D_L = T - L$ e $D_U = U - T$. Contudo, tolerâncias assimétricas estão indevidamente associadas às distribuições assimétricas. A verdade é que tolerâncias assimétricas apenas refletem o ponto de vista do consumidor que o desvio em relação ao valor alvo é mais tolerável numa direção do que noutra e não meramente associada ao formato da distribuição. Em alguns casos, a tolerância assimétrica pode aparecer após uma transformação. Por exemplo, para uma característica X log-normal com especificação simétrica (L, T, U) . Empregando a transformação logarítmica em X vai resultar numa tolerância assimétrica $(\ln L, \ln T, \ln U)$ [ver Kotz & Lovelace, 1998].

Kane (1986) e Chan et al. (1988) apresentaram respectivamente os índices

$$C_{pk}^* = \frac{d - |T - M| - |\mu - T|}{3\sigma}$$

e

$$C_{pm}^* = \frac{d - |T - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

para tolerâncias assimétricas após modificar os conhecidos índices C_{pk} e C_{pm} , com $d = (U - L)/2$ permitindo M ser igual a T , ou não. Uma outra contribuição foi o estudo desenvolvido por Boyles (1994). Ele propôs a transformação

$$S(x, y) = \frac{1}{3}\Phi^{-1}[0,5(\Phi(x) + \Phi(y))]$$

que é uma função um a um com a fração não conforme, onde $\Phi(\cdot)$ denota a função acumulada de normal padrão. Baseada nesta função, ele apresentou vários índices para processos assimétricos, por exemplo:

$$S_{pk} = S(3C_{pl}, 3C_{pu})$$

que pode ser vista como uma versão suavizada do índice C_{pk} , onde $C_{pi} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_i)/3$, $i = l, u$, $\alpha_l = P(X < L)$ e $\alpha_u = P(X > U)$. Outros índices introduzidos por Boyle (1994) também foram inspirados na função $S(x, y)$. Um deles é

$$S_{pn} = S\left(\frac{\mu - L}{\tau}, \frac{U - \mu}{\tau}\right)$$

que é uma versão suavizada do índice $C_{pn} = \min\left(\frac{\mu - L}{3\tau}, \frac{U - \mu}{3\tau}\right)$ proposto por Choi & Owen (ver, Kotz & Johnson (1993) com $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$.

Ho (2003) apresentou procedimentos inferenciais para S_{pn} . Os resultados foram obtidos sob duas perspectivas. A primeira, em que um limite inferior do intervalo de confiança para S_{pn} foi obtido sob métodos clássicos da estatística e a segunda é apresentar procedimentos inferenciais para o índice de capacidade S_{pn} empregando métodos bayesianos.

A seguir está apresentado o desenvolvimento do limite inferior do intervalo de confiança sob a ótica de métodos clássicos. O desenvolvimento deste resultado foi feito escrevendo o índice S_{pn} como uma função modificada da fração não conforme e as inferências podem ser feitas através desta modificada fração não conforme. A escolha deste caminho se deve à dificuldade na obtenção da distribuição amostral do estimador natural de S_{pn} .

Especificamente

$$S_{pn} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\mu - L}{\tau}\right) + \Phi\left(\frac{U - \mu}{\tau}\right)\right]\right\}$$

que implica

$$2\Phi(3S_{pn}) = \Phi\left(\frac{\mu - L}{\tau}\right) + \Phi\left(\frac{U - \mu}{\tau}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{L - \mu}{\tau}\right) + \Phi\left(\frac{U - \mu}{\tau}\right).$$

Porém $\Phi\left(\frac{L - \mu}{\tau}\right) = \alpha_L^*$, é a fração não conforme modificada para valores inferiores a L e $\Phi\left(\frac{U - \mu}{\tau}\right)$ é igual a $1 - \alpha_U^*$ com α_U^* como uma fração não conforme modificada para valores superiores a U . Desse modo, pode-se escrever

$$2\Phi(3S_{pn}) = 1 - \alpha_L^* + 1 - \alpha_U^* \Rightarrow 2\Phi(3S_{pn}) - 1 = 1 - \pi^* \Rightarrow S_{pn} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\pi^*}{2}\right)$$

onde $\pi^* = \alpha_L^* + \alpha_U^*$ pode ser vista como a fração de não conformidade total modificada. A determinação de limites de confiança para frações não conformes em processos simétricos foi objeto de vários estudos. Um deles foi o resultado de Wang & Lam (1996) que apresentou um limite inferior de confiança conservativo. Baseado neste resultado, uma extensão para processos assimétricos foi desenvolvida por Ho (2003) conforme será descrito a seguir.

Seja p_i , o limite inferior do intervalo de confiança de α_i^* , $i = L, U$. Segue que

$$P(\alpha_L^* < p_L) = 1 - \alpha; \quad P(\alpha_U^* < p_U) = 1 - \alpha \quad (3.23)$$

e as desigualdades

$$\begin{aligned} P(\alpha_L^* + \alpha_U^* \geq p_L + p_U) &\leq P(\alpha_L^* < p_L, \alpha_U^* < p_U) \\ &\geq 1 - P(\alpha_L^* > p_L) - P(\alpha_U^* > p_U) \geq 1 - 2\alpha \end{aligned}$$

são válidas, p_L e p_U podem ser determinados satisfazendo (3.23) e como $2\Phi(3S_{pn}) - 1 = 1 - \alpha_L^* - \alpha_U^* = 1 - \pi^*$. Isto implica que $1 - p_L - p_U$ é um limite inferior conservativo de $2\Phi(3S_{pn}) - 1$ com nível de confiança $100(1 - 2\alpha)\%$. Para determinar p_L , substitua $P\left(Z < \frac{L - \mu}{\tau}\right) = \alpha_L^*$ em (3.23) que resulta em

$$P\left[P\left(Z < \frac{L - \mu}{\tau}\right) < p_L\right] = 1 - \alpha. \quad (3.24)$$

Seja $\hat{\tau} = \sqrt{S^2 + (\bar{X} - T)^2}$; $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$ e $K_1 = \frac{\bar{X} - L}{\hat{\tau}}$ que implica $L = \bar{X} - K_1\hat{\tau}$. Substituindo em (3.24), obtém-se

$$P\left[P\left(Z < \frac{\bar{X} - K_1\hat{\tau} - \mu}{\tau}\right) < p_L\right] = 1 - \alpha$$

e segue que

$$\begin{aligned}
P \left[\left(\frac{\bar{X} - K_1 \hat{\tau} - \mu}{\tau} \right) < \Phi^{-1}(p_L) \right] &= 1 - \alpha \\
P \left[\left(\frac{\bar{X} - K_1 \hat{\tau} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) < \frac{\tau \Phi^{-1}(p_L)}{\sigma/\sqrt{n}} \right] &= 1 - \alpha.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Após algumas manipulações algébricas em (3.25) obtém-se a desigualdade

$$P \left[\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - \Phi^{-1}(p_L) \sqrt{n} \left(1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \right)^{1/2}}{\hat{\tau}/\tau} < \frac{\sqrt{n} K_1}{\sigma/\tau} \right] = 1 - \alpha. \tag{3.26}$$

O lado esquerdo da desigualdade de (3.26) é uma variável aleatória que segue uma distribuição t-Student não central (Johnson; Kotz & Balakrishnan, 1995) com os seguintes parâmetros:

- $\gamma = \frac{n(1+\xi^2)^2}{1+2\xi^2}$ graus de liberdade com $\xi = \frac{\mu - T}{\sigma}$;
- $\delta = -\Phi^{-1}(p_L) \sqrt{n} \left(1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \right)^{1/2}$ é uma constante, sendo o parâmetro de não centralidade;
- $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é uma normal padrão;
- $\frac{\hat{\tau}^2}{\tau^2}$ (Boyle, 1994) segue uma distribuição qui-quadrado com γ graus de liberdade.

O valor de (3.26) foi calculado usando a aproximação dada por

$$P(t_\gamma^*(\delta) < t) = \Phi \left[(t - \delta) \left(1 + t^2 / (2\delta)^{-1/2} \right) \right] \tag{3.27}$$

sugerida em Johnson; Kotz & Balakrishnan (1995), onde $t_\gamma^*(\delta)$ denota uma distribuição t-Student não central com γ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ . Aplicando a aproximação (3.27) em (3.26), obtém-se

$$\left(\frac{\sqrt{n} K_1}{\sigma/\tau} + \Phi^{-1}(p_L) \sqrt{n} \left(1 + \xi^2 \right)^{1/2} \right) \left(1 + \frac{\left(\frac{\sqrt{n} K_1}{\sigma/\tau} \right)^2}{2 \left(\frac{2(1+\xi^2)^2}{1+2\xi^2} \right)} \right)^{1/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha). \tag{3.28}$$

Rearranjando os termos de (3.28) apropriadamente, obtém-se o valor de p_L dado por

$$p_L = \Phi \left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) \left(\frac{1}{n(1 + \xi^2)} + \frac{K_1^2}{2\gamma} \right)^{1/2} - K_1 \right]. \quad (3.29)$$

Procedendo de modo similar pode-se determinar o valor de p_U dado por

$$p_U = \Phi \left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) \left(\frac{1}{n(1 + \xi^2)} + \frac{K_2^2}{2\gamma} \right)^{1/2} - K_2 \right] \quad (3.30)$$

com $K_2 = \frac{U - \bar{X}}{\hat{\tau}}$. Combinando (3.29) e (3.30) e após manipulações algébricas, um limite inferior de intervalo de confiança conservativo de S_{pn} pode ser determinado,

$$S_{pn} \geq \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\Phi \left[K_1 - \Phi^{-1}(1 - \alpha) \left(\frac{1}{n(1 + \xi^2)} + \frac{K_1^2}{2\xi} \right)^{1/2} \right] + \Phi \left[K_2 - \Phi^{-1}(1 - \alpha) \left(\frac{1}{n(1 + \xi^2)} + \frac{K_2^2}{2\xi} \right)^{1/2} \right] \right] \right\}. \quad (3.31)$$

Para avaliar o grau de cobertura do limite inferior proposto em (3.31), foi feito um estudo de simulação considerando-se uma característica de qualidade X normal com os seguintes parâmetros:

- Limites de especificação $L = 10$ e $U = 18$;
- Valores alvo $T = 12$ e 15 ;
- $\mu = 11, 12, 17$ e $\sigma = 1$;
- Tamanho de amostra = $10, 25, 50, 100, 250$ e 500 ;
- Número de réplicas $r = 500$.

De cada amostra, são obtidos estimativas de S_{pn} e limites inferiores do intervalo de confiança a 90 % ($\alpha = 5\%$). Na Tabela 3.9 estão as médias amostrais e os desvios padrão amostral (DP) de S_{pn} assim como a porcentagem do grau de cobertura do limite proposto. À medida que o tamanho de amostra aumenta, a média amostral fica mais próxima do verdadeiro valor de S_{pn} e o desvio padrão decresce, conforme esperado. Em relação ao limite inferior, o grau de cobertura parece não estar relacionado com a diferença entre o valor alvo e a média μ .

Tabela 3.9: Resultados da simulação.

μ	n	$T = 12$				$T = 15$			
		S_{pm}	\bar{S}_{pm}	DP	% cobertura	S_{pm}	\bar{S}_{pm}	DP	% cobertura
11	10	0,3919	0,4189	0,1102	95,2	0,2524	0,2550	0,0233	97,00
	25		0,3931	0,0597	94,8		0,2529	0,0147	98,60
	50		0,3968	0,0449	92,4		0,2530	0,0104	97,40
	100		0,3927	0,0289	94,0		0,2527	0,0076	98,00
	250		0,3927	0,0179	94,0		0,2523	0,0043	98,80
	500		0,3932	0,0123	92,60		0,2521	0,0033	98,80
12	10	0,7592	0,7835	0,1897	98,00	0,3509	0,3553	0,0417	97,00
	25		0,7719	0,1084	98,80		0,3542	0,0281	95,80
	50		0,7627	0,0741	97,20		0,3535	0,0193	95,80
	100		0,7612	0,0531	97,00		0,3503	0,0128	97,40
	250		0,7613	0,0351	97,20		0,3507	0,0082	96,20
	500		0,7601	0,0238	97,60		0,3513	0,0061	95,40
13	10	0,7945	0,8095	0,1058	99,00	0,5442	0,5615	0,0969	97,20
	25		0,7988	0,0607	99,60		0,5482	0,0552	98,00
	50		0,7967	0,0381	100,00		0,5472	0,0420	96,20
	100		0,7945	0,0258	100,00		0,5450	0,0280	96,40
	250		0,7935	0,0166	99,80		0,5440	0,0189	94,40
	500		0,7935	0,0110	100,00		0,5444	0,0134	94,80
14	10	0,5963	0,5993	0,0759	99,60	0,9428	0,9530	0,1858	98,60
	25		0,5963	0,0509	99,20		0,9418	0,1182	98,60
	50		0,5986	0,0352	99,60		0,9410	0,0819	99,20
	100		0,5973	0,0259	99,60		0,9421	0,0583	98,80
	250		0,5961	0,0155	99,60		0,9441	0,0367	98,40
	500		0,5961	0,0106	99,80		0,9419	0,0263	98,20
15	10	0,4016	0,4054	0,0491	97,00	10,684	11,083	0,2550	99,60
	25		0,4044	0,0306	97,00		10,810	0,1520	99,00
	50		0,4020	0,0217	97,00		10,763	0,1037	98,20
	100		0,4016	0,0150	98,00		10,741	0,0759	97,80
	250		0,4016	0,0095	98,00		10,713	0,0479	97,40
	500		0,4016	0,0068	97,40		10,668	0,0323	98,20
16	10	0,2945	0,2921	0,0289	97,80	0,5862	0,6248	0,1632	94,80
	25		0,2899	0,0182	97,40		0,5903	0,0912	95,00
	50		0,2887	0,0125	97,00		0,5918	0,0670	92,60
	100		0,2887	0,0092	98,00		0,5900	0,0431	93,80
	250		0,2885	0,0053	99,20		0,5886	0,0286	92,60
	500		0,2884	0,0039	98,20		0,5856	0,0185	94,40
17	10	0,2211	0,2219	0,0171	98,60	0,3259	0,3346	0,0566	93,40
	25		0,2215	0,0114	98,40		0,3290	0,0321	93,80
	50		0,2216	0,0074	99,20		0,3268	0,0228	93,40
	100		0,2215	0,0056	98,80		0,3276	0,0162	93,40
	250		0,2212	0,0035	99,20		0,3259	0,0093	95,60
	500		0,2210	0,0024	99,20		0,3266	0,0070	93,00

Conforme dito anteriormente, uma alternativa para fazer inferência em S_{pn} é empregar métodos bayesianos, cujos procedimentos aqui apresentados estão restritos a uma característica de qualidade normal condicionado aos parâmetros μ e σ . Deste modo, a função de verossimilhança com uma amostra de tamanho n é igual a

$$L_n(\mathbf{X}|\mu, \sigma^2) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp \frac{-1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2.$$

com $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Na análise bayesiana, incerteza nos parâmetros μ e σ pode ser expressa por uma distribuição conjunto *a priori* $f(\mu, \sigma)$. Neste caso, supõe-se que μ e σ são independentes, isto é, $f(\mu, \sigma^2) = f(\mu)f(\sigma^2)$. Aplicando resultados da inferência bayesiana, a distribuição conjunta *a posteriori* de (μ, σ) é dada por:

$$f(\mu, \sigma^2|\mathbf{X}) \propto L_n(\mathbf{X}|\mu, \sigma^2)f(\mu)f(\sigma^2).$$

Em alguns casos é possível identificar a distribuição conjunta *a posteriori* de μ e σ , que naturalmente depende da escolha da distribuição *a priori*. Contudo, o problema para obter a distribuição *a posteriori* de S_{pn} continua não resolvido assim como seu estimador pontual dado por

$$\tilde{S}_{pn} = \iint S_{pn} f(\mu, \sigma^2|\mathbf{X}) d\mu d\sigma^2$$

caso uma função perda quadrática fosse considerada. Assim sendo, uma alternativa é empregar o algoritmo *SIR* (*Sampling Importance Resampling*) proposto por Rubin [1988] para obter uma distribuição aproximada *a posteriori* de S_{pn} que pode ser empregada para fornecer uma estimativa pontual de S_{pn} bem como um intervalo de confiança aproximado. Para ilustrar o procedimento apresentado considere:

- Processo normal com $\mu = 12$ e $\sigma^2 = 1$;
- Limites de especificação $L = 10$ e $U = 16$;
- Valor alvo $T = 14$ (que resulta $S_{pn} = 0,4067$)
- Tamanho de amostra $n = 20$ fornecendo $\bar{X} = 12,046$ e $S = 0,824$.

Aplicando o procedimento SIR com uma reamostragem de $B^*=5000$ réplicas, uma estimativa pontual bayesiana de $\tilde{S}_{pn} = 0,42305$ foi obtida e os limites de um intervalo de

confiança a 95% dados por [0,319; 0,551]. Estes resultados foram obtidos usando como distribuições *a priori* uma distribuição normal para μ com hiperparâmetros $\mu_0 = 12$ e $\sigma_0^2 = 1$ e uma distribuição Gamma para σ^2 com hiperparâmetros $\eta = \theta = 0,5$. Estimativas pontuais podem ser melhoradas aumentando-se o tamanho da amostra. Por exemplo, para uma outra amostral de tamanho igual a $n = 50$, $\bar{X} = 11,95$ e $S = 1,1010$ uma estimativa $\tilde{S}_{pn} = 0,40250$ foi obtida com um intervalo de confiança a 95% igual a [0,3415; 0,4952]. Os resultados são coerentes, o segundo resultado está mais próximo do verdadeiro valor de S_{pn} que o primeiro assim como a amplitude do segundo intervalo é menor que o primeiro, conforme esperado. Para terminar, uma simulação foi feita considerando os seguintes parâmetros fixos:

- Limites de especificação: $L = 10$ e $U = 16$; Valor alvo: $T = 14$;
- Média do processo $\mu = 12$;
- Hiperparâmetros para $f(\mu)$: $\mu_0 = 12$, $\sigma_0 = 1$;
- Hiperparâmetros para $f(\sigma^2)$: $\eta = \theta = 0,5$;

e variando os seguintes parâmetros:

- Desvio padrão amostral $S=0,5; 1$ e $1,5$;
- Tamanho da amostra $n=5, 10, 20, 50$ e 80 ;
- Valores de $(\hat{\tau}/S)^2 = 1, 1; 1,5$ e 5 que combinados com os valores de S vão fornecer os valores de média amostrais \bar{X} da Tabela 3.10.

Estes parâmetros foram usados para calcular o valor de função de verossimilhança uma vez que $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma^2}\right)$ pode ser escrita como uma função de $\tau^2 = \sigma^2 + (T - \mu)^2$, e S^2 , ou seja

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \frac{nS^2}{\sigma^2} \left[\left(\frac{\bar{X} - T}{S}\right)^2 + \left(\frac{T - \mu}{S}\right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{X} - T}{S}\right) \left(\frac{T - \mu}{S}\right) \right]. \quad (3.32)$$

Além disto $\frac{\tau^2}{\sigma^2} - 1 = \left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)^2$ e $\hat{\tau}^2 = S^2 + (T - \bar{X})^2$ que implica $\frac{\hat{\tau}^2}{S^2} - 1 = \left(\frac{T - \bar{X}}{S}\right)^2$. Substituindo estas igualdades em (3.32), obtém-se

Tabela 3.10: Valores das médias amostrais empregados no estudo da simulação.

$(\hat{\tau}/S)^2$	Desvio padrão		
	0,5	1,0	1,5
1,1	13,842	13,684	13,526
	14,158	14,316	14,474
1,5	13,647	13,293	12,940
	14,353	14,707	15,060
5,0	13,000	12,000	11,000
	15,000	16,000	17,000

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma^2} \right) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \frac{nS^2}{\sigma^2} \left[\frac{\hat{\tau}}{S^2} - 1 \right] + n \left[\frac{\tau^2}{\sigma^2} - 1 \right] + 2n \frac{S}{\sigma} \left[\frac{\hat{\tau}^2}{S^2} - 1 \right]^{1/2} \left[\frac{\tau^2}{\sigma^2} - 1 \right]^{1/2}.$$

As estimativas pontuais de S_{pn} e os limites de confiança foram obtidos conforme os seguintes passos:

- Passo 1: Uma amostra de μ e σ^2 é extraída da distribuição conjunta *a priori*;
- Passo 2: Valores de $L_n^{(i)}(\mathbf{X}|\mu^{(i)}, \sigma^{2(i)})$ são calculados, dados a média amostral \bar{X} e desvio padrão S , $i = 1, \dots, B^*=5000$;
- Passo 3: Uma reamostra de μ e σ^2 é extraída proporcionalmente aos valores de $L_n^{(i)}(\mathbf{X}|\mu^{(i)}, \sigma^{2(i)})$;
- Passo 4: Valores de $\tilde{S}_{pn}^{(i)}$ são calculados com a reamostra do passo 3, $i = 1, \dots, B^*$;
- Passo 5: Estimativa pontual de $\tilde{S}_{pn} = \frac{\sum_{i=1}^{B^*} \tilde{S}_{pn}^{(i)}}{n}$;
- Passo 6: O intervalo de confiança de S_{pn} com $100(1-p)\%$ de confiança será dado por $[S_{pn}(p/2); S_{pn}(1-p/2)]$ onde $S_{pn}(k)$ denota k -ésimo quantil amostral.

Valores da estimativa pontual e intervalo de confiança de S_{pn} através de *SIR* estão na Tabela 3.11. À medida que o tamanho da amostra aumenta, a amplitude do intervalo de

confiança decresce conforme esperado assim como é observada a estabilidade da estimativa pontual.

Apesar de ter apresentado um limite de confiança inferior conservativo para o índice S_{pn} , o limite superior ainda está para ser obtido, embora em muitas situações práticas seja mais interessante calcular o limite inferior. A escolha do procedimento bayesiano a partir do algoritmo *SIR* se deve à facilidade de escrever um programa para calcular a distribuição *a posteriori*, apesar de outros algoritmos como Monte Carlo Markov Chain (MCMC) poderiam ser tentados.

Um problema que surge no procedimento bayesiano é a escolha adequada das distribuições *a priori* para expressar as incertezas acerca dos parâmetros. Para ilustrar como eles modificam os resultados, considere-se como uma distribuição *a priori* de μ , uma distribuição uniforme em [10; 14] e como distribuição *a priori* de σ^2 , uma outra distribuição uniforme em [0; 2], independentes. Para os valores amostrais anteriormente mencionados (média amostral $\bar{X} = 12,046$; desvio padrão amostral $S=0,824$ e tamanho da amostra $n=20$), foi obtida uma estimativa $\tilde{S}_{pn} = 0,48119$ e um intervalo confiança de [0,4475; 0,5312] empregando do algoritmo *SIR* com 5 mil réplicas. Para uma amostra de tamanho igual a 50 com $\bar{X} = 11,95$ e $S = 1,1010$ empregando o mesmo número de réplicas, resultou uma estimativa $\tilde{S}_{pn} = 0,46433$ e um intervalo de confiança igual a [0,4522; 0,49311]. Estes resultados parecem estar totalmente incoerentes com os obtidos anteriormente, além do verdadeiro valor do índice ($S_{pn} = 0,4067$) não pertencer aos intervalos de confiança obtidos. Este exemplo ilustra como a escolha inadequada da distribuição *a priori* pode alterar os resultados. Na prática não é usual empregar distribuições uniformes para expressar incertezas acerca de média e desvio padrão de um processo, pois são distribuições não informativas.

Tabela 3.11: Estimativa e intervalo de confiança de S_{pn} através do *SIR*.

Desvio padrão (S)	$(\hat{\tau}/S)^2$	Tamanho da amostra	\tilde{S}_{pn}	Limites de confiança	
				Inferior	Superior
0,5	1,1	5	12,890	0,92356	152,737
		10	114,920	0,70660	158,940
		20	128,900	0,92356	152,737
		50	135,220	108,334	147,149
		80	134,760	120,005	140,940
	1,5	5	0,93409	0,45405	152,737
		10	100,940	0,64291	148,391
		20	104,020	0,79372	139,078
		50	117,860	0,34665	140,940
		80	108,500	100,345	115,872
	5,0	5	0,62160	0,32672	0,95756
		10	0,66357	0,42356	0,92720
		20	0,67412	0,50754	0,83984
		50	0,72167	0,610517	0,862310
		80	0,70275	0,629898	0,811291
1	1,1	5	0,71416	0,55682	0,90418
		10	0,72062	0,46187	101,553
		20	0,71656	0,54768	0,92436
		50	0,72167	0,61052	0,86231
		80	0,70275	0,62990	0,81129
	1,5	5	0,60262	0,32321	0,91392
		10	0,63558	0,40348	0,82563
		20	0,66173	0,48994	0,81810
		50	0,63226	0,56113	0,72958
		80	0,63285	0,55859	0,70275
	5,0	5	0,40804	0,24121	0,60753
		10	0,41226	0,28841	0,52698
		20	0,39982	0,32204	0,50231
		50	0,39411	0,35230	0,48364
		80	0,40028	0,34681	0,45484
1,5	1,1	5	0,53395	0,28369	0,81842
		10	0,53801	0,35216	0,74563
		20	0,54282	0,42752	0,67678
		50	0,53472	0,44617	0,64668
		80	0,54628	0,46370	0,60754
	1,5	5	0,48730	0,26993	0,70819
		10	0,48073	0,30710	0,65717
		20	0,45671	0,36194	0,57870
		50	0,48408	0,39231	0,54198
		80	0,48272	0,42752	0,53785
	5,0	5	0,32091	0,20487	0,46210
		10	0,32188	0,21376	0,41702
		20	0,30852	0,21706	0,37208
		50	0,29370	0,26355	0,35681
		80	0,31338	0,28950	0,32408

3.6 Índices de capacidades para processos não normais calibrados com a fração não conforme.

Na Seção 3.1 estão listados os principais índices de capacidade que têm como objetivo medir o quanto o processo é capaz de atender às especificações e itens produzidos não atendendo às especificações serão ditas como não conformes. Ou seja, processo com a mesma fração conforme deveria ter o mesmo índice de capacidade. No entanto, pode notar através da Tabela 3.12, a forte influência da distribuição sobre os vários índices em particular a falta de afinidade entre a fração de não conformidade e os índices de capacidade. Todos os casos apresentados na Tabela 3.12 têm como limites de especificação $L=100$ e $U=108$; valor alvo $T=104$ e apresentam a mesma fração não conforme ($\pi = 0,6334 \times 10^{-4}$), embora apresentem valores de índices de capacidade muito diferentes.

Tabela 3.12: Índices de capacidade com mesma fração não conforme.

Processos	μ	σ	C_p	C_{pk}	C_{pm}	C_{pmk}
Normal (104; 1)	104	1	1,333	1,333	1,333	1,333
Weibull (1002; 2,5658; 2)	102,274	1,189	1,122	0,638	0,636	0,262
Exponencial (100; 0,823)	100,823	0,823	1,620	0,333	0,404	0,083

Para resolver este problema, aplicou-se a sugestão de Flaig (1997) e um novo índice para medir a capacidade de processo foi sugerido por Borges & Ho (2001) que tem uma correspondência um a um com a fração de não conformidade π . Especificamente

$$C = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.33)$$

$\pi = 1 - P(L \leq X \leq U)$, a fração de defeituosos. O índice C apresenta três propriedades interessantes:

- É função um a um com a fração de não defeituosos π . Processos com a mesma fração de defeitos são igualmente capazes ou seja o índice de capacidade proposto irá responder apenas às mudanças na fração de defeituosos e não às mudanças da distribuição da característica de qualidade de interesse;
- Se um processo for normal e estável com média igual $\mu = (L + U)/2$ e desvio padrão σ , segue que

$$\frac{\pi}{2} = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right)$$

e

$$C_p = \frac{U - \mu}{3\sigma} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}(1 - \pi/2) = C$$

Ou seja, a capacidade do processo é medida por um valor de C_p em um processo normal centrado com a mesma fração de defeituosos π sob controle. Esta propriedade facilita interpretar e entender os valores do índice C ;

- Pode ser aplicado para indicadores de qualidade discretos e contínuos; univariados e multivariados e nenhuma suposição sobre a distribuição necessita ser feita sobre a característica de qualidade.

Apresentado o índice, o problema é como proceder para fazer julgamentos sobre a capacidade de um processo baseado nos valores da estatística

$$\hat{C} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\hat{\pi}}{2}\right)$$

$\hat{\pi} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{X_i \in A\}$, X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra de X e A é uma região de conformidade. Como existe uma correspondência um a um entre a fração de defeitos π e C , segue que procedimentos inferenciais poderiam ser feitos em C através de π . Contudo, para processos altamente capazes, esta conduta pode produzir resultados pouco interessantes principalmente se o tamanho da amostra não for suficientemente grande. Nesta situação é muito provável que $\hat{\pi}$ seja zero e métodos clássicos de inferência não possam ser aplicados. Uma alternativa é expressar π em função dos parâmetros da distribuição da característica de interesse. Porém esta solução pode não se tornar viável uma vez que a distribuição amostral de \hat{C} pode ser não muito fácil de ser obtida. Desse modo Borges & Ho (2001) desenvolveram procedimentos inferenciais deste índice sob a ótica de uma perspectiva Bayesiana.

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma característica de qualidade X de um processo estável e as incertezas sobre o parâmetro $\pi = 1 - P\{X \in A\}$ será descrita com base em uma distribuição *a priori* Beta de parâmetros a e b . Não é difícil de mostrar que o estimador bayesiano de C sob uma função perda quadrática é dado por

$$\tilde{C}(s) = \frac{1}{3} E \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1+U}{2} \right) \right] \quad (3.34)$$

$U \sim \text{Beta}(n - s + b, s + a)$ e $s = \sum_{i=1}^n y_i$ com $y_i = 1$ se $X_i \notin A$. Com base na Lei Forte dos Grandes Números, boas aproximações de $\tilde{C}(s)$ podem ser obtidas por Simulação de Monte Carlo. Note-se que o procedimento inferencial continua mesmo que nenhum item defeituoso seja observado, isto é, se $s = 0$. Intervalos de confiança bayesianos também são fáceis de serem obtidos. Seja $[\alpha, \beta]$ um intervalo de confiança Bayesiano de C com nível de confiança $(1 - \gamma)$. Ele é obtido tal que satisfaça

$$P(\alpha < C < \beta | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = 1 - \gamma$$

onde $Y_i = 0$ se $X_i \in [L, U]$; caso contrário $Y_i = 1$.

Resolvendo em α e β , obtém-se

$$\alpha = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a)}{f_1(n-s+b) + (s+a)} \right) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a)}{f_2(n-s+b) + (s+a)} \right) \right]$$

f_1 e f_2 são obtidos tais que $P(F < f_1) = \gamma_1$ e $P(F > f_2) = \gamma_2$, $F \sim \text{Fisher - Snedecor}[2(n - s + b), 2(s + a)]$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Se $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma/2$, $[\alpha, \beta]$ é chamado de intervalo de confiança bayesiano simétrico de C .

Em muitas situações práticas, os engenheiros de produção têm necessidade de demonstrar que um determinado processo alcançou um nível de capacidade maior ou igual a c_0 . Os valores mais comuns de c_0 são, por exemplo: 1,33; 1,50 e 1,67, conforme Montgomery (2001, p. 361). Entende-se por teste de demonstração da capacidade, um procedimento definido pelo par (n, d) de números inteiros; $d \leq n$, sendo n , o tamanho da amostra e $Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$ provenientes dos valores observados, onde $Y_i = 0$ se $X_i \in [L, U]$; caso contrário $Y_i = 1$. Pode-se considerar que o processo alcançou um índice de capacidade $C \geq c_0$ se $s = \sum_{i=1}^n y_i \leq d$, onde $\sum_{i=1}^n y_i$ é igual ao número de itens fora dos limites de especificação numa amostra de tamanho n . O par (n, d) é escolhido tal que

$$\gamma = P\{C > c_0 | S > d\} \quad \text{e} \quad \delta = P\{C \leq c_1 | S \leq d\} \quad (3.35)$$

para valores fixos de c_1 , $0 \leq c_1 \leq c_0$ e de γ e δ . O valor escolhido para c_1 (geralmente maior que um em processos industriais) deve ser um valor considerado como “nível aceitável” de C . As probabilidades em (3.35) são chamadas respectivamente de *risco de produtor* e *risco do consumidor*. Note-se que a primeira expressão de (3.35) é a probabilidade *a posteriori* do processo tenha capacidade $C > c_0$ dado que foi considerado não “capaz” ou seja, ocorreu o evento $(S > d)$. Conseqüentemente produtores tendem a planejar procedimentos com valores baixos de γ uma vez que um processo “é dito não capaz” (não atenderá às especificações) irá demandar mais investimentos na melhoria do processo. Por outro lado, a segunda expressão de (3.35) é a probabilidade *a posteriori* da capacidade do processo estar abaixo de c_1 , dado que o processo ($C > c_0$) foi considerado “capaz”, ou seja, ocorreu o evento $(S \leq d)$. Por isto, produtores também tenderão a planejar procedimentos com valores baixos de δ para proteger os consumidores de adquirir um produto não conforme. Para valores fixos de γ e δ , o par (n, d) deve satisfazer as equações:

$$\gamma = \left\{ B(b, a) - \sum_{s=0}^d \binom{n}{s} B(b+n-s, a+s) \right\}^{-1} \left[B(b, a)[1 - B_I(1 - \pi_0, b, a)] - \sum_{s=0}^d \binom{n}{s} B(b+n-s, a+s)[1 - B_I(1 - \pi_0, n-s+b, s+a)] \right] \quad (3.36)$$

e

$$\delta = \frac{\sum_{s=0}^d \binom{n}{s} \frac{B(b+n-s, a+s)}{B(b, a)} B_I(1 - \pi_1, n-s+b, s+a)}{\sum_{s=0}^d \binom{n}{s} \frac{B(b+n-s, a+s)}{B(b, a)}} \quad (3.37)$$

com $\pi_i = 2\bar{\Phi}(3c_i)$, $i = 0, 1$; $B_I(x, y, z)$ denotando $P(U < x)$ com $U \sim Beta(y, z)$ e $B(x, y)$ a função Beta. Das equações (3.36) e (3.37), os valores de n e d podem a princípio ser obtidos através de busca direta. Para processos altamente capazes, o procedimento com $d = 0$ é de particular interesse. Neste caso utilizando uma distribuição *a priori* não informativa Beta (1,1) para π , as expressões (3.36) e (3.37) reduzem a

$$\gamma = \frac{(n+1)\pi_0 - 1 + (1 - \pi_0)^{(n+1)}}{n} \quad (3.38)$$

e

$$\delta = (1 - \pi_1)^{(n+1)} \quad (3.39)$$

e n deve ser escolhido tal que satisfaça a equação (3.38) ou (3.39). É interessante observar que o uso da equação (3.38) irá fornecer um valor para n se $\gamma < \pi_0$ uma vez que o lado direito da expressão cresce para π_0 à medida que n aumenta. Nesta situação, poderia tomar $n = 1$ para ter um risco do produtor da ordem de π_0^2 se π_0 for pequeno e de fato, para valores interessantes de c_0 , π_0 é um muito pequeno. Para $c_0 = 1,33$, por exemplo, $\pi_0 = 0,00006$. Por outro lado, o uso da equação (3.39) para fixar valores de n para testes com $d = 0$ fornece valores mais interessantes. Neste caso, $n = \frac{\ln \delta}{\ln(1-\pi_1)} - 1$.

Para ilustrar os procedimentos apresentados, considere o conjunto de dados extraído de Kotz & Lovelace (1998, p.157-8). Os valores da Tabela 3.13 referem-se a pesos de um componente de borracha (em gramas) com valor alvo de 8,7g e limites de especificação iguais a 8,96g e 8,44g.

Tabela 3.13: Pesos de componente de borracha.

Peso	Frequência
8.84	2
8.85	5
8.86	7
8.87	10
8.88	12
8.89	19
8.90	18
8.91	15
8.92	8
8.93	4

$\hat{C}_p = 4,92$; $\hat{C}_{pk} = 1,62$; $\hat{C}_c = 1,75$; $\hat{C}_{pm} = 0,45$; $\hat{C}_{pmk} = 0,12$ são as estimativas dos índices convencionais para este conjunto. Valor alto de \hat{C}_p em relação ao de \hat{C}_{pk} indica que existe possibilidade de melhorar centrando corretamente o processo.

Contudo estes resultados devem ser interpretados com cuidado, visto que os dados indicam um processo não normal (não simétrico), apesar de \hat{C}_{pk} e \hat{C}_p estarem coerentes. Valores

baixos de \hat{C}_{pm} , \hat{C}_{pmk} indicam que provavelmente o processo está fora do valor alvo, uma vez que eles penalizam as discrepâncias entre a média do processo e o valor alvo. Contudo este fato deve ser analisado com cuidado visto que não está claro se colocar o valor alvo na média do processo indicaria uma melhoria no processo, especialmente para processo cuja característica de interesse não segue distribuição normal e valor alvo diferente do centro da região de conformidade.

Os procedimentos anteriormente apresentados podem ser facilmente aplicados aos dados da Tabela 3.13. Empregando uma distribuição Beta não informativa, $Beta(1, 1)$ uma estimativa pontual de C está dada em (3.34) com $U \sim Beta(101, 1)$ [note-se que $n = 100$, $s = 0$ (todos os valores dentro dos limites de especificação), $a = 1$ e $b = 1$]. Empregando integração numérica, resulta $\tilde{C} \cong 0,91594$. Simulação de Monte Carlo pode ser usada para obter valores aproximados de \tilde{C} . Para isto deve simular um número arbitrário de observações da distribuição $Beta(101, 1)$ (quanto maior, melhor), U_1, \dots, U_m , e daí calcular

$$\frac{1}{3 \times m} \sum_{i=1}^m \Phi^{-1} \left(\frac{1 + U_i}{2} \right).$$

O resultado de uma centena de simulações com $m = 500$ forneceu uma média amostral igual a 0,9167, coerente com o resultado obtido pela integração numérica e um intervalo de confiança Bayesiano simétrico [0,82227; 1,22053].

Considere-se uma amostra simulada de cem valores de uma distribuição Weibull com parâmetro de forma $\alpha = 86$; parâmetro de escala $\eta = 120$ e limites de especificação L e U respectivamente iguais 81,6602 e 87,2702 (que correspondem respectivamente aos percentis 0,2% e 99,7 %) e $s = 0$ (ou seja, todos os valores dentro dos limites especificados). O estimador pontual $\tilde{C} = 0,91594$ encontrado é razoavelmente próximo do verdadeiro valor de $C = \frac{1}{3} \Phi^{-1}(0,9975) = 0,9357$. Se empregasse o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros da distribuição Weibull ($\hat{\alpha} = 86,108$ e $\hat{\eta} = 135,48$) e com estes obter uma estimativa do índice resultaria $\tilde{C} = 0,9930$. Este valor é coerente com o verdadeiro valor de C , mas depende muito da escolha da correta família de distribuições dos processos.

Com base no índice proposto por Borges & Ho (2001); Ho, Borges & Barriga (2004) criaram outros índices associados com a fração não conforme a partir de (3.33). A fração não conforme π pode também ser escrita como

$$\pi = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) + \{1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right)\}.$$

Se X é normalmente distribuída com μ e σ^2 , ou seja

$$\gamma_L = P(X < L) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{L - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu - L}{\sigma}\right) \quad (3.40)$$

e

$$\gamma_U = P(X > U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{U - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right). \quad (3.41)$$

Daí usando (3.40) e (3.41), pode-se expressar

$$C_{pk} = \min\left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \gamma_U)}{3}, \frac{\Phi^{-1}(1 - \gamma_L)}{3}\right), \quad (3.42)$$

uma vez que $\frac{\mu - L}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - \gamma_L)$ e $\frac{U - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - \gamma_U)$.

Assim (3.42) pode ser usada para introduzir um novo índice calibrado por “ C_{pk} ”. Especificamente,

$$\begin{aligned} C_1 &= \min\left\{\frac{1}{3}\Phi^{-1}(1 - \gamma_U), \frac{1}{3}\Phi^{-1}(1 - \gamma_L)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\Phi^{-1}[1 - \max(\gamma_L, \gamma_U)] \end{aligned} \quad (3.43)$$

que apresenta as seguintes propriedades:

- Se $\pi = \gamma_L + \gamma_U < 1$ e $\gamma_L = \gamma_U = \frac{\pi}{2}$, então $C_1 = C = \frac{1}{3}\Phi^{-1}(1 - \frac{\pi}{2})$. Assim, o índice proposto em (3.41) também inclui o índice expresso em (3.33) proposto por Borges & Ho (2001) como um caso particular;
- $C_1(\gamma_L, \gamma_U) = C_1(\gamma_U, \gamma_L)$, mas $C_1(\gamma_L, \gamma_U)$ não é constante para $(\gamma_I + \gamma_S) = \pi$;
- O índice de capacidade do processo irá responder a mudanças da maior fração de defeitos e não a mudanças na distribuição da característica de qualidade;

- Pode ser usado para processos não normais; para processos normais, $C_1 = C_{pk}$;
- (3.41) pode ser aplicada para processos unilaterais; se considerar $\gamma_U \rightarrow 0$ ou $\gamma_L \rightarrow 0$. Assim, se $\gamma_L = 0$ um outro índice pode ser introduzido

$$C_U = \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \gamma_U)}{3} \right); \quad (3.44)$$

- Similarmente, se $\gamma_U = 0$, então

$$C_L = \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \gamma_L)}{3} \right). \quad (3.45)$$

Os procedimentos inferenciais dos índices (3.43) e (3.44) ou (3.45) também serão desenvolvidos por métodos bayesiano como foi o do índice C. As justificativas da escolha pelo método bayesiano anteriormente apresentadas para o índice C também são válidas para os índices propostos em (3.43), (3.44) ou (3.45). Todo o desenvolvimento dos procedimentos seguirá os mesmos passos do índice C. Assim sendo, será abreviado o detalhamento para evitar que fique tediosa e repetitiva a descrição dos resultados.

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da característica de qualidade X de um processo estável; $Y_{1i} = 1(X_i < L)$, $Y_{2i} = 1(X_i > U)$ e $Y_{3i} = 1(L \leq X_i \leq U)$, $i = 1, \dots, n$. Desse modo, a variável aleatória $Y_j = \sum_{i=1}^n Y_{ji}$, para $j = 1, 2, 3$; $1 \leq i \leq n$, fornece o número de itens na classe j e o vetor aleatório $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ segue uma distribuição multinomial com parâmetros $(n, \gamma_L, \gamma_U, 1 - \gamma_L - \gamma_U)$, com

$$\gamma_L = P(X_i < L), \quad \gamma_U = P(X_i > U) \quad \text{e} \quad 1 - \gamma_L - \gamma_U = P(L \leq X_i \leq U)$$

e

$$P \{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, Y_3 = y_3 | n\} = \frac{n!}{y_1! y_2! y_3!} \gamma_L^{y_1} \gamma_U^{y_2} (1 - \gamma_L - \gamma_U)^{n - y_1 - y_2} \quad (3.46)$$

$\theta = (\gamma_L, \gamma_U)$, $y_j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ é uma valor observado da variável aleatória Y_j , $j = 1, 2, 3$ e $n = \sum_{j=1}^3 y_j$ é o tamanho da amostra. A expressão (3.46) pode ser visto como a função de verossimilhança. Para descrever a incerteza dos parâmetros de (3.46), considere como função densidade *a priori*, a distribuição de Dirichlet com hiperparâmetros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} (\gamma_L)^{\alpha_1-1} (\gamma_U)^{\alpha_2-1} (1 - \gamma_L - \gamma_U)^{\alpha_3-1} \quad (3.47)$$

$0 \leq \alpha_j; j = 1, 2, 3$, são constantes com valores selecionados de acordo com o conhecimento disponível sobre o processo. Quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,5$, (3.47) é conhecida como a distribuição não informativa de Jeffreys [ver Box & Tiao (1973)] dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto (\gamma_L)^{-0,5} (\gamma_U)^{-0,5} (1 - \gamma_L - \gamma_U)^{-0,5}. \quad (3.48)$$

A distribuição *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta} = (\gamma_L, \gamma_U)$ é:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|D) \propto (\gamma_L)^{y_1+\alpha_1-1} (\gamma_U)^{y_2+\alpha_2-1} (1 - \gamma_L - \gamma_U)^{n-y_1-y_2+\alpha_3-1}. \quad (3.49)$$

Pode-se notar que a distribuição *a posteriori* é também uma distribuição de Dirichlet de parâmetros $(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, n - y_1 - y_2 + \alpha_3)$. O índice proposto (3.43) é função de γ_L e γ_U e a determinação da distribuição exata *a posteriori* de C_1 é possível empregando (3.49) [detalhes ver Barriga (2001)], contudo é um tanto complicada. Assim serão utilizados métodos de simulação para obter uma distribuição aproximada de C_1 a partir de amostras aleatórias da distribuição *a posteriori* de γ_U e γ_L [ver Gamerman (1997)]. Obviamente as distribuições aproximadas serão melhores quanto maior for o tamanho das amostras. A única restrição destes métodos, para alcançar alguma precisão desejada, deve-se apenas aos recursos computacionais, porém isto não é fato relevante diante da disponibilidade de equipamentos com alto desempenho.

Dada uma amostra aleatória é possível obter uma estimativa pontual, um intervalo de confiança e uma função densidade (através da distribuição empírica) aproximada. A partir de amostras aleatórias de γ_L e γ_U de (3.49), estimativas de qualquer ordem de momento de uma distribuição podem ser obtidas pelo método de Monte Carlo. Existe um interesse em obter o primeiro momento $E(C_1)$. Sob uma função perda quadrática, o estimador bayesiano de C_1 dado por

$$E(C_1) = \frac{1}{3} \iint \min(\Phi^{-1}(1 - \gamma_U); \Phi^{-1}(1 - \gamma_L)) \pi(\gamma_L, \gamma_U|D) d\gamma_L d\gamma_U,$$

que pode ser aproximado usando um estimador Monte Carlo como:

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{3} \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \min \left[\Phi^{-1}(1 - \gamma_U^{(i)}); \Phi^{-1}(1 - \gamma_L^{(i)}) \right],$$

$\gamma_j^{(1)}, \dots, \gamma_j^{(B)}$, observações de γ_j , $j = L, U$; B , o tamanho da amostra. Para ilustrar o método, considere um processo cuja característica de interesse X segue uma distribuição Weibull com $E(X) = 7,054$ e $Var(X) = 0,845$; limites de especificação $L = 5$ mm e $U = 13$ mm. Com estes parâmetros e sob condições estáveis, o valor de $C_1 = 1,0$ é esperado uma vez que $\gamma_L = P(X < 5) = 0,0003$ e $\gamma_U = P(X > 13) = 0,00135$. E uma amostra de tamanho 50 resultou $y_1 = \sum_{j=1}^n y_{j1} = 0$, $y_2 = \sum_{j=1}^n y_{j2} = 0$. Para obter uma estimativa de C_1 , considere uma densidade *a priori* não informativa de Jeffrey para γ_L e γ_U . Isto resulta uma distribuição *a posteriori* de Dirichlet de parâmetros $(0,5; 0,5; 50,5)$ para γ_L e γ_U . Uma amostra de 5000 valores é extraída da distribuição *a posteriori* para produzir uma estimativa pontual $\hat{C}_1 = 0,7821590$. Para melhorar esta estimativa, outras dez novas observações foram incluídas. Especificamente, $\{5,36; 7,29; 6,04; 5,32; 6,49; 6,39; 5,34; 9,48; 7,09; 9,48\}$. Uma amostra aleatória de 5000 observações de uma distribuição de Dirichlet com parâmetros $(0,5; 0,5; 60,5)$, forneceu uma nova estimativa pontual, $\hat{C}_1 = 0,8755814$ que está mais próxima da unidade. Para melhorar o estimador, tal procedimento pode ser repetido assim que novos valores de X estiverem disponíveis, permitindo uma redução no desvio padrão do estimador.

A seguir descrevem-se os procedimentos inferenciais do índice para processos unilaterais C_U conforme Barriga, Ho & Borges (2003). O desenvolvimento será feito empregando procedimentos bayesianos. Semelhante ao procedimento do índice C (3.33), será utilizada uma distribuição Beta $(a; b)$ como uma distribuição *a priori* para γ_U . Seja X_1, \dots, X_n , uma amostra aleatória e a variável

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i > U \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $P(X_i > U) = \gamma_U$. Não é difícil de mostrar que a distribuição *a posteriori* de γ_U é também uma distribuição $Beta(n - t + b, a + t)$, com $t = \sum Y_i$. Usando uma função perda quadrática, o estimador bayesiano de C_U é dado por

$$\hat{C}_U = \frac{E[\Phi^{-1}(U)]}{3}.$$

$U \sim \text{Beta}(n+b-t, a+t)$. Valor aproximado de $E[\Phi^{-1}(U)]$ pode ser obtido por integração numérica ou pelo método de Monte Carlo, isto é,

$$\hat{E}[\Phi^{-1}(U)] \cong \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi^{-1}(U_i)$$

U_1, \dots, U_m , são valores de uma amostra suficientemente grande da distribuição $\text{Beta}(n+b-t, a+t)$.

Como ilustração, considere um processo de manufatura onde as quebras afetam muito a produtividade (principalmente se tiver mais do que três quebras semanais). Em condições estáveis, o número de quebras N (# de quebras por semana) segue uma distribuição Poisson de parâmetro igual a 1. Um conjunto de 36 interrupções foi coletado semanalmente e em nenhuma semana observou-se mais do que três quebras, isto é $t = \sum_{i=1}^n y_i = 0$. Com o auxílio de uma distribuição *a priori* Beta não informativa (1;1) obtém-se $\hat{C}_U \cong 0,76$, com base em uma amostra de 100 valores extraídos de $\Phi^{-1}(U)$, U uma distribuição $\text{Beta}(37, 1)$. Além disso, é possível avaliar a variabilidade do estimador por simulação. Por exemplo, com 50 amostras de 100 observações simuladas de $U \sim \text{Beta}(37, 1)$, observou-se uma média amostral de 0,77568 e um desvio padrão de 0,01574. Sob condições estáveis, $\gamma_U = P\{N > 4\} = 0,0036598$ que resulta um índice $C_U = 0,893979$. Para melhorar a estimativa anterior, novas observações devem ser adicionadas para atualizar a distribuição *a priori* $\text{Beta}(37, 1)$. Por exemplo, com a inclusão de doze novas observações de uma distribuição Poisson de parâmetro 1, especificamente $\{0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 0; 0; 1\}$, obtém-se uma estimativa mais precisa $\hat{C}_U = 0,81$ baseada numa amostra de 100 observações retirada de uma distribuição $\text{Beta}(49, 1)$. Note que o último resultado está mais próximo do valor esperado 0,89. Tal procedimento de atualização pode ser repetido sempre que novas observações estiverem disponíveis permitindo uma melhoria na estimativa de C_U .

Similar ao índice C , é possível determinar intervalo de confiança bayesiano (t_1, t_2) para C_U com confiança de $1 - \gamma$ utilizando a relação entre as distribuições *Beta* e *Fisher-Snedecor*, cujos limites são dados por

$$t_1 = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left(\frac{(n+b-t)f_1}{a+t+(n+b-t)f_1} \right)$$

e

$$t_2 = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left(\frac{(n+b-t)f_2}{a+t+(n+b-t)f_2} \right)$$

$(t_1 < t_2)$, f_1 e f_2 constantes tal que $P(F < f_1) = \gamma_1$ e $P(F > f_2) = \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ com $F \sim \text{Fisher-Snedecor}[2(n+b-t), 2(a+t)]$. Por exemplo, fixando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,01$; $a = b = 1$; $n = 36$ e $t = 0$ resultaram valores $f_1 = 0,2039$ e $f_2 = 99,4856$ que forneceram um intervalo bayesiano de confiança $(t_1, t_2) = (0,3966; 1,15283)$.

Similar ao índice C, o teste de demonstração que um processo alcançou um nível de capacidade também pode ser planejado no caso de processos unilaterais. Consiste em determinar um par (n, d) de inteiros, $d \leq n$, tal que se $Y_1 = y_1; \dots, Y_n = y_n$ são observados, pode-se considerar que o processo alcançou um índice de capacidade $C_U > c_0$ se $t = \sum_{i=1}^n y_i \leq d$; c_0 e c_1 , $0 \leq c_1 \leq c_0$, são respectivamente os valores desejáveis e aceitáveis de C_U num processo. O par (n, d) é escolhido tal que

$$\gamma = P(C > c_0 | T > d)$$

e

$$\delta = P(C \leq c_1 | T \leq d)$$

γ e δ são valores fixos. Se γ_U seguir uma distribuição *a priori* não informativa $Beta(1, 1)$ e para valores fixos de γ e δ , o par (n, d) satisfaz as seguintes equações:

$$\gamma = \frac{(n+1)\gamma_{s_0} - \sum_{t=0}^d [1 - B_I(1 - \gamma_{s_0}, n - t + 1, t + 1)]}{n - d} \quad (3.50)$$

e

$$\delta = \frac{\sum_{t=0}^d B_I(1 - \gamma_{s_1}, n - t + 1, t + 1)}{d + 1} \quad (3.51)$$

$\gamma_{s_i} = 1 - \Phi(3c_i)$, $i = 0, 1$. Como no caso do índice proposto em (3.33), para processos muito capazes, os procedimentos com $d = 0$ são interessantes e nestes casos as expressões (3.50) e (3.51) reduzem respectivamente, para:

$$\gamma = \frac{(n+1)\gamma_{s_0} + (1-\gamma_{s_0})^{n+1}}{n} \quad (3.52)$$

e

$$\delta = (1 - \gamma_{s_1})^{n+1}. \quad (3.53)$$

De (3.52) é possível determinar o tamanho da amostra,

$$n = \frac{\ln \delta}{\ln(1 - \gamma_{s_1})} - 1.$$

Se $c_0 = c_1 = 1$ com $\delta = 0,1$, um tamanho de amostra igual a 73 itens seria necessário de acordo com (3.52) para demonstrar a capacidade do processo (para o caso de $d = 0$). Se fosse escolhido $c_1 = 1,33$, o tamanho de amostra aumentaria para 69.664 itens conformes. Intuitivamente é razoável um grande número de itens conformes seja necessário para demonstrar a alta capacidade de um processo, obviamente este número pode ser alterado uma vez que ele foi obtido a partir de uma distribuição *a priori* não informativa e $d = 0$.

Novos índices de capacidade calibrados com C_p e C_{pk} associados à fração não conforme foram propostos. Procedimentos inferenciais usando métodos bayesianos foram desenvolvidos assumindo uma distribuição de Dirichlet como distribuições *a priori* para (γ_L, γ_U) e distribuições Beta, como distribuições *a priori* para π e γ_U . Para obter uma estimativa dos índices de capacidade propostos, o método de simulação foi empregado para obter as distribuições *a posteriori* de C_1 ; C e C_U . Note que o procedimento pode ser feito mesmo na ausência de itens não conforme na amostra. Outras distribuições além da Beta e Dirichlet poderiam ter sido escolhidas como distribuições *a priori*, porém estas distribuições têm a propriedade de serem distribuições conjugadas e isto facilita o processo de recalibração quando novas observações são tomadas. Na ausência de informação, o analista pode adotar uma atitude conservativa escolhendo como funções densidades a não informativa $Beta(1, 1)$ ou a não informativa de Jeffrey como distribuições *a priori*.

Escolher outras distribuições além da família Beta e Dirichlet certamente é uma opção, contudo dificultaria a obtenção das distribuições *a posteriori* e talvez seja necessário utilizar métodos numéricos como MCMC (Markov Chain Monte Carlo) (Gelman, 1997) para obter as distribuições *a posteriori* dos parâmetros de interesse.

4 *Confiabilidade: Contribuições em procedimentos inferenciais*

4.1 Introdução

Atualmente os fabricantes têm, entre outros, o desafio de desenvolver novos produtos num curto prazo usando tecnologias modernas e simultaneamente continuar a fazer esforços na melhoria da qualidade. Melhorar a confiabilidade de um produto é sem dúvida um importante aspecto num programa de qualidade. A viabilidade deste propósito depende de uma série de tarefas a ser executada para avaliar os aspectos relativos ao seu desempenho. Ou seja, dados sobre a confiabilidade do produto devem ser coletados e analisados (geralmente obtidos através de um experimento planejado para avaliar o desempenho de algum produto) e os resultados dessa análise usados no desenvolvimento de novos produtos ou na melhoria dos atuais.

Confiabilidade é definida como sendo a probabilidade de um bom funcionamento de um produto sob certas condições após um tempo fixo. Assim sendo, confiabilidade depende diretamente do tempo (geralmente coletam-se tempos de falha). Embora seja um assunto bastante vasto, neste capítulo estão descritas as contribuições de procedimentos inferenciais para algumas situações específicas:

- Um método bastante disseminado na análise de confiabilidade consiste em analisar dados de tempos de vida através de um modelo de regressão sob a suposição de alguma distribuição de probabilidade (por exemplo: Weibull, Log-normal, Gamma, etc). Os parâmetros dessas distribuições são geralmente estimados pelo método da máxima verossimilhança (MV) que podem apresentar vícios principalmente quando se utiliza uma pequena amostra ou quando o modelo incorpora algum esquema de censura. No entanto, em muitas situações, para fazer referência à confiabilidade outras quantidades são utilizadas, por exemplo, tempo médio de falha (*MTTF*) se o

item for não reparável, ou tempo médio entre falhas (MTBF) se o item for reparável ou percentis (t_p). Os estimadores de máxima verossimilhança dessas quantidades também apresentarão vício visto serem funções dos parâmetros da distribuição de probabilidade. Procedimentos de correção de vício dessas quantidades através de reamostragem (*bootstrap*) propostos por Ho & Silva (2005a, 2005b, 2005c) estão apresentados na seção 4.2.

- Na indústria de alimentos, uma medida empregada para garantir a qualidade de seus produtos é chamada prazo de prateleira [é definida como o tempo que o produto pode estar exposto na prateleira sem que o consumidor (além de ser adequado para o consumo humano) não perceba alterações sensoriais]. De modo geral, as indústrias de alimentos fazem um rigoroso controle microbiológico. Além disso, utilizam avaliações sensoriais como odor, sabor e aparência para avaliar a qualidade do seu produto. Em muitos casos, apesar da avaliação microbiológica considerar que o produto está adequado para o consumo humano, as avaliações sensoriais podem estar inadequadas. Freitas, Borges & Ho (2003, 2004) apresentaram um modelo para determinar o prazo de prateleira a partir de dados sensoriais. Os principais resultados estão apresentados na seção 4.3.
- Em algumas áreas de engenharia, a confiabilidade de um produto não está necessariamente associada ao tempo de falha, mas o quanto resiste a um carregamento. Por exemplo, na engenharia civil, quer saber qual a chance de um determinado material apresentar uma resistência superior a um dado patamar. Neste caso, a confiabilidade, denominada de *confiabilidade estrutural* é dada como função (em geral como razão ou diferença) da resistência e da solicitação (ambas variáveis aleatórias). Muitos autores já contribuíram com procedimentos inferências para as distribuições de probabilidade mais comuns (como Normal, Log-normal, Gamma, etc). No entanto, a situação mais comum adotada pelos pesquisadores é considerar a resistência e a solicitação numa única condição experimental. Ho (2004) e Ho & Pinheiro (2002) apresentaram procedimentos bayesianos para fazer inferências em confiabilidade estrutural cujos resultados estão apresentados na seção 4.4 considerando a possibilidade da confiabilidade estrutural se alterar em função de alguma variável estressante (como temperatura), semelhante aos modelos de regressão (de ensaios acelerados) nos modelos de confiabilidade de sistemas eletrônicos.

4.2 Correção de vício nos estimadores de percentis e do tempo médio de vida num modelo de regressão Weibull

Nos dias atuais, os fabricantes têm a difícil tarefa de desenvolver novos produtos em função da exigência do consumidor, num curto prazo usando tecnologias modernas e ao mesmo tempo continuar a fazer esforços na melhoria da qualidade. Sem dúvida, um importante aspecto num programa de qualidade é melhorar a confiabilidade de um produto. Para isto, uma seqüência de tarefas deve ser executada para avaliar os aspectos relativos ao seu desempenho (Nelson, 1982, 1990). Ou seja, experimentos devem ser planejados para fornecer dados de tempos de vida do produto, analisá-los e empregar os resultados dessa análise no desenvolvimento dos novos produtos e na melhoria dos atuais.

Uma metodologia consiste em analisar os dados do tempo de vida através de um modelo de regressão sob alguma distribuição de probabilidade (por exemplo: Weibull, Log-Normal, Gamma, etc). Geralmente os dados são coletados através de um experimento planejado para avaliar o desempenho de algum produto e a distribuição Weibull é uma das mais utilizadas para analisar o tempo de vida uma vez que assume diferentes formas devido à flexibilidade da sua função de taxa de falha.

Em estatística, confiabilidade é definida como a probabilidade de um sistema ou de um item funcionar após um tempo sob condições específicas. Deste modo, confiabilidade depende diretamente do tempo (tempo de falha), porém este conceito não é facilmente assimilado em algumas situações e para sanar esta dificuldade, confiabilidade pode ser reportada por um dos seguintes valores:

- tempo médio entre falhas ($MTBF$), se o item for reparável;
- tempo médio de falha ($MTTF$), se o item não é reparável;
- percentis (t_p) [($100 \times p$)-ésimo percentil do tempo de falha],

entre outros. Estimativas dos parâmetros das distribuições são geralmente obtidas pelo método da máxima verossimilhança (MV), no entanto, sabe-se que estes estimadores podem estar viciados principalmente quando se utilizar um pequeno tamanho de amostra e/ou quando o modelo de coleta incorpora algum esquema de censura. Conseqüentemente estimativas de $MTBF$, $MTTF$ e t_p também serão viciados uma vez que eles são funções

dos parâmetros das distribuições de probabilidade. [maiores detalhes, ver, Ferrari & Silva (1999); Colosimo, Silva & Cruz (2000)].

Contribuições sobre correção de vício em estimadores de máxima verossimilhança de parâmetros da Weibull são inúmeras [ver, Jacquelin (1993), Ross (1994) e Kahle (1996) como exemplos]. Apesar da relevância destas contribuições, a maioria dos artigos se referem a correção de vício dos parâmetros da distribuição para dados não censurados. Assim, a quantificação dos vícios do $MTTF$ e t_p continua desconhecida e estes valores ($MTTF$ e t_p) são guias para as empresas tomarem decisões na melhoria da confiabilidade. Além disso, geralmente poucas unidades são empregadas num experimento de confiabilidade e a presença de dados censurados é uma situação prática muito comum.

Ho & Silva (2005a, 2005b, 2005c) apresentaram um procedimento para corrigir vícios de estimadores de máxima verossimilhança de $MTTF$ e percentis t_p , $0 < p < 1$, num modelo de regressão Weibull, levando em consideração diferentes planejamentos, tipos de mecanismo de censuras (tipos I e II) e diferentes níveis de dados censurados através de procedimento de reamostragem *bootstrap* (Efron, 1979; Efron & Tibshirani, 1993)

Para tal foi considerado um modelo de regressão Weibull dado por

$$Y = \ln T = \mu(\mathbf{x}) + \sigma\varepsilon, \quad (4.1)$$

T é o tempo de falha, $Y = \ln T$ que segue uma distribuição com parâmetro de locação $\mu(\mathbf{x}) = \ln \alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\beta$, $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_p)$ e $\beta = (\beta_1 \dots \beta_p)'$; parâmetro de escala $\sigma = 1/\delta$; $\sigma > 0$ e ε segue uma distribuição de valores extremos e é independente das variáveis explicativas \mathbf{x} . Em cada estudo de confiabilidade, tais parâmetros devem ser estimados a partir de valores observados para determinar o modelo e tornar possível a estimação do $MTTF$ e dos percentis (t_p). O método da máxima verossimilhança é geralmente usado para estimar os parâmetros desconhecidos, uma vez que é possível incorporar dados censurados e apresenta propriedades que permitem ao usuário construir intervalos de confiança dos parâmetros de interesse.

Considere uma amostra aleatória de $\sum_{i=1}^m n_i = n$ itens a serem submetidos a um teste de falha; no i -ésimo nível da variável *stress* x , ($i = 1, 2, \dots, m$), n_i itens são submetidos a um teste de falha. No final do teste, $\sum_{i=1}^m r_i = r$ tempos de falha são observados; r_i e $(n_i - r_i)$ são respectivamente os tempos falha observados e valores censurados no i -ésimo nível da variável *stress* x . Se não existe mecanismo de falha, segue que $r_i = n_i$.

Modelos de regressão com uma única variável *stress* é um caso particular de (4.1), isto é $\mu(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ e o modelo pode ser expresso como

$$y_{ij} = \ln t_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \sigma \varepsilon_{ij}, \quad (4.2)$$

$y_{ij} = \ln t_{ij}$, t_{ij} é a j -ésima observação no i -ésimo nível da variável *stress* " x ", ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n_i$), onde t_{ij} segue uma distribuição Weibull com parâmetros $(\alpha(x_i); \delta)$ cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(t_{ij}|x_i) = \frac{\delta}{\alpha(x_i)} \left(\frac{t_{ij}}{\alpha(x_i)} \right)^{\delta-1} \exp \left[- \left(\frac{t_{ij}}{\alpha(x_i)} \right)^\delta \right]$$

ou equivalentemente, $y_i = \ln t_i$ segue uma distribuição de valores extremos de parâmetros $(\mu(x_i) = \ln[\alpha(x_i)]; \sigma)$ com $\sigma = 1/\delta$. Se $x = 1/\tau$, τ , a temperatura absoluta em graus Kelvin, então o modelo de regressão é conhecido como o modelo de Arrhenius-Weibull com $\beta_0 = \ln(A)$; $\beta_1 = E/k$, onde E é a energia de ativação; k , a constante de Boltzmann e A , uma constante.

Modelos de regressão Weibull podem ser usados para planejar ensaios acelerados. Em tais experimentos, os níveis da variável *stress* são escolhidos para acelerar a falha na unidade experimental e conseqüentemente diminuir o tempo do experimento. Dados obtidos deste modo, quando adequadamente planejados, modelados e analisados permitirão estimar parâmetros dos modelos, as quantidades $MTTF$ e t_p bem como extrapolar os resultados em condições do uso. Em tais experimentos, é comum usar a temperatura como variável *stress*.

Para planejar um teste de vida acelerado, três tipos de planejamento são geralmente usados: os planejamentos tradicionais, os ótimos e os de compromisso. O plano tradicional consiste em escolher três ou quatro níveis igualmente espaçados da variável *stress* e alocar o mesmo número de unidades experimentos em cada nível. No plano ótimo, geralmente, são escolhidos dois níveis tal que minimize alguma função objetiva. Os planos de compromisso (Meeker & Hahn, 1985) empregam três níveis: alto, intermediário e o baixo. O primeiro nível (alto) é escolhido de acordo com as experiências práticas. As unidades experimentais são alocadas na proporção 1:2:4 respectivamente para os níveis alto, intermediário e baixo. O argumento para esta alocação é a baixa precisão dos estimadores produzidos pelos planos tradicionais quando comparados com os de compromisso. Uma das razões do péssimo desempenho pode ser atribuída ao igual número de unidades

experimentais alocados em cada nível da variável *stress*.

Considere um conjunto de observações independentes (y_i, \mathbf{x}_i) , $i = 1, \dots, n$; y_i é o logaritmo do tempo de falha ou o logaritmo do tempo censurado e \mathbf{x}_i , o vetor de covariáveis. O logaritmo da função de verossimilhança de y_1, \dots, y_n é dado por

$$l(\beta, \sigma) = \ln L(\beta, \sigma) = -r \ln \sigma + \sum_{i \in D} \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i \beta}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i \beta}{\sigma} \right) \quad (4.3)$$

r é o número de tempos de falha observados e D denota o conjunto de índices dos tempos de falha observados. Estimadores de máxima verossimilhança de $(\beta; \sigma)$ são obtidos pela maximização direta de (4.3). As expressões das primeiras derivadas são:

$$\frac{\partial l(\beta, \sigma)}{\partial \beta_l} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in D} x_{il} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_{il} e^{z_i}, \quad l = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial l(\beta, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\sigma} \sum_{i \in D} z_i + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n z_i e^{z_i}$$

E as segundas derivadas são:

$$\frac{\partial^2 l(\beta, \sigma)}{\partial \beta_l \partial \beta_s} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_{il} x_{is} e^{z_i}, \quad l, s = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta, \sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i \in D} z_i - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i e^{z_i} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 e^{z_i}$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta, \sigma)}{\partial \beta_l \partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i \in D} x_{il} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_{il} e^{z_i} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_{il} z_i e^{z_i}, \quad l = 1, \dots, p.$$

onde $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i \beta) / \sigma$. Estimador de máxima verossimilhança pode ser obtida por métodos de otimização numérica como o conhecido algoritmo de Newton-Raphson. Usando a propriedade invariante, podem-se obter os estimadores de máxima verossimilhança de *MTTF* e (t_p) . Especificamente no caso de uma única covariável,

$$\widehat{MTTF}(x_i) = e^{\hat{\mu}(x_i)} \Gamma(1 + \hat{\sigma}) = \hat{\alpha}(x_i) \Gamma \left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}} \right), \quad (4.4)$$

$$\hat{t}_p(x_i) = \exp \{ \hat{\mu}(x_i) + \hat{\sigma} \ln[-\ln(1-p)] \} = \hat{\alpha}(x_i) [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\delta}}, \quad (4.5)$$

$\hat{\mu}(x_i) = \ln \hat{\alpha}(x_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$, $i = 1, \dots, m$; m é o número de níveis da variável *stress*. Note que para cada nível de x_i , diferentes estimativas para *MTTF* e t_p são obtidas. Contudo, em estudos de confiabilidade, o mais interessante é estimar estas quantidades na condição normal de uso. Tal extrapolação pode ser feita usando as seguintes expressões

$$\widehat{MTTF}(x_0) = e^{\hat{\mu}(x_0)} \Gamma(1 + \hat{\sigma}) = \hat{\alpha}(x_0) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}}\right), \quad (4.6)$$

e

$$\hat{t}_p(x_0) = \exp \{ \hat{\mu}(x_0) + \hat{\sigma} \ln[-\ln(1-p)] \} = \hat{\alpha}(x_0) [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\delta}}, \quad (4.7)$$

x_0 é o nível da variável *stress* na condição normal de uso. Usando resultados da teoria assintótica e método delta, é possível obter expressões do estimador da variância assintótica de (4.6) e (4.7). Seja $\hat{\phi}(x_0) = \widehat{MTTF}(x_0)$, sua variância é aproximadamente

$$\begin{aligned} \widehat{Var}[\hat{\phi}(x_0)] &\approx \widehat{Var}(\hat{\alpha}(x_0)) \left[\frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\alpha}(x_0)} \right]^2 \\ &\quad + 2\widehat{Cov}(\hat{\alpha}(x_0), \hat{\delta}) \frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\alpha}(x_0)} \frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\delta}} + \widehat{Var}(\hat{\delta}) \left[\frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\delta}} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\alpha}(x_0)} = \Gamma(1 + 1/\hat{\delta})$, $\frac{\partial \hat{\phi}(x_0)}{\partial \hat{\delta}} = -\left[\frac{\hat{\alpha}(x_0)}{\hat{\delta}^2}\right] \Gamma(1 + 1/\hat{\delta}) \psi(1 + 1/\hat{\delta})$; $\psi(z)$ denota a função digamma que pode ser aproximada por $\psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z}$ (Abramowitz & Stegun, 1965).

Similarmente seja $\hat{\phi}(x_0) = \ln \hat{t}_p(x_0)$, sua variância é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{Var}(\hat{\phi}(x_0)) &\approx \widehat{Var}(\hat{\beta}_0) + x_0^2 \widehat{Var}(\hat{\beta}_1) + \varepsilon_p^2 \widehat{Var}(\hat{\sigma}) + 2x_0 \widehat{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ &\quad + 2\varepsilon_p \widehat{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}) + 2\varepsilon_p x_0 \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\varepsilon_p = \ln[-\ln(1-p)]$; $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma} = 1/\hat{\delta}$ são respectivamente os estimadores dos parâmetros do modelo de regressão log-Weibull ou do modelo de regressão de valores extremos.

Redução de vício não é um assunto novo na teoria estatística. Desde da pioneira contribuição de Cox & Snell (1968) muitos outros estudos têm contribuído para mostrar a importância deste assunto na teoria estatística e em outras áreas de aplicação. O objetivo é aplicar esta metodologia em análise de confiabilidade. É sabido que experimentos em confiabilidade são realizados com poucas unidades experimentais (por ser caro ou levar muito tempo para obter valores suficientes) e este fato pode fornecer estimativas de $MTTF$ e t_p com baixa precisão. Seja $\hat{\theta}$, o estimador de máxima verossimilhança de θ , um parâmetro de interesse. De acordo com Cox & Hinkley (1974), o vício assintótico pode ser escrito como

$$E(\hat{\theta} - \theta) = B(\theta) = \frac{B_1(\theta)}{n} + \frac{B_2(\theta)}{n^2} + \dots, \quad (4.10)$$

onde $B_1(\theta)$ e $B_2(\theta)$ são funções de derivadas em relação θ do logaritmo de função de verossimilhança com uma única observação e n , o número de observações. Para um vetor de parâmetros, a extensão de (4.10) é análoga, ou seja, para cada parâmetro, uma expressão similar do seu vício pode ser obtida. Usualmente métodos básicos para redução do vício foram desenvolvidos para eliminar o termo $B_1(\theta)$ em (4.10) ou torná-lo desprezível.

Muitos métodos analíticos e procedimentos de reamostragem para reduzir o vício foram extensamente estudados. Ambos os métodos produzem bons resultados na redução de vício. Para aplicar o procedimento de reamostragem não é necessário ter as expressões analíticas de $B_1(\theta)$, e este aspecto pode ser a principal vantagem deste procedimento embora vá requerer o uso computacional intenso. Os métodos analíticos são mais precisos porém em muitos casos é muito difícil obter as expressões. Por estas razões, o procedimento de reamostragem descrito a seguir foi a alternativa escolhida por Ho & Silva (2005a, 2005b, 2005c) para remover vício nas estimativas de $MTTF$ e dos percentis no presente estudo (Efron, 1979; Efron & Tibshirani, 1993):

- Passo 1 – Considere um parâmetro de interesse $\theta = g(F)$ e seja $\hat{\theta} = g(\hat{F})$ sua estimativa “plug-in”, onde \hat{F} é função de distribuição empírica dos dados $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. O vício de $\hat{\theta}$ é então definido como $bias_F = E_F(\hat{\theta}) - \theta = E_F(\hat{\theta}) - g(F)$.
- Passo 2 – Extraia uma amostra *bootstrap* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ da função de distribuição empírica \hat{F} . Uma amostra *bootstrap* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ é uma amostra aleatória de tamanho n com reposição retirada do conjunto original $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Este procedimento é conhecido como procedimento *bootstrap* não paramétrico e a estimativa *bootstrap* para o vício de $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{bias}_{\hat{F}} = E_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*) - g(\hat{F}),$$

onde $E_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ é o valor esperado de $\hat{\theta}$ com base na função de distribuição empírica da amostra *bootstrap* e $g(\hat{F})$ é o estimador “plug-in” de θ . A estimativa *bootstrap* do vício pode ser obtida aproximadamente por procedimento de simulação de Monte Carlo.

- Passo 3 – Extrair B amostras independentes *bootstrap* $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$ da distribuição empírica \hat{F} .
- Passo 4 – Calcular as replicações *bootstrap* $\hat{\theta}_b^*$, para $b=1, \dots, B$ e aproxime o valor esperado $E_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ pela sua média amostral $\bar{\theta}_B^* = \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^*/B$. Este resultado é a estimativa *bootstrap* do parâmetro θ e o estimador *bootstrap* do erro padrão de $\hat{\theta}_b^*$ é dado por

$$s_B^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \bar{\theta}_B^*)^2} \quad (4.11)$$

- Passo 5 – O estimador *bootstrap* do vício de $\hat{\theta}$, (de ordem n^{-1}), baseado em B replicações é

$$\text{bias}_B = \bar{\theta}_B^* - \hat{\theta} \quad (4.12)$$

- Passo 6 – O estimador *bootstrap* corrigido (BCE) de θ é expresso como

$$\hat{\theta}_B = 2\hat{\theta} - \bar{\theta}_B^* \quad (4.13)$$

Este procedimento também pode ser usado quando os dados $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ incluem algum mecanismo de censura. Efron (1981) empregou o procedimento *bootstrap* para dados censurados à direita e discutiu como construir intervalos de confiança para os parâmetros de interesse. Este método apresentado em Efron (1981) foi aplicado para desenvolver estimativas de correção de vício no (*MTTF*) e (t_p) da distribuição Weibull.

Um estudo de simulação foi realizado por Ho & Silva (2005a, 2005b, 2005c) para comparar e calcular os vícios dos estimadores de $MTTF(x_0)$, $t_{0,05}(x_0)$ e $t_{0,10}(x_0)$ obtidos pelo método da máxima verossimilhança (MV) e pelo procedimento *bootstrap*.

Os parâmetros da simulação foram:

- $B=500$ reamostras *bootstrap*;
- Valores de $\beta_0 = \beta_1 = 2$; valores de $\delta = 0,75; 1,00$ e $1,50$;
- Tamanho de amostra:
 - Planos tradicionais $n = 30; 60; 90; 120; 150; 180$ e 210 ;
 - Planos de compromisso (4:2:1), $n = 35; 70; 105; 140; 175; 210$ e 245 ;
- Níveis das temperaturas em graus Celsius $X = 75^\circ\text{C}; 95^\circ\text{C}$ e 115°C ;
- Nível da temperatura em condições normal de uso $x_0 = 55^\circ\text{C}$;
- Com e sem presença de mecanismo de censura;
- Com mecanismo de censura:
 - Tipos de mecanismo de censura: tipo I e II;
 - Porcentagem de dados censurados: 10%, 25% e 50%.

Os passos usados no estudo da simulação foram:

- Passo 1: extrair uma amostra de tamanho n da distribuição Weibull $(\alpha(x), \delta)$.
- Passo 2: obter $(\hat{\alpha}(x) = \exp[\hat{\mu}(x)]; \hat{\delta} = \hat{\sigma}^{-1})$ pelo método MV.
- Passo 3: usar as expressões (4.6) e (4.7) para calcular as estimativas de MV de $\widehat{MTTF}(x_0)$, $\hat{t}_{0,05}(x_0)$ e $\hat{t}_{0,10}(x_0)$.
- Passo 4: extrair uma amostra com reposição de tamanho n da amostra original do passo 1.
- Passo 5: repetir passos 2 e 3 usando os dados do passo 4 e guardar os resultados.
- Passo 6: repetir B vezes os passos 4 e 5.
- Passo 7: calcular os estimadores *bootstrap* usando os resultados do passo 5 conforme a seguir:

$$\overline{MTTF}^B(x_0) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B MTTB^{(i)}(x_0);$$

$$\bar{t}_{0,05}^B(x_0) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B t_{0,05}^{(i)}(x_0);$$

$$\bar{t}_{0,10}^B(x_0) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B t_{0,10}^{(i)}(x_0).$$

- Passo 8: calcular os estimadores *bootstrap* do vício de $\widehat{MTTF}(x_0)$, $\hat{t}_{0,05}(x_0)$ e $\hat{t}_{0,10}(x_0)$ [usando expressão (4.12)] respectivamente dados por:

$$bias_{MTTF(x_0)} = \overline{MTTF^B}(x_0) - \widehat{MTTF}(x_0);$$

$$bias_{t_{0,05}(x_0)} = \bar{t}_{0,05}^B(x_0) - \hat{t}_{0,05}(x_0);$$

$$bias_{t_{0,10}(x_0)} = \bar{t}_{0,10}^B(x_0) - \hat{t}_{0,10}(x_0).$$

- Passo 9: Calcular os estimadores corrigidos (BCE) de $\widehat{MTTF}(x_0)$, $\hat{t}_{0,05}(x_0)$ e $\hat{t}_{0,10}(x_0)$ [usando expressão (4.13)] respectivamente dados por:

$$\widehat{MTTF}(x_0) = 2\widehat{MTTF}(x_0) - \overline{MTTF^B}(x_0);$$

$$\hat{t}_{0,05}^B(x_0) = 2\hat{t}_{0,05}(x_0) - \bar{t}_{0,05}^B(x_0);$$

$$\hat{t}_{0,10}^B(x_0) = 2\hat{t}_{0,10}(x_0) - \bar{t}_{0,10}^B(x_0).$$

- Passo 10: Repetir os passos 1-8, R vezes.
- Passo 11: Calcular os vícios relativos (RB) dos estimadores de MV conforme a seguir:

$$RB_{MTTF(x_0)} = \frac{\widehat{MTTF}(x_0)}{\widehat{MTTF}(x_0)}; \quad \widehat{MTTF}(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \widehat{MTTF}^{(i)}(x_0);$$

$$RB_{t_{0,05}(x_0)} = \frac{\bar{t}_{0,05}(x_0)}{\bar{t}_{0,05}(x_0)}; \quad \bar{t}_{0,05}(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{t}_{0,05}^{(i)}(x_0);$$

$$RB_{t_{0,10}(x_0)} = \frac{\bar{t}_{0,10}(x_0)}{\bar{t}_{0,10}(x_0)}; \quad \bar{t}_{0,10}(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{t}_{0,10}^{(i)}(x_0);$$

- Passo 12: Calcular os vícios relativos (RB) dos estimadores corrigidos conforme a seguir:

$$RB_{MTTF^B(x_0)} = \frac{\widehat{MTTF^B}(x_0)}{\widehat{MTTF^B}(x_0)}; \quad \widehat{MTTF^B}(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \widehat{MTTF^B}^{(i)}(x_0);$$

$$RB_{t_{0,05}^B(x_0)} = \frac{\bar{t}_{0,05}^B(x_0)}{\bar{t}_{0,05}^B(x_0)}; \quad \bar{t}_{0,05}^B(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{t}_{0,05}^B(i)(x_0);$$

$$RB_{t_{0,10}^B(x_0)} = \frac{\bar{t}_{0,10}^B(x_0)}{\bar{t}_{0,10}^B(x_0)}; \quad \bar{t}_{0,10}^B(x_0) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{t}_{0,10}^B(i)(x_0);$$

Um programa usando o software MATLAB foi escrito para realizar as simulações com $B=500$ e $R=10.000$. Um exemplo de resultados da simulação para analisar os vícios do $MTTF$ e dos percentis t_p , $p=5\%$ e 10% usando planos tradicionais e compromisso está na Tabela 4.1. Nesta tabela foram calculados os vícios relativos do estimador de MV e do procedimento *bootstrap* e comparados com os verdadeiros valores dos parâmetros. Pode se observar que os vícios do $MTTF$ e dos percentis t_p , $p=5\%$ e 10% apresentam considerável magnitude nos dois planos (tradicional e compromisso). De modo geral, o procedimento proposto para corrigir o vício é mais eficiente que o método de MV principalmente quando o plano de compromisso é usado ao invés do plano tradicional.

O próximo passo é avaliar o efeito do nível dos dados censurados nos vícios relativos em estimadores de MV e os corrigidos pelo *bootstrap* no $MTTF$ e nos percentis t_p com $p=5\%$ e 10% . As médias dos estimadores de MV e BCE do $MTTF$ e dos percentis t_p para $p=5\%$ e 10% versus o tamanho da amostra variando os níveis de dados censurados estão na Figura 4.1. Pode se observar que os vícios crescem à medida que o nível dos dados censurados aumenta (principalmente para 50% de dados censurados). O estimador corrigido proposto (BCE) foi eficiente para reduzir os vícios, uma vez que as médias das estimativas estão mais próximas dos verdadeiros valores de $MTTF$ e dos percentis t_p com $p=5\%$ e 10% . Na Figura 4.2, estão os valores do erro quadrático médio (raiz quadrada) versus o tamanho da amostra variando a percentagem de dados censurados. Pode ser observado que BCE fornece estimativas com menor variabilidade (menores valores de erro quadrático médio). Estes resultados foram obtidos com dados censurados tipo I e $\delta = 1,00$. Para outros valores de δ e com censura tipo II resultados similares foram observados e não serão replicados aqui.

Para analisar os efeitos do planejamento (tradicional versus compromisso), considere os resultados apresentados na Figura 4.3. Esta figura apresenta as médias das estimativas de MV e BCE do $MTTF$ e percentis 5% e 10% versus tamanho da amostra variando o tipo de planejamento. Na Figura 4.4, estão os gráficos da raiz quadrada do erro quadrático médio versus o tamanho da amostra variando o tipo de planejamento. Observa-se que usando o procedimento BCE, as estimativas do plano de compromisso apresentam melhor desempenho que os obtidos com o plano tradicional uma vez que seus valores médios estão mais próximos dos verdadeiros valores e com menores variabilidades. Em relação às estimativas obtidas com o método da MV, as alcançadas com o plano de compromisso ainda apresentam menor variabilidade. Figuras 4.3 e 4.4 apresentam os resultados com 25% de dados de censurados tipo I e $\delta=1$. Resultados similares foram encontrados com outros níveis de censura e outros valores de δ bem como para dados censurados tipo II.

Por este motivo, eles não serão reproduzidos aqui.

Quantidades como $MTTF$ e percentis t_p , $0 < p < 1$, são muito úteis em estudo de confiabilidade assim como também muito empregados em situações práticas. O desenvolvimento de estimadores não viciados destas quantidades pode ter um ganho substancial em estudos de confiabilidade de produtos. Tal ganho desempenha um importante papel no desenvolvimento de novos produtos uma vez que produz redução de custos relacionados no processo de desenvolvimento e experimentos de produtos desses produtos. Além disto, pode permitir quando possível, reduzir o tamanho de amostra em experimentos de tempo de vida. Conseqüentemente, implicará em menores custos e menos tempos em tais estudos. Os resultados deste estudo ilustram a importância da redução de vício em estimadores de MV. O foco do estudo foi propor a redução do vício nos estimadores do $MTTF$ e t_p nos modelos de regressão Weibull ao invés dos parâmetros da distribuição Weibull.

De acordo com os resultados da simulação, os estimadores de MV de $MTTF$ e dos percentis 5% e 10% apresentam vício de considerável magnitude. Neste sentido, a estimação destas quantidades deve ser feita com cuidado para evitar erros grosseiros, principalmente quando poucas unidades forem consideradas. Os vícios são maiores quando mecanismos de censura são considerados (tanto tipo I como tipo II). Um aumento no nível de dados censurados acarretará também um aumento no vício (os resultados da simulação com 50% de dados censurados apontam para essa direção). Por outro lado, o procedimento de reamostragem *bootstrap* é um instrumento eficiente para reduzir vício em estimadores de MV do $MTTF$ e percentis, melhorando suas estimativas, não apenas nos seus valores médios, como também na sua variabilidade.

A Tabela 4.2 foi construída para ajudar a planejar experimentos com tempo de vida. Ele fornece o menor tamanho de amostra usado para obter estimadores não viciados dos parâmetros de interesse no estudo de simulação. Note que isto será útil se o foco for obter estimativas não viciadas de $MTTF$ e percentis t_p . Por exemplo, uma amostra de duzentas unidades foi empregada para obter estimadores não viciados de MV de $t_{0,05}$ com 25% de dados censurados tipo I e $\delta=1,00$. Por outro lado, apenas uma amostra de cinquenta unidades foi necessária para obter estimadores não viciados do mesmo parâmetro empregando o procedimento *bootstrap*. Analisando os resultados da Tabela 4.2 pode se salientar que os experimentos com tempo de vida podem ser realizados com tamanho de amostras menores. É importante ressaltar que os resultados da simulação não estão associados com a variabilidade dos estimadores. Embora a Tabela 4.2 indique a possibilidade de reduzir o

tamanho de amostra em experimento com tempo de vida, é necessário avaliar o impacto desta redução na variabilidade nas estimativas dos parâmetros de interesse.

Tabela 4.1: Vício relativo do estimador de MV e do estimador corrigido (BCE) de $MTTF$ e dos quantis t_p , $p=5\%$ e 10% no modelo de regressão Weibull ($\beta_0 = \beta_1 = 2$ e sem mecanismos de censura)

	n	Tradicional						Compromisso (* = $BCE < 0$)						
		MTTF		$t_{0,05}$		$t_{0,10}$		MTTF		$t_{0,05}$		$t_{0,10}$		
		MV	BCE	MV	BCE	MV	BCE	n	MV	BCE	MV	BCE	MV	BCE
0,75	30	1,22	0,99	1,80	0,73	1,60	0,86	35	1,17	0,91	1,68	*	1,52	*
	60	1,10	1,000	1,35	0,96	1,28	0,98	70	1,09	1,01	1,29	0,97	1,23	0,99
	90	1,07	1,00	1,22	0,98	1,18	0,99	105	1,06	1,00	1,19	0,99	1,15	1,00
	120	1,05	1,00	1,16	0,99	1,13	1,00	140	1,05	1,00	1,14	1,00	1,11	1,00
	150	1,04	1,00	1,13	0,99	1,10	1,00	175	1,03	1,00	1,10	1,00	1,08	1,00
	180	1,03	1,00	1,10	0,99	1,08	0,99	210	1,03	1,00	1,09	1,00	1,07	1,00
	210	1,02	1,00	1,09	0,99	1,07	1,00	245	1,02	1,00	1,07	1,00	1,06	1,00
	1,00	30	1,11	1,01	1,45	0,97	1,34	1,00	35	1,11	1,01	1,39	0,97	1,30
60	1,05	0,99	1,19	0,98	1,14	0,99	70	1,05	1,00	1,18	1,00	1,14	1,00	
90	1,03	1,00	1,12	0,99	1,09	0,99	105	1,03	1,00	1,11	1,00	1,09	1,00	
120	1,03	1,00	1,10	1,00	1,08	1,00	140	1,02	1,00	1,08	1,00	1,06	1,00	
150	1,02	1,00	1,07	1,00	1,06	1,00	175	1,02	1,00	1,06	1,00	1,06	1,00	
180	1,02	1,00	1,07	1,00	1,05	1,00	210	1,02	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00	
210	1,01	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00	245	1,01	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00	
1,50	30	1,04	1,00	1,20	1,00	1,15	1,00	35	1,05	1,01	1,19	1,02	1,15	1,02
	60	1,02	1,00	1,10	1,00	1,07	1,00	70	1,02	1,00	1,09	1,00	1,07	1,00
	90	1,02	1,00	1,07	1,01	1,05	1,01	105	1,01	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00
	120	1,01	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00	140	1,01	1,00	1,05	1,00	1,04	1,00
	150	1,01	1,00	1,04	1,00	1,03	1,00	175	1,01	1,00	1,03	1,00	1,03	1,00
	180	1,01	1,00	1,03	1,00	1,02	1,00	210	1,01	1,00	1,03	1,00	1,02	1,00
	210	1,01	1,00	1,02	1,00	1,02	1,00	245	1,01	1,00	1,03	1,00	1,02	1,00

Tabela 4.2: Menor tamanho de amostra usado no estudo de simulação para obter estimadores não viciados para $MTTF$, $t_{0,05}$ e $t_{0,10}$ (planos tradicional e compromisso).

Plano	Censura	δ	MV	BCE	MV	BCE	MV	BCE		
Tradicional	Sem censura	0,75	150	30	> 210	60	> 210	60		
		1,00	90	30	> 210	30	210	30		
		1,50	30	30	150	30	120	30		
	Tipo I-10%	0,75	210	90	> 210	90	> 210	90		
			1,00	120	60	210	60	210	60	
			1,50	90	30	120	30	120	30	
		25%	0,75	> 210	120	> 210	120	> 210	90	
			1,00	150	90	> 210	60	210	60	
			1,50	90	60	120	60	120	60	
	50%	0,75	> 210	210	> 210	150	> 210	150		
			1,00	> 210	150	> 210	120	> 210	120	
			1,50	180	90	180	90	150	90	
		Tipo II-10%	0,75	150	90	> 210	90	> 210	60	
			1,00	90	60	> 210	60	180	60	
			1,50	30	60	120	60	90	60	
	25%	0,75	180	120	> 210	90	> 210	90		
			1,00	90	90	> 210	60	210	60	
			1,50	60	60	120	60	90	60	
		50%	0,75	> 210	> 210	> 210	120	> 210	120	
			1,00	210	180	> 210	90	> 210	90	
			1,50	90	120	150	90	120	90	
	Compromisso	Sem censura	0,75	175	70	> 245	70	> 245	70	
			1,00	105	35	> 245	35	210	35	
			1,50	70	35	175	35	105	35	
		Tipo I-10%	0,75	175	70	> 245	70	> 245	70	
				1,00	105	35	210	70	175	35
				1,50	70	35	105	35	105	35
25%			0,75	210	105	> 245	105	> 245	70	
			1,00	140	70	245	70	175	70	
			1,50	70	35	140	35	105	35	
50%		0,75	> 245	175	> 245	105	> 245	105		
			1,00	245	105	> 245	70	245	70	
			1,50	105	70	140	70	105	70	
		Tipo II-10%	0,75	140	70	> 245	70	245	70	
			1,00	70	35	245	35	175	35	
			1,50	35	35	105	35	70	35	
25%		0,75	140	105	> 245	70	> 245	70		
			1,00	70	70	245	70	175	70	
			1,50	35	70	105	35	105	35	
		50%	0,75	245	210	> 245	105	> 245	105	
			1,00	105	140	245	70	210	105	
			1,50	70	105	140	70	105	70	

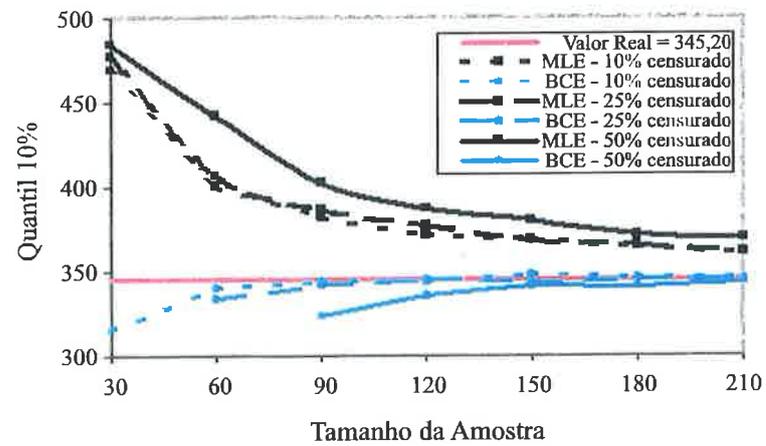
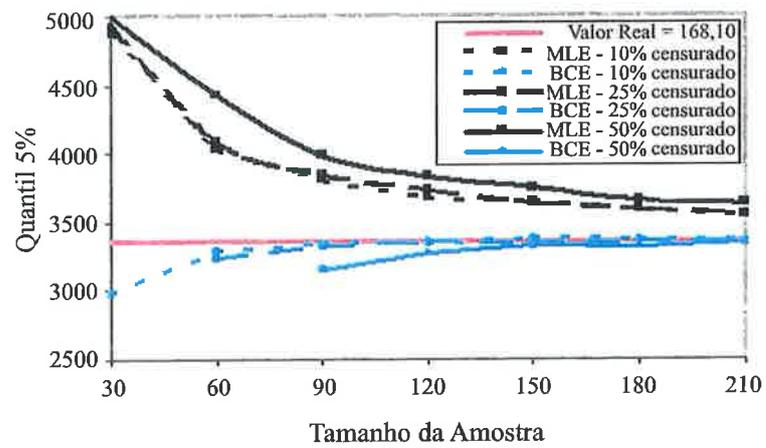
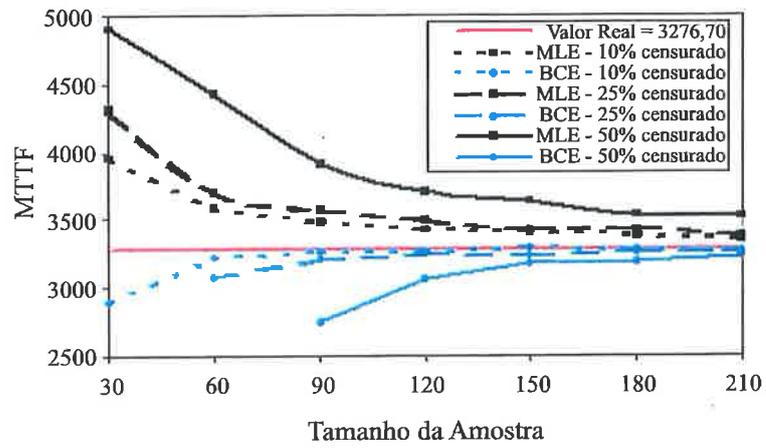


Figura 4.1: Valores médios das estimativas de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e dos percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e dados censurados tipo I).

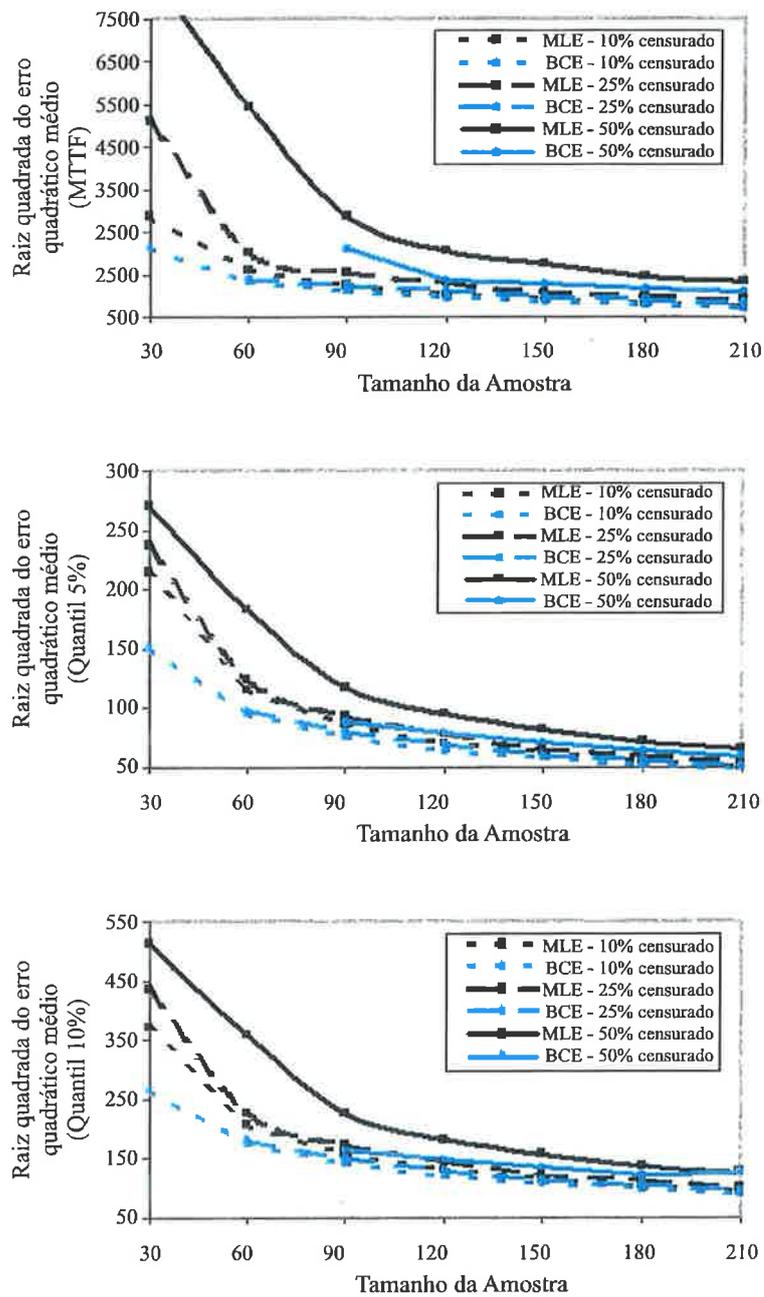


Figura 4.2: Raiz quadrada do erro quadrático médio dos estimadores de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e dados censurados tipo I).

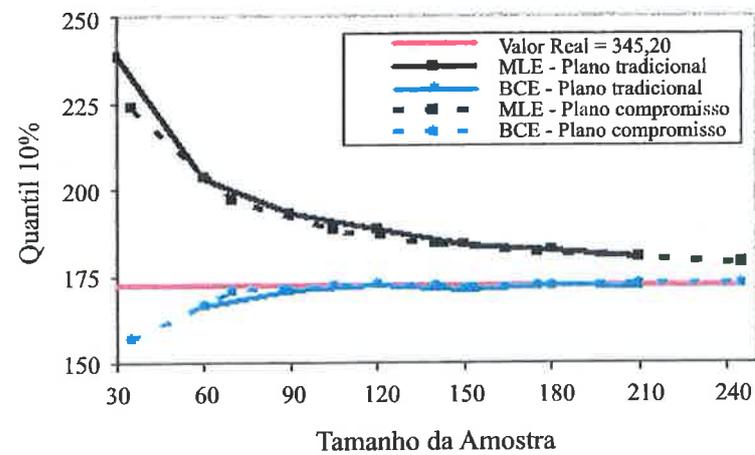
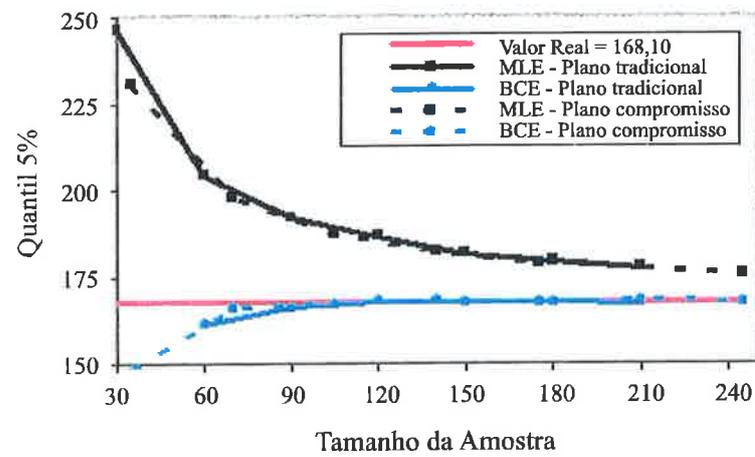
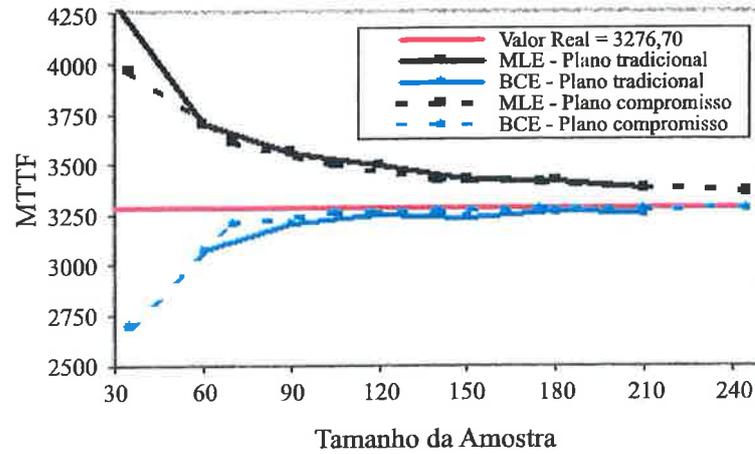


Figura 4.3: Valores médios das estimativas de MV (MLE) e BCE do *MTTF* e dos percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e 25% dados censurados tipo I).

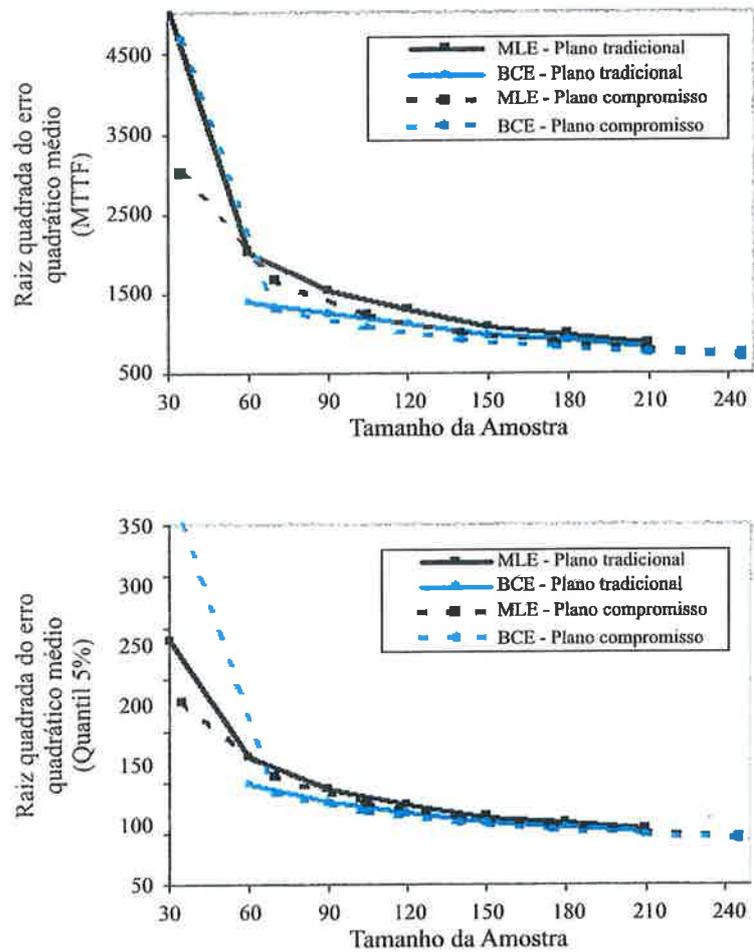


Figura 4.4: Raiz quadrada do erro quadrático médio dos estimadores de MV (MLE) e BCE do $MTTF$ e percentis a 5% e 10% ($\beta_0 = \beta_1 = 2$; $\delta = 1$ e 25% dados censurados tipo I).

4.3 Modelos de prazo de prateleira

Em produtos alimentícios, um dos aspectos mais difíceis de ser mensurado é a qualidade, em função da sua própria natureza. Os produtos alimentícios são suscetíveis à perda de nutrientes, podem estragar e/ou apresentar mudanças nos aspectos sensoriais como cor, sabor e odor. Conseqüentemente muitos estudos para verificar sua estabilidade são rotineiramente conduzidas pela indústria de alimentos como parte de programa do desenvolvimento do produto, ao incluir um novo ingrediente, ou na mudança ou troca de um específico ingrediente. Alguns estudos concentram-se na taxa de degradação e outros se propõem a estimar o prazo de prateleira, ou seja, estabelecer um prazo tal que o produto não seja impróprio para consumo humano. Entende-se por consumo impróprio quando o produto exibir alguma característica física, química, microbiológica ou característica sensorial inaceitáveis para o consumo regular. Na indústria, tenta-se desenvolver um produto com o máximo prazo de prateleira, consistente com os custos e que apresente um padrão que agrade aos consumidores e produtores. A determinação inadequada do prazo de prateleira pode gerar queixas decorrentes da insatisfação do consumidor e, como conseqüência pode afetar a aceitação e venda dos produtos e no pior dos casos, pode causar doenças ou má nutrição nos consumidores. Por estas razões, as indústrias são bastante cautelosas ao determinar um prazo de prateleira e armazenamento dos produtos alimentícios adequado.

Em experimentos para determinar o prazo de prateleira, uma quantidade determinada de produtos é estocada e periodicamente, em tempos predefinidos, uma amostra é selecionada dos estocados e submetidas à avaliação sensorial por painelistas treinados. Cada painalista julga um atributo do produto através de escala, por exemplo, uma escala de sete pontos, variando de zero a seis. Pela natureza do experimento, o ensaio é destrutivo e as unidades já avaliadas não podem mais ser estocadas para serem avaliadas posteriormente. O tempo de falha de um dado item é definido como sendo o tempo para obter um escore igual à nota de corte previamente definida pela empresa. Para a unidade avaliada num tempo predeterminado, uma das duas situações pode acontecer: o escore ou é menor ou igual à nota de corte ou maior que a nota de corte. No primeiro caso, o tempo de falha ocorreu entre o início do experimento e o tempo da atual avaliação. No último caso, o produto ainda está adequado ao consumo e a falha poderá ocorrer em algum tempo após a avaliação. Este tipo de procedimento gera dados censurados tanto à direita quanto à esquerda (Lawless, 1989; Meeker & Escobar, 1998).

Um razoável número de autores tem discutido e proposto diferentes métodos estatísticos para o problema de estimar prazo de prateleira com base em dados com as características

mencionadas. Uma discussão sobre este assunto foi escrita por Freitas, Borges & Ho (2003). Neste trabalho, os autores propuseram um modelo alternativo que incorpora as informações de dados censurados à direita e à esquerda, considerando um modelo Weibull para o tempo de falha. O modelo foi aplicado para um conjunto de dados reais, onde avaliações sensoriais foram feitas num produto desidratado, para determinar o prazo de prateleira, estocado em uma das seguintes condições:

- **Refrigeração (RE - BRE):** Unidades foram mantidas sob refrigeração aproximadamente a 4°C. Temperatura e umidade não foram controladas, mas anotadas diariamente. Foram calculadas médias semanais e usadas neste estudo. Estas unidades foram utilizadas como referências (padrão) durante todo o experimento;
- **Temperatura e umidade ambiente (R):** temperatura e umidade foram monitoradas, registradas continuamente por um equipamento e as médias semanais foram calculadas e usadas no estudo;
- **Câmara climática 1 (CH1):** temperatura e umidade mantidas constantes a 30°C e 80% respectivamente;
- **Câmara climática 2 (CH2):** temperatura controlada a 37°C. Umidade não controlada, mas coletada diariamente e médias semanais foram obtidas e usadas no estudo.

As duas últimas condições foram usadas para similar um ambiente mais agressivo de estocagem. Os pesquisadores esperavam registrar um tempo de vida menor nestas condições quando comparadas com as condições de estocagem em temperatura ambiente.

Quarenta e cinco pessoas foram treinadas para avaliar características sensoriais antes do início do principal experimento. As avaliações foram feitas semanalmente. Em cada semana, oito entre os treinados eram sorteados aleatoriamente para o teste. Embora a idéia fosse ter sempre o mesmo número de painelistas toda semana, isto não foi possível. Durante o período do experimento, pessoas selecionadas não compareceram ao experimento em algumas semanas, (devido a problemas pessoais ou doenças). Apesar destes problemas, o tamanho mínimo do painel foi de cinco pessoas.

Numa dada semana, unidades foram selecionadas de cada condição de estocagem. Para cada painalista era apresentada numa ordem aleatória três conjuntos de unidades para avaliação, a saber, [RE, BRE, R]; [RE, BRE, CH1] e [RE, BRE, CH2], onde RE, BRE

e R denotavam respectivamente “padrão”, “padrão cego” e “umidade e temperatura ambiente”; CHI denota “Câmara i” $i=1,2$. Dentro de um dado grupo, a unidade padrão (RE) era sempre a primeira a ser avaliada. Para as outras duas, (BRE, R, CH1 ou CH2), a ordem era aleatória. Todas as unidades eram descartadas após avaliação. As unidades chamadas “padrão” (RE) e “padrão cego” (BRE) foram sempre extraídas do grupo “refrigeração”. Estas unidades foram usadas apenas para checar as consistências dos julgamentos dos painelistas. Por consistência, entende-se que o painalista dê escores semelhantes às unidades experimentais do padrão cego (BRE) e do padrão (RE). Se as notas atribuídas pelos painelistas discordarem muito, a avaliação do painalista discordante deveria ser excluída do estudo. Felizmente, não foram encontradas inconsistências nesse conjunto de dados.

Foi solicitado aos painelistas que comparassem cada unidade teste (incluindo o padrão cego) com o padrão e dar um escore numa escala de sete pontos (0 a 6), individualmente, para cada atributo: 6 = “nenhuma diferença”; 5 = “muito pouca diferença”; 4 = “pouca diferença”; 3 = “diferente”; 2 = “grande diferença”; 1 = “muito grande diferença”; 0 = “total diferença”.

A empresa adotou um critério de falha: para cada atributo, foram consideradas inadequadas para consumo humano as unidades avaliadas com escores zero, um, dois ou três. O tempo de experimentação foi fixado em 51, 36 e 18 semanas respectivamente, nas condições de temperatura ambiente, câmara 1 e câmara 2. Neste experimento, três atributos foram avaliados pelos painelistas: odor, sabor e aparência.

Freitas, Borges & Ho (2003) desenvolveram um modelo, utilizando a seguinte notação: $N = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número de unidades extraídas de uma linha de produção e estocadas em alguma condição anteriormente descrita e τ_i ($i = 1, \dots, k$) são os tempos (fixos) escolhidos para avaliar os produtos. Por exemplo, no tempo τ_1 , n_1 unidades são retiradas do total de N e submetidas a uma avaliação sensorial por n_1 painelistas que atribuem, para cada atributo, um escore separadamente. Estas n_1 unidades são descartadas. No tempo τ_2 , n_2 unidades são selecionadas das $N - n_1$ restantes e avaliados por n_2 painelistas. Este processo se repete até o último tempo τ_k quando só sobraram n_k unidades para serem avaliadas; Z_{ij} é o escore dado a um atributo na j -ésima ($j = 1, \dots, n_i$) unidade avaliada no tempo τ_i ($i = 1, \dots, k$). E Y_{ij} uma variável definida como

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } Z_{ij} < 4 \\ 0, & \text{se } Z_{ij} \geq 4. \end{cases}$$

Segue que Y_{ij} é uma variável Bernouli com probabilidade p_i dada por $p_i = P(Y_{ij} = 1) = P(0 < T_{ij} \leq \tau_i)$, T_{ij} é o tempo de falha do j -ésimo item avaliado no tempo τ_i . Isto equivale a redefinir Y_{ij} como $Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < T_{ij} \leq \tau_i \\ 0, & \text{se } T_{ij} > \tau_i \end{cases}$.

Ou

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} = y_{ij}) &= P(0 < T_{ij} \leq \tau_i) = 1 - R(\tau_i), \text{ se } y_{ij} = 1 \\ &= P(T_{ij} > \tau_i) = R(\tau_i), \text{ se } y_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$R(\cdot)$ em (4.14) é a função de confiabilidade (Nelson, 1990). Freitas, Borges & Ho (2003) fizeram a suposição que o tempo de falha T_{ij} segue uma distribuição Weibull. Tradicionalmente, esta distribuição tem sido usada para modelar tempos de falha em sistemas eletrônicos e mecânicos, porém sua aplicação não está restrita apenas a estes. A mesma distribuição foi utilizada para modelar dados provenientes de experimentos envolvendo produtos alimentícios conforme afirma Gacula & Kubala (1975) (outras referências sobre este assunto, ver Gacula, 1975; Gacula & Singh, 1984).

A distribuição Weibull é função de dois parâmetros, especificamente para o tempo de falha T_{ij} da j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i (fixos), eles são dados por α_j e $\delta \geq 1$, definidos conforme a seguir

$$\alpha_j = \exp\{\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}\} = \exp\{X_j^0\beta_0 + X_j^1\beta_1 + \dots + X_j^q\beta_q\}, \quad (j = 1, 2, \dots, n_i)$$

e

$$\delta = \exp(\gamma), \quad \gamma \geq 0 \quad (4.15)$$

onde $X_j = (X_j^0, X_j^1, \dots, X_j^q)$ é um vetor $(q+1)$ das variáveis experimentais (fatores) relacionados ao j -ésima unidade avaliada no tempo τ_i . Supõe-se que elas foram medidas sem erro; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)'$ é um $(q+1)$ vetor de parâmetros associados às variáveis experimentais.

Sob uma distribuição Weibull de parâmetros α e δ , $R(t) = \exp\{-(\alpha t)^\delta\}$ e com a dicotomização proposta, Y_{ij} tem uma distribuição Bernoulli com probabilidade p_i dada em (4.14), a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ [\exp(-(\tau_i \alpha_j)^\delta)]^{1-y_{ij}} [1 - \exp(-(\tau_i \alpha_j)^\delta)]^{y_{ij}} \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ [\exp(-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma)]^{1-y_{ij}} [1 - \exp(-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma)]^{y_{ij}} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$\boldsymbol{\theta}^0 = (\boldsymbol{\beta}^0; \gamma)$. Estimativas de máxima verossimilhança (MV) podem ser obtidas pela maximização do logaritmo de (4.16). Esta maximização pode ser obtida pelos métodos numéricos, por exemplo, o conhecido método de Newton-Raphson. Nesse trabalho, será empregado um ajuste em problemas estatísticos, o chamado Score de Fisher (McCullagh & Nelder, 1989). Expressões das quantidades necessárias para este cálculo estão na Seção 4.A para os leitores interessados.

Se $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_q, \hat{\gamma})$ é o estimador de MV de $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma)$ dado um conjunto de variáveis experimentais $\mathbf{X}_j = (X_j^0, X_j^1, \dots, X_j^q)$,

- o estimador de MV do percentil $t_{p(j)}$ é dado por

$$\hat{t}_{p(j)} = \frac{1}{\hat{\alpha}_j} [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\delta}}, \hat{\alpha}_j = \exp\{\mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}\} \text{ e } \hat{\delta} = \exp\{\hat{\gamma}\}; \quad (4.17)$$

- e o estimador de MV da fração de defeitos em t_0 , $F_j(t_0)$, é dado por

$$\hat{F}_j(t_0) = 1 - \hat{R}_j(t_0) = 1 - \exp\{-t_0 e^{\mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}}\} e^{\hat{\gamma}} \quad (4.18)$$

Utilizando a propriedade de assintótica do estimador de MV é possível obter expressões de intervalo de confiança para fração de defeitos e dos percentis. Detalhes estão na Seção 4.A para leitores interessados.

Em Freitas, Borges & Ho, (2003) foi apresentado um modelo para prazo de prateleira incorporando os dados censurados à direita e à esquerda e usando a distribuição Weibull como base. O modelo foi aplicado a um conjunto de dados, em uma situação real prática.

As estimativas dos parâmetros foram obtidas e empregadas para planejar um estudo de simulação considerando apenas o plano de amostragem básico usado no experimento real.

Em Freitas, Borges & Ho, (2004) foi expandido o estudo de simulação realizado anteriormente feito em Freitas, Borges & Ho (2003). A mesma modelagem foi utilizada, porém para avaliar o efeito de alguns fatores listados a seguir na qualidade das estimativas (menor vício, melhor precisão, etc.) de prazo de prateleira:

- O número de variáveis experimentais (variáveis estressantes, por exemplo, condições de estocagem como temperatura, umidade e qualquer outra variável como tipo de embalagem, etc.) incluídas no estudo e o número de níveis de cada variável estressante;
- Tamanho total da amostra: total de unidades submetido ao teste;
- Proporção de alocação em cada condição experimental: por exemplo, quantas unidades devem ser armazenadas em cada nível de temperatura;
- O número de avaliações e com que frequência avaliações devem ser feitas: por exemplo, avaliações devem ser uma vez por semana durante vinte semanas ou duas vezes por semana por vinte semanas ou quinzenalmente por vinte e quatro semanas, etc.

Para medir a qualidade ou desempenho das estimativas obtidas nas situações simuladas, as seguintes medidas foram calculadas:

- O vício absoluto $B = \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \hat{u}_i \right) / N \right\} - (\text{valor real de } u)$, \hat{u}_i são as estimativas dos parâmetros para cada uma das N amostras geradas;
- O vício relativo $RB = \{(\text{valor absoluto de } B) / (\text{valor real de } u)\} \times 100\%$;
- O desvio padrão (DP) e o erro quadrático médio (EQM) das estimativas obtidas.

Foram executados dois estudos de simulação:

- Estudo de simulação #1 – Modelo Weibull sem variáveis experimentais;
- Estudo de simulação #2 – Modelo Weibull com variáveis experimentais.

O objetivo principal do estudo de simulação # 2 foi empregar um modelo tipo regressão para o parâmetro α como função das variáveis experimentais. Este tipo de teste consiste em deixar as unidades em condições estressantes mais elevadas que as condições normais para acelerar o aparecimento das falhas, ou seja, diminuir o tempo de vida. O objetivo dessa aceleração é obter um conjunto de dados mais rapidamente, o que, devidamente planejado e analisado pode fornecer informações do tempo de vida em condições normais de uso. Em outras palavras, os dados obtidos em condições aceleradas são modelados para estimar quantidades de interesse como percentis e frações de defeitos sob condição normal de uso. O estudo de simulação # 2 foi dividido em dois subcasos: uma variável e duas variáveis estressantes.

Em cada estudo, um conjunto de procedimentos foi adotado:

- Escolha do plano amostral. Entende-se por plano amostral, a duração do experimento em número de semanas (nw); o número de painelistas a ser alocado semanalmente (np) e o número total de unidades em teste ($N = nw \times np$) e o tipo alocação. Para simulações com variáveis estressantes as unidades foram alocadas de acordo com proporções 1:1:1 e 4:2:1 em cada nível da variável estressante (Conforme Tabela 4.4).

Os passos conduzidos na simulação foram:

- **Passo 1:** escolher os valores de parâmetros (α ; δ para o estudo #1; β_0 , β_1 e δ para o estudo # 2a; β_0 , β_1 , β_2 e δ para o estudo # 2b) e um plano amostral, extraídos respectivamente das Tabelas 4.3 e 4.4;
- **Passo 2:**
 - no caso sem variável estressante, gerar uma amostra aleatória de tamanho $N = nw \times np$ de falhas de tempo da Weibull (α ; δ); $\alpha = e^\beta$ e $\delta = e^\gamma$; valores de α e δ escolhidos no passo 1;
 - no caso com uma variável estressante, gerar três amostras, uma para cada uma das três Weibull (α , δ), $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 37\}$; $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 41\}$; $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 45\}$; $\delta = \exp\{\gamma\}$, com β_0 , β_1 e δ escolhidas no passo 1;
 - no caso com duas variáveis estressantes, gerar quatro amostras, uma para cada uma das quatro Weibull (α , δ), $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 37 + \beta_2 60\}$, $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 37 + \beta_2 80\}$, $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 45 + \beta_2 60\}$, $\alpha = \exp\{\beta_0 + \beta_1 45 + \beta_2 80\}$, $\delta = \exp\{\gamma\}$, com β_0 , β_1 , β_2 e δ escolhidas no passo 1.

Tabela 4.3: Valores dos parâmetros escolhidos nos estudos de simulação

<p>Estudo #1 Sem variável estressante</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\alpha = 0,020, 0,035$ e $0,065$ • $\delta = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$ e $2,0$.
<p>Estudo #2a Uma variável estressante</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura = $37^{\circ}\text{C}; 41^{\circ}\text{C}; 45^{\circ}\text{C}$; • $\beta_0 = -4,4; -4,7; -5,0$; • $\beta_1 = 0,03; 0,05; 0,07$; • $\delta = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$; • Os valores combinados vão produzir 45 cenários diferentes; • Condição de uso 28°C.
<p>Estudo #2b Duas variáveis estressantes</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura = $37^{\circ}\text{C}; 45^{\circ}\text{C}$; • Umidade = $60\%; 80\%$; sem interação; • $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 0,08 \\ 0,112 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -7,2 \\ 0,112 \\ 0,05 \end{pmatrix}$; • $\delta = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$; • Os valores dos parâmetros combinados irão produzir 40 cenários diferentes; • Condição de uso [$28^{\circ}\text{C}; 40\% \text{RU}$].

– Os tamanhos das amostras de cada nível da variável *stress* dependem da alocação do plano se 1:1:1 ou 4:2:1 ;

- **Passo 3:** dicotomizar os resultados e guardá-los sob a forma de um vetor (Y). A dicotomização é feita comparando cada tempo de falha (gerar de acordo com cada distribuição Weibull) com os tempos de avaliação. Se $t > \tau$ então $Y = 0$, caso contrário $Y = 1$ (a falha já ocorreu);
- **Passo 4:** calcular os estimadores de MV de parâmetros usando os dados dicotomizados conforme passo 3;

- **Passo 5:**
 - **no caso sem variável estressante**, estimar os percentis e frações de defeitos de interesse usando as estimativas obtidas no passo 4;
 - **no caso com variáveis estressantes**, utilizar as estimativas do passo 4 para achar as estimativas de percentis e fração de defeitos na condição normal de uso (isto é, estocagem a 28°C ou 28°C e 40% de umidade respectivamente para o caso com uma variável estressante e duas variáveis estressantes)
- **Passo 6:** guardar os valores calculados no passo 5;
- **Passo 7 :** gerar outra amostra aleatória como no passo 2 e repetir passos 3 a 6;
- **Passo 8:**
 - **no caso sem variável estressante**, os passos 2 a 7 devem ser repetidos até completar mil amostras. Com base nessas mil amostras, calcular para o percentil e a fração de defeito de interesse:
 - * a média dos mil valores estimadores;
 - * o desvio padrão empregando os mil valores;
 - * o vício absoluto (B); o vício relativo (RB) e o erro quadrático médio (MSE);
 - **no caso com variável estressante** repetir os passos 2 a 7 mil vezes para cada condição de *stress*. No fim da simulação, para cada percentil e fração de defeitos de interesse, ambos estimados na condição de uso, calcular também:
 - * a média dos mil valores estimadores;
 - * o desvio padrão empregando os mil valores;
 - * o vício absoluto (B); o vício relativo (RB) e o erro quadrático médio (MSE).

Esse estudo de simulação gerou muitos resultados que foram resumidos na forma de tabelas. No entanto elas não serão reproduzidas aqui para não tornar a leitura cansativa. De modo geral, no modelo sem variáveis experimentais é possível obter resultados mais precisos e com menor viés se o tempo de experimentação for menor, alocando mais painelistas em cada tempo de avaliação. Para o caso de uma variável, os vícios e os desvios padrão das estimativas dos percentis crescem à medida que aumenta o valor dos percentis a serem estimados. O mesmo padrão de comportamento foi observado para as frações de defeituosos. A alocação de unidades em cada nível de *stress* proposto por Meeker & Hahn (1985) (4:2:1) não apresentou melhores resultados que a usual alocação 1:1:1 do modelo

proposto. As simulações com duas variáveis também indicam que os vícios e os desvios dos percentis estimados crescem com o aumento dos percentis a serem estimados.

Tabela 4.4: Plano amostral

Estudo #1 Sem variável estressante				
Característica do plano amostral				
α	Plano amostral	N	nw	np
0,02	I	357	51	7
	II	714	51	14
	III	280	40	7
	IV	560	40	14
	V	504	36	14
	VI	224	32	7
	VII	448	32	14
	VIII	168	24	7
	IX	336	24	14
0,035	I	252	36	7
	II	504	36	14
	III	448	32	14
	IV	302	28	14
0,065	I	126	18	7
	II	252	18	14
	III	168	12	14

Estudo #2a Uma variável estressante							
Proporção de alocação							
		01:01:01			04:02:01		
		Níveis do stress			Níveis do stress		
		37°C	41°C	45°C	37°C	41°C	45°C
N=378	n	126	126	126	216	108	54
	np	7	7	7	12	6	3
	nw	18	18	18	18	18	18
N=756	n	252	252	252	432	216	108
	np	14	14	14	24	12	6
	nw	18	18	18	18	18	18

Estudo #2b Duas variáveis estressantes						
Proporção de alocação						
		01:01:01		04:02:01		
		Níveis do stress		Níveis do stress		
		37°C, 60%	45°C, 60%	37°C, 80%	45°C, 80%	
N=504	n	126	126	216	54	
	np	7	7	12	3	
	nw	18	18	18	18	
N=1008	n	252	252	432	108	
	np	14	14	24	6	
	nw	18	18	18	18	

4.4 Confiabilidade estrutural: procedimentos bayesianos

Quando um consumidor adquire um produto, um dos mais importantes fatores de decisão, na seleção entre vários produtos competidores, é a qualidade. Medidas de qualidade podem ser feitas de várias maneiras e uma das possibilidades é a partir da confiabilidade (quão freqüente o produto falha?). Muitos modelos probabilísticos têm sido usados para modelar confiabilidade em função do tempo. Contudo em muitas situações, não é conveniente adotar confiabilidade como função do tempo. Por exemplo, uma solicitação intensa aplicada a um sistema, durante um curto período de tempo, (pode ser alguma carga elétrica, térmica, química, mecânica) pode produzir falha (ou seja, a solicitação excedeu a resistência do sistema). Neste caso, confiabilidade é considerada estática e não como função do tempo.

Para quantificar a solicitação e a resistência, denotam-se respectivamente por X uma variável aleatória representando a resistência com média e variância μ_X, σ_X^2 e por Y , uma variável aleatória representando a solicitação com média e variância μ_Y, σ_Y^2 . Na literatura, a análise de resistência e solicitação é referenciada como **teoria de interferência**. Na engenharia, **margem de segurança (SM)** e **fator de segurança (SF)** são funções de solicitação e resistência e respectivamente definidas como $SM = X - Y$ e $SF = X/Y$ e o maior interesse está em calcular a **confiabilidade estrutural** de um sistema (p_r), ou seja

$$p_r = P(SM > 0) = P(X - Y > 0)$$

ou

$$p_r = P(SF > 1) = P(X/Y > 1).$$

[Mais detalhes ver Ebeling (1997)]. Expressões de p_r quando se supõe distribuições independentes para solicitação e resistência tais como Normal, Log-normal, Exponencial, Gamma or Weibull são conhecidas.

Não é difícil verificar que quando X e Y são variáveis aleatórias normalmente independentes, a probabilidade $p_r = P(SM > 0)$ é dada por

$$p_r = \Phi \left(\frac{(\mu_X - \mu_Y)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{0,5}} \right) \quad (4.19)$$

onde $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada da normal padrão. Similarmente se X e Y foram variáveis aleatórias log normais independentes, $p_r = P(SF > 1)$ é dada por

$$p_r = \Phi \left(\frac{[\ln \xi_{0,5}(X) - \ln \xi_{0,5}(Y)]}{(\sigma_{\ln X}^2 + \sigma_{\ln Y}^2)^{0,5}} \right) \quad (4.20)$$

onde $\xi_q(i)$ é o q -ésimo quantil de i , $i = X$ e Y ; σ_i , o desvio padrão de i , $i = \ln X, \ln Y$. Quando X e Y forem variáveis aleatórias Gamma independentes,

$$p_r = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} B(\gamma/(1+\gamma), a, b) \quad (4.21)$$

onde $\gamma = \mu_X/\mu_Y$, (a, γ_X) e (b, γ_Y) são respectivamente parâmetros de X e Y , $B(x, y, z)$ representa $P(U < x)$, onde U segue uma distribuição Beta de parâmetros (y, z) . Se $a = b = 1$, então X e Y são variáveis aleatórias exponenciais e a equação (4.21) se reduz

$$p_r = \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y + \lambda_X} = \frac{\mu_X}{\mu_X + \mu_Y} \quad (4.22)$$

onde λ_i é o parâmetro da distribuição exponencial i , $i = X$ e Y . Caso X e Y forem Weibull independentes, p_r não apresentam uma expressão analítica fechada e é dada por

$$p_r = P\{X > Y\} = 1 - \int_0^{\infty} e^{-z} \exp \left\{ - \left[\frac{\eta_X}{\eta_Y} z^{1/\beta_X} + \left(\frac{x}{\eta_Y} \right)^{\beta_Y} \right] \right\} dz \quad (4.23)$$

onde (β_i, η_i) são parâmetros de i , $i = X, Y$; $z = \left(\frac{x}{\eta_X} \right)^{\beta_X}$, que implica $dz = \frac{\beta_X}{\eta_X} \left(\frac{x}{\eta_X} \right)^{\beta_X - 1} dx$.

Algumas dificuldades desse assunto podem ser listadas:

- calcular valores teóricos da confiabilidade estrutural [isto é, calcular $P(SM > 0)$ ou $P(SF > 1)$];
- obter estimadores da confiabilidade estrutural;
- identificar a distribuição amostral e propriedade dos estimadores da confiabilidade

estrutural para tomar decisões através de inferência estatística.

Muitos autores têm feito esforços para propor estimativas para as equações (4.19)-(4.23). Quando a resistência e solicitação forem normalmente distribuídas, Church & Harris (1970) apresentam limites de confiança para (4.19) para o caso de μ_X , σ_X^2 serem desconhecidos e $\mu_Y=0$, $\sigma_Y^2 =1$.

Raiser & Guttman (1986) também apresentam limites de confiança para (4.19), quando os parâmetros μ_X , σ_X^2 e μ_Y , σ_Y^2 forem desconhecidos. Neste caso, são necessários valores de uma distribuição t-Student não central quando os tamanhos das amostras de X e Y forem diferentes. Quando os tamanhos de amostras forem iguais, o estimador de $K = \left(\frac{\mu_X - \mu_Y}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{0,5}} \right)$ segue assintoticamente uma distribuição normal e pode-se calcular o limite inferior aproximado do intervalo de confiança de $\Phi(K)$ uma vez que $\Phi(\cdot)$ é uma função estritamente monótona crescente de K .

Se as variáveis forem log-normalmente distribuídas, os procedimentos apresentados por Raiser & Guttman (1986) anteriormente mencionados, podem ser adaptados após uma transformação logarítmica nos dados.

E quando as variáveis forem exponencialmente distribuídas, pode-se citar a contribuição de Tong (1974) que propôs um estimador de mínima variância para (4.22). Kelley et al. (1976) também contribuíram para derivar a variância do estimador de Tong. Existem poucos estudos referentes às estimativas de (4.21) e (4.23). Mais detalhes ver Basu (1981) e McCool (1991), respectivamente.

Nesta seção, propõe-se apresentar métodos alternativos para analisar um conjunto de dados provenientes de estudo de interferência, estimar e fazer inferências referentes à confiabilidade estrutural.

Ho & Pinheiro (2002) obtiveram um intervalo de confiança conservativo para confiabilidade estrutural p_r empregando resultados obtidos por Ichikawa (1983).

Seja $p_f = P(X < Y)$, segundo Ichikawa (1983), um limitante superior de p_f é dado por

$$p_f \leq \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{(\mu_X - \mu_Y)^2 + \sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \alpha_f \quad (4.24)$$

Reiser (1985) fez uma modificação em (4.24) acrescentando uma condição para manter a desigualdade. Assim a desigualdade (4.24) se mantém se $\mu_X \geq \mu_Y$, caso contrário $p_f < 1$.

Manipulando (4.24), obtém-se um limitante inferior para a confiabilidade estrutural dada por

$$p_r = 1 - p_f > 1 - \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{(\mu_X - \mu_Y)^2 + \sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \Rightarrow p_r^{-1} < 1 + \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{(\mu_X - \mu_Y)^2} = 1 + CV_{(X-Y)}^2 = \alpha_r^{-1} \quad (4.25)$$

onde $CV(\cdot)$ denota o coeficiente de variação da variável aleatória $(X - Y)$, X e Y v.a. independentes. Esta proposta é interessante, pois α_r é um limitante inferior de confiabilidade estrutural (p_r) para qualquer distribuição. Estimativas de α_r podem ser obtidas e o limite inferior do intervalo de confiança α_r pode ser usado como um limite inferior de confiança conservativo para confiabilidade estrutural (p_r) como será visto a seguir.

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n amostras independentes respectivamente de X (resistência) e Y (solicitação); n , o tamanho de amostra de X e Y . Um estimador natural de $CV_{(X-Y)}$ é

$$\widehat{CV}_{(X-Y)} = \frac{(S_X^2 + S_Y^2)^{0,5}}{\bar{X} - \bar{Y}}$$

onde S_i é o desvio padrão amostral de i , $i = X$ e Y ; \bar{X} e \bar{Y} são as médias amostrais. Quando X e Y são v.a. independentes e normalmente distribuídas, $(X - Y)$ também segue uma distribuição normal e um intervalo de confiança aproximado do CV de uma distribuição normal é dado por

$$\widehat{CV}_{(X-Y)} \left[1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0,5 + \widehat{CV}_{(X-Y)}^2}{n}} \right]^{-1} \quad (4.26)$$

onde \widehat{CV} é uma estimativa de CV e $z_{\alpha/2}$ é uma constante tal que $P(Z < z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (ver Johnson, Kotz & Balakrishnan, 1994) e Z uma normal padrão. Manipulando (4.26) pode-se obter um intervalo de confiança aproximado para α_r dado por

$$\left(1 + \left\{ \widehat{CV} \left[1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{(0,5 + \widehat{CV}^2)/n} \right]^{-1} \right\}^2 \right)^{-1} \quad (4.27)$$

Como $\alpha_r < p_r$, o limite inferior de intervalo de confiança expresso em (4.27) pode ser usado como um limite inferior de intervalo de confiança de $p_r = P(SM > 0)$.

Estendendo estes resultados, quando X e Y forem log-normalmente distribuídos, $(\ln X - \ln Y)$ também é normalmente distribuída e o limite inferior de (4.27) pode ser usado como um limite inferior de intervalo de confiança conservativo de $p_r = P(\ln X - \ln Y > 0) = P(X/Y > 1) = P(SF > 1)$. Se os tamanhos de amostras de X e Y forem diferentes, uma alternativa é considerar $n = \min\{m, n\}$ para manter a propriedade conservativa de (4.27). Em situações práticas é recomendável tamanho de amostras similares para X e Y .

Com o objetivo de ilustrar o grau de cobertura do limite proposto, um estudo de simulação foi realizado por Ho & Pinheiro (2002). Distribuições normais independentes para resistência e solicitação foram simuladas considerando os seguintes parâmetros:

- $\mu_X=80$, $\sigma_X =22,4$ e $\mu_Y=20$, $\sigma_Y =10$ que corresponde a $p_r=0,99492$ e $\alpha_r=0,86903$;
- Tamanhos de amostras $n= 10, 50, 100, 200$ e 1000 foram extraídos;

Estimativa de $CV_{(X-Y)}$ e intervalo de confiança de α_r foram obtidos em cada amostra. Este procedimento foi replicado mil vezes. Tabela 4.5 mostra a frequência absoluta do grau de não cobertura dos intervalos de confiabilidade estrutural (p_r) e o limitante (α_r). De acordo com a Tabela 4.5, mesmo para pequeno tamanho de amostra, o limite inferior proposto em (4.27) pode ser usado uma vez que foi observado zero % de não cobertura.

A principal vantagem da proposição (4.27) é a facilidade de obter resultados bem como a possibilidade de aplicação tanto para tamanhos diferentes ou iguais de amostras de X e Y . No entanto quando solicitação ou resistência não for normalmente ou log-normalmente distribuídas o procedimento de inferência proposto em (4.27) não pode ser aplicada.

Tabela 4.5: Plano amostral

Tamanho de amostra	# < 0,99492	# < 0,86903
10	0	9
50	0	5
100	0	0
200	0	0
1000	0	0

Considere X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n amostras independentes de tamanho n de X e Y . Seja

$$W_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i > Y_i \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

uma v.a. Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a confiabilidade estrutural (p_r). Um estimador natural para p_r , neste caso, é o estimador empírico

$$p^* = \sum_{i=1}^n W_i/n$$

No entanto, em sistemas altamente confiáveis, é muito provável que p^* seja igual a um e procedimentos inferenciais utilizando métodos estatísticos clássicos não possam ser aplicados.

Uma alternativa é reescrever p_r como uma função de $h(\theta)$, onde θ é um vetor de parâmetros das distribuições da resistência e solicitação e inferência em p_r poderiam ser feitas através de $\tilde{p}_r = h(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ é, por exemplo, estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros desconhecidos. Porém, esta solução pode ser tornar inviável, pois a distribuição de \tilde{p}_r pode ser muito difícil de ser obtida. Por estas razões, procedimentos inferenciais de p_r sob uma perspectiva bayesiana foram apresentados por Ho & Pinheiro (2002). Na análise bayesiana, a incerteza de p_r pode ser descrita por uma distribuição Beta *a priori* de parâmetros a e b . Não é difícil mostrar que a distribuição *a posteriori* de $(p_r|s)$ também é uma distribuição Beta de parâmetros $(a + s)$ e $(n - s + b)$, $s = \sum_{i=1}^n W_i$ é o número de sucessos em n tentativas e um estimador bayesiano de p_r utilizando uma função perda quadrática é dada por

$$\hat{p}_r = \frac{a + s}{n + b + a} \quad (4.28)$$

(Mais detalhes ver Martz & Waller, 1991). Note que sob esta perspectiva, o procedimento inferencial pode ser conduzido mesmo quando $s = n$ e o intervalo de confiança bayesiano pode ser facilmente obtido.

Seja $[L, U]$ um intervalo de confiança bayesiano de p_r com nível de confiança $(1-\gamma)$ tal que $P(L < p_r < U | W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n) = 1 - \gamma$. Valores de L e U respectivamente dados por

$$L = \frac{f(\gamma)(a+s)}{(n-s+b) + (a+s)f(\gamma)}; \quad U = \frac{f(1-\gamma)(a+s)}{(n-s+b) + (a+s)f(1-\gamma)} \quad (4.29)$$

podem ser obtidos utilizando a conhecida relação entre as distribuições *Beta* e *Fisher – Snedecor* onde k é uma constante tal que $P[F < f(k)] = k$, $0 < k < 1$ e F é a distribuição de Fisher-Snedecor com graus de liberdade no numerador e denominador respectivamente dados por $[2(a+s); 2(n-s+b)]$. Quando intervalos $[L, U]$ são construídos satisfazendo $P(p_r < L) = P(p_r > U)$, eles são chamados de intervalos de confiança bayesiano simétricos de p_r .

Em alguns estudos de confiabilidade, é possível tomar um número razoável de amostras. Suponha que uma primeira amostra de tamanho n_1 forneceu s_1 sucessos que resulta um estimador bayesiano

$$\hat{p}_r^{(1)} = \frac{s_1 + a}{n_1 + a + b}$$

de acordo com expressão (4.28). Na análise bayesiana, a distribuição Beta a *posteriori* ($p_r | s_1$) pode ser usada como uma distribuição *a priori* para obter um novo estimador recalibrado de p_r quando uma segunda amostra de tamanho n_2 fosse extraída e s_2 sucessos fossem observados. Neste caso, a distribuição a *posteriori* de ($p_r | s_2$) é também uma distribuição Beta de parâmetros $[s_2 + a_1; n_2 - s_2 + b_1]$ com $a_1 = a + s_1$ e $b_1 = n_1 - s_1 + b$, a e b parâmetros da distribuição *a priori* de ($p_r | s_1$). O estimador recalibrado de p_r incluindo a nova informação é dado por

$$\hat{p}_r^{(2)} = \frac{s_1 + a_1}{n_1 + a_1 + b_1}.$$

Este ajuste torna o estimador bayesiano atualizado toda vez que uma nova amostra for extraída e, após j recalibrações, o estimador bayesiano de p_r , incorporando todas as informações, é dado por

$$\hat{p}_r^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^j s_i + a}{\sum_{i=1}^j n_i + b}. \quad (4.30)$$

Para ilustrar o procedimento de recalibração, um estudo de simulação foi realizado por Ho & Pinheiro (2002). Amostras de tamanhos iguais a cinco e dez foram extraídas duas mil

vezes de distribuições Normal, Exponencial, Gamma e Weibull, cujos parâmetros estão dispostos na Tabela 4.6. O valor de p_r da distribuição Weibull foi obtido por integração numérica e seu valor é aproximado. A estimativa de p_r da primeira amostra foi obtida utilizando uma distribuição *a priori* Beta não informativa, isto é, com $a = 1$ e $b = 1$. Para cada nova amostra, a confiabilidade p_r foi recalibrada e seu intervalo de confiança bayesiano com 95% de confiança foi obtido. Figura 4.5 ilustra os resultados destas simulações; dados extraídos de distribuições normais fornecem estimadores bayesianos estáveis após a centésima amostra; para outras distribuições a estabilidade é alcançada após a ducentésima amostra. Conforme esperado, a amplitude dos limites de confiança se estreita à medida que mais amostras forem extraídas.

Tabela 4.6: Parâmetros das distribuições simuladas

Distribuição	resistência(X)	E(X)	solicitação(Y)	E(Y)	p_r
Normal	$\mu = 80; \sigma=22,4$	80	$\mu = 20; \sigma=10$	20	0,99492
Exponencial	$\lambda_x=0,0125$	80	$\lambda_y=0,05$	20	0,8
Gamma	$a=80; \gamma_x=2$	160	$b=20; \gamma_y=2$	40	0,896
Weibull	$\eta_x=80; \beta_x=2$	70,9	$\eta_y=20; \beta_y=2$	17,7	$> 0,90$

Contudo, em muitas situações práticas é razoável que a resistência e/ou a solicitação se alterem em função de um vetor de variáveis estressantes $\mathbf{W}=(W_1, \dots, W_k)$. Por exemplo, se a variável W_1 , fosse temperatura; é razoável que um determinado material tenha sua resistência modificada se for submetida a diferentes condições de temperatura. E se a variável W_2 , fosse pressão, e material submetido a diferentes combinações de temperatura e pressão pode ter resistência e/ou solicitação alteradas, e como conseqüência, a confiabilidade estrutural (p_r) modificada, visto que ela é função da resistência e solicitação. Ou seja, propor um modelo de regressão para a confiabilidade estrutural (p_r) como função de variáveis estressantes \mathbf{W} e vetor de parâmetros (cujos componentes estão associadas às distribuições de probabilidade da solicitação e resistência) será proposta a seguir.

Ho (2004) apresentou procedimentos bayesianos para estimar a confiabilidade estrutural para uma particular situação com uma única variável estressante, por exemplo, a temperatura.

Suponha que amostras aleatórias de tamanho n_i de resistência e solicitação são coletadas de cada nível da variável estressante. O conjunto de dados de um experimento pode ser escrito como

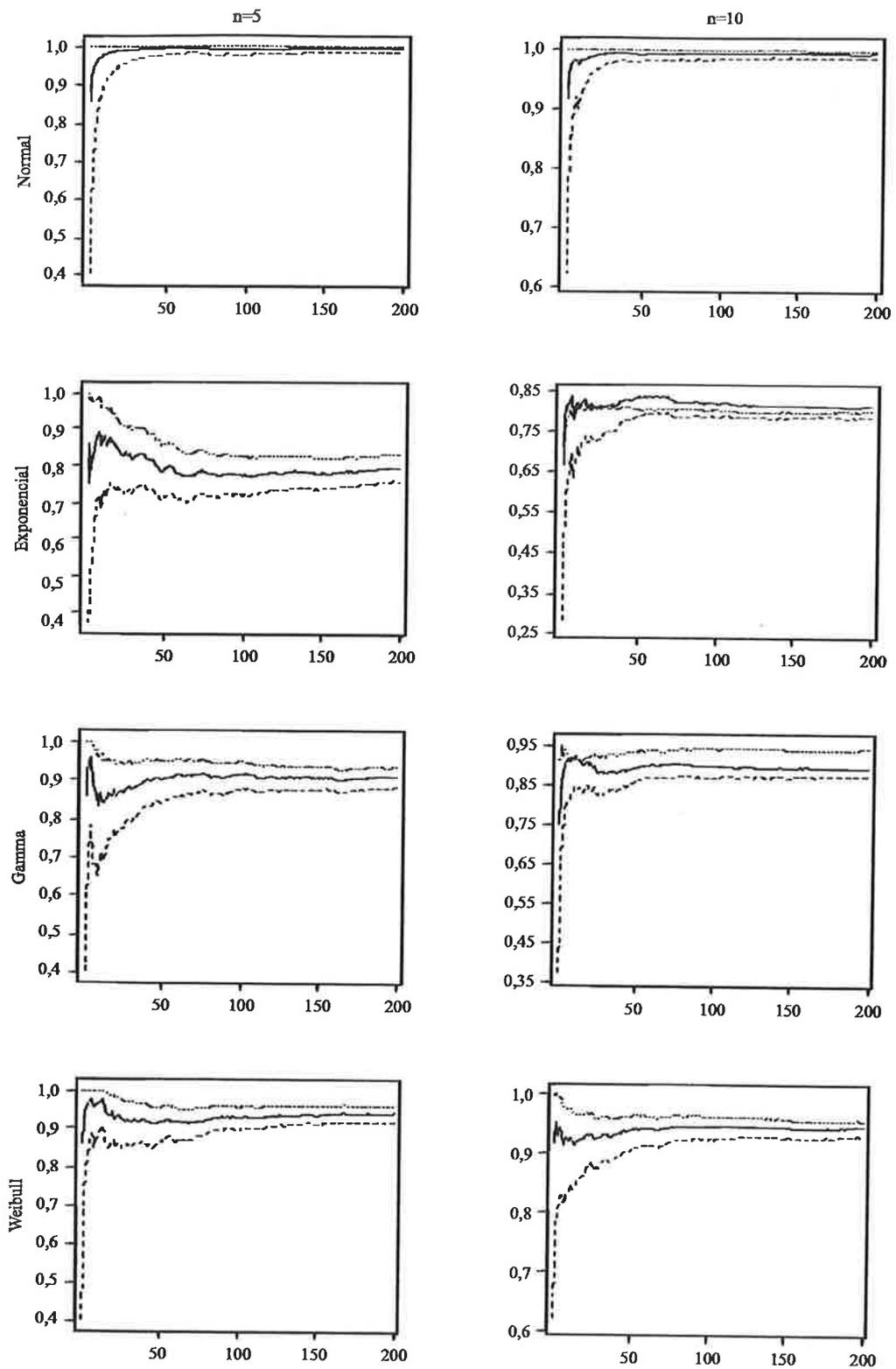


Figura 4.5: Estimativas bayesianas e limites de confiança de p_r .

$$D = \{X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}, \dots, X_{K1}, \dots, X_{Kn_K}, Y_{K1}, \dots, Y_{Kn_K}\}$$

X_{ij} e Y_{ij} são, respectivamente, j -ésima observação de resistência e solicitação na temperatura $W = w_i$, $i = 1, \dots, K$; $j = 1, \dots, n_i$. Similar ao modelo de regressão para dados de tempo de vida (apresentados nas seções 4.2 e 4.3), o problema consiste em estimar a confiabilidade estrutural para cada nível da variável estressante W , isto é, calcular $p_r(W = w_i)$, $i = 1, \dots, K$.

Semelhante aos ensaios acelerados de tempos de vida (das seções 4.2 e 4.3) um experimento de interferência também pode levar muito tempo ou ser muito caro para obter valores de resistência e solicitação, em condições normais de uso. De modo que os níveis das variáveis estressantes podem ser escolhidos de forma a acelerar a ocorrência da falha sendo o objetivo principal é estimar a confiabilidade estrutural em condições normais. Ou seja, fornecer uma estimativa para $p_r(W = W_{NEW})$, $W_{NEW} < \min(w_1, w_2, \dots, w_k)$, um nível da variável estressante que especifica a condição normal de uso.

Os procedimentos bayesianos para estimar o vetor de parâmetros θ , as confiabilidades estruturais $p_r(W)$, e $p_r(W_{NEW})$, foram obtidos para os seguintes modelos probabilísticos quando resistência e solicitação forem independentes e:

1. Ambas normalmente distribuídas;
2. Ambas exponencialmente distribuídas;
3. Resistência normalmente distribuída e solicitação exponencialmente distribuída.

A incerteza do vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P)$ é descrita por uma distribuição a priori $f(\theta)$. Dado um conjunto de dados D , pela teoria bayesiana, sabe-se que a distribuição a posteriori de $\theta|D$ é dada por

$$f(\theta|D) \propto L(D|\theta)f(\theta) \quad (4.31)$$

$L(D|\theta)$ é a função de verossimilhança. Em muitas situações é complicada obter a expressão analítica de (4.31). Assim métodos de simulação são empregados para obter valores aproximados de (4.31) através da distribuição a posteriori empírica $\hat{f}(\theta|D)$. E empregando a distribuição empírica a posteriori, distribuições marginais a posteriori do

parâmetro θ_i , $i = 1, \dots, P$ podem ser obtidas. Obviamente, que distribuições aproximadas *a posteriori* serão melhores quando maior for o tamanho das amostras. Desse modo, a partir das amostras aleatórias da distribuição *a posteriori* de $(\theta|\mathbf{D})$, uma distribuição aproximada *a posteriori* da confiabilidade estrutural $p_r(W = w_i, \theta|\mathbf{D})$, $i = 1, \dots, k$ pode ser obtido e os quantis empíricos $\xi_{p/2}$ e $\xi_{(1-p)/2}$ podem ser visto como intervalo de confiança ao nível de $(1-p)\%$. Como o primeiro momento é o estimador bayesiano sob uma perda quadrática, uma estimativa pontual da confiabilidade estrutural $p_r(W = w_i, \theta|\mathbf{D})$ pode ser obtida utilizando método de Monte Carlo, ou seja

$$[\hat{p}_r(w_i, \theta)|\mathbf{D}] = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B [\hat{p}_r(w_i, \theta^{(j)}|\mathbf{D})] \quad (4.32)$$

onde $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(B)}$ são as observações de $\hat{f}(\theta|\mathbf{D})$, $i = 1, \dots, k$.

Similarmente, numa situação de ensaios acelerados, uma estimativa da confiabilidade estrutural numa condição normal de uso $p_r(W = W_{NEW}, \theta|\mathbf{D})$ também pode ser obtida, ou seja,

$$[\hat{p}_r(W_{NEW}, \theta)|\mathbf{D}] = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B [\hat{p}_r(W_{NEW}, \theta^{(j)}|\mathbf{D})] \quad (4.33)$$

$\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(B)}$ são observações de $\hat{f}(\theta|\mathbf{D})$.

Considere que os valores esperados da resistência e solicitação são expressos como uma função (log) linear de um conjunto de variáveis estressantes, isto é, $(\ln)\mu_X = \mathbf{W}\beta$; $(\ln)\mu_Y = \mathbf{W}\gamma$, com $\mathbf{W}=(1, W_1, W_2, \dots, W_k)$ um vetor conhecido de variáveis estressantes; $\beta=(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ e $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)'$ são parâmetros desconhecidos. Quando X e Y são normais independentes, respectivamente para resistência e solicitação, não é difícil de obter

$$p_r(\mathbf{W}, \theta) = \Phi \left(\frac{\exp(\mathbf{W}\beta) - \exp(\mathbf{W}\gamma)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{0,5}} \right) \quad (4.34)$$

$\theta = (\beta, \gamma, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)$. No caso de uma única variável estressante, $X \sim N(\beta_0 + \beta_1 W, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\gamma_0 + \gamma_1 W, \sigma_Y^2)$ e os hiper-parâmetros $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ podem ser descritos pelas seguintes distribuições *a priori*:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &\sim N(b_0, \sigma_{0X}^2); & \beta_1 &\sim N(b_1, \sigma_{1X}^2); \\
\gamma_0 &\sim N(d_0, \sigma_{0Y}^2); & \gamma_1 &\sim N(d_1, \sigma_{1Y}^2); \\
\sigma_X^2 &\sim \text{Gamma}(a, b); & \sigma_Y^2 &\sim \text{Gamma}(c, d)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde $b_0, \sigma_{0X}^2, b_1, \sigma_{1X}^2, d_0, \sigma_{0Y}^2, d_1, \sigma_{1Y}^2, a, b, c$ e d são constantes. Nestas condições $\theta=(\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)$ e aplicando (4.31) a distribuição a *posteriori* de $\theta|D$ pode ser obtida pela sua distribuição empírica e estimativas de $(p_r(W = w_i, \theta|D, i = 1, \dots, k))$ podem ser obtidas usando (4.32).

Similarmente, aplicando (4.33) uma estimativa para $W = W_{NEW}$ também pode ser obtida. Se X e Y forem variáveis exponenciais independentes, então

$$p_r(\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta})}{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta}) + \exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})}. \tag{4.36}$$

No caso de uma única variável estressante, o vetor de parâmetros $\theta=(\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1)$ e as distribuições a *priori* em (4.35) podem ser usados para descrever os hiperparâmetros $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$. Estimativas de (4.36) podem ser obtidas da distribuição a *posteriori* de $\theta|D$. E no caso de X e Y forem independentes, porém com distribuições diferentes, por exemplo, a resistência (X) normalmente distribuída e a solicitação (Y), exponencialmente distribuída, a confiabilidade estrutural é dada por

$$\begin{aligned}
p_r(\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta}) &= 1 - \Phi\left(\frac{-\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta})}{\sigma_X}\right) \\
&\quad - \exp\left[\frac{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta})}{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})} + \frac{\sigma_X^2}{2[\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})]^2}\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{-\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta})}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

que pode ser aproximada por

$$p_r(\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta}) \approx 1 - \exp\left[\frac{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\beta})}{\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})} + \frac{\sigma_X^2}{2[\exp(\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma})]^2}\right] \tag{4.38}$$

se $\sigma_x \ll \min(\mu_x, \mu_y)$. No caso de única variável estressante, $\theta=(\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \sigma_X^2)$ e similar aos outros modelos, a distribuição a *posteriori* de (4.37) também pode ser obtida.

Para ilustrar o procedimento proposto, considere os dados publicados em Draper & Smith (1981)

X	120; 100; 80; 65; 60
Y	90; 70; 55; 45; 40
W	20; 30; 60; 120; 180

Suponha que X seja a resistência; Y, a solicitação e W como a variável estressante, a temperatura. Pelo teste de Anderson-Darling, níveis descritivos da ordem de 0,90 confirmam que as duas variáveis (X e Y) são normalmente distribuídas. Gráficos de dispersão dos valores de Y versus W e de X versus W indicam que é razoável assumir os modelos log-lineares: $(\ln)\mu_X = \mathbf{W}\beta$ e $(\ln)\mu_Y = \mathbf{W}\gamma$ para descrever a relação entre o valor médio das variáveis X e Y e a variável estressante W. Estimativas bayesianas dos parâmetros da regressão foram calculadas e estimativas de (4.34) foram obtidas usando o software *Winbugs* e dispostos na Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Estimativas bayesianas da confiabilidade estrutural - dados do Draper & Smith (1981)

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	I.C. a 95%
$p_r(W=20)$	0,863	0,153	0,434; 0,999
$p_r(W=30)$	0,863	0,147	0,459; 0,998
$p_r(W=60)$	0,857	0,133	0,505; 0,996
$p_r(W=120)$	0,817	0,153	0,425; 0,992
$p_r(W=180)$	0,743	0,230	0,186; 0,996

Da Tabela 4.7, é coerente aferir que a confiabilidade decresça à medida que a temperatura aumenta. No entanto como o verdadeiro valor dos parâmetros é desconhecido, fica difícil quantificar o viés. Assim, com essa finalidade, um estudo de simulação foi planejado por Ho (2004) com as seguintes suposições:

1. Valores esperados da resistência e solicitação são descritos por um modelo log-linear com uma única variável estressante, ou seja: $\mu_X = \exp(\beta_0 + \beta_1 W)$ e $\mu_Y = \exp(\gamma_0 + \gamma_1 W)$;
2. É razoável que os valores esperados tanto da resistência quanto da solicitação decresçam à medida que aumenta o nível da variável estressante;

3. Temperatura foi considerada como variável estressante.
4. Resistência (X) e solicitação (Y) são variáveis independentes;
5. As distribuições *a priori* dos hiperparâmetros usados na simulação são os mesmos listados em (4.35);
6. As estimativas bayesianas dos parâmetros relevantes foram obtidas utilizando o software Winbugs.
7. Níveis da variável estressante foram fixados em $W= 20, 30, 60, 120$ e 180 . De cada nível de W , apenas uma única observação da resistência (X) e solicitação (Y) foi simulada, totalizando uma amostra de tamanho $n = 5$ para imitar situações práticas quando não se dispõe grandes amostras;

Na Tabela 4.8 estão resumidas as estimativas bayesianas das confiabilidades estruturais.

Tabela 4.8: Estimativas bayesianas da confiabilidade estrutural no modelo de regressão.

Modelos	Parâmetros	Verdadeiro valor	Estimativa	Erro padrão	IC 95%	Vício relativo(%)
X e Y Normais	$p_r(W=20)$	0,96	0,982	0,062	0,812; 1,0	2,29
	$p_r(W=30)$	0,94	0,979	0,056	0,816; 1,0	4,15
	$p_r(W=60)$	0,87	0,917	0,112	0,592; 0,999	5,40
	$p_r(W=120)$	0,73	0,617	0,220	0,167; 0,955	15,48
	$p_r(W=180)$	0,63	0,436	0,223	0,066; 0,855	30,79
X e Y Exponenciais	$p_r(W=20)$	0,86	0,7338	0,166	0,332; 0,957	14,67
	$p_r(W=30)$	0,85	0,7349	0,155	0,361; 0,950	13,54
	$p_r(W=60)$	0,80	0,7339	0,132	0,423; 0,928	8,26
	$p_r(W=120)$	0,69	0,7091	0,154	0,345; 0,936	2,77
	$p_r(W=180)$	0,59	0,6655	0,229	0,151; 0,973	12,80
X normal; Y, exp,	$p_r(W=20)$	0,859	0,749	0,234	0,023; 0,996	12,80
	$p_r(W=30)$	0,857	0,741	0,226	0,024; 0,990	13,53
	$p_r(W=60)$	0,849	0,704	0,212	0,035; 0,967	17,08
	$p_r(W=120)$	0,799	0,619	0,248	0,025; 0,965	22,53
	$p_r(W=180)$	0,489	0,545	0,322	0,002; 0,994	11,45

Pode se observar que a maioria das estimativas da confiabilidade estrutural é menor do que o verdadeiro valor. Em termos práticos, principalmente em confiabilidade estrutural, é melhor ter resultados conservativos. Uma possível causa pode ser atribuída ao tamanho da amostra empregado na simulação. Apesar desta observação, os verdadeiros valores estão dentro dos intervalos de confiança. O vício relativo e a amplitude dos intervalos de confiança aumentam à medida que o nível da temperatura (W) cresce quando X e Y

forem normalmente distribuídas. Para outros modelos, não foi observado nenhum padrão para o vício relativo. Quando a resistência e solicitação seguem distribuições diferentes, pode-se observar que os métodos bayesianos fornecem intervalos de confiança mais largos, para qualquer nível da variável *stress*. Para níveis menores da variável *stress*, o método proposto fornece intervalos menos amplos.

Um segundo caso da simulação foi planejado por Ho (2004) para ilustrar o teste acelerado num estudo de interferência. As suposições 1 a 5 anteriormente listadas foram mantidas e as seguintes foram adicionadas:

- Os níveis da variável *stress* fixos em $W = 30, 60, 120$ e 180 uma vez que o mínimo de três níveis é requisitado para fins de extrapolação (Meeker & Escobar (1998));
- Uma amostra aleatória de $n_i=3$ foi selecionada de cada nível de W , totalizando uma amostra de 12 observações.
- $W_{NEW}=20$ foi escolhida como a condição normal de uso.

Na Tabela 4.9, estão as estimativas bayesianas da confiabilidade estrutural para a condição normal de uso, ou seja quando $W_{NEW}=20$.

Tabela 4.9: Estimativa bayesiana de confiabilidade estrutural na condição normal de uso (testes acelerados)

Modelos de X e Y	Verdadeiro valor	Estimativa	Erro padrão	IC 95%	Vício Relativo (%)
Normais	0,96	0,982	0,050	0,870; 1,000	2,29
Exponenciais	0,86	0,785	0,094	0,567; 0,923	8,72
X normal, Y exp,	0,97	0,931	0,094	0,657; 1,000	4,02

Pode se observar que as estimativas da confiabilidade estrutural estão próximas dos verdadeiros valores quando as duas variáveis são exponencialmente distribuídas.

Quando as variáveis são normalmente distribuídas, o método forneceu estimativas com menor variabilidade. Todos os verdadeiros valores estão nos intervalos de confiança.

As propostas de estimar a confiabilidade estrutural proposta nesta seção apresentam várias vertentes:

- O primeiro é um resultado conservativo que pode ser aplicado apenas quando a resistência e solicitação forem normalmente ou log-normalmente distribuídas. Ape-

sar desta restrição, os limites inferiores são facilmente obtidos pelo procedimento apresentado. Para outras distribuições, encontrar a distribuição amostral de (4.24) ainda é uma questão a ser resolvida.

- O segundo resultado é uma proposta para se obter uma estimativa da confiabilidade estrutural através do estimador empírico aplicando métodos bayesianos. Para isto, foi empregada como distribuição *a priori*, a distribuição Beta. As principais razões desta escolha são: a densidade Beta apresenta diferentes formas quando seus parâmetros a e b são apropriadamente escolhidos; ela é uma distribuição conjugada com o parâmetro p_r , ou seja, a distribuição *a posteriori* de p_r também terá distribuição Beta e esta propriedade tornar fácil obter estimadores bayesianos. Escolher outras distribuições como distribuição *a priori* certamente é uma alternativa. Nesse caso, a propriedade de conjugação não é mais válida e obter estimativas bayesianas e intervalos de confiança podem se tornar muito complicadas.
- Finalmente obter estimativas da confiabilidade estrutural na presença de variáveis estressantes através de métodos bayesianos. Esta situação é bastante comum em estudo de confiabilidade de sistema, quando a variável de interesse é a duração do equipamento (tempo de vida), embora este tipo de planejamento não tenha sido mencionada em estudos de confiabilidade estrutural. O mais atraente do método proposto é a facilidade em obter as estimativas e o respectivo intervalo de confiança. Sabe-se que experimentos de interferência envolvem altos custos, podem levar muito tempo para executar, além de dispor de poucas unidades para o experimento. Embora nos exemplos apresentados tenham sido empregadas amostras pequenas, o procedimento forneceu estimativas muito próximas do verdadeiro valor. Ainda que o método bayesiano tenha sido escolhido, o uso de métodos clássicos da estatística pode ser uma outra possibilidade, embora estimativas de baixa precisão possam ser obtidas, em função do pequeno tamanho da amostra.

4.A Modelo de Prazo de Prateleira: Expressões das primeiras e segundas derivadas.

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \left[e^{-(\tau_i \alpha_j)^\delta} \right]^{1-y_{ij}} \left[1 - e^{-(\tau_i \alpha_j)^\delta} \right]^{y_{ij}} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \left[e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} \right]^{1-y_{ij}} \left[1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} \right]^{y_{ij}} \right\}, \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\theta}' = (\boldsymbol{\beta}', \delta)$. As expressões das primeiras derivadas são:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{(q+2) \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} \end{bmatrix},$$

com:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_j' \left\{ -(1 - y_{ij}) e^{\gamma (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} + \frac{y_{ij} e^{\gamma (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma}}{\left[1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} \right]} \right\},$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{\gamma (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} \ln(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) \left[-(1 - y_{ij}) + \frac{y_{ij} e^{-\gamma (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma}}{\left(1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}) e^\gamma} \right)} \right] \right\}.$$

Os elementos da matriz de Informação de Fisher $I(\boldsymbol{\theta}) [(q+2) \times (q+2)]$ são dados por

$$I(\boldsymbol{\theta}) = E \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right] \right\}_{(q+2) \times (q+2)} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I'_{12} & I_{22} \end{bmatrix},$$

onde:

$$I_{11} = E \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \right] \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}'_j \mathbf{X}_j) \left\{ \frac{e^{2\gamma} e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}} (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{2e^\gamma}}{(1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}})} \right\},$$

$$I_{12} = E \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \gamma} \right] \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}'_j \left\{ \frac{e^{2\gamma} e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}} (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{2e^\gamma} \ln(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})}{(1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}})} \right\},$$

$$I_{22} = E \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \gamma^2} \right] \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \frac{e^{2\gamma} e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}} (\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{2e^\gamma} [\ln(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})]^2}{(1 - e^{-(\tau_i e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}})^{e^\gamma}})} \right\},$$

com \mathbf{I}_{11} , \mathbf{I}_{12} e \mathbf{I}_{22} com dimensões $(q+1) \times (q+1)$, $(q+1) \times 1$ e 1×1 respectivamente.

- O estimador de MV do percentil $t_{p(j)}$ é dado por

$$\hat{t}_{p(j)} = \frac{1}{\hat{\alpha}_j} [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{e^\gamma}},$$

$$\hat{\alpha} = \exp(\mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}) \text{ e } \hat{\delta} = \exp(\hat{\gamma}).$$

- Usando a teoria de grandes amostras (normalidade assintótica) e o método delta (Cox & Hinkley, 1974), é possível obter expressões do estimador da variância assintótica

$$\widehat{Var}(\hat{t}_{p(j)}) \doteq \mathbf{Z}' \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z} \big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

\mathbf{Z} é um vetor de dimensão $(q+2) \times 1$ dado por

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-(-\ln(1-p))^{\frac{1}{e^\gamma}}}{e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}} \right) \mathbf{X}'_j \\ \hline \frac{-[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{e^\gamma}} [e^{-\gamma} \ln(-\ln(1-p))]}{e^{\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}}} \end{bmatrix}.$$

Segue que um intervalo de confiança (assintótico) para $\hat{t}_{p(j)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
 UB &= \hat{t}_{p(j)} + (1,96) \left\{ \widehat{Var}(\hat{t}_{p(j)}) \right\}^{1/2}, \\
 LB &= \hat{t}_{p(j)} - (1,96) \left\{ \widehat{Var}(\hat{t}_{p(j)}) \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

- Equivalentemente, o estimador de MV de fração de defeitos em t_0 , $F_j(t_0)$, é dado por

$$\hat{F}_j(t_0) = 1 - \hat{R}_j(t_0) = 1 - e^{-(t_0 e^{\gamma} \mathbf{X}_j \hat{\beta}) e^{\hat{\phi}}}$$

- Novamente, usando propriedades assintóticas (Cox & Hinkley, 1974), um intervalo de confiança a 95% para a fração de defeitos $\hat{F}_j(t_0) = 1 - \hat{R}_j(t_0)$ é dado

$$\begin{aligned}
 UB &= 1 - \left\{ \hat{R}_j(t_0) \right\}^{\exp\{1,96 [\widehat{Var}(\hat{\phi})]^{1/2}\}}, \\
 LB &= 1 - \left\{ \hat{R}_j(t_0) \right\}^{\exp\{-1,96 [\widehat{Var}(\hat{\phi})]^{1/2}\}},
 \end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi} &= \ln(-\ln \hat{R}_j(t_0)), \\
 \widehat{Var}(\hat{\phi}) &\doteq Z' I^{-1}(\theta) Z \Big|_{\theta=\hat{\theta}},
 \end{aligned}$$

e Z é um vetor de dimensão $(q+2) \times 1$ dado por

$$Z = \begin{bmatrix} e^{\gamma} \mathbf{X}'_j \\ \text{-----} \\ e^{\gamma} \ln(t_0 e^{\mathbf{X}_j \beta}) \end{bmatrix}.$$

(Detalhes, ver Kalbfleisch & Prentice, 1992).

5 *Considerações finais*

Este texto de sistematização crítica contém contribuições em controle estatístico de qualidade, mais especificamente em controle estatístico de processo e confiabilidade. No que diz respeito ao controle estatístico de processo, as contribuições se concentraram em temas referentes ao controle *on-line* de processo (por variáveis e por atributos) e índices de capacidade. Em confiabilidade, as contribuições se concentraram em vários assuntos. Entre eles, a correção de vícios de estimadores de medidas importantes de decisão como o tempo médio de falha e percentis a 5% e 10%; construção de modelos de prazo de prateleira empregando dados sensoriais (com presença de dados censurados à direita e à esquerda) para alimentos desidratados, com base num modelo probabilístico; procedimentos inferenciais em confiabilidade estrutural na presença de fatores estressantes.

As contribuições aqui apresentadas são condizentes com as situações práticas, porém, não discutidas nos livros texto de controle estatístico de qualidade. Embora os resultados ora apresentados pareçam muito complicados, é plausível sua aplicabilidade. Um programa (empregando algum pacote estatístico ou planilhas excel) ou um algoritmo ou um fluxograma estavam sempre disponíveis aos usuários e faziam parte de anexos/apêndices da maioria das contribuições mencionadas. No entanto, sabe-se que quanto mais complexa for uma situação real, mais complicado deve ser o modelo, em função da introdução de novos elementos, restrições, funções, etc. O uso de modelos mais simples é geralmente a estratégia utilizada, no entanto os usuários podem estar incorrendo em tomar decisões errôneas.

A seguir algumas características em comum nas contribuições podem ser destacadas:

- O uso intenso de recursos computacionais possibilitou descobrir a melhor política através da busca direta (Capítulo 2) assim como usar simulação como ferramenta para suprir resultados analíticos inexistentes ou difíceis de serem obtidos (Capítulos 3 e 4). Esta foi uma grande evolução devido à disponibilidade de equipamentos de alta velocidade.

- A apresentação de procedimentos inferenciais bayesianos foi um dos pontos em comum nos Capítulos 3 e 4, além dos métodos da estatística clássica. Em muitos casos a dificuldade de obter a distribuição *a posteriori* ou o primeiro momento da distribuição *a posteriori* foi suprida pelas distribuições empíricas através das simulações.
- O uso do planejamento de ensaios de degradação em outras aplicações (prazo de prateleira e em confiabilidade estrutural) além do seu emprego usual em acelerar o surgimento de falhas em sistemas eletrônicos.

Além disso, outras contribuições relacionadas ao controle estatístico de processo estão em elaboração:

- O planejamento do controle *on-line* de processo apresentado foi feito com base somente em critérios econômicos e os parâmetros de interesse assumem apenas dois valores, cuja mudança ocorre segundo uma distribuição geométrica. A inclusão de critérios estatísticos em conjunto com critérios econômicos na determinação de planejamento do controle *on-line* e a criação de estados intermediários entre os dois valores dos parâmetros são aspectos mais condizentes e mais abrangentes com as situações práticas.
- Adaptar os planejamentos de controle *on-line* de processo (por variáveis e por atributos) para horizonte finito, visto que os apresentados são obtidos para horizonte infinito.
- Transferir todo o conhecimento de controle estatístico de processo em manufatura para outras áreas das ciências.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. New York: Dover, 1965.
- Adams, B. M.; Woodall, W. H. An Analysis of Taguchi's on-line Process Control Procedure Under a Random-Walk Model. **Technometrics**. Vol. 31, 401-413, 1989.
- Barriga, G. D. C. **Contribuições ao Estudo de Índice de Capacidade de Processo**. Tese de doutoramento. SP, EPUSP, Brasil, 2001.
- Barriga, G. D. C.; Ho, L. L.; Borges, W. S. Um Índice de Capacidade para Especificações Unilaterais. **Revista Produção**. São Paulo, Vol. 13 (1), 40-49, 2003.
- Basu, A. P. The Estimation of $P(X < Y)$ for Distributions Useful in Life Testing. **Naval Research Logistics**. Vol. 28 (3), 383-392, 1981.
- Bissel, A. F. How Reliable is your Capability Index? **Applied Statistics**. Vol. 39, 331-340, 1990.
- Borges, W.; Ho L. L. A Fraction Defective Capability Index. **Quality and Reliability Engineering International**. Vol. 17, 447-458, 2001.
- Borges, W. S.; Ho, L. L. On Sampling Distribution of Clement's Capability Index. **Communications In Statistics Serie B**. New York, Vol. 29 (1), 121-138, 2000.
- Borges, W, Ho, L. L.; Turnes, O. An Analysis of Taguchi's on-line Quality Monitoring Procedure for Attributes with Diagnosis Errors. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**. Vol. 17, 261-276, 2001.
- Box, G. E. P.; Tiao, G. C. **Bayesian Inference in Statistical Analysis**. New York, Addison-Wesley, 1973.
- Boyles, R. A. Process Capability with Asymmetric Tolerances. **Communications In Statistics – Serie B**. Vol. 23, 615-43, 1994.

- Bross, I. Misclassification in 2x2 Tables. **Biometrics**. Vol. 10, 478-486, 1954.
- Bulba E.; Ho, L. L. Capability Index for Relational Functions: Inferential Procedures. **Quality Engineering**. Vol. 18 (1), 69-78, 2006.
- Bulba, E. A.; Ho, L. L. Índices de Capacidade de Relações Funcionais Lineares e Não Lineares. **Revista Produção**. São Paulo, Vol. 14 (1), 06-11, 2004.
- Burke, J. R. et al. The Effect of Inspector Errors on the True Fraction Non-Conforming: An Industrial Experiment. **Quality Engineering**. Vol. 7 (3), 543-550, 1995.
- Chan, L. K.; Cheng, S.W.; Spiring, F. A. A New Measure of Process Capability: Cpm. **Journal of Quality Technology**. Vol. 20 (3), 162-173, 1988.
- Church, J. D.; Harris, B. Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships. **Technometrics**. Vol. 12, 49-54, 1970.
- Clements, J. A. Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions. **Quality Progress**, Vol.22, 95-100, 1989.
- Colosimo, E. A.; Silva, A. F.; Cruz, F. R. B. Bias Evaluation in the Proportional Hazards Model. **Journal of Statistical Computation and Simulation**. Vol. 65, 191-201, 2000.
- Constable, G. K.; Yen, V. Autocorrelation And Control. In: **ASQC Quality Congress Transactions**, 45th, Milwaukee, 1991. Proceedings. 375-82, 1991.
- Cox, D. R.; Hinkley, D. V. **Theoretical Statistics**. New York: Chapman And Hall, 1974.
- Cox, D. R.; Snell, E. J. A General Definition of Residuals (with Discussion). **Journal of the Royal Statistical Society**, serie B, Vol. 30, 248-275, 1968.
- Draper, N. R.; Smith, H. **Applied Regression Analysis**, Second Edition, New York: Wiley, 1981.
- Duncan, A. J. The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process. **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 51, 228-242, 1956.
- Ebeling, C. **An Introduction To Reliability And Maintainability Engineering**. McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1997.

- Efron, B. Bootstrap Methods: Another Look At The Jackknife. **The Annals Of Statistics**, Hayward, Vol. 7 (1), 1-26, 1979.
- Efron, B. Censored Data and the Bootstrap. **Journal of the American Statistical Association**, Vol.76, 312-319, 1981.
- Efron, B.; Tibshirani, R. Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy. **Statistical Science**, Hayward, Vol.1 (1), 54-77, 1986.
- Efron, B.; Tibshirani, R. **An Introduction To The Bootstrap**. New York, Chapman & Hall, 1993.
- Evans, M., Guttman, I., Haitovsky, Y.; Swartz, T. Bayesian Analysis of Binary Data Subject to Misclassification. In: **Bayesian Analysis In Statistics And Econometrics: Essays In Honor Of Arnold Zellner**, D. Berry, K. Chaloner, And J. Geweke (Eds), 66-77. New York: North Holland, 1996.
- Ferrari, S. L. P.; Silva, A. F. Analytical and Resampling-Based Bias Corrections for One-Parameter Models. **Brazilian Journal of Probability and Statistical**. Vol. 13 (1), 13-27, 1999.
- Flaig, J. J. A new approach to capability analysis. **Quality Engineering**. Vol. 9, 205-211, 1997.
- Franklin, L. A.; Wasserman. G.S. Bootstrap Lower Confidence Limits For Capability Indices. **Journal of Quality Technology**. Milwaukee, Vol. 24 (4), 196-210, 1992.
- Freitas, M. A.; Borges, W. S.; Ho, L. L. A Statistical Model for Shelf Life Estimation Using Sensory Evaluation Scores. **Communications in Statistics - Theory and Method**. Vol. 32 (8), 1559-1589, 2003.
- Freitas, M .A.; Borges, W. S.; Ho, L. L. Sample Plans Comparisons for Shelf Life Estimation Using Sensory Evaluation Scores. **International Journal of Quality and Reliability Management**. Vol. 21 (4), 439-466, 2004.
- Gaba, A. & Winkler, R.L. Implications of Errors in Survey Data: A Bayesian Model. **Management Science**. Vol. 38(7), 913-925, 1992.
- Gacula, M. C. Jr. The Design of Experiments for Shelf Life Study. **Journal of Food**

Science. Vol. 40, 399-403, 1975.

Gacula, M. C. Jr.; Kubala J. J. Models For Shelf Life Failures. **Journal of Food Science**. Vol. 40, 404-409, 1975.

Gacula, M. C. Jr.; Singh, J. **Statistical Methods in Food and Consumer Research**. New York: Academic Press, 1984.

Gamerman, D. **Markov Chain Monte Carlo Stochastic Simulation for Bayesian Inference**. Chapman and Hall, 1997.

Graybill, F. A.; Wang C. M. Confidence Intervals on Nonnegative Linear Combinations of Variances. **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 75 869-873, 1980.

Greenberg B. S.; Stokes S. L. Repetitive Testing in the Presence of Inspection Errors. **Technometrics**. Vol. 37 (1), 102-111, 1995.

Ho, L. L. Estimating Structural Reliability in the Presence of Covariates Via Bayesian Methods. **Economic Quality Control**. Würzburg, Vol. 19 (2), 185-196, 2004.

Ho, L. L. Statistical Inference from Boyle's Capability Index. **Economic Quality Control**, Würzburg, Vol.18 (1), 43-57, 2003.

Ho, L. L.; Borges, W. S.; Barriga, G. D. C. A Capability Index Calibrated to The Non-Conformance Probability. **Economic Quality Control**, Würzburg, Vol. 19 (1), 45-59, 2004.

Ho, L. L.; Medeiros, P. G; Borges, W. An Alternative Proposal to Monitor On-Line Quality for Variable. (**artigo submetido, 2005b**).

Ho, L. L.; Medeiros, P. G; Borges, W. Monitoring On-Line Quality for Variables: Taguchi's Procedure Versus One Based On Markov Chain. (**artigo sob revisão, 2005a**).

Ho L. L.; Pinheiro, A. S. P. Estimating Reliability: A Conservative Interval Under Classical Perspective and Bayesian Approach on Empirical Model. Third International Conference on Computer Simulation. In: **Risk Analysis and Hazard Mitigation**, Sintra, Portugal, 2002.

Ho, L. L.; Silva, A. F. Bias Correction for Mean Time to Failure and p-Quantiles in a Weibull Distribution by Bootstrap Procedure. **Communication in Statistics. Serie B**,

Vol. 34, 617-629, 2005a.

Ho, L. L.; Silva, A. F. Estimadores não Viciados para o Tempo Médio até a Falha e para os Percentis Obtidos pelo Modelo de Regressão Weibull. **Gestão & Produção**, São Carlos - SP, Vol. 12 (1), 97-105, 2005b.

Ho, L. L.; Silva, A. F. Unbiased Estimators for Mean Time to Failure and Percentiles in a Weibull Regression Model. (Aceito Para Publicação - **International Journal of Quality & Reliability Management**, 2005c).

Ho, L. L.; Singer, J. M. Generalized Least Squares Methods for Bivariate Poisson Regression. **Communications In Statistics Serie A**, Texas, Vol. 30 (2), 263-278, 2001.

Ho, L. L.; Singer, J. M. Regression Models for Bivariate Counts. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, ABE, São Paulo, Vol. 11 (2) 175-197, 1997.

Hsiang, T. C.; Taguchi, G. **A Tutorial on Quality Control and Assurance - The Taguchi Methods**. ASA Annual Meeting. Las Vegas N.V, 1985.

Ichikawa, M. New Formula for Upper Bound Probability of Failure. **Reliability Engineering**. Vol. 5 (3), 173-180, 1983.

Jacquelin, J. Generalization of the Method of Maximum Likelihood. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**. Vol. 28 (1), 65-72, 1993.

Johnson, N. L.; Kotz, S. Estimation from Binomial Data with Classifiers of Known and Unknown Imperfections. **Naval Research Logistics**. Vol. 35, 147-156, 1988.

Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. **Continuous Univariate Distributions**. Volume 1, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1994.

Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. **Continuous Univariate Distributions**. Volume 2. 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons, 1995.

Johnson N. L.; Kotz S.; Wu X. **Inspection Errors For Attributes In Quality Control**, Chapman & Hall, London, 1991.

Juran, J. M. **Quality Control Handbook**. New York: Mc-Graw Hill, 1974.

Kahle, W. Bartlett Corrections for the Weibull Distribution. **Metrika**, Vol. 43, 257-263,

1996.

Kalbfleisch, J. D.; Prentice, R.L. **The Statistical Analysis of Failure Time Data**. New York: Wiley, 1992.

Kane, V. E. Process Capability Indices, **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, Vol. 18 (1), 41-52, 1986.

Kelley, G. D.; Kelley, J.A.; Schucany, W.R. Efficient Estimation Of $P(Y < X)$ In The Exponential Case. **Technometrics**. Vol. 18, 359-360, 1976.

Kemp, A. W.; Kemp, C. D. A Simple Inspection Scheme for Two Types of Defect. **Journal of the Operational Research Society**, Vol. 39 (3), 311-315, 1988.

Kotz S.; Johnson N. L. Process Capability Indices – A Review, 1992-2000. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, Vol. 34 (1), 2-19, 2002.

Kotz S.; Johnson, N. L. **Process Capability Indices**, New York, Ed. Chapman & Hall, 1993.

Kotz S.; Lovelace, C. R. **Process Capability Indices in Theory and Practice**, London, Ed. Arnold, 1998.

Kragten, J. Calculating Standard Deviations and Confidence Intervals with a Universally Spreadsheet Technique, **The analyst**, Vol. 119, 2161-2165, 1994.

Lawless, J.F. **Statistical Models And Methods For Lifetime Data**. New York: Wiley, 1980.

Martz, H. F.; Waller, R.A. **Bayesian Reliability Analysis**. Krieger Publishing Company, Reprint Edition, Florida, 1991.

Matlab Release Notes. Version 6.5 Release 13. The Mathworks, Inc., 2003.

McColl, J. I. Inference On $P(Y < X)$ In The Weibull Case. **Communications In Statistics**. Serie B: Computation & Simulation. Vol. 20 (1), 129-148, 1991.

McCullagh, P.; Nelder, J. A. **Generalized Linear models**. New York: Wiley, 1989.

Meeker, W. Q.; Escobar, L. A. **Statistical Methods For Reliability Data**. New York: Wiley, 1998.

- Meeker, W. Q.; Hahn, G. J. **How To Plan An Accelerated Life Test**, Vol.10 - The ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques, Milwaukee,WI: Quality Press, 1985.
- Minton G. Verification Error In Single Sampling Inspection Plans For Processing Survey Data, **Journal of the American Statistical Association**. Vol. 67, 46-54, 1972.
- Montgomery, D.C. **Introduction To Statistical Quality Control**. John Wiley & Sons, Inc. 4th Ed, 2001.
- Montgomery, D.C.; Runger, G. C. **Statistical Process Control For The Chemical And Process Industries**. Kirkland, Statistical Productivity, 1994.
- Nayebpour M. R.; Woodall, W. H. An Analysis Of Taguchi's On-Line Quality Monitoring Procedure For Attributes. **Technometrics**. Vol. 35, 53-60, 1993.
- Nelson, W. **Applied Life Data Analysis**. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- Nelson, W. **Accelerated Testing, Statistical Methods, Test Plans and Data Analysis**. New York: Wiley, 1990.
- Pearn, W. L., Kotz, S.; Johnson, N. L. Distributional And Inferencial Of Properties Of Process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**. Vol. 24, 216-231, 1992.
- Quinino R. C.; Ho L. L. Repetitive Tests as an Economic Alternative Procedure to Control Attributes with Diagnosis Errors. **European Journal of Operation Research**. Vol. 155, 209-225, 2004.
- Quinino, R. C.; Ho, L. L.; Quintanilha, J. A. The Optimum Sample Size in Zero-Defect Sampling with Rectification Procedure in a Presence of Diagnosis Errors: an Application to Database with Spatial Data. (**Artigo submetido, 2005**)
- Quinino, R. C.; Ho, L. L.; Suyama, E. Design of Economically Optimal Zero-Defect Acceptance Sampling with Rectification when Diagnosis Errors are Present. **Pesquisa Operacional**, Brasil, Vol. 25 (1), 29-44, 2005.
- Quinino, R. C.; Ho, L. L.; Trindade, A. L. G. Repetitive Tests in Taguchi's On-Line Quality Monitoring Procedure for Attributes to Reduce the Impact of Diagnosis Errors. (**artigo em revisão, 2005**).
- Quintanilha, J. A.; Ho, L. L. Analyzing Wildfire Threat Counts Using a Negative Binomial

- Regression Model. (Aceito Para Publicação - **Envirometrics**,2005).
- Raiser B.; Guttman I. Statistical Inference for $\Pr(Y < X)$: the Normal Case. **Technometrics**. Vol. 28 (3), 253-257, 1986.
- Ramos, A. W.; Ho, L. L. Índices de Capacidade para Dados Auto-Correlacionados Via Bootstrap. **Revista Produção**, São Paulo, Vol. 13 (3), 50-62, 2003.
- Reiser, B. A Remark on Ichikawa's Upper Bound of Probability of Failure. **Reliability Engineering**, Vol. 13, 181-183, 1985.
- Rodriguez, R. N. Recent Developments In Process Capability Analysis. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, Vol. 24 (2), 176-187, 1992.
- Ross, R. Formulas to Describe the Bias and Standard Deviation of the ML-Estimated Weibull Shape Parameter. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, Vol. 1, 247-253, 1994.
- Ross, S. M. **Introduction to Probability Models**. San Diego; London; Burlington: Academic Press. 2000.
- Rubin, D.B. Using the Sir Algorithm to Simulate Posterior Distributions. In: **Bayesian Statistics 3** Edited by J.M. Bernardo, M.H. Degroot, D.V. Lindley and A.F.M. Smith. Oxford University Press, 1988.
- Satterthwaite, F. E. Synthesis of Variance, **Psychometrika**, Vol. 6 (5), 309-316, 1941.
- Spiring, F.; Leung, B.; Cheng, S.; Yeung, A. A Bibliography of Process Capability Papers, **Quality and Reliability Engineering International**, Vol. 19, 445-460, 2003.
- Srivastava, M. S. & Wu Y. A second order approximation on Taguchi's on-line control procedure. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, Vol.20, 2149-2168. 1991.
- Srivastava, M.S. & Wu Y. An improved version of Taguchi's on-line control procedure. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Vol.43, 133-45, 1995.
- Taguchi, G. Quality Engineering In Japan. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, Vol. 14, 2785-2801, 1985.
- Taguchi, G. **Quality evaluation for quality assurance**, American Supplier Institute,

Dearborn, MI, 1974.

Taguchi, G. **On Line Quality Control During Production**, Tokyo, Japanese Standard Association, 1981.

Taguchi G.; Elsayed E. A.; Hsiang T. **Quality Engineering in Production in Systems**. McGraw-Hill: New York, NY, 1989.

Tong, H. A Note on the Estimation of $\Pr(Y < X)$ in the Exponential Case. **Technometrics**. Vol. 16, 625-625, 1974.

Trindade, A. L. G.; Ho, L. L. & Quinino, R. C. Controle on-line de atributos com erro de classificação: uma abordagem econômica com classificação repetida, (**Artigo submetido, 2005**)

Turnes, O.; Ho, L. L. Monitoring process mean and process variance using Collani's T_0^2 statistic. **Economic Quality Control**, Wurzburg, Vol. 20 (2), 223-239, 2005.

Turnes, O.; Ho, L. L. Effect of Process Variability on the Efficient of X-Bar Control Chart Designs. **Student**, Neuchatel, Vol. 5 (2), 97-112, 2004.

Turnes, O.; Ho, L. L.; Imana, C. R. Comparison of Semi-Economic X-Bar and X-Bar-R Control Charts for Non-Ageing and Ageing Process. **Economic Quality Control**, Wurzburg, Vol. 17 (1), 99-112, 2002.

Turnes, O.; Ho, L. L.; Imana, C. R. Planejamento Econômico de Gráficos X-Barra e R para Processos Regenerativos e Não Regenerativos. **Gestão & Produção**, São Paulo, Vol. 11 (1), 91-100, 2004.

Wang, C.M.; Lan, C. T. Confidence Limits for Proportion of Conformance. **Journal of Quality Technology**. Vol. 28 (4), 439-45, 1996.

Winbugs – Version 1.3 <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs>, 2000

Zhang, N. F. Estimating Process Capability Indices for Autocorrelated Processes. **Proceedings of the Section on Quality and Productivity**, Alexandria, 49-54, 1996.