A Sintaxe do desenho (Figuras planas)

Claudio Z. Mammana

São Paulo, 1999



SBI-IFUSP



Monografia apresentada para o Concurso de Livre-Docência junto ao Departamento de Física Nuclear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo - 2° período/99 - disciplina FNC-224 "Síntese e Aplicações de Processadores Digitais".

Índice

1	0 0	Computador e o desenho	1
	1.1	As artes gráficas	1
	1.2	Pintura e desenho	3
	1.3	Ótica e geometria	4
	1.4	Desenho técnico	6
	1.5	O computador como desenhista	6
	1.6	A estrutura de um desenho	9
	1.7	Organização deste trabalho	10
I	A I	Localização de pontos	15
2	Rég	gua e compasso	19
	2.1	Localização de pontos	
	2.2	Os Ancestrais da Régua e do Compasso	
	2.3	Construções geométricas	
	2.4	As regras do jogo	

ii		©1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana
	2.5	Outros instrumentos para localizar pontos
3	Pon	tos notáveis do triângulo 31
	3. 1	Baricentro e medianas
	3.2	Circuncentro e mediatrizes
	3.3	Ortocentro e alturas
	3.4	Incentro e bissetrizes
4	ОΡ	ixel 39
	4.1	Reticulação do plano
	4.2	Localização de pontos no plano
	4.3	Pixel
5	Núr	neros complexos 47
	5.1	Álgebra das operações geométricas 48
		5.1.1 Tabuada
		5.1.2 As quatro operações
		5.1.3 Propriedades algébricas dos números complexos 57
	5.2	Problemas geométricos
		5.2.1 Rotação em torno da origem
		5.2.2 Centro fora da origem
		5.2.3 Interpolação
	5.3	Raízes complexas de um polinômio 63

67

ii

6 Geometria analítica

©) 1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana						
	6.1	Interseções					
		6.1.1 Duas retas	69				
		6.1.2 Uma reta e uma circunferência	71				
		6.1.3 Duas circunferências	71				
	6.2	Pontos Notáveis do triângulo	74				
		6.2.1 Circuncentro	74				
		6.2.2 Ortocentro	75				
		6.2.3 Baricentro	76				
		6.2.4 Incentro	76				
II	О	traçado de curvas	79				
7	Geo	metria e espaço					
	7.1		81				
		Física e geometria	81 81				
	7.2						
	7.2 7.3	Universo e simetria	81				
		Universo e simetria	81 83				
8	7.3 7.4	Universo e simetria	81 83 84				
8	7.3 7.4	Universo e simetria	81 83 84 85				
8	7.3 7.4 Tra	Universo e simetria	81 83 84 85				
8	7.3 7.4 Tra	Universo e simetria	81 83 84 85 87 88				

1987年 - 1987年 - 1987年 - 1987年 - 1987年 - 1988年 - 1987年 -

(

· (

. (. 16:

: (:.:.

		8.2.2	A elipse	92
		8.2.3	A parábola	95
		8.2.4	A hipérbole	98
		8.2.5	Desenho da hipérbole	100
		8.2.6	Compasso elíptico	101
9	As f	formas	estáticas 1	103
	9.1	Forma	s e estática	103
	9.2	Fios es	sticados	104
	9.3	Tração	o e compressão	106
	9.4	Um ex	cercício de abstração	108
		9.4.1	Desmaterialização	110
		9.4.2	Dois pontos, uma reta	111
10	A r	ota	<u>.</u>	113
	10.1	Nome	s de pontos	114
	10.2	Exem	plos de rotas	115
	10.3	Modif	icadores de rota	118
	10.4	Ponto	s primitivos e pontos derivados	122
II	I A	tran	sformação de figuras	123
11	Tra	nsforn	nações geométricas	12 5
	11 1	Trans	formações de figuras	125

©1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana	v
11.2 Grupos de transformações	.27
11.2.1 Isometrias	.27
11.2.2 Similaridades	33
11.2.3 Afinidades	3 4
11.2.4 Ajuste de afinidade	135
11.3 Composição de transformações	l 3 8
11.3.1 Transformada de uma transformações	l 3 8
11.4 Instrumentos que transformam figuras	l 40
11.4.1 Pantógrafo	l40
11.4.2 Aranhas	142
11.5 Notação	144
11.5.1 Transformação inversa	147
11.5.2 Composição de transformações	147
12 Perspectiva 1	49
12.1 Introdução	149
12.2 Camera obscura — perspectiva cônica	151
12.3 Sombras — perspectiva cilíndrica	152
IV A sintaxe do desenho 1	53
13 A gramática das formas geométricas	157
13.1 Composição e linguagem	157

() .()

vi		©1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana
	13.2	Uma teoria da morfogênese
		13.2.1 Forma imaterial
		13.2.2 Instrumentos, ferramentas e órbitas 161
		13.2.3 Morfogênese e linguagem
		13.2.4 Morfogênese dos seres vivos
	13.3	Polinômios
	13.4	Polinômio de figuras
		13.4.1 Órbita
	13.5	Polinômios geométricos
		13.5.1 Polinômio de uma figura
	13.6	Produtos de polinômios geométricos
	13.7	Composição e componentes
	13.8	A sintaxe do desenho
	13.9	Curvas e órbitas
		13.9.1 Órbitas contínuas
14	A ir	nperfeição da linguagem 179
	14.1	Ambigüidade e rrro
	14.2	Ambigüidade e arte

189

15 Convenções e protocolos

©	1991-	1998 por Claudio Zamitti Mammana	vii
	15.1	Transposição para o computador	189
	15.2	A instrução do computador	192
16	Con	siderações sobre notação	197
	16.1	Simplicidade e Inteligibilidade	197
	16.2	Notação para os grupos de Lie	199
		16.2.1 Os operadores morfogenéticos do plano	200
		16.2.2 Órbitas das transformações GL_2	202
	16.3	Geração de curvas	204
\mathbf{v}	\mathbf{A}	composição de figuras	207
•			
			209
	Riti		209
	Rit 17.1	nos e simetrias	209 209
	Rita 17.1 17.2	mos e simetrias Figuras compostas	209 209 210
	17.1 17.2 17.3	mos e simetrias Figuras compostas	209 209 210 211
	17.1 17.2 17.3	mos e simetrias Figuras compostas	209 209 210 211 212
	17.1 17.2 17.3	mos e simetrias Figuras compostas	209 209 210 211 212 212
	17.1 17.2 17.3	mos e simetrias Figuras compostas	209 209 210 211 212 212 213
	17.1 17.2 17.3	mos e simetrias Figuras compostas	209 210 211 212 212 213 213
	17.1 17.2 17.3	rios e simetrias Figuras compostas Polinômios e composições Produto de polinômios geométricos Simetrias 17.4.1 Composição e simetrias 17.4.2 Ritmo 17.4.3 Ritmos unidimensionais	209 210 211 212 212 213 213 215

是这些是特别的特殊的数据或证据的。 1911年,1911年

(.

. (

ĺ

ï

t K

·(·

viii	©1991-1998 por Claudio Zamitti Mamma	na
	17.5 Grupos de simetria plana	21
	17.6 Imagens 3-D	26
VI	Aplicações 23	29
18	Proposições fundamentais 2	31
	18.1 Pontos e linhas poligonais	31
19	Pontos determinados por equações 2	3 9
20	Transformação de figuras 2	45
	20.1 Procedimentos fundamentais	45
	20.2 Transformações geométricas	249
21	Simetrias 2	51
	21.1 Simetrias circulares	251
	21.2 Fitas ornamentais	260
	21.3 Recobrimento do plano	263
	21.4 Simetrias não-congruentes	288
V	I Apêndices 2	93
\mathbf{A}	Curvas cônicas	95
	A.1 Especificação de uma curva cônica	295
	A.2 Representação baricêntrica	298

giga and section of the company of

(

()

0

(

(

), () ()

教育というともあいた

©.	1991	1998 por	Claudio Zamitti Mammana			ix
	A.2.1 Pontos notáveis das curvas cônicas			 300		
	A.3	Represen	tação paramétrica			 300
	A.4	Represen	tação cartesiana		•	 301
		A.4. 1 C	ônicas com centro			 302
	A.5	Pontos n	otáveis das cônicas			 304
		A.5.1 P	arábola			 304
		A.5.2 E	lipse	. . .		 304
В	Cur	vas de B	ézier			307
	B.1	Bézier qu	uadrática — parábola			 308
		B.1.1 In	terpolações			 308
		B.1.2 C	onstrução	 309
	B.2	Bézier ci	bica	<i>.</i>		 310
		B.2.1 P	ropriedades notáveis			 311
	B.3	Expressâ	o paramétrica para as cônicas		. .	 312
\mathbf{C}	Pro	priedade	s da parábola			313
	C.1	Cinemát	ca			 313
	C.2	Equação	não-paramétrica da parábola			 315
	C.3	Propried	ades da parábola			 316
		C.3.1 Á	rea da parábola			 319

Lista das Figuras

4.1	O desenhista do homem sentado - A. Dürer (1472-1528)	4 0
4.2	O desenhista da mulher deitada - A. Dürer (1472-1528)	41
4.3	O desenhista do alaúde A. Dürer (1472 1528)	42
4.4	Pixel com coordenadas $M = [7,8] \dots \dots \dots$	43
5.1	"Multiplicação" do ponto P pelo "fator de conversão de direção" \imath	52
5.2	Soma das parcelas do trinômio $az^2 + bz + c$	63
6.1	Determinação do incentro I do um triângulo ABC	77
7.1	Espiral logarítmica	83
8.1	Traçado de uma parábola usando uma corda esticada	95
8.2	Propriedades da parábola	97
8.3	Propriedades da hipérbole	98
8.4	Traçado de uma hipérbole usando corda FPQ esticada \dots	100
11.1	Rotação de um ponto em torno da origem	130
11.2	Pantógrafo em duas configurações	141

11.3	Coordenadas do ponto P transformado de Q pelo triângulo afim $\ \ .$	143
12.1	A camera obscura reproduz sobre $PQRS$ a imagem invertida de um objeto real enquadrado em $ABCD$	151
16.1	Movimento do segmento AB numa órbita Hb	204
16.2	Movimento do segmento AB numa órbita de rotação	205
17.1	Ornamentação grega	214
17.2	Ritmo com motivo de simetria bilateral	215
17.3	Simetrias sobre redes de triângulos equiláteros ou suas metades	224
17.4	Simetrias sobre retângulos, quadrados ou suas metades	225
17.5	Sensação de 3-D	226
	Quadrado inscrito num triângulo	
20.1	Ajuste de afinidade	249
21.1	Posições de A modificadas pela variável complexa $m=\mathrm{Cy}(1/12)$.	255
21.2	Logotipo da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da USP	258
21.3	Geratriz da ornamentação grega sobre um círculo	261
21.4	Elemento de composição para o grupo p1	264
21.5	Elemento de composição para o grupo p2	266
21.6	Elemento de composição para o grupo pm	268
21 7	Flamento de composição para e grupo p3	260

©1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana	xiii
21.8 Elemento de composição para o grupo p4	270
21.9 Elemento de composição para o grupo p6	272
21.10Elemento de composição para o grupo p4m	274
21.11Elemento de composição para o grupo p4g	276
21.12Elemento de composição para o grupo p31m	277
21.13Elemento de composição para o grupo cm	279
21.14Elemento de composição para o grupo cmm	280
21.15Elemento de composição para o grupo pmm	281
21.16Elemento de composição para o grupo pmg	283
21.17Elemento de composição para o grupo pg	284
21.18Elemento de composição para o grupo pgg	285
21.19Elemento de composição para o grupo p3m1	286
21.20Elemento de composição para o grupo p6m	287
21.21Estilização de um galho de árvore	290
A.1 Cônica inscrita num triângulo ABC	296
B.1 Construção da parábola inscrita no triângulo ABC	310
$\mathrm{B.2}$ Variantes da curva de Bézier $\mathrm{B}_3(t)$	311
$\mathrm{B.3}$ Curva de Bézier reversa $\mathrm{B}_3(t)$	312
C.1 A trajetória da bala lançada por um canhão é uma parábola	315
C.2 Parábola inscrita no triângulo ABC	317
C.3 Projeções PQR de ABC sobre a diretriz r da parábola \ldots \ldots	318

i (;;;

(

· (=, ==

í

, t., , (1.1)

xiv	©1991-1998 por Claudio Zamitti Mammana
C.4	B é centro da circunferência circunscrita ao triângulo PFR 319
C 5	Construção da parábola inscrita no triângulo ABC 320

, (; (; ()-

· (, · (,

(

. ,: : : , ,

. :(C=

ì.

i.

.

Prefácio

Por mais certos que sejam os fatos de qualquer ciência e por mais justas as idéias que formemos acerca desses fatos, estaremos condenados a comunicar falsas impressões aos outros enquanto não encontrarmos as palavras certas por meio das quais elas possam ser expressas corretamente.

Antoine Laurent Lavoisier, Elementos de Química

Talvez em nenhuma disciplina do conhecimento humano esta afirmação de Lavoisier seja mais verdadeira do que na computação. O computador não pode funcionar movido por falsas impressões e muito menos produzir, a partir delas, as soluções de nossos problemas.

Se quisermos fazer do computador uma ferramenta de desenho que dê conseqüência às nossas criações artísticas, veremos que não basta o esforço de aprimorar a linguagem do computador para aproximá-lo da Geometria: é necessário também intervir na linguagem que usamos para descrever a própria Geometria.

A complexidade da expressão musical tornou necessária uma notação própria para que o compositor pudesse registrar em partitura, sons ouvidos ou imaginados e, por meio dela, comunicar sua obra aos instrumentistas. A comunicação entre o desenhista e o computador é um processo semelhante e por isso, exige uma notação própria.

Este trabalho resultou do esforço de propor uma tal notação. Ele procura tratar os traços como a gramática trata as palavras. Cuida das leis que regem a disposição desses traços nos elementos gráficos e destes, no desenho, como a gramática o faz com a disposição das palavras na frase ou das frases no discurso.

Dentro desse contexto, a Sintaxe do Design Gráfico ganha uma conotação técnica e precisa, que a afasta da expectativa — criada pelo hábito viciado — de uma discussão que mergulha nas questões estéticas ou filosóficas. Se, porventura, penetrei temerária ou inadvertidamente em território dos filósofos, o

fiz tendo sempre em vista a porta de saída, pois não é minha intenção trazer, às questões levantadas pelos *designers*, respostas que os levem a deixar de entender as perguntas que fizeram.

Há muitos artistas seguros de suas próprias intuições. Sempre os houve. Filarete, arquiteto italiano do século XV assim reproduziu o que, num jantar, um desses artistas dizia a respeito da prática da edificação:

a mim não parece coisa de grande importância (...) saber tantas razões de geometria e de desenhos e muitas coisas mais. Creio ter ouvido, dias atrás, alguém que falava de não sei que Vitrúvius e de outro a quem penso chamar-se Arquimedes, os quais teriam escrito sobre essas edificações e de medir coisas e de muitas outras novidades que, asseguram eles, faz falta saber. Eu não me preocupo com tantas medidas nem com tantas outras coisas quando faço alguma construção e não perco tempo com tantos pontos de geometria como eles dizem; e, ainda assim, elas se sustentam.

Aos artistas que pensam assim, este trabalho será tão inútil quanto maçante. Desprezar o que se conhece pode não ser mais do que o exercício de um direito; desprezar o que se ignora, é um sintoma de estupidez.

Procurei, com este trabalho dar àqueles artistas (os mais humanos) que sofrem das angústias e aflições dos poetas sem gramática ou dos músicos sem partitura, uma modesta opção. Quem dera possa ele servir de fuga a algum talento aprisionado...

Introdução

Em 1951, o biólogo inglês Sir Julian Huxley proferiu na Universidade de Indiana uma série de conferências acerca da Teoria da Evolução, reunidas posteriormente num pequeno livro¹ publicado dois anos depois, que abre com a seguinte explicação:

A Ciência tem duas funções: compreensão e controle. A compreensão pode ser do universo em que vivemos; ou de nós mesmos; ou das relações entre nós e nosso mundo. A ciência da evolução, como um ramo do conhecimento científico, existe há pouco tempo, por menos de um século. Durante esse período, sua contribuição primária tem sido para a compreensão — primeiro a do mundo em nosso entorno, e depois a de nossa própria natureza. As últimas poucas décadas adicionaram uma compreensão crescente acerca de nossa posição no universo e de nossas relações para com ele; e com isso, a ciência da evolução está destinada a dar uma contribuição importante e crescente para o controle; sua aplicação prática nas atividades humanas está por começar.

No mesmo ano em que se publicava esse livro, James Watson e Francis Crick identificaram e descreveram a estrutura molecular do material responsável pela transmissão dos caracteres hereditários dos seres vivos, abrindo uma larga avenida que conduziu à engenharia genética. Hoje dispomos de evidências suficientes para a confirmação cabal da tese que Huxley expressa na última oração do parágrafo acima transcrito.

Mas, na introdução que faço à monografia que aqui submeto, interessame ressaltar do parágrafo de Huxley, não sua tese final, mas a idéia que está implícita na sua primeira oração, que dá substância à última. Nessa frase, ele se refere, tenho poucas dúvidas², à função social do conhecimento.

A compreensão e o controle derivam do conhecimento, não como necessidade, mas como possibilidade. Para dar ao conhecimento sua função social, (numa metáfora, para convertê-lo de potencial em potência), é preciso darlhe consequência, incorporando-o organicamente à coletividade. Mas para

¹J. Huxley, Evolution in Action, Penguin Books, 1968.

²Creio que, se não nos bastar esse mesmo livro para nos convencer disso, podemos invocar seus *Ensaios de um Humanista*, Editorial Labor, 1977.

consegui-lo, não basta divulgar o conhecimento. É preciso, antes disso, organizá-lo de tal forma e propósito que os membros de uma sociedade fiquem, ao assimilá-lo, dotados da faculdade de compreender e controlar.

A monografia que aqui apresento é o resultado do esforço de integrar e organizar (numa formulação e notação apropriadas), e de codificar (em algoritmos computacionais), alguns dos temas do conhecimento matemático ensinado nos cursos de segundo grau de nosso país, visando dotar o estudante da faculdade de usar corretamente o computador como um instrumento de desenho de precisão.

O leitor poderia objetar, com toda procedência:

Os produtores dos pacotes de desenho por computador oferecidos no mercado não têm como principal objetivo atingir o maior mercado possível? Não são eles, por isso, concebidos para serem simples, amigáveis, fáceis de usar? Não se julga o autor presunçoso em imaginar-se capaz de apresentar solução mais eficiente?

Tenho consciência de que estaria expondo-me ao ridículo se tentasse convencê-lo de que encontrei um caminho para alterar a fatia do mercado dominada por qualquer um desses pacotes de desenho. Mas tenho consciência também de que esses limitantes mercantis cobram um preço. Não são necessários grandes investimentos em pesquisa de mercado para se concluir que a geometria, por intimidar ou aterrorizar a maioria das pessoas, não é um bem de consumo. Eles sabem que um produto que exija esforço do consumidor não se vende.

Há muito se sabe que a geometria não é do agrado da maioria. Conta a lenda que Alexandre, o Grande, pediu um atalho mais curto para a geometria a seu mestre Menaecmus, de quem teria ouvido a seguinte resposta:

Rei, para viajar pelo país há estradas reais e estradas para os cidadãos comuns; mas na geometria há só uma estrada para todos.

Nem o computador, nem vinte e três séculos de civilização, tornaram a geometria mais acessível hoje do que nos tempos de Alexandre. Não é de se estranhar, portanto, a escassez de produtos comerciais que dêem ao desenhista a possibilidade de resolver problemas geométricos.

É também por razões comerciais (neste caso o custo de equipamentos mais funcionais), que os fabricantes de pacotes de desenho empenham-se em substituir o lápis pelo *mouse* como instrumento de traçado. Quanto a isso, fico com a opinião de alguns *designers*:

É como tocar piano com luvas de boxe.

Com luvas de boxe e sem geometria, não se imagina artesão capaz de produzir desenhos de precisão. No entanto, com o suporte de uma notação apropriada, capaz de transferir, do desenhista para a máquina, a habilidade do traçar, pode-se dar ao mouse uma outra função. Este, quando controlado por um desenhista dotado de um conhecimento mais operacional da álgebra e da geometria, poderá transformar-se num instrumento de precisão. Mais do que isso, podemos dispensá-lo. simplesmente, deixando por conta do teclado (ou de um outro instrumento digital) a comunicação das instruções que o desenhista deve enviar ao computador.

O resultado do trabalho que realizei com esses propósitos está codificado num programa de computador. o *Designer's Workbench*, registrado no INPI (Instituto Nacional de Propriedade Industrial), sob número 99002484, do qual uma versão está anexa a este texto. Por meio dos resultados que com ele obtive, procuro demonstrar as seguintes teses:

- 1. Que os desenhos geométricos constituídos por traços feitos a mão livre ou por instrumentos de desenho (régua, compasso, pantógrafo, etc.) são, originariamente, procedimentos seqüenciais e que, do reconhecimento desse fato, é possível derivar uma sintaxe do "ato de traçar", cujo processo elementar pode ser confundido com o traçado de arcos de curvas simples. A demonstração dessa tese está exposta na parte IV desta monografia;
- Que essa sitaxe pode ser completamente reduzida a uma representação simbólica, legível tanto pelo computador quanto pelo desenhista, na forma de frases de uma linguagem artificial. Este assunto está tratado na seção 13.2.3;
- 3. Que parte substancial dessa linguagem pode ser expressa na forma de uma estrutura algébrica polinomial de transformações geométricas, cuja descrição encontra-se nas seções 13.4-13.9.

- 4. Que as curvas simples a que se refere a tese 1 podem ser derivadas das transformações geométricas de que trata a tese 3, por meio de um novo tipo de passagem ao limite, que nos leva a reconhecê-las como órbitas de elementos de um grupo de transformações contínuas;
- 5. Que os parâmetros de Lie do grupo a que se refere a tese 4 proporcionam uma notação bastante apropriada para a especificação dessas transformações numa linguagem de computador. Essa notação está discutida no capítulo 16;
- 6. Sabe-se que as técnicas de parametrização de figuras³ dão ao desenhista a possibilidade de resolver muitos problemas geométricos segundo os métodos tradicionais do desenho geométrico e da geometria analítica. Os usuários do Designer's Workbench podem explorar essa possibilidade por meio da especificação de comandos escritos na forma de expressões aritméticas, reais ou complexas.
- 7. Como corolário da tese 3 e do fato descrito em 6, pode-se mostrar que o conhecimento necessário para que um desenhista possa usar o computador para executar desenhos de precisão constituído como um instrumento capaz de integrar e colocar ao alcance do desenhista os resultados organizados das disciplinas de desenho geométrico, da álgebra dos números complexos e das geometria analítica e transformacional está todo contido nos programas oficiais dos cursos do segundo grau. O texto que segue pretende demonstrar essa tese;

Esta monografia não pretende resumir-se a uma simples demonstração das teses acima relacionadas, mas situar os métodos de desenho por computador que aqui proponho frente aos tradicionais de desenho e de solução de problemas geométricos. Nem se resume a um manual do *Designer's Workbench*. Este, e as demais informações de uso do *Designer's Workbench*, encontram-se nos arquivos de ajuda que acompanham o programa.

³Essas técnicas são encontradas somente nos sistemas de CAD mais avançados.

O Computador e o desenho

1.1 As artes gráficas

Dentre as artes visuais destacam-se, em especial, as *Artes Gráficas*. As Artes Gráficas constituem o universo dos conhecimentos, técnicas, artifícios e materiais destinados à produção e tratamento de superfícies que resultem em objetos visualmente perceptíveis¹.

Para que se tornasse possível produzir nas telas das pinturas a extensa variedade de efeitos visuais hoje conhecidos, não foi suficiente o talento dos grandes pintores e ilustradores que fizeram a história da arte. Foi também necessário o engenho de um número incontável de técnicos de cujos intermináveis experimentos, descobertas e invenções surgiram as superfícies de desenho — os papéis ou tecidos com que são construídas as telas em sua enorme variedade de tons e texturas — todos os materiais para o recobrimento dessas superfícies — a grafite, os pastéis, o crayon, a tinta a óleo, o guache, a aquarela, as tintas acrílicas, os polímeros — e os instrumentos de desenho — o compasso, a régua, os esquadros, as curvas francesas, o elipsógrafo ou o pantógrafo — por meio dos quais tornou-se possível o

¹O escopo das artes gráficas foi bastante alargado recentemente, de modo que muitas técnicas de tratamento de superfície, ainda que não tenham o propósito específico de produzir objetos visualmente perceptíveis passaram a ser também classificadas na categoria das artes gráficas. Assim, passou-se a incluir dentre as artes gráficas, por exemplo, muitas das técnicas utilizadas para a produção de circuitos eletrônicos impressos ou integrados.

traçado preciso.

Assim surgiram teorias matemáticas como a Geometria e a Perspectiva. Muitos estudos foram necessários para que se pudesse contar com as cartas de cores cujas regras mágicas permitem extrair de suas combinações, os mais variados efeitos — um acervo de conhecimentos que forma a volumosa herança legada aos pintores de hoje pelos estudiosos da química e da ótica, em especial da ótica física. Equipamentos complexos como as máquinas fotográficas capazes de registrar imagens de objetos reais em materiais fotosensíveis, afetaram profundamente as artes gráficas².

A Computação Digital

(.

O computador surge como mais uma engrenagem desse intrincado mecanismo.

As técnicas para a produção da arte-final usadas na computação gráfica podem ser consideradas derivações ou adaptações das técnicas tradicionais, consagradas na impressão a cores ou na reprodução de imagens coloridas nas telas de vídeo dos televisores. Tais técnicas desenvolveram-se em torno da idéia de preencher-se, com cores diferenciadas, um retículo formado por um grande número de minúsculas células, até completarem-se as extensões visíveis da figura. Quando vista de uma distância suficientemente grande para que o retículo não possa mais ser divisado pela vista, a figura deixa de ser percebida pelo observador como um mosaico; seus elementos descontínuos como que se fundem para formar tonalidades uniformes.

Na computação, a técnica usada gira em torno dessa mesma idéia; a principal diferença está em que a cor de cada célula do retículo — então denominada $pixel^3$ — é determinada por um processo de cálculo.

O maior impacto dos computadores nas artes gráficas não está, portanto, na geração da arte-final, mas em dar aos artistas plásticos um acesso privilegiado aos resultados de diferentes teorias matemáticas como o cálculo com números complexos, as transformações geométricas e os grupos de simetria, que até recentemente estavam confinadas a um público muito restrito de iniciados. Por meio desses recursos eles poderão, não apenas realizar composições muito mais complexas do que aquelas às quais estavam limitados pelas técnicas tradicionais do desenho, mas também exercer maior controle sobre os equipamentos utilizados na produção da arte-final.

²Para uma apreciação da variedade e extensão dessas técnicas veja, por exemplo, [11] ³Ver definição de *pixel* no capítulo 4

1.2 Pintura e desenho

A Pintura e o Desenho são as principais expressões das artes visuais. Embora Desenho e Pintura estejam a tal ponto interligados que se tenha tornado difícil divisar suas fronteiras, essas duas formas de expressão das artes visuais estão fundamentadas em técnicas distintas e devem ser analisadas por diferentes disciplinas do conhecimento. Para entender mais facilmente os problemas a serem enfrentados, quando buscamos colocar o computador a serviço das artes visuais, convém-nos o esforço de restaurar as fronteiras entre essas duas expressões artísticas, entendendo, cada uma delas, nas suas definições mais estritas.

Desenho significará, para nós [26],

Desenho

A arte de representar visualmente, por meio de traços, a forma — e eventualmente os valores de luz e sombra — de um objeto ou figura.

Por outro lado, a pintura será entendida como

Pintura

Uma obra de representação ou de invenção (quadro, afresco, etc.) feita de cores aplicadas sobre uma superfície devidamente preparada para esse fim.

A conveniência das definições acima está na oposição do traço ao recobrimento como meios de expressão. Nos computadores, as técnicas do traço baseiam-se na representação chamada vetorial dos elementos de desenho, ao passo que as do recobrimento, na formação dos assim denominados mapas de bits. Embora os resultados de qualquer uma dessas representações possam vir a ser convertidos⁴ ou fundidos uns aos outros, suas potencialidades computacionais são distintas e seus tratamentos, independentes.

⁴As técnicas correntes favorecem, em preço e desempenho, os equipamentos de registro gráfico que realizam a arte final sobre retículas, como se dá, por exemplo, nas telas de vídeo ou nas impressoras gráficas. Nesses casos, as representações vetoriais dos desenhos devem ser convertidas, por exigência de tais equipamentos, para a forma de mapas de bits; a maioria dos *plotadores* dispensa essa conversão.

1.3 Ótica e geometria

A oposição entre o Desenho e a Pintura torna-se mais explícita quando a encaramos à luz de duas disciplinas complementares do conhecimento: a Ótica e a Geometria. A decomposição das figuras em seus componentes geométrico e ótico esteve presente em vários momentos da história das técnicas de desenho e pintura.

A Geometria lida com os aspectos abstratos das formas dos objetos, independentemente da natureza material das superfícies de que são constituídos.

Graças à sua origem abstrata, as propriedades geométricas das formas e estruturas podem ser reduzidas à expressão matemática, onde encontram sua representação em termos de pontos e curvas. Assim, quando se trata de representar apenas os atributos geométricos das figuras, a forma mais econômica e preferida pelos desenhistas tem sido a de usar traços para registrar seus componentes mais característicos.

O traço é importante não apenas para a expressão artística. Ele tem servido, durante séculos, como recurso dos cartógrafos para desenhar mapas, dos engenheiros e arquitetos para desenhar plantas ou localizar pontos no plano ou no espaço. A localização de pontos, de que nos ocuparemos durante toda primeira parte deste trabalho, constitui o problema fundamental da aplicação da geometria ao desenho.

A Otica, por outro lado, estuda os fenômenos físicos que resultam da interação da luz com as superfícies dos objetos materiais, tais como a reflexão e a refração. Para o desenho e a pintura, interessam desses fenômenos, em especial, seus efeitos sobre o olho humano que nele provocam as sensações visuais de cor, sombra ou textura, características das superfícies dos objetos.

Uma mesma figura geométrica pode ser apresentada segundo uma grande variedade de estilos pictóricos que lhes conferem distintos aspectos. Assim, uma figura poliédrica, por exemplo, pode ser representada seja pelo traçado de suas arestas, seja de forma mais completa, pelo recobrimento de suas faces, recobrimento esse que pode ser feito por diferentes texturas ou cores que provocam no observador a ilusão das luzes, sombras e volumes.

A produção dessas ilusões depende, por sua vez, de uma grande variedade

Geometria

Ótica

de fatores, tais como a posição, a intensidade ou a cor das fontes de luz que iluminam o objeto, da natureza física da superfície desse objeto, da posição do observador, todas elas coordenadas pela habilidade do artista que o representa.

Este trabalhotrata das técnicas de produção de traços por computador. Não serão abordadas nele as técnicas de colorização, geração de texturas, iluminação ou sombra. Tais efeitos podem ser obtidos por meio do uso de técnicas como o ray-tracing [55], por exemplo, que procuram reproduzir, por simulação, os fenômenos físicos que ocorrem quando o olho humano é sensibilizado pelos raios de luz refletidos nos objetos que ele observa.

Quando se trata da produção de figuras bi-dimensionais — tais como a geração de logotipos, o desenho de plantas de engenharia ou de arquitetura, ou o projeto de caracteres de imprensa — as técnicas de *ray-tracing* são de pouca valia. Para essas aplicações, a abordagem geométrica, baseada na geração de traços, é a mais recomendada.

As principais técnicas de computação destinadas à geração de traços tiveram origem nas aplicações à engenharia, genericamente conhecidas por Sistemas de Projeto Auxiliado por Computador⁵. Rapidamente a assim chamada Computação Gráfica⁶ expandiu-se e vem subdividindo-se em um número crescente de disciplinas.

Enquanto isso, diversas linguagens de programação vêm sendo desenvolvidas para facilitar a utilização do computador na manipulação de elementos gráficos. Dentre essas linguagens merece menção a Metafont [32], desenvolvida para permitir a representação dos tipos de imprensa comumente usados na editoração, numa forma especialmente adaptada à computação digital. São também muito usadas na editoração eletrônica, a linguagem de programação PostScript⁷ [48] desenvolvida para proporcionar reproduções de

Linguagens de Programação

⁵Costuma-se designar esses sistemas pela sigla CAD, acrônimo da expressão inglesa *Computer Aided Design*.

⁶A expressão computação gráfica não é a mais apropriada para designar o assunto de que tratamos pois este não aborda os procedimentos gráficos de computação, isto é, as técnicas, baseadas na manipulação de parâmetros métricos como nos ábacos e gráficos, usadas até recentemente para a solução de problemas de engenharia, como alternativa para o cálculo numérico [27]. Não se trata, portanto, do uso de gráficos em computação, mas do uso do computador nas artes gráficas. Não obstante sua imprecisão, a expressão ganhou popularidade.

⁷PostScript é uma marca registrada pela Adobe Systems Inc.

alta qualidade em impressoras gráficas, bem como a codificação TrueType⁸ desenvolvida para representar caracteres e símbolos gráficos destinados não apenas à produção de material impresso, mas também à geração de tipos mais legíveis nas telas dos computadores.

1.4 Desenho técnico

O uso do computador para o desenho geométrico justifica-se tanto mais, quanto mais complexas as figuras que se pretende desenhar.

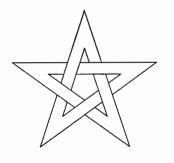
Um desenhista experimentado possivelmente verá pequena vantagem em usar um computador para auxiliá-lo no desenho de uma estrela como a da figura ao lado.

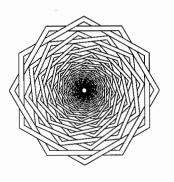
Porém se lhe couber desenhar, não mais uma estrela de cinco pontas mas outra semelhante, agora formada por 12 vértices e repeti-la várias vezes, em escalas decrescentes de modo a formar um padrão de encaixes para servir de decoração de fundo para um mostrador de relógio como o da figura seguinte, a economia de esforço que o computador traz, dificilmente será desprezada.

Embora a diferença entre os trabalhos manuais necessários para produzir esses desenhos seja enorme, o esforço intelectual necessário para "equacionar" a solução de cada um dos problemas geométricos que está por detrás dessas figuras é praticamente o mesmo. De fato, uma vez resolvido o problema de como desenhar uma estrela de cinco pontas, sua generalização para um número qualquer de vértices e a reprodução de cópias concêntricas em escalas decrescentes, é um problema menor.

1.5 O computador como desenhista

A geração de formas precisas depende de ferramentas e instrumentos de qualidade e a precisão da régua e do compasso são, na maioria das vezes, suficientes para a produção de resultados de qualidade. No entanto, faltalhes alguma coisa para libertá-los de suas limitações.





⁸TrueType é uma marca registrada pela Apple Computer, Inc.

Albrecht Dürer ao lado de outros homens da Renascença tentaram estabelecer princípios matemáticos para o desenho de tipos de imprensa, mas as letras que eles obtiveram não eram particularmente belas. Seus métodos fracassaram porque eles restringiram-se às construções com "régua e compasso" que não permitem expressar adequadamente todas as nuanças da boa caligrafia. [32]

As deficiências da régua e do compasso poderiam, no entanto, ser completamente superadas se fosse possível (de fato, prático) ao desenhista, recorrer ao cálculo.

Embora as possibilidades abertas pelo cálculo para o desenho sejam conhecidas há séculos — mais explicitamente a partir da síntese da Geometria Analítica por René Descartes, em 1637 — seu uso não se generalizou na extensão prometida por sua potencialidade. Isso possivelmente porque as dificuldades encontradas no calcular, aliada à familiaridade dos desenhistas com seus instrumentos tradicionais, criavam resistência suficiente para impedir que a Geometria Analítica viesse a deslocá-los.

O fato recente — e que vem modificando significativamente as técnicas do desenho — é a possibilidade aberta pela computação digital de automatizar o cálculo numérico. As dificuldades para realizar os cálculos necessários foram removidas e as vantagens que os antigos instrumentos tinham sobre estes métodos, praticamente desapareceram.

Por meio do controle de equipamentos como impressoras ou *plotadores*⁹, o computador poderá reproduzir figuras de qualidade, tornando dispensáveis os instrumentos tradicionais de desenho como a régua, o compasso, o pantógrafo, as curvas francesas etc.

O equipamento moderno de imprensa, baseado em linhas de varredura — no qual os tipos fundidos em metal foram substituídos por padrões puramente combinatórios de uns e zeros que especificam descontinuamente a posição desejada da tinta — torna a matemática e a ciência da computação cada vez mais relevantes para a imprensa. Hoje nós temos a possibilidade de definir com precisão ilimitada os contornos das letras,

Capacidade de Cálculo

Faculdade de Controle

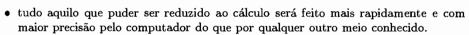
⁹A palavra "plotador" é um neologismo criado para designar o equipamento que é reconhecido na língua inglesa pelo vocábulo *plotter*.

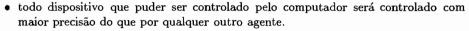


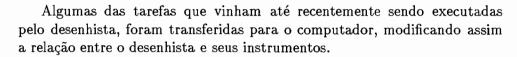
garantindo assim resultados equivalentes em qualquer máquina baseada na técnica de varredura. Além disso, os contornos podem agora ser definidos em termos de parâmetros variáveis; os computadores podem desenhar novas fontes de caracteres em segundos, tornando possível, a seus projetistas, realizar valiosos experimentos¹⁰ que eram, até recentemente, impensáveis.

Essas observações feitas por Donald E. Knuth, um dos originadores da editoração eletrônica [32], embora limitadas ao desenho de tipos para a imprensa, aplicam-se ao desenho de quaisquer figuras e descrevem bem as potencialidades do computador como instrumento de desenho.

Podemos afirmar, sem grande margem de erro que



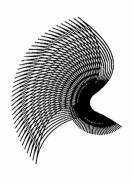




Se, de um lado, muitas dessas tarefas foram simplificadas pelo computador — principalmente o traçado de curvas ou o preenchimento de regiões do desenho com cores ou texturas — de outro, com a ampliação dos recursos disponíveis e das possibilidades de estender o desenho técnico à realização de figuras complexas, novos desafios foram colocados aos desenhistas.

Há algumas diferenças importantes entre efetuar um desenho com o auxílio da régua e do compasso e fazê-lo por meio do computador. Mas há também muita coisa em comum nessas duas técnicas.

O que há de comum é que as instruções que devemos dar ao computador





¹⁰Os três estudos que margeiam o trecho acima são variações em torno de um mesmo tema. Compostas a partir de um mesmo elemento gráfico codificado em termos de parâmetros variáveis, essas figuras são o resultado de um conjunto de experimentos destinados a mostrar os efeitos que diferentes valores atribuídos a esses parâmetros produzem sobre o resultado final.

são, em essência, as mesmas que nosso cérebro dá às nossas mãos para executar o desenho. Seja um desenho feito com o auxílio do computador, seja com o auxílio da régua e do compasso ou de outros instrumentos, cabe saber:

- onde localizar os pontos principais da figura;
- quais pontos devem ser ligados entre si e
- como ligá-los entre si se traçando entre eles um segmento de reta ou um arco de curva; se por meio de uma pena fina ou grossa; se usando tinta preta, vermelha ou verde.

No caso do desenho da estrela (ver página 6), é preciso determinar em que lugar do papel devem ficar as pontas (os vértices) da estrela bem como em que pontos seus braços se cruzam. De fato, uma vez fixadas as posições desses pontos da estrela, o próximo passo será como um jogo infantil: ligar pontos.

A diferença mais relevante está, portanto, em saber como *instruir* o computador para realizar o desenho. Devidamente instruído, o computador ligará¹¹ os pontos com rapidez e precisão.

1.6 A estrutura de um desenho

Os desenhos, como todas as composições artísticas, são formados de componentes¹² que se justapõem segundo determinadas leis de formação. Essas leis, que dão estrutura e organicidade à composição podem tanto ser inspiradas nas leis da natureza quanto criadas pela imaginação do autor.

Os componentes de um desenho podem ser visíveis ou invisíveis. São visíveis os traços — alterações das propriedades óticas da superfície de desenho. São invisíveis as marcas transitórias que servem de referência e guia para a realização dos traços.

Componentes

¹¹Quer dizer, enviará à impressora ou ao plotador, as instruções precisas para fazê-lo.
¹²As palavras composição e componente, assim como o vocábulo composto, têm como raiz comum o verbo latino ponere, "por alguma coisa em algum lugar". Composição é o ato ou efeito de por em um ou mais lugares, um ou mais componentes. Componente é aquilo que é posto. No desenho por computador a responsabilidade do compositor é a de informá-lo dos componentes e da disposição destes no desenho.

Os componentes invisíveis são eliminados na fase final de acabamento, como o são os andaimes usados na construção dos edifícios. Podem também ser considerados componentes invisíveis todas as anotações, registros de deduções geométricas, memórias de cálculo etc., que foram usados para a realização do desenho.

1.7 Organização deste trabalho

Localização de Pontos

Os componentes invisíveis mais importantes para o desenho geométrico são os pontos de referência. São eles os centros de circunferências; pontos de tangência ou osculação entre curvas; pontos que determinam linhas retas ou curvas, etc.

Assim como o construtor de um edifício marca o terreno antes de iniciar a construção, o desenhista deve marcar os pontos principais de referência de sua composição. A localização desses pontos é, portanto, de importância capital para a boa qualidade dos resultados.

A primeira parte deste trabalho está dedicada às técnicas de localização de pontos na superfície de desenho.

O Traçado de Curvas

Embora vantajoso em muitos casos, o computador deixa a desejar quando comparado à intimidade que o lápis e o papel travam com o desenhista. O traço, elemento fundamental do desenho, é produzido por meio de um gesto muito pessoal aplicado ao lápis; tão individual que, entra técnica, sai técnica, a assinatura — um gesto muito característico e quase intransferível de cada indivíduo — foi e continua sendo o sinal universalmente aceito para identificar responsáveis seja por cheques bancários seja por contratos. O reconhecimento da individualidade do traço é tão difundido que, além de dar razão de ser à grafologia, permite que a caligrafia seja considerada meio eficaz para determinar a autoria de um manuscrito, muitas vezes decisivo nas investigações policiais.

Nos desenhos de precisão — tais como plantas de engenharia ou de arquitetura, fontes de caracteres, padrões para impressos de segurança, logotipos, selos e estampilhas ou sistemas de sinalização— não são recomendáveis os traços a mão livre. Nesses casos, não se trata de codificar e transferir a gesticulação de um artista para o computador. Em vez disso, seleciona-se um

conjunto de arcos de curva definidos em termos de parâmetros geométricos para que o desenhista, controlando suas construções através de "pontos de referência", possa obter os resultados gráficos desejados.

Na segunda parte tratamos da construção de traços baseados em curvas geométricas.

Freqüentemente um autor seleciona um determinado componente para apresentá-lo sob diferentes flexões ou aspectos numa mesma composição. O recurso mais usado para se "flexionar" um determinado tema ou componente é a transformação geométrica. As transformações mais comumente usadas são a translação, a rotação, a reflexão, a homotetia, as deformações afins e suas combinações.

Transformação de Figuras

A terceira parte deste trabalho trata das transformações geométricas e a forma de representá-las para comunicá-las ao computador. Lá são também discutidas algumas técnicas úteis para se explorar mais apropriadamente esses recursos.

A comunicação entre o computador e o desenhista depende de uma linguagem própria, com léxico, gramática e protocolos precisos e bem definidos. Para que as "frases" dessa nova linguagem reflitam a estrutura do desenho e sejam, ao mesmo tempo, compreensíveis tanto pelo desenhista quanto pelo computador, elas devem obedecer a certas regras sintáticas, baseadas em princípios matemáticos.

A Sintaxe do Desenho

Na quarta parte s ao discutidas as necessidades que tornam obrigatória a busca dessa linguagem, suas diferenças com a linguagem comum e as exigências de rigor e de não-ambigüidade das mensagens por meio das quais se estabelece o diálogo entre o desenhista e o computador.

Muitas leis de composição podem ser expressas matematicamente: são as leis que definem *ritmos* e *simetrias*, princípios estéticos fundamentais em todas as artes.

Composição de Figuras

A quinta parte do trabalho trata das leis de simetria linear e plana, da representação dessas leis e das formas de comunicá-las ao computador, por meio da linguagem definida na quarta parte do trabalho.

Um relato possivelmente apócrifo descreve, de forma sugestiva o que podemos tomar, hoje em dia, por metáfora do processamento digital [28]

Aplicações

"Os astrônomos hindus resolvem seus cálculos com grande facilidade, sem escrever um algarismo; em seu lugar utilizam-se de pequenas conchas, colocadas sobre uma mesa ou sobre o solo, como se fossem fichas de jôgo, deslocando-as e retirando-as. Suas regras de cálculo estão contidas em versos misteriosos que conhecem de cor e que citam, em murmúrio, enquanto deitam as conchas; de quando em vez recorrem ainda a um pequeno caderno de fôlhas de palmeira contendo tabelas numéricas. Trabalham com um sangue frio de que os europeus não são capazes, e jamais cometem erros."

No desenvolvimento do *Designer's Workbench*¹³ o autor buscou na álgebra, os "versos misteriosos", e na programação, uma forma de dar ao computador a faculdade de "murmurá-los de cor", procurando transformá-lo assim, num instrumento por meio do qual um desenhista possa ver os componentes de seu desenho como "fichas de um jôgo" e assim, deslocá-los e modificá-los à sua vontade.

Como as vantagens resultantes dessa abordagem podem ser melhor avaliadas a partir de exemplos de aplicações, incluiu-se, na sexta parte deste trabalho uma coleção de problemas geométricos resolvidos segundo os métodos aqui propostos. Neles o autor procurou mostrar como, por meio de uma notação e uma codificação adequadas, pode-se revelar, na forma de um "instrumentos de desenho", um pouco do espírito da álgebra.

O físico alemão Heinrich Hertz assim se expressou, certa feita, sobre a álgebra [12]:

Não se consegue impedir o sentimento de que essas fórmulas matemáticas possuem uma exitência independente e uma inteligência próprias; de que elas são mais sábias do que nós mesmos, ou mesmo mais sábias do que seus descobridores; de que podemos extrair delas, mais do que foi originalmente nelas colocado.

Elas descrevem bastante bem, na opinião do autor, o sentimento que o acompanhou durante o longo período de gestação e desenvolvimento do Designer's Workbench.

A sétima parte do trabalho inclui, na forma de apêndices, alguns dados e propriedades das curvas que servem de elementos de composição para

Apndices

¹³Programa de computador concebido e desenvolvido pelo autor.

o desenho por computador. Essas informações encontram-se dispersas na literatura e sua reunião aqui, tem o objetivo de torná-los mais acessíveis ao desenhista interessado em seguir os métodos de desenho descritos neste trabalho.

Parte I A Localização de pontos

Antigamente muitos estudiosos de talento (...) aprendiam a arte da pintura, sem nenhum fundamento, quase completamente a partir das regras práticas do dia-a-dia. Assim, eles cresceram na ignorância, como uma árvore selvagem que jamais tivesse sido podada. Embora alguns deles tenham adquirido da prática contínua uma tal destreza manual, a ponto de não se poder negar-lhes o reconhecimento de que seus trabalhos tenham sido habilmente executados, (deve-se afirmar) no entanto, que (esses artistas,) em lugar de estarem apoiados em princípios bem fundados, fizeram (suas obras) meramente de acordo com seus próprios gostos.

Se, entretanto, a pintores mais instruídos e artistas merecedores do nome lhes fossem mostrados tais trabalhos assim irrefletidos, eles desdenhariam a cegueira dessas pessoas, e não sem alguma justiça. Pois, para aquele que realmente conhece, nada é mais desagradável de se ver numa pintura do que um erro fundamental, ainda que seus detalhes tenham sido cuidadosamente pintados. Que tais pintores tenham encontrado satisfação em seus erros, é somente porque eles não aprenderam a Arte de Medir, sem a qual ninguém pode ser ou tornar-se um mestre em seu ofício.

Considerando, entretanto, que este seja o verdadeiro fundamento de toda pintura, propus-me expor seus elementos para uso de todos estudantes ansiosos da Arte e instrui-los a aplicar um sistema de Mensuração com Régua e Compasso e, dessa forma, aprender a Verdade, vendo-a diante de seus próprios olhos. Assim eles não apenas (sentirão) a delícia e adquirirão o amor por essa arte, mas também alcançarão uma compreensão cada dia mais correta dela.(...)

(Estes ensinamentos) servirão não apenas aos pintores, mas (também) aos joalheiros, escultores, pedreiros, marceneiros e todos aqueles que dependem de medidas. Ninguém está obrigado a valer-se desta minha doutrina, mas eu estou certo de que quem quer que a adote, ganhará não apenas uma base firme, mas, tendo chegado pela prática diária a uma melhor compreensão dela, continuará minhas buscas e descobrirá muito mais do que eu aqui exponho. (...)

Euclides, homem dos mais sagazes, construiu as fundações da Geometria. Aquele que tiver entendido sua obra não irá precisar deste livro que foi escrito apenas para os jovens e para aqueles que não podem contar com ninguém para instrui-los corretamente.

Albrecht Dürer, Instruções para a Arte de Medir, 1525

Régua e compasso

2.1 Localização de pontos

O problema da localização de pontos no plano é conhecido pelos especialistas como um *Problema Geométrico*. Esse problema não surge apenas quando se trata de realizar o desenho mais preciso de uma figura que obedeça a regularidades geométricas, como é o caso das estrelas da página 6. Muitas atividades profissionais exigem que se saiba resolvê-lo.

Um pedreiro que ergue paredes fora do prumo está pondo em risco quem passar por perto. Ao erguê-la, ele deve saber em que ponto do espaço assentar cada tijolo. O mesmo cuidado deve ser tomado ao assentar lajotas para revestir o piso de um cômodo. Gavetas deslizarão mal em trilhos desalinhados; o marceneiro que os fixa deve saber montá-los paralelos e para isso, como o pedreiro, saber localizar pontos no espaço. Uma peça mecânica usinada fora das medidas não funcionará corretamente. Saber medir é, também saber localizar pontos no espaço.

Para aplicar um bordado a um tecido, a bordadeira deve saber em que ponto da trama passar a agulha. Um terreno arado sem o respeito às curvas de nível estará sujeito à erosão: o traçado de curvas de nível é outro problema de localização de pontos no espaço. Se um logotipo for desenhado sem obedecer às regras da simetria, ele ficará desproporcional e por isso, feio e desagradável. A obtenção de um desenho de boa qualidade somente é

Problema Geométrico

possível quando seu criador souber como localizar os pontos no papel e como ligá-los com traços de régua, compasso ou outro instrumento de desenho. O mesmo poderá dizer-se de um canteiro, de uma escada ou de um caminho aberto num jardim, se suas proporções, esquadro e paralelismos não tiverem sido respeitados pelo jardineiro. O cirurgião, o ortopedista ou o dentista também enfrentam problemas semelhantes de como usar um mapa (uma radiografia ou uma tomografia) para localizar pontos no espaço (no caso, o corpo humano) onde devem fazer uma intervenção ou uma correção.

Geometria

A experiência mostra que a determinação precisa de um ponto no plano ou no espaço pode ser um problema técnico complexo. Em torno dele desenvolveram-se teorias e métodos especiais que fazem parte da Geometria.

O problema da localização de pontos no plano e no espaço é tão fundamental e recorrente que as técnicas para a sua solução deveriam ser do conhecimento de qualquer cidadão. Nenhum profissional cujas atividades envolvem, direta ou indiretamente a localização de pontos no plano ou no espaço, pode desconhecer os princípios e métodos da Geometria.

Ao longo da história da Geometria, duas técnicas para resolver o problema de localizar pontos no plano destacaram-se das demais. A primeira delas inspira-se nas possibilidades de dois instrumentos clássicos de desenho: a régua e o compasso. A segunda fundamenta-se na noção de coordenadas, originária das idéias de latitude e longitude que são o legado de nossos ancestrais, criadas da necessidade de localizar pontos na superfície da Terra. Embora esses dois métodos conduzam a um mesmo resultado para um mesmo problema geométrico, eles são muito distintos em sua essência.

O segundo desses métodos, explorado sistematicamente na Geometria Analítica, é muito mais geral do que o primeiro: são conhecidos casos, que se tornaram clássicos, de problemas geométricos cujas soluções são acessíveis pelos métodos do cálculo, mas impossíveis por meio da régua e do compasso. Além disso, o cálculo está muito mais próximo do computador do que a régua e o compasso.

O melhor método de solução de um problema geométrico para quem puder valer-se de um computador, nem sempre é o melhor para quem dispuser apenas da régua e do compasso. O reverso também é verdadeiro. Um método de solução de um problema geométrico que tenha sido concebido para ser executado por meio da régua e do compasso, ainda que seja preciso

e elegante, pode não ser o mais adequado à computação digital.

O desenhista que diante da distância que separa o computador dos instrumentos tradicionais de desenho e deslumbrado pela novidade, fizer tabularasa destes ao valer-se daquele, pode estar incorrendo em sério erro. Os métodos clássicos da Geometria constituem patrimônio valioso demais para ser abandonado.

Para aproveitar a herança que nos foi legada por mais de dois milênios de história da Geometria, convém reservar à régua e ao compasso, um lugar nos métodos computacionais para a solução de problemas geométricos. É por essa razão que dedicamos o capítulo 2 à transposição para o computador, dos princípios de solução de problemas geométricos por meio da régua e do compasso.

Nos capítulos seguintes, examinaremos os métodos das coordenadas e da Geometria Analítica para, em seguida, valermo-nos da abordagem muito mais geral e poderosa da Álgebra.

As técnicas mais tradicionalmente utilizadas para a localização de pontos no plano estão baseadas no uso da régua e do compasso. Essas técnicas estenderam-se para muito além dos seus limites originais e deram origem, ainda na Antigüidade, às técnicas de triangulação usadas na Astronomia e na Topografia e utilizadas, ainda hoje, na construção civil, na agrimensura ou na cartografia.

Possivelmente nenhum instrumento mecânico tenha sido estudado em maiores profundidade e variedade de pontos de vista do que o par formado pela régua e o compasso, os mais fundamentais da Geometria e das técnicas clássicas de construção geométrica.

2.2 Os Ancestrais da Régua e do Compasso

Arqueólogos e historiadores, nos seus trabalhos de recolher, classificar e interpretar os fatos da Antigüidade, constataram ter se desenvolvido na antiga Índia, técnicas elaboradas, referidas nos velhos escritos, os *Sulvasutras*, como as regras das cordas. Admite-se que o propósito dessas regras era religioso: destinava-se à construção de altares para a prática de sacrifícios, pois se

As Regras das Cordas

acreditava que para conferir poderes sagrados a esses altares era necessário construí-los com a máxima precisão[36].

Não é muito difícil imaginar como, esticando-se uma corda sobre uma superfície plana, pode delinear-se um segmento de linha reta ou como, girando-se uma corda esticada em torno de um ponto fixo do plano, pode traçar-se um arco de círculo¹. As cordas podem então ser vistas também como *instrumentos* de desenho e não apenas como peças de culto.

Com o tempo, a régua e o compasso tornaram-se duas peças independentes, pouco tendo a ver uma com a outra. Mas na Antigüidade, régua e compasso estavam integrados, na forma de cordas esticadas, num só instrumento.

Instrumentos Proibidos

Durante muitos séculos eles foram os únicos instrumentos permitidos aos desenhistas geométricos; os demais eram proibidos.

Alguns historiadores da Ciência, nas suas tentativas de encontrar uma razão para essas proibições, satisfizeram-se ao julgar tê-la encontrado em motivações religiosas ou filosóficas, as primeiras especialmente entre os hindus, as segundas, entre os gregos².

Outros historiadores, tomando possivelmente o Egito como paradigma, encontraram-na nas necessidades práticas da agrimensura. De fato, os registros históricos testemunham ter existido, também no antigo Egito, uma classe de importantes oficiais chamados esticadores de cordas, encarregados de fazer muitas daquelas coisas que os antigos hindus faziam para supostamente construir altares e os topógrafos e construtores de hoje ainda fazem: esticar cordas para demarcar terrenos e usar fios de prumo para erguer paredes.

Sabe-se que esses antigos especialistas egípcios, tidos como os verdadeiros pais da Geometria, recebiam do Faraó a incumbência — bastante prática mas pouco religiosa ou filosófica — de restaurar os marcos de divisa das propriedades que as águas do rio Nilo periodicamente destruiam ou removiam.

Uma terceira corrente de historiadores identificou essa razão nas exigên-

¹Veja discussão a respeito na seção 8.2.1.

²Veja, por exemplo, à página 83, comentários a respeito desse assunto feitos sobre uma citação de Platão.

cias técnicas emanadas da construção de edifícios.

O arquiteto romano Vitruvius³, no primeiro volume de seu livro sobre Arquitetura [54], escrito muito tempo depois, sustentou a conveniência de um arquiteto usar, na confecção de plantas de edifícios, as mesmas técnicas de desenho — baseadas na régua e no compasso — usadas pelos pedreiros encarregados da realização da obra, de modo que o arquiteto possa mostrarlhes, com maior facilidade e precisão, o trabalho a ser realizado.

Sabemos hoje que além das razões dadas por Vitruvius, a qualidade e a segurança das obras arquitetônicas podem ficar facilmente comprometidas se, num estágio qualquer de sua construção, for permitida a utilização de alguma técnica ou instrumento imprecisos. Ora, a régua e o compasso, mesmo nas suas versões mais antigas, como cordas esticadas, são possivelmente os instrumentos mais precisos que se pode construir em tecnologias primitivas.

Curiosamente, todas essas razões e necessidades convergiram independentemente para a eleição da reta e do círculo como formas fundamentais. Como veremos no decorrer deste trabalho, a reta e o círculo surgem freqüentemente como "conseqüências" necessárias de leis matemáticas ou naturais.

Fatos naturais ou matemáticos são universais e, por isso, afetam qualquer cultura. Parece-nos mais sensato, portanto, admitir que está no poder que eles têm de incidir sobre as necessidades materiais dos seres humanos, de afetar o dia a dia de suas técnicas, que esses fatos — e suas conseqüências — acabem sendo escolhidos como objeto de reflexão e estudo, do que buscar as motivações para o estudo da geometria em devoções coletivas a preceitos dogmáticos, sejam eles religiosos, sejam filosóficos⁴.

É concebível que as civilizações antigas estivessem tão comprometidas com a qualidade e a segurança de suas construções quanto supostamente nós deveríamos estar hoje em dia. Afinal, suas construções eram, senão por menor zelo, ao menos por um menor conhecimento acerca da ciência dos materiais ou da engenharia das construções, mais sujeitas ao desabamento do que as nossas.

³Marcus Vitruvius Pollio, arquiteto e engenheiro romano, viveu no sec. 1 a.C.

⁴O ser humano tem sido tido como um ser racional, característica que o diferenciaria dos outros animais. A mim parece que o humano é, como os outros animais, um ser irracional. Mas com um defeito.

Restringir as técnicas de construção geométrica ao uso da régua e do compasso pode ter sido uma simples regra prática cujo único objetivo fosse o de garantir qualidade, confiabilidade e segurança às construções arquitetônicas.

Nós não podemos, portanto, descartar a hipótese de que tenha sido necessário, em alguma época da história dessas sociedades, excluir da prática da arquitetura, pela persuasão ou pela punição, aquelas pessoas inaptas ou adversas a respeitar regras socialmente relevantes. Somos convidados a considerar, em oposição à visão de alguns historiadores, a conveniência, para os administradores das coisas públicas dessas sociedades, de dogmatizar essas restrições convertendo-as num princípio filosófico ou num preceito religioso⁵.

Manual de Uso

O uso de qualquer instrumento exige conhecimento e destreza. Estes adquirem-se por meio de estudo e treinamento. Quem quer que se proponha a operar um instrumento complexo, logo sente a necessidade de buscar orientação no manual de uso desse instrumento. Quem sabe, as regras das cordas dos hindus tenham surgido não como preces em rituais religiosos, mas redigidas para servir aos construtores de então, como o manual de uso desses instrumentos?

Euclides

Uma espécie de manual do usuário da régua e do compasso, intitulado *Elementos*, foi escrito na Grécia, há mais de dois milênios pelo geômetra Euclides⁶. Nele encontram-se os elementos necessários para a realização de desenhos geométricos precisos por meio da régua e do compasso. Régua e compasso eram os instrumentos com os quais os arquitetos gregos⁷ contavam e o "Manual" de Euclides, sua referência.

terceira categoria (daqueles que não aceitam impor restrições a si mesmos ou que não têm imaginação para tanto), pela lei e outros tantos (aqueles que não admitem restrições próprias, nem que a sociedade o faça), pela polícia...

⁶Euclides (c. 300 A.C.) foi o mais proeminente matemático da antigüidade grega, imortalizado por seus *Elementos*. Embora o conteúdo dos *Elementos* tenham sido, em sua maior extensão, compilados a partir de trabalhos de antecessores, é na organização desse

material que reside a maior contribuição de Euclides à Geometria e à Ciência.

⁷Assim como todos seus sucessores na civilização ocidental.

⁵Hoje em dia restrições são fixadas em *normas* e sua obediência, imposta por leis.

Nem sempre as leis são suficientes para restringir abusos. Alguns têm seu comportamento delimitado por seus próprios *princípios*, outros, por suas próprias *crenças*, uma

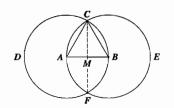
2.3 Construções geométricas

Nesta seção nós examinaremos algumas das proposições constantes do livro de Euclides, como exemplos de enunciados de problemas de localização de pontos no plano, bem como da obtenção de suas soluções com o auxílio da régua e do compasso.

Proposição 1. Sobre um segmento de reta dado AB, construir um triângulo equilátero.

- 1. Com centro em A, traçamos a circunferência BCD que passa por B;
- 2. Com centro em B e passando o compasso por A, traçamos a circunferência ACE e
- 3. partindo do ponto C onde uma circunferência corta a outra desenhamos os traços retos CA e CB que o ligam aos pontos A e B, completando o triângulo equilátero.

Triângulo Equilátero



Proposição 2. Determinar a mediatriz de um segmento AB dado.

A solução deste problema está, de certa forma, incluída na construção do triângulo equilátero. Referimo-nos aqui não apenas a um, mas aos dois pontos onde as circunferências se cruzam. Assim, devemos dar um nome também ao outro ponto, digamos, F. Feito isso, traçamos o segmento de reta CF que é a mediatriz do segmento AB.

Proposição 3. Determinar a bissetriz de um ângulo ABC dado.

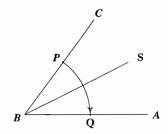
A bissetriz de um ângulo é a semi-reta que, tendo origem no vértice desse ângulo, o divide em dois ângulos iguais. Para determinar a bissetriz de um ângulo $\angle ABC$ dado, seguimos o procedimento:

- 1. Escolha, arbitrariamente, um ponto P sobre a reta BC;
- Determine o ponto Q, onde a circunferência de centro em B e que passa por P cruza a reta AB;
- 3. Construa a mediatriz do segmento PQ, cujas extremidades foram obtidas nas etapas $1 \ {\rm e} \ 2$ da figura acima.

A mediatriz BS do segmento PQ é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

Mediatriz





Ponto Médio

Proposição 4. Determinar o ponto médio M de um segmento AB dado.

A solução deste problema está contida na solução do problema anterior. De fato, o ponto médio M do segmento AB está na interseção dos segmentos AB e CF. Esse ponto divide também o segmento CF em duas partes iguais.

2.4 As regras do jogo

Embora não seja esse o meu ofício, somente para apreciar o raciocínio quando fosse o caso, eu recompensaria bem quem me fizesse compreender o que se há de medir para construir um edifício proporcionado e de onde, e por quais razões, se derivam tais medidas (...)

Filarete⁸, Tratado de Arquitetura

Observando as proposições discutidas na seção 2.3 nós constatamos que resolver um problema geométrico consiste em determinar, valendo-nos apenas da régua e do compasso, as posições de pontos desconhecidos, a partir de pontos conhecidos. Podemos então definir:

pontos dados, são aqueles cujas posições no plano estão indicadas no próprio enunciado do problema que, neste caso são os pontos $A \in B$.

pontos derivados, são aqueles cujas posições no plano devem ser determinadas a partir dos dados, por meio de procedimentos que envolvem exclusivamente a régua e o compasso. Neste caso, C é um ponto derivado, determinado a partir dos pontos A e B.

Os pontos dados são, por definição, conhecidos. Os pontos derivados tornamse conhecidos a partir do momento em que suas posições forem determinadas.

Assim, na proposição 1, os pontos dados são A e B. A partir deles, valendo-nos apenas do compasso, derivamos os pontos C e F. Por essa razão, estes dois últimos pontos são denominados derivados.

⁸Antonio Averlino Filarete (1400~1469), arquiteto e escultor italiano [49].

Na proposição 3, são dados os mesmos dois pontos, A e B. A partir deles, derivamos os pontos C, F e M. Os dois primeiros são obtidos conforme procedimento estabelecido na solução da proposição 1 e M é obtido com o auxílio da régua.

Na proposição 4 são dados dois pontos⁹, B e P. Os pontos derivados neste caso são o ponto Q e um quarto ponto (não mostrado na figura) usado como referência para o traçado da mediatriz do segmento PQ.

Como já vimos, no desenho geométrico não é permitido o uso de qualquer instrumento que não a régua e o compasso, nem tampouco é permitido o traçado a mão livre. Ainda mais: esses instrumentos não podem ser usados de qualquer forma. O único efeito que um desenhista pode extrair de uma régua e de um compasso — e que são aceitos pelas regras do Desenho Geométrico — é a linha que a ponta traçadora usada (de um lápis, de uma caneta ou de um tira-linhas) deixa na superfície do papel. Isso quer dizer que os pontos somente poderão ser derivados de outros pontos conhecidos, se eles se encontrarem no cruzamento de duas dessas linhas.

No desenho com o compasso, essas linhas servem apenas como traços auxiliares, construídos exclusivamente para determinar a posição de pontos derivados; elas são como os *andaimes* das construções de um edifício que, ao final, são removidos.

Nós podemos então concluir que há apenas *três* formas "legítimas" de se *derivar*, por meio da régua e do compasso, um ponto a partir de pontos *dados*:

- na interseção de duas retas,
- na interseção de uma reta com uma circunferência ou
- na interseção de duas circunferências.

Os procedimentos segundo os quais se obtem os pontos de interseção de

Derivação de pontos

Intersecões

 $^{^9}$ Sobre P, sabemos apenas que se trata de um ponto arbitrário, tomado sobre o lado BC do triângulo. Não existem regras do desenho geométrico para determinar sua posição; deixa-se ao "bom-senso" do desenhista a escolha de uma localizção conveniente, que possibilite a obtenção de um resultado preciso. Se, ao colocarmos este problema ao computador, deixarmos a localização de P por conta de seu bom-senso, estaremos sendo imprudentes. Devemos, então, tratar P como se este fosse um ponto desconhecido cuja posição está por ser determinada e tratá-lo adequadamente, executando, por exemplo, um procedimento de interpolação.

duas linhas — sejam elas retas ou circulares — formam as três operações fundamentais do desenho geométrico com régua e compasso.

2.5 Outros instrumentos para localizar pontos

Na seção 2.3 mostramos, através de alguns exemplos práticos, como se usa a régua e o compasso para localizar pontos no espaço. Mas o problema da localização de pontos no plano do desenho é tão recorrente que outros instrumentos são também usados pelos desenhistas, além da régua e do compasso.

A Régua Graduada

Um instrumento muito usado no Desenho Técnico — embora esteja entre os proibidos no Desenho Geométrico Clássico — é a régua graduada. O uso da régua graduada foi imposto pelo aumento da complexidade das técnicas industriais e da expansão dos mercados.

Quando quisermos comunicar a um estranho versado na arte de desenhar com régua e compasso, o método de solução de um problema semelhante aos examinados na seção 2.3, podemos fazê-lo apenas por palavras¹⁰.

Porém, se o desenhista quiser comunicar a seu interlocutor o comprimento de um segmento de reta ou do raio de um círculo, ele não poderá fazê-lo apenas por palavras¹¹, mas deverá, em vez disso, remeter-lhe algum objeto material a partir do qual ele possa derivar esse comprimento. Se esse objeto for a régua graduada, não será necessário remeter objeto algum pois, supostamente todo bom desenhista dispõe de pelo menos uma delas. Tomando-a por referência, pode-se comunicar comprimentos transmitindo a nosso interlocutor apenas os números da escala e, para isso, palavras são o bastante. É assim que o desenhista usa a régua graduada para localizar

¹⁰Ainda que não seja essa a forma usual de se comunicar problemas resolvidos a estudantes de Geometria — os professores (e seus alunos) preferem textos ilustrados — esse modo de comunicação é possível se for adotado um protocolo de comunicação (ver discussão no capítulo 15) e imperativo quando nosso interlocutor é um computador.

¹¹Hoje em dia pode-se comunicar um comprimento fazendo referência a valores universais que podem ser reproduzidos em qualquer ponto do universo, sem a necessidade de se transmitir matéria. Esses comprimentos são os de ondas luminosas de cores muito bem determinadas. O metro, medida universal de distância, passou a ser definido em função da radiação emitida no vácuo pelo átomo de criptônio 86. Mas que desenhista pode ser tão extravagante a ponto de trocar sua "régua graduada" por uma maquinaria capaz de dar-lhe tal referência?

pontos no plano. Os métodos mais comuns são os das coordenadas cartesianas, para o que o desenhista pode contar com o auxílio de esquadros e o das coordenadas polares, para o que o desenhista vale-se do transferidor¹².

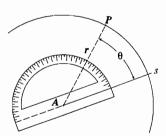
O transferidor é um instrumento de desenho destinado a auxiliar a localização de pontos no plano, segundo o sistema de coordenadas polares. Com o transferidor pode-se resolver o seguinte problema:

Transferidor

Determinar um ponto P que esteja a uma dada distância r de um ponto conhecido A e forme com uma reta dada s que passa por A, um ângulo θ .

Obtem-se a solução desse problema de acordo com o procedimento descrito a seguir:

- traça-se a circunferência de centro em A e raio r;
- fazendo a linha de referência do transferidor superpor-se à reta s, desliza-se o instrumento nessa direção até que seu centro coincida com o ponto A;
- marca-se um ponto no papel, digamos R, na posição correspondente à leitura do ângulo θ feita sobre a escala.
- traça-se a linha reta que passa pelos pontos A e R;
- ullet o ponto P está na interseção dessa reta com a circunferência traçada na etapa 2.5.



¹²O uso de esquadros e transferidores é também proibido no Desenho Geométrico Clássico.

Pontos notáveis do triângulo

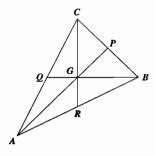
O triângulo é uma figura plana elementar e um dos componentes fundamentais do desenho geométrico. As principais técnicas de localização de pontos no espaço são baseadas nas propriedades do triângulo e uma disciplina da matemática, a Trigonometria, foi dedicada ao estudo das técnicas de localização de pontos no plano, por meio das propriedades dos triângulos.

Pode-se definir o triângulo como a figura formada por três retas que se cortam duas a duas. Os pontos de interseção dessas retas são os *vértices* do triângulo, os segmentos que unem esses vértices, seus *lados* e as regiões do plano que as retas determinam, são os *ângulos* do triângulo.

O segmento de reta que liga um vértice a um ponto da reta que passa pelos outros dois, formando com esta, um ângulo reto, é denominado altura relativa ao primeiro vértice. O segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio dos outros dois, é denominado mediana relativa àquele vértice. A reta que divide um ângulo do triângulo em duas partes iguais é a bissetriz desse ângulo.

Muitas propriedades dos triângulos podem ser descritas em termos de seus pontos notáveis, a saber, o baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro. A seguir, examinaremos cada um desses pontos.

3.1 Baricentro e medianas



No triângulo ABC, cada um dos lados BC, AC e AB é dividido ao meio. Sejam P,Q e R, respectivamente, os pontos médios desses segmentos. As linhas AP,BQ e CR são denominadas medianas do triângulo ABC.

Pode-se mostrar que as três medianas encontram-se num mesmo ponto G, denominado baricentro do triângulo. O baricentro corta cada uma das medianas a $\frac{2}{3}$ de seu comprimento, tomado a partir do seu vértice correspondente, isto é, divide as medianas na proporção 2:1:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GP};$$
 $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GQ}$ e
 $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GR}.$ (3.1)

Centro de massas

A palavra baricentro designa centro de massas ou centro de gravidade do triângulo. Para verificar essa propriedade física dos triângulos, pode-se fazer o seguinte experimento:

Recorte um triângulo em papelão e atravesse-o por uma agulha em seu baricentro, de modo que ele gire livremente em torno dessa agulha, feita de eixo. Gire o triângulo de qualquer ângulo em torno da agulha e abandone-o, sem imprimir-lhe nenhum impulso. Ele permanecerá parado, em equilíbrio, na posição em que foi abandonado.

Experimente, em seguida, atravessar a agulha em qualquer outro ponto do triângulo: ao repetir o experimento dessa forma, você observará que ele terá um comportamento diferente do caso anterior. O triângulo não se manterá mais na posição em que você o abandonar. Em vez disso, ele irá oscilar em torno da agulha, como um pêndulo, até parar, sempre na mesma posição.

Determinação do Baricentro Nas técnicas de construção geométrica com o auxílio da régua e do compasso, determina-se cada um dos pontos P,Q ou R segundo o método descrito na proposição 3 da seção 2.3 e o baricentro G é determinado a partir da interseção de quaisquer dois dos segmentos AP,BQ e CR.

Quando se trata de usar o computador, o método utilizado para resolver esse problema é diferente. Fornecemos ao computador uma expressão

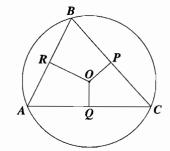
algébrica onde figuram os nomes dos vértices do triângulo. A partir das coordenadas desses vértices, o computador calcula as coordenadas do baricentro. Adiante no capítulo 5, quando tratarmos da representação de pontos por números complexos, veremos que o baricentro é determinado pela expressão

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

3.2 Circuncentro e mediatrizes

No triângulo ABC, as mediatrizes (ver 2.3) dos lados do triângulo, cruzam-se num mesmo ponto O, denominado circuncentro. O circuncentro é o centro do círculo circunscrito ao triângulo. Os pontos P,Q e R são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos BC, AC e AB.

A localização do ponto O (circuncentro do triângulo ABC) pode ser obtida pelos métodos de construção expostos na resolução da proposição 2 da seção 2.3.



Para instruir o computador a determinar as coordenadas do circuncentro do triângulo ABC usamos a notação

$$X = \mathrm{Cc}(A, B, C)$$

3.3 Ortocentro e alturas

Sejam AP, BQ e CR as três alturas do triângulo ABC. A altura AP é o segmento de reta perpendicular ao lado BC que passa por A. O ponto P é denominado pé da altura do vértice A sobre o lado BC. As alturas cruzam-se num mesmo ponto O, denominado ortocentro

Para se determinar a altura AP, por exemplo, traçam-se duas circunferências, uma de centro em C e raio \overline{AC} e outra de centro em B e raio \overline{AB} . Essas duas circunferências encontram-se nos pontos A (por construção) e X, simétrico a A em relação ao lado BC do triângulo. O ponto P, pé de A sobre BC é a interseção das retas AX e BC. Nós denotaremos esses pontos

Propriedades do Ortocentro 34

por meio das expressões

$$A = \operatorname{CxCP}(C, A, B, A)$$

$$X = \operatorname{CxCP}(B, A, C, A)$$

$$P = \operatorname{LxL}(B, C, A, X)$$
(3.2)

onde a função CxCP(C, A, B, A) designa o ponto de interseção de duas circunferências e LxL designa a interseção de duas retas¹.

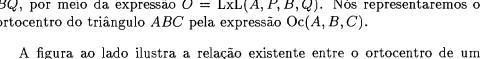
Se estivéssemos encarando as expressões (3.2) do ponto de vista estritamente algébrico, poderíamos representar o ponto P por meio de uma expressão mais "compacta"

$$P = LxL(B, C, A, CxCP(B, A, C, A))$$
(3.3)

pois, dessa forma, não precisamos mais no referir a um ponto intermediário X, uma vez que ele estaria como que embutido na expressão (3.3).

O artifício de "substituir" valores, muito comum na Álgebra, não pode no entanto ser adotado no desenho geométrico feito com régua e compasso pois, neste caso, todos os pontos intermediários de um procedimento executado com esses instrumentos — e o ponto X é um deles — devem estar representados no papel. Os outros pontos, Q e R são determinados analogamente.

Para determinar o ortocentro O, basta conhecer dois dos três pontos P, Q e R — digamos, P e Q — e determinar a interseção das alturas AP e BQ, por meio da expressão $O = \operatorname{LxL}(A, P, B, Q)$. Nós representaremos o ortocentro do triângulo ABC pela expressão $\operatorname{Oc}(A, B, C)$.



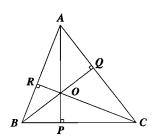
O triângulo quádruplo de ABC se obtém traçando por cada vértice, uma reta paralela ao lado oposto. Essas retas cruzam-se nos pontos PQR que formam o triângulo quádruplo de ABC.

triângulo ABC e o circuncentro do seu triângulo quádruplo PQR.

É fácil constatar as igualdades dos segmentos

$$AP = AR = BC$$

 $BP = BQ = AC$
 $CQ = CR = AB$



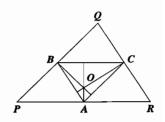
Triângulo Quádruplo

¹A interpretação para essas notações está descrita na seção 15.2.

que implicam na igualdade dos 4 triângulos

$$ABC = QCB = BAP = CRA$$

- 1. O circuncentro O do triângulo PQR está, (ver seção 3.2), no encontro das mediatrizes de seus lados PQ, PR e QR.
- Como A é o ponto médio do segmento PR; B, o ponto médio de PQ e C, o ponto médio de QR, as mediatrizes desses segmentos passam por esses pontos.
- 3. Como os lados AB, BC e AC são, respectivamente paralelos aos lados QR, PR e PQ, as mediatrizes dos lados do triângulo PQR são também perpendiculares aos lados do triângulo ABC e passam por seus vértices.



Portanto, o circuncentro O do triângulo PQR coincide com o ortocentro do triângulo ABC.

A normal traçada de um vértice de um triângulo a seu lado oposto, cruzao num ponto denominado $p\acute{e}$ da altura. Consideremos um triângulo ABC; o pé P da altura tomada do ponto B sobre a base AC pode ser expressa na forma

Pé da Altura

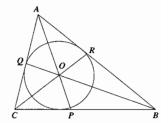
$$P = \operatorname{Ft}(A, C, B)$$

Observe a ordem segundo a qual os pontos $A, B \in C$ são especificados como argumentos da função Ft. Assim, os dois primeiros pontos que constam da lista de argumentos definem o lado sobre o qual a altura é tomada e o último ponto representa o terceiro vértice do triângulo.

3.4 Incentro e bissetrizes

No triângulo ABC, as retas AP,BQ e CR, dividem, respectivamente, os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC, em partes iguais. Essas retas são denominadas bissetrizes dos ângulos do triângulo. Elas interceptam-se num mesmo ponto O ao qual se dá o nome de incentro do triângulo pois ele é o centro do círculo inscrito a esse triângulo.

O procedimento para a determinação o incentro O de um triângulo, por meio da régua e do compasso, está descrito na proposição 4 da seção 2.3. O método baseado no cálculo está descrito na seção 6.2.4.



O incentro é denotado pela expressão

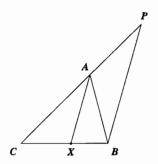
Propriedades das Bissetrizes

No triângulo ABC, AX é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Prolongue-se o lado AC até o ponto P, tal que AP=AB.

O triângulo ABP assim construído é isósceles e, portanto,

$$\angle PBA = \angle BPA. \tag{3.4}$$

Porém, como o ângulo $\angle BAC$ é complementar a $\angle BAP$, temos



$$\angle BAC = \angle PBA + \angle BPA \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) concluímos que

$$\angle PBA = \frac{\angle BAC}{2}$$

e que AX e PB são paralelas.

Do teorema de Tales sobre retas paralelas, conclui-se que

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

e que a bissetriz AX divide o lado oposto BC em dois segmentos, XB e XC, cujos comprimentos são proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes AB e AC, do triângulo ABC.

Denotando por s o semiperímetro do triângulo, i.e,

$$s = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{2}$$

então o raio r do círculo inscrito será igual a:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

A bissetriz de cada ângulo de um triângulo cruza o lado oposto a esse ângulo num ponto denominado pé da bissetriz.

Leonhard Euler [1707–1783] demonstrou que o ortocentro P, o baricentro Q e o circuncentro R de um triângulo ABC estão numa mesma reta, denominada linha de Euler do triângulo.

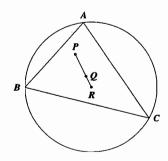
Esses pontos, como já foi visto acima, podem ser determinados pelas expressões:

$$P = Oc(A, B, C)$$

$$Q = (A + B + C)/3$$

$$R = Cc(A, B, C).$$

Linha de Euler



in in provide

O Pixel

4.1 Reticulação do plano

Um quadro é uma janela através da qual observamos uma seção do mundo visível.

A idéia que inspirou o desenvolvimento da Teoria da Perspectiva está resumida na citação acima, retirada do livro della Pittura, escrito no século XV por Leon Battista Alberti¹. Ela inspira-nos a ver o ato de desenhar como uma operação precisa, matemática, quase automática, de marcar na tela aqueles pontos em que esta é atravessada pelos raios de luz que, partindo de cada ponto do objeto, seguem em linha reta rumo ao olho do desenhista.

O desenhista, pintor e gravador alemão Albrecht Dürer (1471-1528) ilustrou, nos desenhos aqui reproduzidos nas figuras 4.1-4.3, algumas técnicas inspiradas nessa idéia. Na figura 4.1 vê-se o desenhista usando uma moldura de madeira como se fosse a janela descrita por Alberti para reproduzir em sua tela (transparente), o modelo desejado.

Na figura 4.2, o artista colocou, entre si e sua cena, um anteparo transparente e quadriculado de tal modo que, observando seu tema, como se através

¹Alberti, Leon Battista, humanista e arquiteto italiano (Gênova 1404 — Roma 1472). Seus tratados de pintura (1435) e de arquitetura (iniciado em 1450) fazem de Alberti o primeiro teórico das artes do Renascença [31].

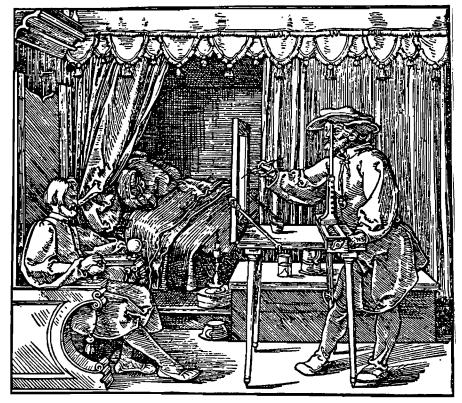


Figura 4.1: O desenhista do homem sentado - A. Dürer (1472-1528)

de uma janela, pudesse enxergar a imagem não mais como um todo, mas decomposta em múltiplas imagens menores, cada uma delas contida numa das regiões retangulares formadas pelo quadriculado.

O quadriculado construído no anteparo serve para auxiliar o desenhista a transferir com maior precisão para o papel, aquilo que ele vê na janela. Assim, em lugar de copiar, de um só golpe, toda a imagem no papel, ele poderá tratar sua cena por partes. Ao fazê-lo, sua tarefa torna-se mais simples pois ele poderá tratar cada uma delas de maneira quase independente das demais. De fato, ao desenhar a imagem contida em cada uma das quadrículas, basta concentrar-se no que está contido nela e, quando muito, levar em conta somente o que está na vizinhança. Dessa forma, elegendo alguns pontos de referência dentro do próprio quadriculado, poderá concentrar-se apenas nos pormenores e proporções observados em cada quadrícula, livrando-se da tediosa tarefa de determinar as posições relativas e proporções entre os

elementos do todo.



Figura 4.2: O desenhista da mulher deitada - A. Dürer (1472-1528)

Pode-se perceber que quanto menor a distância que separa duas linhas consecutivas do quadriculado, tanto mais preciso e detalhado será o resultado da transposição para o papel daquilo que se vê na vidraça. As tramas muito espaçadas demandam por uma maior habilidade do desenhista, pois em cada quadrícula há uma cena complexa, ao passo que aquelas muito finas, tornam o processo de transposição uma atividade quase automática. Portanto, quando se trata de automatizar o processo de transcrição da imagem e não de buscar uma forma de expressão artística, é desejável um quadriculado estreito, formado por células bem pequenas.

A idéia de quadricular a superfície do desenho tem duas conseqüências importantes. De um lado, ela está por trás das técnicas matemáticas de localização dos pontos no plano, o chamado sistema de coordenadas e, de outro, ela está na base das técnicas de impressão e representação de figuras, adotadas pela maioria dos equipamentos de geração de arte-final.

4.2 Localização de pontos no plano

A cada ponto do retângulo da janela corresponde um ponto no retângulo do papel. A fig. 4.3 mostra como é trabalhoso estabelecer essa correspondência.

A técnica da superfície quadriculada simplifica essa correspondência e abre a possibilidade para localizarmos uma posição da tela por meio de um par de números: o primeiro número identifica a coluna do quadriculado e o segundo, a coluna desse mesmo quadriculado onde se encontra o elemento

de nosso interesse. As contagens podem, por exemplo, seguir a convenção da direita para a esquerda para a localização da coluna e de baixo para cima para a localização da linha.

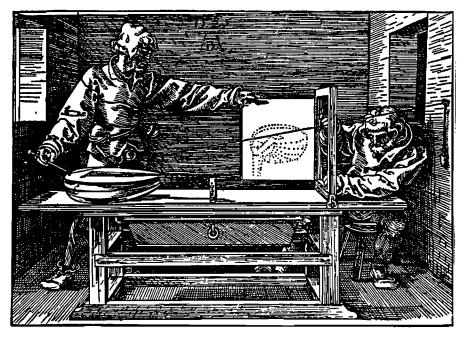


Figura 4.3: O desenhista do alaúde A. Dürer (1472 1528)

Números coordenados

A esse par de números inteiros obtidos da contagem de quadrículas convencionou-se dar o nome de sistema de coordenadas; nele, o número de quadrículas contadas na direção horizontal é usualmente denotado pela letra minúscula x e o número de quadrículas contadas na direção vertical, pela letra minúscula y.

A figura 4.4 exemplifica, esquematicamente, como um elemento M de coordenadas x=7 e y=8 da figura pode ser localizado numa superfície quadriculada.

É difícil precisar quando foi inventada essa técnica de localização de pontos numa superfície. Ela é certamente tão antiga quanto os mapas dos quais herdamos os conceitos de latitude e longitude. Nos mapas imagina-se a superfície esférica do globo terrestre quadriculada da mesma forma que se fez na moldura ilustrada na figura. Costuma-se atribuir ao filósofo e matemático francês R. Descartes a idéia de associar essas distâncias coorde-

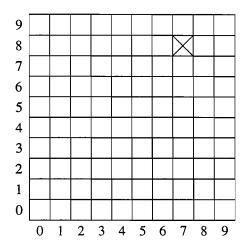


Figura 4.4: Pixel com coordenadas M = [7,8]

nadas a expressões algébricas, dando início ao que se conhece hoje em dia por Geometria Analítica.

4.3 Pixel

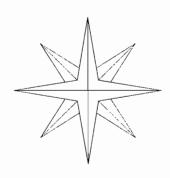
Podemos, por meio de uma operação mental, aproximar duas linhas consecutivas do reticulado tanto quanto desejarmos. Se as linhas estão em nossa mente, elas são imaginárias e nenhuma restrição as limita. Essa forma de raciocinar é uma das que podemos adotar para formar a idéia abstrata de um ponto.

Na prática, no entanto, há um limite para reduzirmos as distâncias que separam duas linhas consecutivas no reticulado. Este limite será atingido quando essas distâncias alcançarem as dimensões da ponta do lápis ou do pincel que estiver sendo usado para a representação da figura. A partir daí, qualquer redução das dimensões do reticulado será supérfluo pois dela não resultará nenhum aprimoramento do resultado. À menor quadrícula compatível com as dimensões do lápis ou do pincel usado, damos o nome de pixel, um neologismo obtido da contração das palavras que compõem a

expressão da língua inglesa picture element (elemento ou átomo de figura).

O pixel não tem uma dimensão absoluta como o metro ou a polegada. Suas dimensões, como vimos acima, dependem do instrumento de desenho usado para gravá-lo na tela. A unidade física mais natural para representar as dimensões de um pixel seria a de área (mm² ou in²), mas a prática consagrou medi-lo em termos do número de linhas (que determinam o reticulado) por unidade de comprimento (linhas por milímetro - l/mm - ou linhas por polegada - lpp).

Coordenadas



Com a utilização dos números reais para localizar os pontos na tela, as coordenadas deixaram de ser representadas pelos números de quadrículas para passar a serem interpretadas como distâncias: o primeiro número informa a distância x, tomada na direção horizontal, entre o ponto objeto e uma reta vertical de referência (no caso das longitudes, a referência é um círculo máximo que passa pelos pólos e pela cidade de Greenwich, na Inglaterra) e o segundo número, a distância y tomada na direção vertical, entre o ponto e uma reta horizontal de referência (no caso das latitudes, a referência é a linha do equador).

Se, nesse sistema de coordenadas, nós tomarmos como unidade de comprimento a largura de um pixel, então a posição do ponto no plano poderá ser obtida, novamente, por meio da contagem desses pixels. Neste trabalho pixels e pontos geométricos serão confundidos como uma mesma entidade. Rigorosamente, esta confusão somente é aceitável quando o tamanho do pixel tende a zero. No entanto, para propósitos práticos, esta aproximação é sofrível pela maioria das aplicações. Nós representaremos os pixels ou pontos geométricos por meio de letras romanas maiúsculas A,B,...,Z, isoladas, ou afetadas de subscritos ou índices, como nos exemplos $P_1,H_{12},Q_3,...,R_7$, etc.

Um pixel de nome P, por exemplo, será representado por um par de números dentro de um par de colchetes e separados por uma vírgula, como em P = [x, y].

Exemplos:

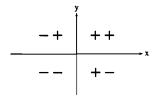
$$M = [2,4]$$

 $H3 = [-120,40]$

O pixel de coordenadas [0,0] é denominado a origem do sistema de coordenadas. Ele está na interseção das retas horizontal e vertical de referência.

A escolha da origem é arbitrária: qualquer ponto do plano (ou da esfera no caso das latitudes e longitudes) pode ser usado para esse fim. A experiência tem demostrado, no entanto, que a melhor posição para localizar a origem é o centro do papel. Isso porque as operações de simetria, muito comuns na arte do design, assumem sua forma mais simples com essa convenção.

O valor da coordenada x dos pixels localizados à direita da reta vertical de referência será representada por um número positivo e, se localizado à esquerda dessa reta, negativo. Similarmente, o valor da coordenada y do pixel será representada por um número positivo se localizado acima da reta horizontal de referência e negativo se localizado abaixo dessa reta. A figura ao lado mostra essa convenção de sinais.



· . · :

, (, (s

.

.

<u>:</u> .

1

Números complexos

Desenhos dependem sempre da solução de problemas geométricos. Num momento pode ser necessário determinar-se, por exemplo, o centro ou o eixo de simetria de um motivo qualquer, noutro, pode-se estar buscando o ponto de concordância de duas curvas.

Ao lidar com instrumentos traçadores, o desenhista mantém um contato íntimo com os pontos marcados no papel e interage diretamente com os elementos de seu trabalho, de modo que esses problemas geométricos são vistos e tratados artesanalmente, caso a caso. Porém, ao usar o computador, ele perde essa intimidade e muito da informalidade, pois não há interlocutor mais formal — nem mais intolerante com a quebra de etiqueta — do que o computador.

Ainda que os programas de computador sejam codificados para reproduzir no vídeo o trabalho do desenhista, os componentes do desenho que se vê na tela não estão lá, mas ocultos — como coordenadas, parâmetros numéricos ou outras formas de representação, dispostos em estruturas de dados complexas — gravados na memória do computador.

Por isso, quando o computador substitui os instrumentos mecânicos de desenho, torna-se necessário modificar os procedimentos para resolver os problemas geométricos que aparecem ao longo do desenvolvimento de uma obra. Essa transição obriga-nos a buscar novos meios para contornar as dificuldades de comunicação que afastam o desenhista de sua obra. Essa

distância se reduz mediante a formulação de uma linguagem na qual as soluções de problemas geométricos possam ser comunicadas na forma de mensagens precisas e facilmente inteligíveis.

Neste capítulo apresentaremos a álgebra dos números complexos. Essa teoria matemática, velha de mais de dois séculos, nos proporciona as fontes de onde derivamos a notação e a sintaxe dessa linguagem.

5.1 Álgebra das operações geométricas

Nesta seção estudaremos as regras matemáticas para fazer "contas" com segmentos de reta. A idéia de fazer contas com os comprimentos de segmentos de reta não é estranha. Nenhum estudante ficará surpreso se lhe pedirem para determinar a área de um retângulo cujos lados medem, digamos, 5m e 8m, respectivamente. Pensando apenas nos comprimentos desses segmentos de reta (os lados do retângulo), um estudante medianamente aplicado não terá nenhuma dificuldade em perceber que, para chegar ao resultado, ele deverá efetuar uma multiplicação. Ele multiplicará dois números, o comprimento de um lado do retângulo pelo comprimento do outro lado.

Se a única propriedade geométrica de um segmento fosse o seu comprimento, poderíamos parar esta seção por aqui. Mas um segmento de reta tem outras propriedades igualmente importantes. Uma delas é a sua posição e outra, sua direção: um segmento de reta pode ser disposto, no plano, em qualquer posição e em qualquer direção.

Em 1797, Caspar Wessel¹, topógrafo norueguês, apresentou à Academia Real de Ciências da Dinamarca, num trabalho intitulado Acerca da representação analítica da direção [56], as regras matemáticas para fazer "contas" com segmentos de reta, onde posição e direção — as duas propriedades dos segmentos de reta que não se conseguia tratar por meio das operações da álgebra ou da aritmética ordinárias — eram contempladas.

Wessel, como topógrafo, estava bastante familiarizado com a localização

¹Caspar Wessel (1745–1818). Embora represente a primeira apresentação clara e científica da álgebra dos números complexos, seu trabalho tornou-se conhecido fora do círculo de leitores de sua língua nativa. somente 100 anos depois de sua publicação, quando esta foi traduzida para o francês!

dos pontos no plano por meio de coordenadas cartesianas. Nesse sistema, a posição de um ponto P é representada por meio de um par de números [x,y], onde x e y representam, respectivamente, as distâncias do ponto P às linhas vertical e horizontal de referência. Distâncias são medidas em unidades métricas de comprimento, como o centímetro ou a polegada.

Antes de apresentarmos a solução encontrada por Wessel para essa representação, faremos aqui uma breve digressão acerca de medidas de comprimento.

A natureza do comprimento

Imaginemos que nos é fornecida a posição de um ponto P no papel por meio de suas coordenadas, dadas na seguinte forma

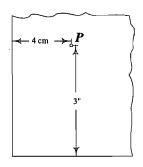
O ponto P dista $4\,cm$ da margem esquerda e 3" da margem inferior.

Aqui, margens esquerda e inferior do papel fazem as vezes das linhas vertical e horizontal de referência de um sistema de coordenadas. Os dados que recebemos não estão na mesma unidade: o primeiro nos foi comunicado em centímetros e o segundo, em polegadas. Não podemos, portanto, representar as coordenadas do ponto dado na forma [4,3], omitindo as unidades nas quais os números são fornecidos. Em vez disso, devemos explicitar essas unidades, escrevendo [4 cm,3"], ou, sabendo que a cada polegada correspondem 2.54 cm, escrevendo [4 cm,3 × (2.54 cm)]. Para tornar mais clara a idéia de como devemos tratar as dimensões métricas que aparecem nessas coordenadas, rescrevemos na forma [4 × (1 cm),3 × (2.54 cm)].

Acabamos de ver como as unidades de comprimento aparecem na representação das coordenadas de um ponto. Vamos examinar agora a seguinte forma de expressar a posição do ponto no papel

O ponto P está situado a 4 cm horizontais e 3 polegadas verticais.

Parece não haver, em essência, nenhuma diferença nas duas formas de se apresentar as coordenadas do ponto P. Pelo menos para quem não pense num centímetro "horizontal" como algo diferente de um centímetro "vertical". Mas a sensação de que havia "qualquer coisa" de diferente nesses dois centímetros devia perturbar, ao menos dissimuladamente, a intuição de Wessel quando este concebeu a forma analítica para representar a direção.



Essas considerações sugerem-nos adotar duas unidades de comprimento diferentes², uma para o "centímetro horizontal", que representamos por cmh e outra para o "centímetro vertical", representado por cmv. Para estes, as coordenadas do ponto P serão representadas pela expressão

$$[4 \times (1cmh), 3 \times (2.54cmv)] = [4 \times (1cmh), 7.62 \times (1cmv)].$$

Dessa forma, a representação das coordenadas de um ponto qualquer no papel teria a forma

$$[x \times (1cmh), y \times (1cmv)].$$

Embora esse não tenha sido o caminho seguido por Wessel, tudo se passa em seu trabalho, como se ele tivesse estabelecido as seguintes identidades³:

$$1 cmh = 1 cm$$
$$1 cmv = i \times 1 cmh = i cm$$

Assim, um ponto de coordenadas $[x \times (1 \ cmh), y \times (1 \ cmv)]$ passaria a ser representado da seguinte forma:

$$x cmh + y cmv = x cm + yi cm = (x + iy) cm$$

ou, resumidamente,

$$[x,y] = x + iy. \tag{5.1}$$

² A idéia de uma unidade horizontal de medida diferente de uma unidade vertical, não faz parte das idéias correntes sobre o assunto. Ela ocorreu ao autor como meio didático para dar ao leitor uma sensação de necessidade à unidade imaginária i dos números complexos. A suspeita de que exista uma diferença entre o metro horizontal e o metro vertical não é despropositada. Embora na Física se adote — ao que parece, sem discussão — a hipótese da isotropia do espaço (as propriedades do espaço são as mesmas em todas as direções), tal hipótese pode não passar de uma aproximação conveniente. A aceitação ou rejeição dessa hipótese depende de encontrar-se um meio objetivo (experimental) para estabelecer se a distância entre duas marcas numa régua varia ou não com a direção dessa régua no espaço.

 $^{^3}$ Wessel denotou o "fator" que converte a unidade horizontal na unidade vertical pelo símbolo $+\epsilon$. No entanto, como a obra de Wessel não foi suficientemente divulgada. prevaleceu a notação proposta por Euler, segundo a qual esse "fator de conversão" se representa pelo símbolo \imath .

5.1.1 Tabuada

Sabendo que ao multiplicar o ponto de coordenadas [1,0], pelo número -1, obtém-se o ponto de coordenadas [-1,0], Wessel teria se indagado como poderia "multiplicar" as coordenadas desse mesmo ponto pelo novo número que ele criara (o fator de conversão de direção i). Não lhe seria possível, porém, fazer essa operação sem conhecer a tabuada. Wessel construiu então a seguinte tabuada de multiplicação:

×	1	ı	-1	-1
1	1	ı	-1	-1
ı	ı	-1	-ı	1
-1	-1	$-\imath$	1	ı
-ı	$-\imath$	1	ı	-1

-1 +i +1

A primeira linha dessa tabuada nos mostra que quando se multiplica por +1 qualquer dos quatro pontos marcados na figura, seus valores não mudam.

A segunda linha é a mais interessante. Quando "multiplicamos" qualquer um dos pontos por +i, obtemos como efeito, um novo ponto: o ponto +1 passa para a posição +i, o ponto +i passa para -1, o ponto -1 vai para -i e a posição deste último, muda para +1.

Observando o círculo ao lado, constatamos que qualquer que seja o ponto considerado, o efeito de multiplicá-lo por i será faze-lo girar $\frac{1}{4}$ volta em torno da origem, no sentido anti-horário.

Examinando a terceira linha da tabuada, podemos constatar, analogamente, que ao multiplicar um ponto por -1, o efeito que se obtém é o mesmo que fazê-lo dar $meia\ volta\ em\ torno\ da\ origem\ das\ coordenadas.$

A última linha da tabuada mostra que ao multiplicarmos qualquer um dos pontos por $-\imath$, giramos o ponto de $\frac{3}{4}$ de volta no sentido anti-horário ou — o que dá no mesmo — de $\frac{1}{4}$ volta no sentido horário.

Notável, em especial é o produto $i \times i$, que pode ser escrito na forma O número $\sqrt{-1}$ $i^2 = -1$, donde se conclui o resultado surpreendente

$$i = \sqrt{-1}$$
.

52

Quarto de volta

Valendo-nos dessa tabuada, podemos determinar o que acontece com as coordenadas [x,y] de um ponto P quando as "multiplicamos" pelo "fator de conversão de direção" \imath :

$$Pi = [x, y]i = (x + iy)i = (xi + iiy) = (i^2y + xi) = (-y + xi) = [-x, y].$$

A figura 5.1 ilustra um ponto P de coordenadas [x,y] e o ponto Q, de coordenadas [-y,x], obtido multiplicando-se as coordenadas x+iy de P pelo "fator de conversão de direção" i.

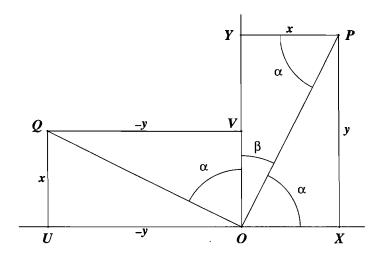


Figura 5.1: "Multiplicação" do ponto P pelo "fator de conversão de direção" i

É fácil constatar que os triângulos OPY e OQV da figura 5.1 são iguais: ambos são retângulos, PY=OV e OY=QV. Sabemos que $\alpha+\beta=\pi/2$, donde pode-se constatar facilmente que o ângulo POQ é reto. Podemos então afirmar que

o efeito de multiplicar as coordenadas [x,y] de um ponto qualquer P pelo "fator de conversão de direção" i, \acute{e} o de girar esse ponto P de um quarto de volta (no sentido anti-horário) em torno da origem. Esse novo ponto terá coordenadas [-y,x].

Como girar um ponto de um ângulo θ

Consideremos agora, um ponto P = [x, y] qualquer do plano. Se a

distância desse ponto à origem O for representada por r e se o ângulo formado pelo segmento OP com a horizontal for θ , podemos estabelecer as seguintes relações entre os quatro termos x, y, r e θ :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

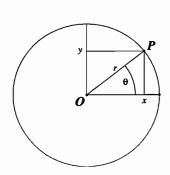
$$x^{2} + y^{2} = r^{2}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$(5.2)$$

Utilizando a terceira das identidades de Wessel (5.1), podemos escrever as coordenadas do ponto P na forma:

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{5.3}$$



A expressão que aparece à esquerda em (5.3), abreviada na forma [x,y], corresponde à representação, em coordenadas cartesianas, da posição ocupada pelo ponto O. A expressão à direita, abreviada na forma $\{r,\theta\}$, é conhecida por representação em coordenadas polares da posição desse ponto. Essas notações estão relacionadas pelas identidades:

$$[x,y] = x + iy = \{r,\theta\} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

A partir das relações (5.2) estabelecem-se as definições dos seguintes termos:

Parte real de P é a componente x (abcissa) das coordenadas de P. Representa-se por meio da notação $\Re(P)$ em textos impressos e por meio da notação $\operatorname{Re}(P)$ nas instruções enviadas ao computador.

Parte imaginária de P é a componente y (ordenada) das coordenadas de P. Representase por meio da notação $\Im(P)$ em textos impressos e por meio da notação $\operatorname{Im}(P)$ nas instruções enviadas ao computador.

módulo de P é a distância $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ que separa o ponto P da origem O. Representase por meio da notação mod(P).

argumento de P é o ângulo θ formado entre a reta horizontal de referência e a reta OP. Representa-se por meio da notação arg(P).

Complexo conjugado de P é o ponto de coordenadas

$$[x, -y] = x - iy = \{r, -\theta\} = r(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Nos tratados sobre números complexos, o complexo conjugado de P é representado pelo símbolo P^* . Na comunicação com o computador adota-se a notação P.

5.1.2 As quatro operações

Valendo-nos das identidades (5.1), (5.2), (5.3) e da tabuada, podemos verificar o que acontece quando efetuamos, entre dois pontos, cada uma das quatro operações da aritmética: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

Tomemos dois pontos do plano, $P \in Q$ e representemos suas coordenadas conforme a expressão de Wessel (5.1) P = [x, y] = x + iy e Q = [u, v] = u + iv. Usando a tabuada, podemos efetuar as operações para obter

Adição	P+Q	$(x+u)+\imath(y+v)$
Subtração	P-Q	$(x-u)+\imath(y-v)$
Multiplicação	$P \times Q$	$(xu-yv)+\imath(xv+yu)$
Divisão	P/Q	$\left(\frac{xu+yv}{u^2+v^2}\right) + i\left(\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\right)$

As expressões para a adição e subtração são obtidas diretamente, sem necessidade de se recorrer à tabuada.

Multiplicação. A expressão para o produto $P \times Q$ obtém-se abrindo os parênteses da expressão

$$(x + iy) \times (u + iv) = xu + iyu + xiv + iyiv$$

⁴A notação aqui adotada é condizente com a que prevalece nas linguagens de programação mais populares como FORTRAN, Algol, Pascal, ou C. Nessas linguagens, os símbolos usados para designar operadores unários precedem o termo ao qual se aplicam.

agrupando os termos, temos

$$(x + iy) \times (u + iv) = xu + i(yu + xv) + i^2yv$$

e recolhendo $i^2 = -1$ da tabuada, obtemos, finalmente

$$P \times Q = (xu - yv) + i(yu + xv) \tag{5.4}$$

É conveniente examinarmos como se desdobra a operação de multiplicação em coordenadas polares. Representando os pontos P e Q em coordenadas polares,

$$P = \{r, \theta\} = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Q = \{s, \phi\} = s (\cos \phi + i \sin \phi),$$
(5.5)

estabelecemos as seguintes relações entre as coordenadas cartesianas dos pontos P e Q e suas correspondentes coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$u = s \cos \phi$$

$$v = s \sin \phi.$$
(5.6)

Substituindo os valores obtidos em (5.6) na identidade (5.4), obtemos a representação em coordenadas polares do produto $P \times Q$

$$P \times Q = rs \left[(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i \left(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \right) \right]. \tag{5.7}$$

Substituindo em (5.7) as conhecidas identidades trigonométricas,

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

obtemos

$$P \times Q = \{ rs, \theta + \phi \},\tag{5.8}$$

donde, concluímos:

- O módulo do produto de dois números complexos (dois pontos) é igual ao produto dos módulos dos fatores.
- O argumento do produto de dois números complexos (dois pontos) é igual à soma dos argumentos dos fatores.

Divisão. Para determinar o resultado de R = P/Q, lembramos que

$$P = R \times Q. \tag{5.9}$$

Adotando a representação $R = \{\rho, \varphi\}$ e substituindo-a na expressão (5.9) juntamente com as definições (5.5), temos

$$\{r, \theta\} = \{\rho, \phi\} \cdot \{s, \varphi\} = \{\rho s, \phi + \varphi\}$$

que equivale às duas equações

$$r = \rho s$$
$$\theta = \phi + \varphi$$

de onde se obtem os valores de ρ e ϕ

$$\rho = \frac{r}{s} \\
\varphi = \theta - \phi$$

Escrevemos o valor de R na forma cartesiana

$$R = \rho \left(\cos \varphi + i \sin \varphi\right) = \frac{r}{s} \left(\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)\right) \tag{5.10}$$

que, desenvolvida, resulta em

$$R = \frac{r}{s} (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi + i (\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi))$$

= $\frac{1}{s^2} (r \cos \theta s \cos \phi + r \sin \theta s \sin \phi + i (r \sin \theta s \cos \phi - r \cos \theta s \sin \phi))$

Substituindo os valores das identidades (5.6), temos

$$R = \frac{(xu + yv) + \iota(yu - xv)}{s^2}$$

de onde derivamos a expressão final:

$$P/Q = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + i\left(\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}\right) \tag{5.11}$$

Referindo-nos à expressão (5.10) podemos concluir que para a divisão entre dois números complexos:

- O módulo do quociente de dois números complexos (dois pontos) é igual ao quociente dos módulos dos fatores.
- O argumento do quociente de dois números complexos (dois pontos) é igual à diferença dos argumentos dos fatores.

5.1.3 Propriedades algébricas dos números complexos

Dentre as propriedades notáveis dos números complexos está a possibilidade de tratá-los da *mesma* forma que os números ordinários⁵ — aqueles com os quais já nos familiarizamos nos cursos elementares de álgebra.

Ao introduzir o elemento *i* e a correspondente tabuada em torno dele, Wessel pode dar sentido às quatro operações da aritmética, nos casos em que seus termos são *pontos do plano*.

Pode-se verificar facilmente, a partir das propriedades das quatro operações, que pontos e números ordinários têm a mesma álgebra; suas aritméticas — isto é, o jeito de "fazer as contas" — é que são diferentes. Uma forma de se verificar essa equivalência é examinar a solução da seguinte equação algébrica,

$$\frac{ax+b}{c} = d. ag{5.12}$$

Ao olhar para a equação (5.12), pense apenas nos símbolos, não se deixe levar pela tentação de saber o que eles representam, se números ordinários ou pontos. Pede-se para "isolar" x, isto é, resolver a equação em x. Se obedecermos as regras usuais da álgebra, obtemos a solução da equação:

$$x = \frac{cd - b}{a} \tag{5.13}$$

Enquanto lidamos apenas com literais (usando letras em vez de números), encontramo-nos no domínio da Álgebra. Passemos agora, ao domínio da Aritmética.

Examinemos inicialmente o caso em que a,b,c,d e x representam números ordinários. A título de exemplo, adotemos os valores

$$a = 4$$
, $b = 5$, $c = 7$ e $d = 3$

para as grandezas que figuram na expressão (5.13).

⁵Trataremos indistintamente por *ordinários* os números naturais, inteiros, racionais ou reais. Não se trata de um termo técnico, mas de uma forma sintética para referirmo-nos, coletivamente, àqueles números que são estudados nos cursos elementares de álgebra e que são familiares a um público mais amplo de leitores.

Para descobrirmos o valor de x, substituímos esses valores em (5.13), obtendo o resultado

 $x = \frac{7 \times 3 - 5}{4} = \frac{16}{4} = 4.$

Examinemos agora o caso em que a, b, c, d e x representam coordenadas de pontos do plano, isto é: números complexos. Adotemos, para este exemplo, os valores

$$a = [3, 5], b = [5, -3], c = [7, 2] e d = [4, -1].$$

e, em seguida, os substituímos na mesma expressão (5.13)

$$x = \frac{[7,2] \times [4,-1] - [5,-3]}{[3,5]}$$
 (5.14)

Podemos não saber como ir além desse ponto — isto é, podemos não ter entendido as explicações dadas na seção 5.1.2 que ensina como "fazer as contas" que constam da expressão (5.14) — mas, com o que sabemos da álgebra ordinária, não tivemos nenhuma dificuldade para chegar até ele.

Com este exemplo, o leitor poderá perceber que o problema não está na álgebra, isto é, em como manipular as letras para sair de (5.12) e chegar a (5.13) ou mesmo até (5.14). A questão está em saber como fazer as contas que figuram em (5.14) para determinar as coordenadas do ponto x.

5.2 Problemas geométricos

5.2.1 Rotação em torno da origem

Considere-se o número complexo que aparece entre parênteses na identidade (5.3)

$$\epsilon_{\theta} = [\cos \theta, \sin \theta] = \{1, \theta\}.$$
 (5.15)

Quando um ponto qualquer P do plano for multiplicado por ϵ_{θ} , obtém-se um novo ponto $Q = \epsilon_{\theta}P = P\epsilon_{\theta}$. É fácil verificar que $\operatorname{mod}(Q) = \operatorname{mod}(P)$. O fato notável acerca dessa operação é que o ângulo POQ é igual a θ , i.e., o

efeito que se obtém ao multiplicarmos o ponto (número complexo) P por ϵ_{θ} é o de girar P de um ângulo θ , na direção anti-horária, em torno da origem O.

As seguintes identidades importantes são válidas para esta operação:

$$\theta = \arg(\epsilon_{\theta});$$

 $\operatorname{mod}(\epsilon_{\theta}) = 1;$
 $\operatorname{mod}(Q) = \operatorname{mod}(P) \times \operatorname{mod}(\epsilon_{\theta}) = \operatorname{mod}(P);$
 $\operatorname{arg}(Q) = \operatorname{arg}(P) + \operatorname{arg}(\epsilon_{\theta}) = \operatorname{arg}(P) + \theta$

L. Euler descobriu uma representação notável para esse número que pas- Identidade de Euler sou a ser conhecida por identidade de Euler

$$\epsilon_{\theta} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{5.16}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a raiz imaginária da unidade⁶.

O número 1 pode ser representado, na notação de Euler, por

As raízes da unidade

$$1 = e^{2\pi\imath} \tag{5.17}$$

Se representarmos a raiz n^a de 1, $\sqrt[n]{1} = 1^{1/n}$ na notação de Euler, teremos

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

que nos mostra que na aritmética dos números complexos, diferentemente do que ocorre na aritmética dos números reais, existem n resultados para a expressão $\sqrt[n]{1}$.

As coordenadas dos vértices de um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio 1 são dadas pelas expressões complexas:

1,
$$e^{\frac{2\pi i}{n}}$$
, $e^{2\frac{2\pi i}{n}}$, $e^{3\frac{2\pi i}{n}}$... $e^{(n-1)\frac{2\pi i}{n}}$.

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

que tem a propriedade notável de expressar, numa mesma identidade, as 5 constantes mais importantes da matemática, $0, 1, e, i \in \pi$.

⁶Um caso curioso da expressão (5.16), muito apreciado pelos matemáticos, ocorre para $\theta = \pi$, quando ela pode ser escrita na forma

O número $\sqrt[n]{1}=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ é tão recorrente na construção de figuras dotadas de simetria circular — polígonos ou estrelas — que convém designá-lo por uma notação própria

$$Cy(f) = [\cos(2\pi f), \sin(2\pi f)]$$
 (5.18)

onde f representa uma fração de volta. Assim, multiplicando um ponto P qualquer pelo número complexo Cy(1/3), obteremos um outro ponto Q, como se tivéssemos girado P de $\frac{1}{3}$ de volta em torno da origem, no sentido anti-horário.

5.2.2 Centro fora da origem

Vamos considerar agora o seguinte problema geométrico:

girar, no sentido anti-horário, um segmento dado AB de um ângulo θ em torno de sua extremidade A.

A solução desse problema pode ser obtida com o auxílio do transferidor⁷. Para resolver esse mesmo problema por meio do computador, devemos ter em mente que A e B não estão mais no papel, mas registrados, na forma de coordenadas, na memória do computador.

Como o segmento deve girar em torno do ponto A, as coordenadas de A não mudam com a rotação. Devemos nos concentrar, portanto, nas coordenadas do ponto P. Uma vez que as coordenadas são números, resolver o problema consiste em calcular os números que representam as coordenadas do ponto P a partir dos dados do enunciado, a saber, as coordenadas do ponto B.

Vimos nas seções anteriores como, por meio da representação dos números complexos, podemos girar um segmento em torno da origem. No entanto, o problema que temos aqui tem um complicador, pois agora, o centro de rotação não está na origem.

Vamos comparar o nosso problema com o de um mecânico que deva reparar uma peça de uma máquina. Quando não for possível reparar a peça

⁷Ver descrição à página 29

na própria máquina, ele a desmonta e a desloca para sua bancada, onde dispõe das ferramentas necessárias para a realização do conserto.

Iremos fazer a mesma coisa com o segmento AB que desejamos girar.

 Removemos a peça (o segmento) de sua posição original e a colocamos no lugar onde se encontram instaladas nossas ferramentas. Para isso, deslocamos o segmento AB até que o ponto A coincida com a origem. Isso se consegue subtraindo de ambas as extremidades do segmento AB, o ponto A. Dessa forma teremos construído um novo segmento CD, assim determinado

$$C = A - A = [0, 0]$$

 $D = B - A$.

Como vemos, o ponto C coincide com a origem, por construção.

2. Somente agora, quando nossa "peça" está devidamente colocada na "bancada", podemos executar o reparo, a saber, girar o ponto D do ângulo θ .

Podemos conseguir esse efeito se multiplicarmos o ponto D, obtido na etapa anterior, pelo número complexo ϵ_{θ} , definido em (5.15), para obter, assim, um novo ponto R

$$R = D * \epsilon_{\theta} = (B - A) * \epsilon_{\theta}.$$

3. Finalmente, "devolvemos" o ponto girado (a peça reparada) à sua posição original. Isso se consegue, adicionando ao ponto R obtido na etapa anterior, o ponto A, desfazendo assim o que foi feito na etapa 1 e obtendo, com isso, o ponto P procurado

$$P = R + A = (B - A) * \epsilon_{\theta} + A. \tag{5.19}$$

Como se pode verificar, a expressão (5.19), que nos consome menos de uma dúzia de símbolos, resume toda a descrição do procedimento que ocupou quase duas dúzias de linhas de texto.

A possibilidade de uma representação assim compacta e, ao mesmo tempo, inteligível, demonstra a conveniência de adotarmos essa notação algébrica como a linguagem para comunicação entre o desenhista e o computador.

5.2.3 Interpolação

Dados dois pontos A e B quaisquer e um número t, obter um terceiro ponto P, no segmento AB, tal que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = t.$$

t < 0	t = 0	0 < t < 1	t=1	t > 1
P < A < B	P = A	A < P < B	P = B	A < B < P

Tabela 5.1: Posição do ponto P = A + t(B - A) no segmento AB.

As coordenadas de P podem ser obtidas diretamente a partir da seguinte expressão aritmética complexa:

$$\frac{P-A}{B-A} = t \tag{5.20}$$

Isolando o valor de P da expressão (5.20), obtemos⁸:

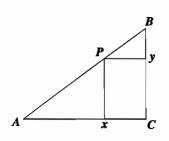
$$P = A + t(B - A) \tag{5.21}$$

Na dedução acima não foi imposta nenhuma restrição sobre o valor do parâmetro t, com exceção do caso em que B coincide com A, para o qual t se torna indeterminado.

No entanto, na representação (5.21), onde é o valor de P que está isolado e não o de t, essa restrição já não se aplica, pois há sempre um valor único e determinado para P, quaisquer que sejam os valores de A,B e t, mesmo quando A e B forem coincidentes. O parâmetro t pode assumir, portanto, qualquer valor real⁹. Os valores 0 e 1 dividem a reta em cinco regiões conforme mostrado na tabela 5.2.3.

Quando $t=\frac{p}{p+q}$, onde p e q são números reais ou inteiros quaisquer, com $p\neq -q$, a expressão acima pode ser representada mais simetricamente:

$$P = \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B.$$



⁸Ver capítulo 5.

 $^{^9}$ Os matemáticos dizem que a identidade (5.21) estabelece uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta que passam pelos pontos A e B. Com isso eles querem dizer que a qualquer número real t corresponde um ponto P da reta ABe, também que a cada ponto P da reta, corresponde um número real t.

5.3 Raízes complexas de um polinômio

Nesta seção mostraremos como derivar, por meio da interpretação geométrica dos números complexos, a famosa $f\'ormula~de~Bhaskara^{10}$ para determinar a raiz z da equação

$$az^2 + bz + c = 0 (5.22)$$

de coeficientes reais $a, b \in c$.

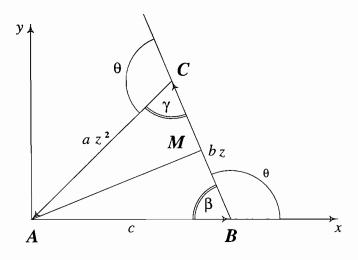


Figura 5.2: Soma das parcelas do trinômio $az^2 + bz + c$

Quando interpretamos as parcelas de (5.22) como números complexos, podemos visualizá-las como três segmentos do plano, a saber, os segmentos AB = c, BC = bz e $CA = az^2$, representados na figura 5.2. Substituindo em (5.22) os valores de AB, BC e CA, temos

$$AB + BC + CA = 0$$

isto é, a sequência de segmentos AB,BC e CA forma um triângulo que parte de A e termina em A.

¹⁰Bhaskara (1114-c.1185), matemático hindu [6].

Para visualizar como esses segmentos estão dispostos no plano, representamos a variável complexa z na forma de Euler

$$z = r \cdot e^{i\theta},\tag{5.23}$$

de modo que para determinar a raiz z do trinômio do segundo grau (5.22), devemos calcular os valores de seus componentes r e θ de sua representação em coordenadas polares (5.23).

O triângulo ABC é isóceles. Podemos facilmente concluir que c = AB e bz = BC. Portanto, esses segmentos formam, entre si, um ângulo θ . De fato, o valor de θ pode ser obtido a partir do quociente

$$\frac{bz}{a} = \frac{b}{a}e^{i\theta},$$

donde obtemos $\theta = \operatorname{Arg}\left(\frac{bz}{a}\right)$. A partir daí, podemos determinar o valor do ângulo β que se forma no vértice B do triângulo ABC

$$\beta = \pi - \theta. \tag{5.24}$$

Da mesma forma, o ângulo formado entre os segmentos BC e CA, também é igual a θ , pois

$$\frac{az^2}{hz} = \frac{a}{h}z = \frac{a}{h}e^{i\theta},$$

isto é, $\theta={\rm Arg}\left(\frac{az^2}{bz}\right)$. O valor do ângulo γ que se forma no vértice C do triângulo ABC é

$$\gamma = \pi - \theta. \tag{5.25}$$

De (5.24) e (5.25) concluímos que o triângulo ABC é isóceles 11 , isto é, AB=AC.

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n = \sum_{k=0}^n c_k z^k.$$

De fato, o ângulo formado entre quaisquer dois termos consecutivos $c_k z^k$ e $c_{k+1} z^{k+1}$ do polinômio é igual a $\theta = \arg(z)$ e independe de k.

¹¹ Esta é uma propriedade notável de todos os polinômios da forma

Cálculo do valor de r. Podemos agora, combinando as expressões AB = AC e (5.23), escrever

$$|c| = |az^2| = ar^2.$$

de onde resulta o valor de r:

$$r = \sqrt{\frac{c}{a}}. (5.26)$$

Determinação de $\cos \theta$. Como o triângulo ABC é isóceles, concluímos que o triângulo AMB (onde M é o ponto médio do segmento BC), é retângulo.

Das relações trigonométricas do triângulo AMB, temos:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AC}} = \cos(\beta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta.$$

Por outro lado, da definição dos segmentos BM e BC, temos

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AC}} = \frac{|bz|}{2c} = \frac{br}{2c} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{ac}},$$

donde obtemos

$$\cos \theta = -\frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{ac}}. (5.27)$$

Da identidade $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$ determinamos o valor de $\sin\theta$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{ac}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4ac}}$$
 (5.28)

A raiz do trinômio. Valendo-nos da identidade de Euler (5.16)

$$z = re^{\pm i\theta} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$$

e dos valores de r obtido em (5.26), de $\cos\theta$ expresso em (5.27) e de $\sin\theta$ representado em (5.28), podemos escrever as raízes do trinômio:

$$z = \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\frac{-b}{2\sqrt{ac}} \pm i \sqrt{1 - \frac{b^2}{4ac}} \right)$$

Finalmente, usando a identidade fundamental $i^2 = -1$, podemos escrever a raiz z na conhecida forma de Bhaskara:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Geometria analítica

Neste capítulo examinaremos como é possível substituir a régua e o compasso pela álgebra para resolver problemas geométricos.

Os problemas que podemos resolver com Régua e Compasso são aqueles enumerados na seção 2.4, a saber, encontrar as interseções de:

- duas retas,
- uma reta e uma circunferência,
- duas circunferências.

Quando usamos régua e compasso, a determinação desses pontos depende de fatores como a precisão com que são construídos a régua e o compasso, a espessuras dos traços desenhados no papel, a habilidade com que o desenhista movimenta esses instrumentos e seu discernimento para determinar onde exatamente, em toda a extensão em que os traços se cruzam¹, encontra-se o ponto desejado.

O que vamos fazer neste capítulo é substituir o método usado para determinar a interseção entre duas linhas por um outro, mais abstrato. Trocaremos todo o procedimento executado pelo desenhista — que depende de habilidade, precisão de instrumentos e discernimento visual — por um outro que envolve apenas símbolos, cálculo e raciocínio lógico.

¹Por mais finos que sejam os traços, suas espessuras nunca são nulas. Elas devem ter dimensões suficientes para poderem ser percebidas pela vista do desenhista.

Neste outro método as curvas não precisarão mais ser traçadas no papel, nem o responsável por encontrar a solução do problema precisa empenhar-se em determinar, por inspeção visual, exatamente onde se encontra o ponto de interseção das linhas. Em vez disso, ele procederá a uma seqüência de cálculos cujos resultados serão as coordenadas do ponto procurado.

Para poder desvencilhar-se da Régua e Compasso, ele deve buscar uma outra forma de representar as linhas. Essa forma é uma relação algébrica que envolve as coordenadas dos pontos da curva e que se deduz a partir das propriedades características dessa mesma curva.

Interseções e equações

R. Descartes, a quem se atribui a invenção desse método, assim se expressou quando o descreveu:

Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção — aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade, de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os termos dessas expressões juntos são iguais aos termos da outra.

O que no desenho com Régua e Compasso é entendido por *interseção* de duas linhas foi traduzido por Descartes para equação entre duas relações.

Neste capítulo trataremos exclusivamente do problema das interseções das linhas traçadas por Régua e Compasso, a saber, a reta e a circunferência. O método proposto por Descartes, no entanto, é muito mais geral e permite desenvolver procedimentos de cálculo, para se determinar as interseções de uma variedade muito maior de curvas.

6.1 Interseções

6.1.1 Duas retas

Os pontos das retas. Um ponto P(t) da reta que contém o segmento de extremidades AB pode ser dado pela expressão de interpolação (5.21), reescrita aqui em termos do parâmetro real t:

$$P(t) = A + t(B - A). (6.1)$$

Denotamos por [x(t), y(t)] as coordenadas de P(t), por $[A_x, A_y]$, as de A e por $[B_x, B_y]$, as coordenadas de B.

$$x(t) = A_x + t(B_x - A_x),y(t) = A_y + t(B_y - A_y).$$
 (6.2)

Isolando t da segunda identidade em (6.2) e substituindo na primeira, obtemos uma relação entre x e y válida para qualquer valor de t:

$$(B_y - A_y) x - (B_x - A_x) y + A_y (B_x - A_x) - A_x (B_y - A_y) = 0.$$
 (6.3)

Consideremos agora, uma outra reta CD, cujos pontos de coordenadas [u, v] satisfazem uma relação análoga à (6.3)

$$(D_y - C_y) u - (D_x - C_x) v + C_y (D_x - C_x) - C_x (D_y - C_y) = 0.$$
 (6.4)

Equação. A interseção das retas AB e CD se obtém estabelecendo, conforme a proposta de Descartes, as equações:

$$u = x$$

 $v = y$.

isto é, reescrevemos (6.4) trocando u por x e v por y, de modo a termos o par de relações que definem os pontos das retas escritos na forma

$$(B_y - A_y) x - (B_x - A_x) y + (A_y B_x - A_x B_y) = 0. (D_y - C_y) x - (D_x - C_x) y + (C_y D_x - C_x D_y) = 0.$$
(6.5)

A interseção das duas retas está no ponto que satisfaz simultaneamente às duas relações. Dizemos então que o par de relações (6.5) forma um sistema de equações simultâneas, cuja solução nos fornece os valores [x,y] das coordenadas do ponto de interseção.

O cálculo. Para determinar o valor dessas coordenadas, vamos usar a notação matricial para a resolução de equações simultâneas, reescrevendo (6.5) na forma

$$\mathbf{M} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_y B_x - A_x B_y \\ C_y D_x - C_x D_y \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

onde M é a matriz

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc} B_y - A_y & -(B_x - A_x) \\ D_y - C_y & -(D_x - C_x) \end{array} \right].$$

As coordenadas do ponto de interseção das duas retas podem ser obtidas, então, a partir da seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \times \begin{bmatrix} A_x B_y - A_y B_x \\ C_x D_y - C_y D_x \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Se representarmos por $\Delta = ||M||$ o determinante da matriz M, podemos reescrever M^{-1} na forma

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_x - D_x & B_x - A_x \\ C_y - D_y & B_y - A_y \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

que substituída em (6.7) nos dá os valores das coordenadas do ponto de interseção.

Sabemos que quando as duas retas são paralelas, não há um ponto de interseção. Essa situação pode ser facilmente identificada consultado-se o valor do determinante Δ : quando $\Delta=0$ concluímos que as retas são paralelas, situação em que a expressão (6.8) não pode ser calculada, pois envolveria uma divisão por zero.

6.1.2 Uma reta e uma circunferência

Os pontos das curvas. Para descrever a reta, usaremos a expressão (6.1).

Descreveremos a circunferência por seu centro C e seu raio r. Um ponto $S = [S_x, S_y]$ está na circunferência se suas coordenadas satisfizerem à relação

$$(S_x - C_x)^2 + (S_y - C_y)^2 = r^2$$

que pode ser representada segundo a notação²

$$(S - C|S - C) = r^2 (6.9)$$

A equação. Ao substituir (6.1) em (6.9), estamos construindo a equação

$$[A - C + t(B - A)|A - C + t(B - A)] = r^{2}$$
(6.10)

que relaciona os pontos A e B que definem a reta, os dados C e r que definem a circunferência e o parâmetro variável t que é desconhecido. Ao determinar esse valor, estaremos determinando quais pontos da reta (6.1) estão tamb'em na circunferência.

O cálculo. Se definirmos os parâmetros

$$a = (B - A|B - A),$$

$$b = -\frac{1}{2}(B - A|C - A) e$$

$$c = (C - A|C - A) - r^{2}$$

então, podemos determinar as interseções da reta com a circunferência dada, a partir das raízes do trinômio do segundo grau

$$at^2 + bt + c = 0.$$

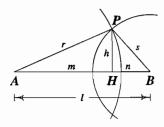
6.1.3 Duas circunferências

São dadas duas circunferências, uma com centro em A e raio r, c a outra com centro em B e raio s. Determinar os pontos P e Q de interseção das duas circunferências.

²A notação (a|b) designa a expressão $(a|b) = a_x b_x + a_y B_y$, denominada produto escalar dos fatores a e b.

Este problema pode ter duas, uma ou nenhuma solução³, dependendo da distância l entre os pontos A e B e dos comprimentos dos raios r e s.

Caso das duas soluções. Consideremos o triângulo APB, formado pelos centros A e B das circunferências e pelo ponto P de interseção dessas circunferências.



São conhecidos os comprimentos $r=\overline{AP}, s=\overline{BP}$ e $l=\overline{AB}$ do triângulo APB. Consideremos o pé H da altura PH do triângulo APB sobre sua base AB. Sejam $h=\overline{PH}, \ m=\overline{AH}$ e $n=\overline{HB}$. Da relação do teorema de Pitágoras, temos

$$r^2 - h^2 = m^2$$

 $s^2 - h^2 = n^2$. (6.11)

Subtraindo uma equação da outra em (6.11), eliminamos h

$$r^{2} - s^{2} = m^{2} - n^{2} = (m - n)(m + n) = (m - n)l.$$
(6.12)

Formamos, assim, o seguinte sistema de equações

donde obtemos os valores de $\alpha = \frac{m}{l}$ e $\gamma = \frac{n}{l}$

$$\alpha = \frac{m}{l} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2 - s^2}{l^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{n}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2 - s^2}{l^2} \right).$$
(6.14)

O valor de $\beta=\frac{h}{l}$ pode ser obtido levando-se um dos resultados de (6.14) para (6.11)

$$\beta = \frac{h}{l} = \sqrt{\left(\frac{r}{l}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r^2 - s^2}{l^2}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{s}{l}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2 - s^2}{l^2}\right)\right]^2}.$$
(6.15)

³No caso das circunferências serem coincidentes, dizemos que o problema tem infinitas soluções.

Conhecidas as coordenadas do pé da altura, $H=A+\alpha(B-A)$, do triângulo APB, podemos escrever as coordenadas de P e de Q

$$P = H + \beta i (B - A) = A + (\alpha + \beta i)(B - A) Q = H - \beta i (B - A) = A + (\alpha - \beta i)(B - A).$$
 (6.16)

Sistema de coordenadas. A solução algébrica do problema da interseção de duas circunferências reduz-se, portanto, à determinação dos dois números $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, complexos conjugados.

Se levarmos em conta a expressão geral de interpolação de um ponto F(t) num segmento AB

$$F(t) = A + t(B - A),$$

podemos, ao efetuar a substituição $t=\alpha+\beta i$, interpretar a solução do problema das interseções das duas circunferências dadas, como um problema de interpolação complexa. Nesta representação, a reta AB constitui o eixo de coordenadas que tem o ponto A, por origem, e o comprimento do segmento AB, por unidade. Assim, os pares de números reais, α e β representam as coordenadas de qualquer ponto do plano.

Caso de uma solução única. Essa situação ocorre quando P e Q coincidem, isto é, $l=|r\pm s|$ e, dessa forma, as duas circunferências são tangentes uma à outra.

Caso de nenhuma solução. Quando l > r + s ou l < |r - s|, as circunferências não se interceptam. O problema não tem solução.

Caso de infinitas soluções. Quando l=0 as circunferências coincidem. Todos os pontos são comuns.

6.2 Pontos Notáveis do triângulo

6.2.1 Circuncentro

Dado um triângulo de vértices $A, B \in C$, cujas coordenadas são, respectivamente, $[A_x, A_y]$, $[B_x, B_y]$ e $[C_x, C_y]$, determinar as coordenadas $[O_x, O_y]$ do circuncentro O. Seja r o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Como a distância do circuncentro a qualquer dos vértices é constante, temos:

$$(O_x - A_x)^2 + (O_y - A_y)^2 =$$

$$(O_x - B_x)^2 + (O_y - B_y)^2 =$$

$$(O_x - C_x)^2 + (O_y - C_y)^2 = r^2$$
(6.17)

Podemos eliminar o raio desconhecido r, subtraindo, uma da outra, duas equações de (6.17):

$$(B_x - A_x) \left[O_x - \left(\frac{A_x + B_x}{2} \right) \right] + (B_y - A_y) \left[O_y - \left(\frac{A_y + B_y}{2} \right) \right] = 0$$

$$(C_x - A_x) \left[O_x - \left(\frac{A_x + C_x}{2} \right) \right] + (C_y - A_y) \left[O_y - \left(\frac{A_y + C_y}{2} \right) \right] = 0$$

$$(6.18)$$

Denotando por $P=\frac{A+B}{2}$ e por $Q=\frac{A+C}{2}$, os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, por S a matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} B_x - A_x & B_y - A_y \\ C_x - A_x & C_y - A_y \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

e por f o vetor

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} (B_x - A_x)P_x + (B_y - A_y)P_y \\ (C_x - A_x)Q_x + (C_y - A_y)Q_y \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

temos:

$$\mathbf{S} \times \left[\begin{array}{c} O_x \\ O_y \end{array} \right] = \mathbf{f} \tag{6.21}$$

Área do Triângulo. O determinante ||S|| da matriz S representa o dobro da área σ do triângulo ABC:

$$\pm \sigma = \frac{1}{2} \|\mathbf{S}\|.$$

Obtemos, assim, as coordenadas do circuncentro O

$$\mathbf{O} = \frac{1}{2\sigma} \mathbf{S}^{-1} \times \mathbf{f} \tag{6.22}$$

Interpretação Geométrica. Podemos reescrever as equações (6.18) na forma de produtos escalares:

$$\begin{pmatrix}
B - A|O - \frac{A+B}{2} \\
C - A|O - \frac{A+C}{2} \\
0$$

que podem ser assim interpretadas:

- A reta que passa pelo circuncentro O e pelo ponto médio de AB é perpendicular ao lado AB.
- A reta que passa pelo circuncentro O e pelo ponto médio de AC é perpendicular ao lado AC.

isto é, o circuncentro O do triângulo ABC é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados AB e AC. Esta é precisamente a construção usada para se obter, por meio da régua e do compasso, o circuncentro O do triângulo, conforme descrito na seção 2.3.

6.2.2 Ortocentro

O ortocentro é o ponto onde as alturas de um triângulo se cruzam. Para se determinar o ortocentro de um triângulo ABC, podemos utilizar o seguinte teorema

⁴Se adotarmos este determinante como representante da área do triângulo — o que, muitas vezes é conveniente — devemos conviver com o fato de que o valor da área do triângulo pode ser negativo. Ver [30]

Teorema. O circuncentro de um triângulo coincide com o ortocentro de seu triângulo médio.

Altura do Triângulo A área do triângulo ABC está diretamente relacionada com suas alturas. Conhecida uma dessas duas grandezas, pode-se determinar a outra por meio da expressão:

$$\sigma = \frac{1}{2}ah$$

onde h representa a altura do triângulo ABC e a a base sobre a qual essa altura se projeta. A partir do determinante da matriz S de (6.19), podemos, então determinar a altura do triângulo ABC

$$h = \frac{2\sigma}{a} = \left| \frac{\|\mathbf{S}\|}{a} \right| \tag{6.23}$$

A expressão (6.23) vale também para a distância de um ponto a uma reta dada.

6.2.3 Baricentro

Dado um triângulo ABC, as coordenadas de seu centro de massas G são obtidas pela expressão complexa (ver seção 3.1)

$$G = \frac{A+B+C}{3} \tag{6.24}$$

6.2.4 Incentro

Conforme descrito na seção 3.4. o incentro de um triângulo ABC está no encontro das suas bissetrizes. Seja ABC o triângulo considerado e a,b e c, respectivamente, os comprimentos dos lados BC, AC e AB. A seguir retomamos, com mais detalhes, o estudo das propriedades das bissetrizes iniciado na seção 3.4.

Construímos sobre a reta AB um segmento BD de comprimento a. Traçamos a reta BP, paralela à reta DC. Como, por construção, o triângulo CBD é isóceles, os ângulos $\angle BDC$ e $\angle BCD$ são iguais

$$\alpha = \angle BDC = \angle BCD. \tag{6.25}$$

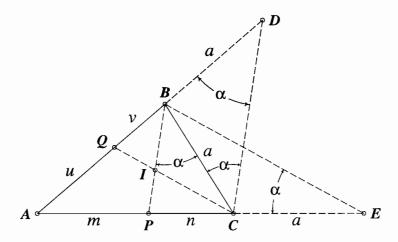


Figura 6.1: Determinação do incentro I do um triângulo ABC.

Observamos na figura 6.1, que as retas AD e AE cortam as retas paralelas DC e BP. Portanto os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CBP$, sendo alternos internos, são também iguais.

$$\alpha = \angle BCD = \angle CBP. \tag{6.26}$$

A reta AD corta as paralelas BP e DC, formando ângulos $\angle ABP$ e $\angle ADC$ correspondentes, também iguais entre si

$$\alpha = \angle ABP = \angle ADC \tag{6.27}$$

Das identidades (6.25), (6.26) e (6.27) concluímos que BP é bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

Do paralelismo das retas BP e DC podemos estabelecer, entre os comprimentos dos segmentos

$$m = AP$$

 $n = PC'$

e os lados do triângulo, as seguintes relações

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{c}$$
.

Como m+n=c, podemos determinar a posição de P no segmento BC (veja 5.2.3):

 $P = \frac{a}{a+c}A + \frac{c}{a+c}C$

Pode-se construir um ponto Q, sobre o lado AB, por um processo análogo, tal que CQ seja bissetriz do ângulo $\angle ACB$. Analogamente, do paralelismo das retas BE e QC, determinamos as coordenadas do ponto Q

$$Q = \frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B$$

O incentro I do triângulo ABC encontra-se na interseção das retas BP e CQ. Podemos determinar as coordenadas de I, conforme foi exposto na seção 6.1.1.

Parte II O traçado de curvas

Geometria e espaço

Quando nos referimos à Geometria, pensamos nos conhecimentos necessários para responder a questões sobre o *espaço*, como distâncias, ângulos, proporções, movimentos, formas, disposições, etc.

Se, nessas reflexões, deixarmo-nos conduzir pela idéia de que o espaço é um imenso vaso, absoluto e imutável, no qual toda matéria de que nosso universo é composto foi nele inserida em algum momento posterior, sem lhe alterar nem as propriedades, nem a estrutura, e que todas as questões que ele suscita possam ser respondidas em relação a esse absoluto, então, somos levados a imaginar a Geometria como uma ciência absoluta e a estaremos confundindo com uma Ciência do Espaço.

Durante muitos séculos a Geometria foi tida como uma teoria exclusivamente matemática, comprometida apenas com noções elementares da mente e independente dos fenômenos naturais.

7.1 Física e geometria

Foi somente no século passado, mais precisamente a partir de 1836, que um matemático russo, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), conseguiu mostrar que uma *Ciência do Espaço* não podia ser fundada somente nas noções abstratas da Matemática, mas deveria ser objeto da experiência [15].

Em 1905, A. Einstein (1879-1955) publicou um famosíssimo artigo intitulado A Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento onde lançou as bases da teoria que passou a ser universalmente conhecida como Teoria da Relatividade Restrita. Nesse artigo, baseado em argumentos filosóficos bastante gerais e evidenciando a íntima ligação existente entre espaço e tempo, Einstein mostrou que uma Ciência do Espaço era, de fato, objeto da Física, confirmando as previsões feitas por Lobachevsky. Na sua Teoria da Relatividade Geral, ainda mais profunda do que a anterior, Einstein mostrou que espaço, tempo e gravitação não são coisas independentes, mas formam um todo na estrutura do universo [5].

Uma teoria que se dedique ao estudo das disposições, formas, transformações, etc., mas que não inclua esses ingredientes evidenciados pelas teorias da Relatividade, poderá ainda ser chamada de uma Geometria, mas não poderá mais ser confundida com uma Ciência do Espaço.

Na antigüidade grega, no entanto, a identidade entre Geometria e uma implícita Ciência do Espaço fazia parte dos pressupostos que suportavam o edifício do conhecimento helênico. Essa confusão levou a inúmeras contradições, tanto para o desenvolvimento da própria Geometria quanto da Física.

Origem das idéias

As idéias que prevalecem numa sociedade são, por muitas razões, profundamente influenciadas pelas percepções que seus membros têm das coisas do mundo.

Não é demais imaginar que a idéia que se fazia da perfeição na Antigüidade fosse proveniente da contemplação das obras da arte e da técnica¹ e estivesse, por conseguinte, condicionada pelos (e impregnada dos) efeitos dos instrumentos usados pelos artistas para realizá-las.

Dentre esses instrumentos estava certamente o torno, usado na confecção de artefatos cerâmicos e no trabalho da madeira. Um comentário de Platão acerca dos movimentos do universo, que tem sido freqüentemente tomado como uma explicação definitiva para a preferência dos antigos pelas formas circulares, ilustra como as nossas percepções podem influenciar as concepções que fazemos do mundo em que vivemos:

¹Ainda que os gregos dedicassem, como relatam os historiadores, um pedante desprezo pelos trabalhos manuais, que contaminou as culturas que a sucederam e se prolongou para além Renascença [49].

E ele deu ao universo a forma correta e natural (...). Fê-lo, como que num torno², redondo e esférico, com as extremidades eqüidistantes do centro em todas as direções, dentre todas as figuras a mais perfeita e mais igual a si própria, pois julgou o igual mais belo do que o desigual (...)

7.2 Universo e simetria

Nesse comentário, ao ver no círculo a figura mais igual a si mesma, Platão associou a perfeição àquilo que hoje, em Matemática, se entende por simetria. Muitos séculos depois, James Bernoulli descobriu, escondida nas espirais logarítmicas, uma simetria semelhante à enunciada por Platão. Ao referir-se a essa propriedade das espirais logarítmicas (fig. 7.1), Bernoulli valia-se da expressão latina que hoje lhe serve de epitáfio, eadem mutata resurgo³.

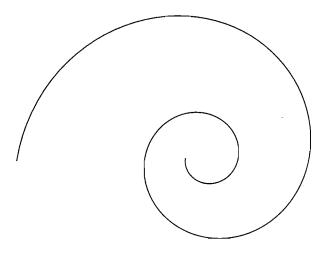


Figura 7.1: Espiral logarítmica

Com o desenvolvimento da teoria dos grupos, a noção de simetria tornou-

²Grifo nosso.

³ Apesar de transformada, ressurjo. Como o círculo que após uma rotação, superpõe-se à sua própria figura, a espiral logarítmica, após uma rotação combinada a uma homotetia (uma redução ou ampliação), coincide consigo mesma. Veja seção 11.2.2

se mais rigorosa, até alcançar a posição de uma noção independente, capaz de descrever não apenas a perfeição estética, mas sobretudo as estruturas dos cristais, das ligações químicas, das partículas elementares ou até mesmo das relações existentes entre as leis da Física.

Como todas as idéias apriorísticas, a concepção que Platão tinha do universo está aprisionada num inescapável círculo vicioso: o universo seria simétrico porque perfeito ou seria perfeito porque simétrico? Essa camisa de força incomodou não poucos estudiosos da história da Física.

7.3 Universo e regularidade

Arthur Koestler, se não o mais qualificado, certamente um dos mais polêmicos desses historiadores, atribuindo a Platão uma importância para a síntese da Astronomia que talvez exceda em muito o razoável, assim extravasa sua indignação contra o filósofo⁴:

Portanto, a tarefa dos matemáticos era excogitar um sistema que reduzisse as irregularidades aparentes nos movimentos dos planetas a movimentos regulares⁵ em círculos perfeitamente regulares. A tarefa ocupou-os durante os dois mil anos seguintes. Com sua exigência poética e ingênua, pôs o filósofo uma maldição sobre a Astronomia, e os seus efeitos iriam durar até o começo do século dezessete, quando Kepler provou que os planetas se movem em órbitas elípticas e não circulares. Não existe, talvez, outro exemplo na história do pensamento de persistência tão obstinada, tão obcecada no erro, como a ilusão do círculo que emperrou a Astronomia durante dois milênios.

No entanto, na palavra por nós sublinhada no texto do próprio Koestler, esconde-se uma idéia muito mais sutil e profunda que talvez lhe tenha escapado.

⁴Arthur Koestler: Os sonâmbulos — História das idéias do homem sobre o universo. IBRASA, 1961. Esse livro é uma eloquente comprovação de que grandes homens fazem-se com bons biógrafos...

⁵Grifo nosso.

Muito mais do que a ilusão do círculo, parece ter sido a ilusão da regularidade a idéia inspiradora da maioria dos investigadores dos movimentos dos corpos. Encarada do ponto de vista estrito da Teoria dos Grupos — a ciência que mais perfeitamente trata das regularidades das coisas — a elipse de Kepler não é menos regular do que o círculo de Platão ou do que as espirais de Bernoulli.

A história da Mecânica parece ter sido mais a de uma busca das regularidades íntimas dos movimentos dos corpos, do que a de uma devoção disciplinada às opiniões dos filósofos, mesmo quando Platão é um deles. É mais provável que a extrema longevidade do círculo nas explicações encontradas pelos astrônomos antigos para os movimentos dos corpos celestes — contra a qual Koestler insurgiu-se com tanta veemência — deveu-se não a uma preferência ingênua por essa curva, mas à falta de evidências capazes de confirmar a existência de regularidades nesses movimentos que pudessem dar a esses astrônomos, uma outra opção.

7.4 Trajetórias

Se Kepler mostrou que os planetas descrevem, em seus movimentos, elipses onde o Sol ocupa um dos focos, coube a Galileu, através de experimentos ideais extremamente engenhosos, encontrar os argumentos mais convincentes para mostrar que os corpos, na ausência de quaisquer forças, movem-se em movimento retilíneo e uniforme ou que mísseis, lançados sob a ação da gravidade, seguem em curvas parabólicas.

Refletindo sobre as relações entre tempo e espaço, Galileu pôde enunciar assim, não apenas a lei da inércia, mas mostrar, de forma não apriorística que segundo essa lei, a reta representa uma das curvas fundamentais encontradas nos movimentos naturais, como também, ao enunciar, mais do que implicitamente as bases da álgebra vetorial, que a parábola é a curva descrita pelo movimento de um projétil.

As curvas passaram desde então a ser vistas, tanto por inspiração filosófica quanto por razões tecnológicas, como trajetórias do movimento de algum corpo, seja ele um planeta sob a ação de forças gravitacionais, seja a pena de uma caneta movida pelo desenhista que acompanhe os vínculos e articulações de sua anatomia ou de instrumentos mecânicos como a régua, o compasso ou o pantógrafo.

Tais razões tecnológicas ligaram tão intimamente as bases da Geometria aos instrumentos mecânicos, que no século XVII a Geometria já era tida como uma ciência fundada na Mecânica [44].

Traços como trajetórias

(...) a descrição de linhas retas e círculos, sobre as quais a geometria está baseada, pertence à mecânica. A geometria não nos ensina a desenhá-las, mas precisa que elas o sejam. (...) Descrever linhas retas e circulares são problemas, mas não são problemas geométricos. A solução deles é buscada na mecânica cabendo à geometria usá-las (...). Portanto a geometria está fundada na prática mecânica (...).

Sir Issac Newton, Principia Mathematica Philosophia Naturalis[44]

O traço é uma das formas fundamentais de representação gráfica de objetos reais. É também, provavelmente, a mais antiga. Os autores dos desenhos rupestres, os mais remotos de que temos conhecimento, exploravam os efeitos dos contornos para a comunicação.

Em oposição às pinturas, de que falamos na seção 1.3 — obtidas da alteração das propriedades óticas de regiões selecionadas de uma superfície — os traços são praticamente destituídos de atributos óticos. Eles podem por isso, ser vistos como entidades essencialmente geométricas, cujos atributos óticos são tratados de forma secundária.

Um traço será, para nós, o efeito gráfico que se obtém das alterações provocadas sobre a superfície do papel, pelo deslocamento de uma pena ou de uma ponta de grafite, numa *trajetória* determinada pela ação do desenhista.

Se, na geração de um traço, seus atributos óticos são, de um lado, praticamente irrelevantes, de outro, a habilidade do desenhista, ou a qualidade dos mecanismos que determinam o movimento da pena, é essencial para a produção de bons resultados. É possivelmente por essa razão que em muitos momentos de sua história, a Geometria tenha sido influenciada pelos instrumentos usados para a produção de traços. Os traços são tão importantes para o Desenho que merecem a atenção de uma teoria própria¹.

8.1 Traços e curvas

Se olharmos um desenho feito a mão livre, concentrando-nos apenas nos traços elementares que o compõem, veremos que raramente cada um desses traços forma uma figura complexa: os traços são, em geral, curvas elementares.

De fato, muito poucas vezes deparamo-nos com desenhos formados por um único traço: na maioria delas, esses desenhos são compostos por um número muito grande de pequenos traços distintos, realizados a intervalos de tempo durante os quais o desenhista mantém a ponta do lápis erguida, afastada do papel. Tudo se passa como se o desenhista estivesse usando o lápis para "conversar" com o papel e fizesse, entre uma frase e outra, uma pausa, seja para pensar na próxima oração, seja para tomar fôlego.

Trataremos os traços como unidades constitutivas do desenho geométrico, assim como vemos nas letras as unidades constitutivas da língua escrita ou no fonema, as unidades da língua falada. Em qualquer dos casos, essas unidades combinam-se para formar partes mais complexas. Essas combinações têm, para nós, um significado próximo das reações químicas, pois se pensamos num fonema como um átomo da linguagem falada, então, as palavras surgem como suas moléculas.

Como veremos na seção 13.9, podemos proceder da mesma forma com o ponto e o traço: este pode ser tratado como se fosse um composto formado de uma combinação daqueles.

¹Veja a exposição dessa teoria na seção 13.9.

8.1.1 As teorias das curvas

As curvas têm sido estudadas por diferentes motivos e sob diferentes abordagens.

Numa delas busca-se entender porque certos corpos, sujeitos a determinadas condições, assumem formas características². Um fio de prumo toma a forma de uma linha reta vertical; bolhas de sabão, a Lua ou o Sol, de esferas; algumas galáxias tomam a forma espiralada; os fios elétricos, as correntes usadas para bloquear o acesso a certas áreas, a forma de catenárias³.

Estática e Ciência dos Materiais

Os conhecimentos que se desenvolveram a partir desta abordagem é de enorme importância para toda a tecnologia. Sem eles, engenheiros ou arquitetos não são capazes de conceber formas de edifícios que não trinquem nem caiam; nem *designers* poderão desenhar utensílios resistentes ou duradouros. No capítulo 9 examinaremos os métodos usados para estudar algumas formas naturais assumidas por corpos inanimados.

Numa segunda abordagem, estudam-se as curvas que se formam na interseção de duas superfícies geométricas como, por exemplo, o plano, a esfera, o cilindro ou o cone circular. Dessas serve de exemplo a elipse que se forma onde se encontram o ar, a superfície plana de um líquido e a superfície cilíndrica ou cônica de um copo que os contém. Vemos um círculo ou uma elipse no perímetro de uma peça cortada de salame, salsicha ou mortadela; neste caso, a faca corta num plano a superfície cilíndrica desses mantimentos.

Interseção de Superfícies

Um terceiro modo de se estudar uma curva é tratá-la como um *lugar geométrico*. O lugar geométrico pode ser definido como

Lugares Geométricos

o conjunto dos pontos do plano ou do espaço que compartilham uma mesma propriedade.

Dizemos que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma determinada distância de um ponto dado, denominado centro da circunferência.

²O leitor interessado nesta abordagem terá proveito em consultar [53].

³ Catenária, da palavra latina para cadeia, é o arco formado por linhas suspensas como por exemplo, nos fios de luz ou telefone, pendurados nos postes ou nas correntes usadas para bloquear o acesso de veículos a locais reservados.

Morfogênese

Trajetórias

Uma quarta abordagem, a transformacional, será apresentada no capítulo 13. Ela permite estudar as formas a partir das transformações geométricas, implícitas ou explícitas, que as geraram. Esta nos parece a mais consequente para o estudo das formas que surgem por etapas de desenvolvimento, como ocorre na construção de determinados artefatos ou no crescimento de um ser vivo e mostrou-se a mais apropriada para o desenho por computador⁴.

Neste capítulo as curvas serão vistas sob um outro aspecto⁵: como o *efeito* produzido por determinados movimentos. Interessam-nos, então, as *trajetórias* descritas por corpos materiais e, em especial, os rastros que eles deixam, como testemunho desse movimento, sobre uma superfície lisa.

As leis que regem os movimentos dos pontos materiais que os desenhistas normalmente impõem inconscientemente à sua pena, dependem de uma variedade ainda não completamente determinada de fatores que envolvem parâmetros anatômicos, neurológicos e psicológicos, que ultrapassam nossa capacidade de equacionamento.

Porém, diferentemente do desenho artístico, os desenhos técnicos que requerem precisão não devem ser feitos a mão livre, mas com o recurso de instrumentos. Nestes casos, os desenhistas valem-se de traços simples tais como segmentos de reta, arcos de círculos, elipses, parábolas, hipérboles ou espirais, que podem ser produzidos com o auxílio de instrumentos. Essa imposição técnica restringe significativamente a influência dos fatores humanos sobre os traços, simplificando o estudo das leis que regem seus movimentos.

Se, a essa simplificação, adicionarmos outra que consiste em desprezar os atributos óticos dos traços, tais como a cor da pena ou sua espessura, poderemos confundir, sem introduzir erros apreciáveis, o deslocamento da ponta do lápis como o de um ponto material que desliza sobre o papel, segundo a lei de movimento determinada pelo instrumento. Nessas condições, a noção de trajetória, concebida pelos físicos, serve bastante bem para descrever o traçado com instrumentos, e nos esclarece muito sobre a natureza do gesto que um desenhista executa para produzir um traço no papel.

⁴Este trabalho é o resultado de um esforço para demonstrar essa tese. Com exceção das figuras 4.1, 4.2 e 4.3, de autoria Albrecht Dürer, todas as demais que ilustram este trabalho foram geradas por um programa desenvolvido pelo autor (o *Designer's Workbench*) a partir dos princípios expostos no capítulo 13.

⁵Este método de estudo pode, como mostrado na seção 13.9, ser reduzido à transformacional. Não foi como tal, entretanto, que ele se desenvolveu na história.

É desse estudo que deriva o conhecimento necessário para, de um lado, possibilitar o projeto e desenvolvimento de instrumentos mecânicos capazes de realizar esses traços com precisão e, de outro, conceber algoritmos para que o computador possa desenhá-los com a rapidez e a exatidão desejados.

O estudo sistemático dos movimentos dos pontos materiais e das trajetórias que eles descrevem quando sujeitos a uma variedade de restrições é feito no escopo da disciplina conhecida por *Cinemática*⁶.

É por meio de instrumentos de trajetória que se produzem os traços dos desenhos técnicos. Régua, compasso, esquadro, elipsógrafo, pantógrafo, normógrafo e gabarito são todos instrumentos mecânicos tratados como cinemáticos, pois eles condicionam o movimento da ponta traçadora — lápis, caneta ou tira-linhas — sobre o papel. Para estudar o traço, podemos nos concentrar totalmente na ponta desse instrumento, abstraída do resto, como se ela fosse um ponto e se reduzisse à única parte material do instrumento.

Instrumentos Cinemáticos

8.2 Traços e trajetórias

Nesta seção estudaremos como uma ponta riscadora, apropriadamente compelida por instrumentos mecânicos, pode produzir traços precisos. Esses mecanismos podem ser formados tanto por fios esticados, devidamente fixados na superfície de desenho, quanto por hastes rígidas articuladas. Dependendo do arranjo feito, pode-se conduzir a pena a seguir por trajetórias retas, circulares, elípticas, parabólicas, hiperbólicas, espiraladas, etc.

Linhas em movimentos constrangidos

8.2.1 A circunferência

Quando se pretende apresentar uma velha noção a um noviço, é muitas vezes útil colocá-la na perspectiva de sua evolução ao longo da História. Porém, quando essa noção teve origem em eras muito remotas, esse caminho nem sempre pode ser percorrido.

Os arqueólogos e historiadores têm um enorme trabalho para recolher os fatos do passado, desvendar coerências entre eles e torná-los inteligíveis

⁶A palavra cinema deriva da grega arcaica que designava movimento.

aos outros mortais. Quando se trata de reconstituir uma civilização extinta, as dificuldades podem ser ainda maiores e, em alguns casos, os obstáculos encontrados, intransponíveis. A falta de dados, a corrupção do tempo, os saques de predadores, a intervenção incompetente dos curiosos, as fraudes dos desonestos, tudo isso se combina para tornar o trabalho do arqueólogo ainda mais difícil.

Muitos conceitos importantes para o propósito deste trabalho estão escondidos sob essa espessa camada de névoa, poeira e entulho. Mas nós podemos, com o fim de facilitar a explicação de uma noção antiga e a devida licença de historiadores e antropólogos, fazer de uma ficção conveniente, a história de nosso conceito. Assim, devidamente autorizados, passamos à narrativa...

O cão e o poste

Alguém, num remoto dia da antigüidade, amarrou seu cão a um poste⁷. O cão podia mover-se livremente enquanto não esticasse a corda e logo aquele animal percebeu, para sua contrariedade, que havia um limite para o quanto poderia afastar-se do poste. Seu dono percebeu algo mais: quando o cachorro alcançava esse limite, a corda ficava retesada e assumia a forma de uma linha reta.

Continuou observando e constatou que, mesmo com a corda esticada, o cachorro ainda podia mover-se. Não em qualquer direção, pensou, mas enquanto mantivesse esticada a corda, seu movimento descrevia uma curva que ele chamou de *circunferência*⁸. O dono do cachorro percebeu então que todos os pontos dessa curva ficavam a uma mesma distância (o comprimento da corda) de um mesmo ponto (o poste).

Quem sabe não foram observações singelas como essas as que inspiraram os "esticadores de cordas" da Índia e do Egito antigos a usar cordas esticadas para traçar retas e circunferências?

8.2.2 A elipse

O cão e os dois postes

Nosso personagem da antigüidade ficou tão excitado com suas descobertas

⁷A presente fábula trata de outra que não a primeira idéia que ocorre ao leitor, tão logo ele se dê conta do presente título...

⁸ Alguém inventou essa palavra. Porque não nosso herói?

que decidiu fazer novas experiências com seu dileto assistente, o cachorro.

Colocou uma argola na coleira do cão, passou por ela uma corda, tomou uma de suas extremidades e, depois de contornar dois postes, amarrou-a à outra extremidade. Feito isso, voltou a observar o cachorro.

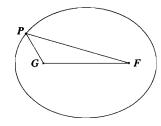
Confirmou suas primeiras descobertas: o cão podia mover-se livremente enquanto não esticasse a corda. Percebeu também que, como no experimento anterior da circunferência, havia um limite para o quanto o cão poderia afastar-se dos postes.

Constatou novamente que, mesmo com a corda esticada, o cachorro ainda podia mover-se e, enquanto mantivesse a corda esticada, seu movimento descrevia uma curva, diferente da circunferência, que ele chamou agora de *elipse*.

E se repetisse a experiência com uma corda mais comprida, que forma tomaria a curva? — pensou nosso protagonista.

Mas logo desistiu do intento. Cordas mais compridas custam mais caro e sua mulher já reclamara, mais de uma vez, dos gastos inúteis que ele vinha fazendo com aquele cão idiota e suas experiências estúpidas. Teve de contentar-se com um experimento só.

Subiu o morro que se elevava dos fundos de sua casa, olhou desolado para sua experiência e percebeu que sempre que o cachorro retesava a corda, esta assumia a forma de um triângulo (o triângulo PFG da figura ao lado). Com aquela corda de que ele dispunha — e que sua mulher não permitia que ele trocasse por outras mais compridas — todos os triângulos que se formavam tinham uma coisa em comum: seus perímetros! Eles não mudavam enquanto o cachorro mantivesse a corda retesada pois seu comprimento era o mesmo da sua corda.



— Heureka! — teria ele gritado, se se chamasse Arquimedes.

Mas não era esse o seu nome. Muito tempo se passaria antes de aparecer esse tal de Arquimedes.

À noite, deitados na cama, marido e mulher olhavam para o teto. Ela via os furos no telhado e reclamava:

— É preciso consertar esses furos antes das águas!

Ele olhava os furos mas só via seus triângulos. Perímetros iguais, ele pensou. É isso mesmo, são triângulos *isoperimétricos*. Além de descobrir curvas, nosso pensador ancestral inventava palavras.

A manhã do dia seguinte foi, por assim dizer, isoperimétrica. Em tudo nosso herói via triângulos. Três utensílios na mesa formavam um triângulo. Movia-os para lá e para cá, tentando manter constantes os perímetros de seus triângulos. O perímetro passou a ser um objeto sagrado. Preserválo poderia vir a ser um novo e nobre objetivo para sua vida; modificá-lo, corrompê-lo, uma maldição. Seu pensamento voltava para seu experimento: um triângulo feito de dois postes e um cão. E se fossem dois cães e um poste?

— Mais um cão? — perguntou sua mulher — Nem pensar!

Repensando seus pensamentos, fez outra descoberta:

— Os postes! Não mudei a posição deles!

Ele percebera que os triângulos, além de serem isoperimétricos eram tais que um dos lados — o que liga os dois postes — não muda. O comprimento desse lado é sempre o mesmo, qualquer que seja a posição do cachorro. Nosso herói correu então para anotar sua descoberta. Mas tão atormentado estava, que nem percebeu que acabara de inventar o método do lugar geométrico para descrever uma curva:

A soma das distâncias de um ponto P qualquer (seu cachorro) que se encontra numa elipse, a dois pontos fixos F e G do plano (os postes) é constante:

$$PF + PG = AB$$

Ele pensava em AB como o comprimento da corda da qual tivesse sido descontada a distância que separa um poste do outro.

— Os postes!

Ficou tão feliz com mais essa descoberta que resolveu dar nomes aos pontos onde estavam fincados os postes:

— Vou chamá-los de focos da elipse.

Dar nomes aos pontos parecia-lhe uma forma muito especial de comemorar suas descobertas.

Daí em diante, os "esticadores de cordas" puseram-se a desenhar elipses com o auxílio de cordas esticadas. E nunca mais pararam. Até hoje uma das suas idéias é empregada pelos jardineiros para gerar canteiros de contornos elípticos. A outra é empregada pelos políticos para comemorar qualquer coisa, dando nomes a ruas, praças, viadutos, estradas, presídios. Algum dia lembrar-se-ão de voltar a dar nomes aos postes...

8.2.3 A parábola

Uma parábola pode ser caracterizada por um foco F e uma linha reta rr, denominada sua diretriz.

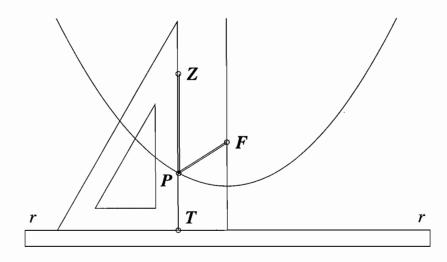


Figura 8.1: Traçado de uma parábola usando uma corda esticada

Uma das propriedades da parábola pode ser expressa por meio da seguinte identidade:

$$PF = PT$$

onde PF representa o comprimento do segmento cujas extremidades são um ponto P na curva e o foco da parábola F; \overline{PT} é o comprimento do segmento cujas extremidades são o ponto P e sua projeção normal T sobre a diretriz rr.

Com um esquadro e uma corda pode-se traçar uma parábola:

- 1. Toma-se uma corda de comprimento l e marca-se sobre uma das arestas do esquadro, um ponto Z que esteja à mesma distância l da outra aresta;
- 2. Prende-se uma das extremidades da corda no ponto Z da aresta do esquadro;
- 3. Fixa-se a outra extremidade da corda no foco F da parábola;
- 4. Ajusta-se, em seguida, uma régua disposta sobre a diretriz rr da parábola, fazendo com que a aresta livre do esquadro (aquela à qual a corda não está atada) deslize sempre apoiada na régua;
- 5. À medida que a aresta livre do esquadro desliza sobre a régua, usa-se a ponta de um lápis para traçar a curva, ao mesmo tempo que com ela se estica a corda FPZ, comprimindo-a contra a aresta PZ do esquadro.

Agindo dessa forma, conseguiremos manter a ponta do lápis P sempre equidistante do foco F e da diretriz da parábola, isto é, $\overline{PF} = \overline{PT}$.

Podemos perceber que

$$\overline{ZP} + \overline{PF} = \overline{ZP} + \overline{PT} = l$$
.

Eixo. O eixo da parábola é a reta que passa por seu foco e é normal à sua diretriz. A parábola é simétrica em relação a seu eixo⁹.

Vértice. O vértice da parábola é o ponto de interseção da curva com seu eixo. O vértice da parábola pode também ser definido como o ponto da curva que está mais próximo de sua diretriz.

Na figura 8.2 ilustra uma parábola inscrita no triângulo ABC, onde F representa o foco da parábola, dd sua diretriz e D a projeção do foco F sobre

⁹Galileu mostrou que se desprezarmos os efeitos da resistência do ar, a trajetória de um projétil pode ser aproximada por uma parábola.

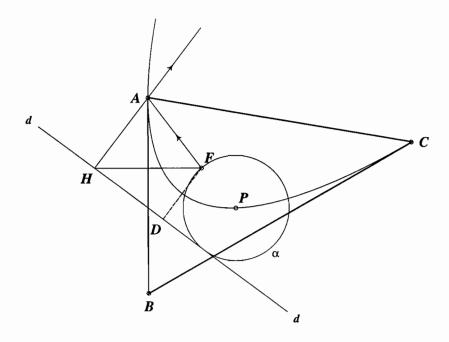


Figura 8.2: Propriedades da parábola

essa diretriz. A parábola possui, entre outras, as seguintes propriedades notáveis:

- P1 A circunferência α , com centro num ponto P qualquer da parábola e que passa pelo foco F é tangente à sua diretriz dd, isto é:
 - O lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma reta dada dd e que passam por um ponto dado F é uma parábola.
- **P2** A tangente BA à parábola no ponto A é a mediatriz do segmento HF, onde H é a projeção do ponto de tangência A sobre a diretriz dd.
- P3 Como corolário de P2, os ângulos \widehat{FAB} e \widehat{BAH} são iguais, donde se conclui que todo raio de luz que parte de F, reflete-se sobre a parábola e segue paralelo a seu eixo FD. Esta propriedade ótica é utilizada nos refletores de faróis e nas antenas parabólicas.
- P4 A área da região compreendida entre o arco de parábola e o segmento AC na figura acima, é igual a $\frac{2}{3}$ da área do triângulo ABC.

Obs. : Os pontos notáveis das parábolas não são invariantes em relação às transformações geométricas de afinidades. isto é, o foco, a diretriz e o eixo

de uma dada parábola transformada não coincidem com o foco, a diretriz e o eixo transformados, dessa mesma parábola.

8.2.4 A hipérbole

A hipérbole é uma curva plana aberta, formada por dois ramos simétricos em relação a uma reta.

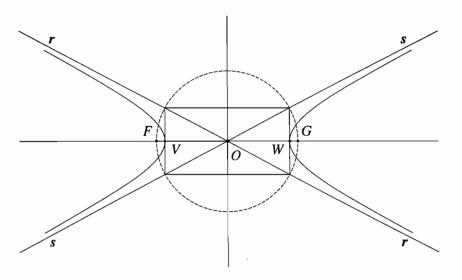


Figura 8.3: Propriedades da hipérbole

Focos. Cada um dos ramos da hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P, tais que a diferença entre as distâncias FP e GP que separam P de dois pontos fixos F e G desse plano (os focos da hipérbole), é constante. Por causa da simetria de seus ramos, os focos da hipérbole estão dispostos simetricamente em relação ao centro O.

Como na elipse, denotaremos por 2c a distância FG formada entre os dois focos F e G. A diferença das distâncias que separam seus focos de qualquer ponto P sobre a hipérbole, é constante. Como a hipérbole possui dois ramos, temos duas expressões independentes — uma para cada ramo.

Qualquer ponto P de um dos ramos satisfaz a identidade FP - GP = 2a enquanto qualquer ponto do outro ramo satisfaz a expressão GP - FP = 2a.

Para expressar as coordenadas do foco mais próximo do ponto B, utilizamos a notação $\operatorname{CnF}(A,B,C,\mu)$, a mesma utilizada para se denotar um dos focos da elipse. O quociente $\epsilon=\frac{c}{a}$ é denominado a excentricidade da hipérbole.

Centro e Eixo. O ponto médio dos focos é o centro da hipérbole e a reta que passa por seus focos é denominada o eixo da hipérbole. A hipérbole apresenta simetrias, isto é, ela superpõe-se a si mesma quando

- refletida sobre seu eixo FG;
- refletida sobre a reta normal ao eixo e que passa por seu centro;
- girada de $\frac{\pi}{2}$ em torno de seu centro O (esta propriedade é conseqüência das duas anteriores).

Vértices. A hipérbole possui 2 vértices: V e W. Eles opõem-se, simetricamente, em relação ao centro. Como na elipse, denota-se por 2a o comprimento do segmento VW.

Assíntotas. A hipérbole possui duas assíntotas (retas rr e ss da fig. 8.3) que passam por seu centro O e são simétricas em relação a seu eixo.

Os vértices VW da hipérbole são os pontos onde a curva cruza a reta que une seus focos. À medida que um ponto da hipérbole se afasta do vértice, diminui sua distância a uma das assíntotas. As assíntotas passam pelo centro O da hipérbole e formam com seu eixo um ângulo cuja tangente é igual à excentricidade ϵ da curva.

O retângulo representado na figura 8.3 é denominado retângulo de base da hipérbole [14]. O comprimento do segmento FG, é igual à diagonal desse retângulo, donde se conclui que os vértices do retângulo de base estão na interseção das assíntotas da hipérbole com a circunferência que tem centro em O e passa por seus focos.

8.2.5 Desenho da hipérbole

Para desenhar uma hipérbole, faz-se o seguinte arranjo envolvendo uma régua e uma corda. Fixa-se a extremidade da régua sobre um dos focos, G, da hipérbole de modo que ela possa girar em torno deste¹⁰ (fig. 8.4).

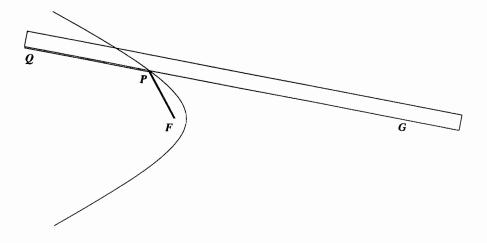


Figura 8.4: Traçado de uma hipérbole usando corda FPQ esticada

Uma das extremidades da cordas é fixada no outro foco F e a outra extremidade, num ponto qualquer S da aresta da régua. À medida que a régua gira em torno do ponto F' como pivô, a ponta do lápis, comprimida contra a aresta da régua, é forçada a esticar a corda. O único movimento resultante que a ponta do lápis poderá seguir, é o que descreve a trajetória da hipérbole hh'.

Observação: Os pontos notáveis das elipses ou das hipérboles não são invariantes em relação às afinidades, isto é, os focos, vértices e eixos de uma dada elipse ou hipérbole transformada não coindicem com os focos, transformados, dessa mesma elipse.

¹⁰Esta operação não é permitida pelas regras básicas da construção com régua e compasso.



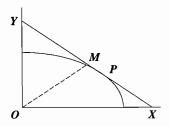
8.2.6 Compasso elíptico

Imagine uma haste rígida XY cuja extremidade Y possa deslizar livremente ao longo de uma parede vertical ao mesmo tempo que sua outra extremidade X desliza sobre o piso horizontal, como uma escada de pintor que escorrega parede abaixo. À medida que a haste escorrega, um ponto P qualquer sobre ela descreverá um arco de elipse. Em especial, o ponto médio M da haste descreverá uma circunferência de raio OM com centro no ponto O onde a parede encontra o piso.

Observe que os triângulos YMO e OMX são isósceles. Graças a essa propriedade, pode-se construir um outro mecanismo formado por duas hastes rígidas, OM e MX, de mesmo comprimento. A extremidade de uma dessas hastes articula-se no ponto fixo O, enquanto a outra extremidade está articulada à outra haste, no ponto comum M. Nesse movimento, a extremidade M da haste OM gira em torno de O (o pé da parede vertical) enquanto X desliza horizontalmente. Ao mover-se esse arranjo, um ponto P qualquer da haste MX descreverá a mesma curva traçada por seu correspondente na escada que escorrega, isto é, P "desenhará" um arco de elipse.

Podemos visualizar esse mesmo mecanismo no movimento das articulações da perna de uma pessoa deitada: O ponto O corresponde à articulação do fêmur com a bacia, M à articulação do joelho e X a seu pé.

Este instrumento, utilizado tanto no desenho de elipses quanto como ferramenta de corte em máquinas ferramenta, é conhecido por articulação isósceles, pois o triângulo OMX é por construção, sempre isósceles, qualquer que seja a posição da extremidade X.



As formas estáticas

9.1 Formas e estática

Nos capítulos anteriores vimos como o estudo do movimento dos corpos serviu-nos não apenas para evidenciar a natureza cinemática do ato de traçar, mas também para mostrar os princípios subjacentes ao projeto dos instrumentos convencionais de desenho. Vimos como, mediante o uso de fios esticados, criteriosamente arranjados e fixados, pode-se condicionar o movimento de uma ponta traçadora a seguir pela trajetória de uma curva regular, como a circunferência ou as demais curvas cônicas.

Porém, ao desenhista criterioso, interessado em reproduzir com precisão as formas da natureza, não deve bastar conhecer a arte do traço que a cinemática nos ajuda a entender. Interessa-lhe também saber que formas são essas, isto é, saber traduzir o que traçar em como traçar. Neste capítulo pretendemos mostrar, através do exame de um fenômeno elementar, como se pode, por meio da análise, desvendar a origem de algumas das formas que encontramos na natureza. Para isso iremos submeter os fios esticados a novas reflexões, agora para examinar seus aspectos "estáticos".

Na seção 13.2 e, em especial na seção 13.2.4, mostraremos que muitas formas naturais e artificiais são registro da trajetória de algum movimento. Lá estudaremos a teoria da morfogênese, segundo a qual tanto as formas dos seres vivos quanto as dos artefatos podem ser entendidas como estágios de

Da natureza das formas

movimentos quase imperceptíveis. Nos seres vivos esse movimento progressivo é conhecido por *crescimento*; nos artefatos, por *construção*.

Muitas vezes, no entanto, as formas dos objetos naturais inanimados podem ser melhor estudadas, não pela sua morfogênese, mas a partir dos fenômenos naturais segundo os quais as forças da natureza, interagindo com a matéria, encontram o equilíbrio.

As ciências que estudam esses fenômenos, também disciplinas da Física e da Engenharia, são a Estática e a Ciência dos Materiais. Seu conhecimento é essencial ao arquiteto e ao designer, não apenas porque elas lhes permitem, em muitos casos, determinar as formas que a matéria inanimada assume no equilíbrio, mas principalmente porque lhes fornecem os princípios que devem ser seguidos para dotar um artefato qualquer — seja ele uma casa, uma ponte, uma mesa ou uma cadeira — das qualidades essenciais de resistência, segurança e durabilidade.

Um produto, para ter essas qualidades, deve ser concebido de forma a estar em permanente equilíbrio com todas forças com as quais interage. Para isso, nem sua forma nem sua constituição podem ser arbitrárias, escolhidas exclusivamente por preferências ou considerações estéticas. A par disso, elas devem levar em conta as *linhas de força* que incidirão sobre o objeto, bem como as propriedades do material com o qual será confeccionado.

Os conhecimentos das leis da estática e das propriedades dos materiais são ingredientes essenciais para que o projetista conceba não apenas a forma do artefato em si, mas principalmente do artefato em uso.

9.2 Fios esticados

Linhas estáticas

Quando esticados, os fios assumem a forma de uma linha reta ou, por vezes, a de uma catenária¹; quando enrolados em torno de um cilindro, formam uma rosca e quando enrolados sobre si mesmos, como os sulcos num disco e vinil, uma espiral de Arquimedes. Se entrelaçados uns ao outros, formam tramas das tecelagens. Quando devidamente entrelaçados sobre si mesmos, formam nós usados nas mais diversas situações.

¹Ver definição à página 89.

Fios esticados, das mais variadas composições químicas, por sua resistência à tração, são usados na construção de utensílios, móveis ou edifícios, como elementos estruturais para dar forma a seus volumes. Essa propriedade estática dos fios — a resistência à tração — será explorada nas seções 9.4-9.4.2 para orientar-nos na tarefa de construir uma imagem "abstrata" das curvas, necessária ao estudo sistemático do traço.

Um fio de prumo, pendurado numa viga ou num galho de árvore nos dá uma idéia da *linha reta*. O fio de prumo é feito de um barbante que tem, preso em uma de suas extremidades, um peso. Fixando-se sua outra extremidade nalgum ponto elevado do espaço, o peso, atraído pela gravidade, esticará o barbante, oscilando por um certo tempo até parar, quando assume a forma de uma linha reta vertical.

O fio de prumo serve aos pedreiros e construtores para erguer paredes retas. Com isso, esses profissionais procuram garantir que as paredes que eles constróem sejam verticais.

No entanto, para sabermos se o topo do muro forma uma linha horizontal, o barbante esticado já não é o meio mais apropriado. Isso porque um barbante, quando esticado, não na direção vertical, mas na direção horizontal, não forma mais uma linha reta, mas uma curva catenária, abaulada para baixo. O barbante, por ter peso próprio, é atraído pela Terra. Essa linha curva será tanto mais abaulada quanto mais frouxo estiver o barbante e tão mais próxima de uma linha reta quanto mais esticado ele estiver. Em qualquer caso, no entanto, por maior que sejam nossos cuidados — e porque o barbante não pode ser esticado ilimitadamente pois, nalgum momento ele romper-se-á — a linha formada será sempre abaulada.

Para constatar esse fato, o leitor poderá aproximar um barbante frouxamente esticado na horizontal, abaixando-o cuidadosamente sobre uma poça d'água até que ele toque sua superfície. Se o barbante não estivesse abaulado por causa do próprio peso, toda sua extensão tocaria a água, por igual. Ele verificará, no entanto, que, por mais que estique o barbante, haverá sempre um ponto que tocará a água antes de qualquer outro.

Para verificar se o topo do muro forma uma reta horizontal, em vez de um fio esticado, o pedreiro vale-se de outro artifício. Baseado no fato de que a luz se propaga em linha reta, ele irá verificar o resultado de seu trabalho por meio de uma *mirada*.

Fio de Prumo

Fios e Sons

Os fios, além de assumirem a forma de uma linha reta quando tracionados, apresentam outra propriedade notável: quando beliscados, emitem som. Por essa razão, os fios tracionados eram usados, desde tempos imemoriais, também nos instrumentos musicais. A altura do som está diretamente relacionada com a tensão a que o fio está submetido. O uso engenhoso dessa propriedade permitia aos antigos construtores romanos estabelecer o equilíbrio de tensões em estruturas, conforme relata Vitruvius em seu livro I²

O arquiteto deve (...) ser capaz de afinar (as cordas que tracionam) as balistas, as catapultas e os escorpiões. Pois, à direita e à esquerda das vigas, há furos nas estruturas através dos quais as cordas de tendões trançados são esticados por meio de molinetes e alavancas e essas estruturas não devem ser fixadas enquanto não se tiver atingido a nota certa ao ouvido do trabalhador treinado.

9.3 Tração e compressão

Para esticar um fio, basta segurar, com os dedos, dois de seus pontos e afastá-los um do outro. Enquanto o fio estiver frouxo, podemos movimentar livremente nossos dedos como se o barbante não existisse. Sempre que aproximamos nossas mãos, uma da outra, o fio parece desaparecer. Se as afastamos, novamente, de um momento para outro nos damos conta de que o barbante está lá. Tudo se passa como se ele tivesse desaparecido e de repente voltasse a aparecer.

Dizemos que um barbante pode ser retesado porque ele resiste à tração. Um barbante, no entanto, não resiste à compressão.

Tração é a força que deve ser exercida para afastar, um do outro, dois pontos distintos de um corpo.

Compressão é a força que deve ser exercida para aproximar, um do outro, dois pontos distintos de um corpo.

Observando os movimentos de um barbante que se mantém esticado, percebemos que todos os pontos do barbante se deslocam juntos, como se o

²Vitruvius, op.cit., I.8.

barbante tivesse deixado de ser um fio flexível e se transformado num corpo rígido. A persistência da tração transformou o barbante num corpo rígido. É graças a essa propriedade notável dos fios que podemos, esticando-os, dar a uma barraca de praia a rigidez necessária.

Uma vez que as cordas resistem apenas à tração, pode-se concluir que as curvas assumidas pelos barbantes que sustentam os *móbiles* pendurados num teto de um quarto são curvas de *tração pura*.

Sabe-se, de longa data, que pedras justapostas resistem apenas à compressão. Os antigos romanos conseguiam construir arcos circulares feitos exclusivamente de pedra. Esses arcos eram formados por cunhas de faces radiais, chamados voussoirs que, graças a essa geometria exerciam a função de converter os esforços radiais em esforços tangenciais, de modo a comprimir as cunhas, umas contra as outras, conferindo assim, à estrutura — como os fios numa barraca — a rigidez necessária [22]. As curvas construídas segundo esse princípio são arcos de compressão pura.

O arquiteto espanhol Antonio Gaudí³ explorou na concepção de suas obras, a oposição entre a tração e a compressão. Imaginou que poderia reproduzir no chão, na forma de arcos em pedra, as mesmas curvas que obtinha, em barbante, nos móbiles suspensos no teto. Ele imaginou esses móbiles de cabeça para baixo e percebeu que ao virá-los assim, estava como que "trocando o sinal" da aceleração da gravidade. Poderia, então, como num passe de mágica, converter os esforços de tração pura em compressão pura e vice-versa.

O espaço vazio não resiste nem à tração, nem à compressão. Apenas as substâncias materiais oferecem resistência a esses esforços, umas mais, outras menos. A Ciência dos Materiais, que estuda as propriedades das substâncias — tais como a resistência à tração ou à compressão — tornou-se, por essa, entre outras razões, tema importante para as sociedades civilizadas.



³Antonio Gaudí y Cornet (1852–1926).

9.4 Um exercício de abstração

Podemos reconhecer uma linha reta em muitas situações diferentes. Vejamos algumas.

Fio de prumo Já vimos que o barbante esticado de um fio de prumo tem a forma de uma linha reta vertical.

Papel dobrado Tomemos, agora, uma folha de papel. Dobrando, com cuidado e por igual, essa folha até que se forme um vinco, podemos ver nesse vinco, outra imagem de uma linha reta.

Eixo de rotação Abrimos uma porta. A maçaneta da porta desloca-se com nossa mão, o suficiente para que o vão aberto permita a passagem de nosso corpo. Podemos observar que nem todos os pontos da porta se movem do mesmo jeito. As dobradiças da porta, por exemplo, não saem do lugar. Isso porque elas formam o eixo de rotação em torno do qual a porta gira. Esse eixo é também uma linha reta. Assim como a porta, a roda de uma bicicleta gira em torno de uma linha reta. A Terra, em seu movimento diário, gira em torno de um eixo. Os pólos Norte e Sul são os pontos onde essa linha reta encontra a superfície terrestre.

Raios luminosos A luz propaga-se em linha reta. Se quisermos iluminar um objeto distante com uma lanterna, devemos fazer mira nele. Mirar é dirigir, ligando um ao outro, por uma linha reta, a vista a um ponto distante.

Quando se ergue uma parede, a idéia de linha reta confunde-se com a imagem que temos do fio de prumo; o mesmo se dá quando se cava um poço. Quando se faz uma dobradura em papel, a idéia de uma linha reta é feita da observação do vinco deixado no papel. Quando o torneiro mecânico monta uma peça no torno, ele imagina o eixo de rotação do torno como uma linha reta; alinhar uma peça é fazer seu eixo coincidir com o eixo de rotação do torno.

De que é feita a linha reta? Já vimos que um fio de prumo é feito de barbante e que, quando esticado, assume a forma de uma linha reta. Também vimos que um papel dobrado forma, em sua aresta, uma linha reta. A linha reta é, portanto, comum ao fio de prumo e ao papel dobrado; porém, uma linha reta não é feita nem de barbante nem de papel. De fato, ela não é feita de coisa nenhuma. É apenas uma idéia que nos vem à mente quando pensamos no que há de comum entre o fio de prumo e o papel dobrado. A *idéia* que fazemos da reta é comum a

ambos os exemplos, mas é só a idéia que é comum. A mesma coisa acontece quando pensamos no eixo da porta. Um eixo de rotação não é feito de coisa nenhuma. Enquanto, para imaginarmos um eixo de rotação, devemos pensar em alguma coisa girando em torno dele, para imaginar uma linha reta, não precisamos imaginar nada girando.

Os físicos chegaram à conclusão de que a luz pode ser vista tanto como uma partícula quanto como uma onda. Para todos os efeitos práticos⁴, ela se desloca numa linha reta. A linha reta que imaginamos quando pensamos num raio luminoso não é nem onda nem partícula: é apenas uma linha reta.

Uma idéia é uma "coisa" imaterial; é o que denominamos de uma abstração. A reta é a abstração que fazemos do fio de prumo, da aresta do papel dobrado, dos eixos de rotação, dos raios luminosos, em suma, de coisas concretas. Mas a idéia da reta não é uma coisa concreta.

Assim como o pedreiro, o torneiro, o escavador de poços, o marceneiro têm, cada um deles, sua própria idéia de uma linha reta, cada profissional faz a idéia de linha reta que melhor atenda a suas necessidades e conveniências.

O matemático, treinado para ocupar-se das coisas abstratas, também, como os outros, procura fazer a sua idéia do que seja uma linha reta. O objetivo do matemático, ao conceituar uma linha reta, é o de criar uma noção que tenha, em si, todas as propriedades comuns às idéias que os demais profissionais fazem da linha reta, mas apenas (exclusivamente) essas propriedades. Para o matemático,

Uma linha reta é aquilo que é comum a todos os exemplos examinados acima.

A linha reta do matemático não é feita de barbante; ela não tem espessura nem peso, mas resiste a qualquer esforço imaginável. Não é feita de papel dobrado nem é eixo de coisa alguma. A linha reta do matemático não é matéria, apenas pensamento.

⁴Segundo a Teoria da Relatividade Geral de A. Einstein, a trajetória da luz não é necessariamente uma linha reta, mas uma linha geodésica.

O maior desafio do matemático é descobrir quais são essas propriedades comuns, universais e fundamentais da linha reta⁵. Seu trabalho é descartar tudo aquilo que for *supérfluo* e ficar apenas com o *essencial*. A maioria de nós, infelizmente, tem mais sucesso na façanha inversa: descartar e essencial e ficar com o supérfluo.

Como um químico que destila uma mistura até que dela reste apenas uma substância livre de toda impureza, o matemático destila as diferentes idéias de linha reta em busca das caraterísticas da reta pura, aquela que está livre de todo elemento estranho.

A destilação da linha reta

Para conceber uma noção abstrata podemos proceder da seguinte maneira:

Partimos da observação de um fato real, concreto. Procuramos, então, livrar-nos, como numa destilação ou numa filtração, dos aspectos materiais desse fato até que nos reste dele, apenas uma noção abstrata.

Tomemos, por exemplo, como matéria-prima para essa destilação, as diferentes idéias de linha reta que nos foram sugeridas pela observação do fio de prumo. Essa destilação será feita em várias etapas.

Numa primeira reflexão, imaginamos que a corda que integra o fio de prumo dos pedreiros é substituída por um fio de cabelo. Numa segunda reflexão, este fio de cabelo será substituído pelo fio de uma teia de aranha.

9.4.1 Desmaterialização

Nesses dois passos de nossa imaginação,

 $(corda \rightarrow cabelo \rightarrow fio de teia)$

reduzimos a espessura de nossa linha e também, por conseqüência, seu peso. Podemos dizer que em cada passo o fio que obtivemos tem *menos matéria* do que o fio obtido no passo anterior. Não é despropositado dizer que, em

 $^{^5}$ Não vá concluir o leitor, desta frase, que os matemáticos somente se preocupam com a linha reta!

nossa mente, esses passos representam uma progressiva desmaterialização do fio. Constatamos que, quanto mais "desmaterializado" nosso fio, melhor ele representa a linha reta que buscamos. Se esticarmos cada um desses fios na direção horizontal, veremos que a "barriga" formada por cada um deles será tanto menos abaulada quanto menor for seu peso e quanto mais esticado estiver o fio.

Assim desmaterializado, o fio deixará de ter peso e não será mais atraído pela gravitação da Terra. Sem peso, ele não ficará abaulado. Esticado, ele representará uma linha reta, mesmo quando disposto na direção horizontal. O fio que construímos em nossa mente resistirá a qualquer tração, mesmo depois de termos extraído dele toda a matéria que o compõe.

É claro que não existe na natureza nenhum fio material destituído de peso, nem que nunca se rompa quando esticado demais. Mas o fio do matemático não é um fio natural, ele é mágico. Todas as entidades matemáticas são mágicas. Elas são capazes de feitos de que as coisas materiais nem sonham.

9.4.2 Dois pontos, uma reta

Como já dissemos, ao descrever a experiência acima, quando afastamos, ao máximo, um dedo do outro, o nosso fio fica retesado e, se ele não tiver peso nem espessura mas apenas resistência à tração, entenderemos que ele assume a forma de uma linha reta. Podemos, então, concluir dessas considerações o seguinte fato notável

O maior afastamento que se pode obter entre dois pontos distintos de um fio, dá-se quando esse fio está esticado, isto é, quando todos seus pontos intermediários estão sobre uma mesma linha reta.

Dessa forma, a fixação de dois pontos distintos quaisquer (os lugares onde nossos dedos seguram o fio) determinará a posição de *todos* os demais pontos da reta. Chegamos, assim, a outra conclusão notável

Dois pontos distintos do espaço determinam uma linha reta.

Esta é uma das descobertas mais importantes feitas sobre a linha reta pelos pensadores da Antigüidade. Graças a ela, o torneiro de hoje sabe que para alinhar uma peça no torno, basta fazer coincidir apenas dois pontos distintos dos eixos de simetria da peça, com dois pontos correspondentes do eixo de rotação do torno para que todos os outros pontos estejam também alinhados. Quando um desenhista quiser traçar uma linha reta sobre o papel, ele deve apoiar a régua sobre dois pontos distintos e seguir, deslizando a ponta ao longo de sua aresta, seguro de que agindo dessa forma, todos os pontos que traçar estarão na linha reta. Numa porta que se abre, todos os pontos movem-se, exceto aqueles que estão na linha reta que passa pelas dobradiças.

10

A rota

Para fazer-se um desenho preciso, é necessário que seus traços estejam devidamente balizados. As balizas são pontos do plano que se prestam ao desenhista como os andaimes de um edifício: eles servem para auxiliar na sua costrução, mas são eliminados da obra acabada. Imaginamos um desenho convenientemente balizado como um jogo liga-ponto, desses encontrados nos almanaques de entretenimento. Nessas publicações, o problema das proporções da figura já foi resolvido pelo autor desse jogo, restando ao desenhista a tarefa de apenas preencher os vazios com traços.

Nesses passatempos infantis dá-se pouca atenção a atributos importantes do desenho como, por exemplo, forma, exatidão, espessura ou cor com que são feitos os traços por meio dos quais os pontos são ligados. O principal objetivo dessa passatempo é recreativo e educacional e não o de que se produza um desenho de qualidade. Espera-se com ele, que uma criança, ao acompanhar a seqüência numerada dos pontos impressos no papel, estará desenvolvendo sua habilidade abstrata de contar, enquanto aperfeiçoa o controle do cérebro sobre seus movimentos.

Nos desenhos realizados pelo computador o propósito é outro. Queremos que este ligue, com precisão maior e qualidade melhor do que as crianças conseguem, os pontos que formam uma figura. Diferentemente daqueles jogos, os pontos de referência não estão, neste caso, fixados previamente no papel. Como queremos que o computador faça o papel da criança, cabe ao desenhista o papel de *autor* de um desses passatempos: ele deve especificar

Jogos Liga-Pontos

onde se localiza cada ponto do jogo, em que ordem deverão ser ligados e como esses pontos deverão ser ligados entre si.

Diferentemente do editor que imprime esses passatempos nas revistas, o desenhista não irá imprimir os pontos no papel, mas registrar as coordenadas desses pontos na memória do computador. Para isso ele deverá determinar corretamente a posição dos pontos no plano, valendo-se do enunciado de seu problema, das propriedades da figura a ser desenhada e dos teoremas da geometria.

Nesse processo poderemos tirar proveito da rapidez com que o computador é capaz de fazer contas, para fornecer as coordenadas desses pontos na forma de expressões aritméticas deixando por sua conta, a realização dos cálculos. Podemos também adicionar às regras do jogo liga-pontos uma série de outras regras que serão úteis ao desenhista, para produzir efeitos especiais na figura, como por exemplo, criar ramificações ou desenhar curvas.

10.1 Nomes de pontos

Quando discutimos as proposições de Euclides na seção 2.3, percebemos a conveniência de dar nomes aos pontos para facilitar a comunicação entre aquele que expõe o problema e aquele a quem cabe resolvê-lo. Para referirse a um ponto, é mais fácil designá-lo por um nome do que por meio de uma frase que descreva sua posição. Quando um desenhista desejar comunicar a alguém (que, em nosso caso deverá ser um computador) uma operação que envolva um determinado ponto, ele o fará referindo-se ao nome desse ponto.

Nesta seção apresentaremos uma convenção para "dar nomes" aos pontos de uma figura. Como sabemos, o autor de um jogo liga-pontos deve marcar, implícita ou explicitamente, a seqüência que deve ser obedecida para o traçado das linhas que ligam os pontos. Para nós, essa seqüência estará registrada na forma de uma *Rota* que o computador deverá seguir para traçar a figura.

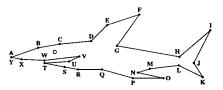
Nos tratados de geometria, os pontos geométricos são identificados por letras maiúsculas do alfabeto romano¹, em lugar dos dígitos usados nos jogos "liga-pontos".

¹A prática de dar nomes aos pontos para facilitar as descrições de procedimentos foi

Quando necessário, pode-se estender esse alfabeto, afetando as letras romanas maiúsculas por um número índice, como nos exemplos abaixo:

$$A_1, A_2, ..., A_{27}, H_{13}, P_8$$
, etc

Nas instruções dadas ao computador para realizar um desenho seguiremos essas convenções. Assim, por meio de um desses nomes identificadores, autor, leitor, desenhista e computador poderão referir-se, sem ambigüidade, a um mesmo ponto.



Um jogo "liga-pontos"

Graças a esta nomenclatura, a seqüência de ligação dos pontos pode ser representada por meio de uma cadeia legível de caracteres, onde os nomes dos pontos se sucedem na mesma seqüência das suas ligações. Essa cadeia de caracteres tem o nome de Rota. Uma rota representa exatamente aquilo que seu nome diz: o itinerário a ser seguido pelo computador para ligar os pontos.

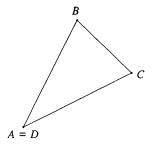
10.2 Exemplos de rotas

Considere-se a seguinte proposição: desenhar um triângulo de vértices ABC. Para isso podemos representar os lados do triângulo por uma rota. Tomemos, inicialmente, a sequência ABC como rota.

Ela dirá ao computador para começar o traçado pelo ponto A, em seguida ligar, por meio de um traço, esse ponto ao ponto B e finalmente, ligar B a C por meio de um outro traço.

A figura obtida, como se pode facilmente constatar, será um triângulo, porém um triângulo aberto, cujo lado CA não está desenhado. Para obter-se uma figura fechada deve-se fornecer uma instrução adicional ao computador. Essa informação pode ser dada adicionando-se um quarto ponto, digamos D,

Triângulo



adotada uniformemente por Euclides em seus *Elementos* (Ver seção 2.3), embora lá ele não tenha feito uso, como é óbvio, do alfabeto romano.

O uso das letras romanas maiúsculas (A, B, ..., Z) tornou-se corrente em todos os livros ocidentais de Geometria, ao que parece muito por influência do tratado de Geometria de René Descartes [6].

à rota, cujas coordenadas 2 são feitas iguais às de A.

Com essa nova informação, a rota passa a ser representada pela seqüência ABCD e assim, as instruções para o desenho do triângulo fechado estarão completas: o computador poderá desenhar, agora, o traço ligando C a D. Uma vez esgotados os caracteres da rota, o desenho termina.

Coordenadas dos Pontos da rota Para que o computador comece o desenho a partir do ponto A, é necessário que ele tenha sido previamente informado das coordenadas desse ponto. Essa informação poderá ser obtida de uma lista de expressões aritméticas, como a reproduzida abaixo:

$$A = -[170, 170];$$

 $B = [0, 170];$
 $C = [170, 0];$
 $D = A;$

$$(10.1)$$

Nesse conjunto de expressões, a primeira linha informa que as coordenadas do vértice A do triângulo são [-170,-170]; a segunda linha diz que as coordenadas do ponto B são [0,170]; a terceira linha informa as coordenadas de C: [170,0] e a quarta linha dá as coordenadas de D, informando ao computador para buscá-las onde se encontram as coordenadas do ponto A, que, por sua vez, são iguais a [-170,-170].

Números Complexos

Cada uma das linhas da lista (10.1) é uma expressão de aritmética complexa (veja capítulo 5). Para que não ocorra ambigüidade, principalmente nos casos em que o computador vier a tratar de figuras mais elaboradas, e principalmente porque as expressões da álgebra dos números complexos podem ser confundidas muito facilmente com a dos números reais, tornase necessário informar ao computador que as expressões acima designam números complexos. Assim, a lista (10.1) passa a ser representada na forma³:

²O leitor pode estar indagando neste momento porque simplesmente não se repete a letra A na rota, formando a seqüência ABCA, em lugar de se ter o trabalho de definir mais um ponto para depois fazê-lo igual a A? Essa solução mais simples não pode ser adotada, no entanto, porque a rota é um componente invisível do desenho onde os pontos que compõem a figura são definidos e, para que não haja ambigüidade, um mesmo nome não poderá ocorrer mais de uma vez numa mesma rota.

 $^{^3}$ Usamos as expressões em língua inglesa pois elas se tornaram um padrão universal para a representação de tipos de variáveis, desde que foram adotadas uniformemente nas linguagens de programação FORTRAN, ALGOL, Pascal ou C.

Complex
$$A = -$$
 [170, 170];
Complex $B =$ [0, 170];
Complex $C =$ [170, 0];
Complex $D =$ A ; (10.2)

Considere, por exemplo, a rota ABCDE que representa um quadrado fechado cujos pontos estão localizados pelas coordenadas relacionadas na lista abaixo:

Quadrado

Complex
$$A = 100 * [1, 1];$$

Complex $B = \sim A;$
Complex $C = -A;$
Complex $D = -B;$
Complex $E = A;$

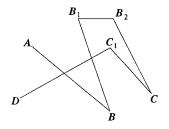
Na definição do ponto A usamos um produto, representado pelo símbolo '*', do número real 100 pelo número complexo [1,1]. O resultado desse produto é o número complexo [100,100]. O ponto B, por exemplo, é definido como a imagem de A refletida sobre o eixo horizontal. Para mudar as dimensões do quadrado definido pela rota acima basta alterar o valor que consta da expressão que define o ponto A; as coordenadas dos demais pontos serão recalculadas pelo computador a partir dos novos valores das coordenadas do ponto A.

Com o propósito de ilustrar o uso de nomes indexados, examinemos, a seguir, a rota definida pelos seguintes sete pontos⁴:

Linha poligonal

AB..C.D

Seguindo a convenção adotada para a denominação de pontos, poderemos determinar a qual ponto se refere cada ocorrência do ponto-final ('.') se examinarmos a seqüência de caracteres que o antecedem. Assim, o primeiro ponto-final encontrado na rota, por ser o sucessor imediato de B irá designar o ponto B_1 ; após B_1 segue-se B_2 . Sucedendo C encontra-se C_1 e finalmente, segue-se D.



⁴Note que cada caractere '.' designa um ponto.

A relação abaixo apresenta as expressões que determinam as coordenadas dos pontos cujos nomes estão definidos na rota:

```
Complex
              = [-158, 110];
Complex
              = [-10, -85];
Complex
         B_1
              = [-10, 115];
Complex
              = [99, 115];
Complex
              = [175, -3];
Complex
         C_1
              = [53, 56];
Complex
              = [-125, -59];
```

10.3 Modificadores de rota

Limitamo-nos até aqui a examinar como descrever, por meio da rota, linhas poligonais. Os símbolos que figuram naqueles exemplos designam apenas nomes de pontos. Há algumas situações, no entanto, em que gostaríamos de evitar o desenho de alguns dos traços de ligação da rota; há outras nas quais gostaríamos de produzir traços curvos em lugar de segmentos de reta; há outras situações, ainda, em que gostaríamos de produzir, a partir de um ponto dado, ramificações.

Esses e outros efeitos similares poderão ser obtidos por meio da introdução de símbolos modificadores dentre os caracteres que compõem uma rota. Graças a esses caracteres modificadores — que deverão ser obedecidos pelo computador como os sinais de trânsito devem sê-lo por pessoas civilizadas — aquele passatempo infantil de ligar-pontos, aparentemente ingênuo, pode transformar-se num meio poderoso para instruir o computador a desenhar figuras geométricas mais complexas.

Numa rota, a ocorrência de dois pontos consecutivos será sempre interpretada como uma instrução para ligar esses dois pontos por um traço contínuo. Com a introdução de caracteres modificadores, podemos colocar mais informações numa rota, de modo que as instruções que viermos a dar ao computador por meio dela poderão ser mais completas e precisas. Ao lado das letras romanas maiúsculas e dos símbolos de ponto-final, é também permitida nas rotas a ocorrência dos seguintes caracteres modificadores: o símbolo que denota o espaço em branco, os abre e fecha parênteses, os abre

e fecha colchetes, os abre e fecha chaves e o traço sublinhado.

Quando dois símbolos consecutivos estiverem separados por um espaço em branco, o traço de ligação entre eles não será desenhado na figura. Portanto, quando se quiser eliminar o traço de ligação entre dois pontos que aparecem consecutivamente na rota, basta inserir, entre esses dois pontos, o espaço em branco. Por exemplo, o traço de ligação existente entre os pontos C e D na rota 'PQHCDF' será apagado quando um espaço em branco for introduzido entre essas duas letras, como na nova rota 'PQHC DF'.

O espaço em branco Desconexão

Os símbolos abre e o fecha parênteses — '(' e ')' — devem aparecer aos pares, o símbolo '(' sempre à esquerda do ')', separados por no mínimo três identificadores de pontos. A cadeia de caracteres delimitada por esses símbolos é denominada domínio da curva de Bézier.

Parênteses Curvas de Bézier

Quando o computador, ao seguir a rota, detectar um abre parênteses, ele iniciará o desenho de uma curva de Bézier, partindo do ponto cujo nome aparece, na rota, imediatamente à direita do símbolo abre parênteses e terminando no ponto cujo nome aparece, na rota, imediatamente à esquerda do símbolo fecha parênteses.

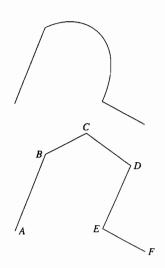
Os pontos restantes, invisíveis na curva final produzida mas que podem ser vistos na linha poligonal na figura ao lado, são tratados como *pontos de referência* da curva.

Obs.: No domínio de uma curva de Bézier, é permitida somente a presença de identificadores de pontos; a ocorrência, nesse domínio, de qualquer modificador de rota (símbolo de espaço em branco, colchetes ou outros parênteses), será tratada como um erro.

Exemplo: A curva de Bézier representada na figura ao lado corresponde à rota 'A(BCDE)F', onde a seqüência 'BCDE' representa o domínio de uma curva de Bézier.

Ao interpretar essa rota, o computador

- partindo do ponto A, desenha um segmento de reta ligando esse ponto ao ponto B. A presença do abre parênteses não interfere na contigüidade dos pontos A e B; para separá-los, deve-se introduzir o símbolo de espaço em branco entre a letra A e o símbolo '(': 'A (BCDE)F';
- 2. Desenha uma curva de Bézier que parte do ponto B e termina no ponto E, tendo

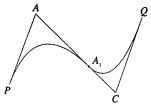


começa por ele.

os pontos C e D como referência;

3. Desenha o segmento de reta ligando os pontos F e D.

Sublinhado Osculação



Colchetes Ramificação

O símbolo '.' poderá ser utilizado como identificador de ponto (somente dentro do domínio de uma curva de Bézier), para designar o ponto de concordância (osculação) de duas curvas. Esse símbolo, dentro de um domínio de Bézier, decompõe o domínio em duas partes, tendo à sua esquerda o domínio (que o inclui) de uma curva de Bézier que termina nele e, à sua direita, outro domínio (que também o inclui) de outra curva de Bézier, que

Exemplo: Sejam A, A_1 e C três pontos não-colineares, o ponto A_1 , interno ao segmento AC. Sejam P e Q dois pontos arbitrários do plano. Imaginemos duas curvas de Bézier, uma delas partindo de P e terminando em A1 e a outra, partindo de A_1 e terminando em Q. Pode-se perceber que as duas curvas assim definidas são osculantes no ponto A_1 , comum a ambas.

Uma forma mais compacta para se obter o mesmo efeito é por meio da utilização do símbolo '.' em lugar da seqüência 'B)(D'. A rota simplificada passaria a ser '(PA LCQ)' e o nome do ponto B passaria a ser A_1 .

Os símbolos abre e fecha colchetes — '[' e ']' — devem aparecer aos pares, o símbolo '[' sempre à esquerda do ']'. Sua função, como caracteres modificadores, é a de criar, na rota, ramificações ou derivações.

A següência dos pontos delimitados pelos colchetes é uma ramificação que se abre a partir do ponto que aparece imediatamente à esquerda do símbolo abre colchetes. A figura ao lado ilustra, uma "árvore" definida pela $rota^5$

AB[C[.]D[.]E]F[G[(IJKL)M].]H'.

Osculações Encadeadas

Os símbolos abre e fecha chaves — '{' '}' — devem aparecer aos pares, o símbolo '{' sempre à esquerda do '}', separados por três ou mais identificadores de pontos. A função dos símbolos abre e fecha chaves como caracteres modificadores, é a de ditar o traçado de uma seqüência de parábolas osculantes.

⁵Observe o domínio de Bézier (IJKL) na rota.

Para facilitar a explicação a seguir, denominaremos o conjunto de identificadores da rota delimitados pelos símbolos '{' e '}' de cadeia de parábolas. Designaremos o primeiro ponto da cadeia pela letra grega α e o último pela letra ω .

Quando o computador, ao seguir a rota, detectar o símbolo '{', ele iniciará o desenho de uma série de arcos de parábola, cujo traçado parte do ponto $\alpha = A$ e termina no ponto $\omega = C$. As demais extremidades desses arcos estão nos pontos médios dos segmentos que se formam entre os pontos α e ω .

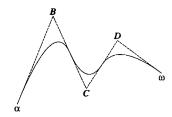
Assim, se a cadeia de parábolas tiver apenas três pontos, por exemplo, a rota em questão for ' $\{ABC\}$ ', então a curva traçada será uma única parábola que parte de A e termina em C, tendo B como referência.

Nos casos em que a cadeia de parábolas tiver mais de três pontos, os arcos de parábola traçados terão os pontos médios dos segmentos intermediários como pontos de osculação. Assim, no trecho de rota '{ABCDE}' serão desenhados três arcos de parábola,

- o primeiro arco terá por extremidades, de um lado o ponto $\alpha = A$ e, de outro, o ponto médio do segmento BC. O ponto de referência desse arco será o ponto B.
- ullet o segundo arco terá por extremidades, de um lado, o mesmo ponto médio do segmento BC e, de outro, o ponto médio do segmento CD. O ponto de referência dessa parábola será o ponto C. O ponto de referência desse arco será o ponto C.
- o terceiro arco terá por extremidades, de um lado, o mesmo ponto médio do segmento CD e, de outro, o ponto $\omega=E$, onde a curva termina. O ponto de referência desse arco será o ponto D.

Os pontos restantes, invisíveis na curva final produzida mas que podem ser vistos na linha poligonal ilustrada na figura ao lado, são tratados como pontos de referência da curva.

Obs.: No domínio de uma curva de Bézier, é permitida somente a presença de identificadores de pontos; a ocorrência, nesse domínio, de qualquer modificador de rota (símbolo de espaço em branco, colchetes ou outros parênteses), será tratada como um erro pelo computador.



10.4 Pontos primitivos e pontos derivados

No desenho convencional, a solução de um problema, final ou intermediário, encontra-se nos pontos do papel onde se cruzam os traços realizados com o auxílio da régua ou do compasso. No desenho por computador, a posição desses pontos é determinada a partir de cálculos e dispensa, portanto, o traçado de linhas.

Para o traçado de um segmento de reta com o auxílio de uma régua, o desenhista precisa conhecer dois de seus pontos, e para o traçado de uma circunferência é necessário conhecer o centro e mais alguma coisa, como o raio ou um ponto sobre essa circunferência. Para a determinação de um ponto por meio do computador, essas informações são também necessárias, não para o traçado, mas para o cálculo.

Dados e Variáveis

No computador podemos tratar os dados como grandezas variáveis. Essas grandezas poderão ser, por exemplo, as coordenadas de alguns pontos cuja localização o desenhista poderá modificar em diferentes momentos, para comparar o efeito dessa modificação sobre o resultado final do desenho, sem ter que alterar o restante das instruções que definem o desenho. Elas poderão ser também grandezas numéricas, como o raio de um círculo, o comprimento do lado de um triângulo, o número de réplicas modificadas de uma figura que se pretende aplicar no desenho, etc.

Como veremos adiante, mostra-se muito conveniente poder instruir o computador para resolver um *mesmo* problema geométrico, para *quaisquer* dados, e não apenas para aqueles dados particulares que figuram no seu enunciado original. Quando tratamos um dado como uma variável, podemos usar o computador para fazer ensaios e experimentos, submetendo o *mesmo* problema várias vezes ao computador e, em cada um deles, alterar um ou mais de seus dados para examinar seus efeitos sobre o trabalho final.

Pontos Derivados

Pontos derivados são expressos em termos das coordenadas de outros pontos ou em função de grandezas numéricas. Um exemplo de ponto derivado é o ponto médio M de um segmento AB. As coordenadas de M não são arbitrárias, ainda que as coordenadas de A, de B ou de ambos, o sejam. Outro exemplo de um ponto derivado é o baricentro de um triângulo. Sua posição estará completamente determinada quando as posições dos vértices desse triângulo tiverem sido fixadas.

Parte III

A transformação de figuras

11

Transformações geométricas

11.1 Transformações de figuras

A forma da letra que vejo impressa no jornal sobre a mesa do café modificase quando deposito, à sua frente, um copo com água. Quando a observo refletida na superfície espelhada da cafeteira, vejo que ela tem outra forma. Se mudo a posição da minha cabeça, vejo na letra, outra forma. Ponho a página contra a luz e a olho do avesso; a forma que vejo agora, é outra.

Qual dessas é a "verdadeira" forma da letra? Qual, de todos os mensageiros que trouxeram a imagem da letra à minha percepção, é o mais fidedigno? Como posso pensar que uma coisa que observo tem uma forma "absoluta" se não consigo responder, também de forma absoluta, a essas questões?

Ainda que não consiga decidir qual a forma verdadeira da letra, eu posso continuar acreditando que existe uma forma absoluta, mas que no entanto, as impressões que dela recolho, são modificadas pelo meio que a separa de mim.

Para avançar mais um pouco em minhas reflexões, recorto o contorno da letra, num material duro como o papelão, a cartolina ou o plástico e faço outros experimentos. Tomo agora, uma folha de papel em branco e

deposito essa peça sobre ela. Assim apoiada, percebo que posso girá-la ou deslocá-la livremente sobre a folha de papel. Decido-me por uma posição em particular e risco o papel com um lápis, usando esse contorno como guia. Giro ou desloco mais uma vez esse contorno e risco novamente em torno das arestas de minha peça.

Coloco agora, a figura recortada sob a luz do Sol e observo as sombras projetadas sobre a superfície do papel. Com o lápis, registro no papel os perfis das sombras formadas. Depois de completar uma série de experimentos como esses, terei composto, sobre a folha de papel, uma coleção de formas, todas distintas, produzidas a partir de um mesmo "modelo". Algumas dessas formas, especialmente aquelas produzidas enquanto a peça estava apoiada sobre a superfície do papel, são em tudo idênticas, exceto na posição que ocupam ou na inclinação que formam entre si. As outras formas riscadas apresentam outras diferenças, além da posição e direção.

Transformações

Costumamos designar por figuras transformadas da forma original, as imagens que obtivemos no papel por meio de operações como as descritas acima e as operações propriamente ditas, por transformações.

As transformações geométricas são muito importantes para o design. Algumas delas podem ser realizadas com o auxílio de instrumentos especiais.

Gabaritos e normógrafos são instrumentos de desenho formados por materiais rígidos nos quais são recortados contornos de determinados símbolos gráficos, destinados a servir de guia para restringir os movimentos de pontas traçadoras. Com eles pode-se produzir cópias de figuras em diferentes posições ou inclinações.

O pantógrafo¹, instrumento feito de hastes rígidas articuladas, possibilita o traçado de versões ampliadas ou reduzidas de contornos.

As aranhas², peças rígidas em forma de triângulo, permitem produzir versões "italicizadas" de tipos gravados em alguns normógrafos; por meio delas pode-se obter transformações aproximadamente afins de figuras de pequenas dimensões.

¹Veja descrição na seção 11.4

²Ver descrição do *Triângulo Afim* à página 142.

Dos estudos teóricos da perspectiva feitos pelos matemáticos renascentistas, resultou a possibilidade de se tratar as transformações geométricas matematicamente. Constatou-se, então, que a partir de uma representação única de uma dada forma, diferentes *imagens transformadas* dessa forma poderiam ser derivadas exclusivamente por operações de cálculo. Percebeu-se, também, que a representação matemática das transformações veio simplificar e tornar mais precisas as instruções que o desenhista deve comunicar ao computador quando deseja realizar, por meio deste, efeitos especiais sobre suas figuras.

Uma transformação representada matematicamente tem como efeito alterar as coordenadas de todos os pontos de uma figura segundo uma mesma lei, característica dessa transformação, produzindo assim uma versão modificada dessa figura.

A teoria matemática mostra que as transformações podem ser combinadas umas às outras, para formar novas transformações. No entanto, a realização mecânica da combinação de duas transformações, implementadas por instrumentos, mostrou-se um problema técnico muito complexo.

11.2 Grupos de transformações

As transformações geométricas que discutiremos nesta seção, estão divididas em grupos. Este agrupamento não é arbitrário, nem a palavra grupo surge aqui como um sinônimo para a palavra conjunto.

O grupo representa um dos conceitos mais fundamentais da Álgebra e desempenha um papel decisivo no desenho técnico por computador.

11.2.1 Isometrias

Os geômetras costumaram dar a uma ou mais cópias de igual dimensão de uma mesma figura, como essas reproduzidas pelos gabaritos. o nome de figuras congruentes. As transformações geométricas que, quando aplicadas a uma figura, produzem cópias congruentes, são: a translação, a rotação e a reflexão e, obviamente, a identidade.

Duas figuras são congruentes quando, superpostas, tornam-se uma única. Grande parte dos *Elementos* de Euclides [16] trata daquelas propriedades que caracterizam a congruência entre figuras, a saber, quantidades tais como ângulos e distâncias. Quando duas figuras são congruentes, suas distâncias e seus ângulos correspondentes são iguais. Os gabaritos, por serem confeccionados em material rígido, reproduzem somente cópias congruentes.

Duas cópias congruentes de uma figura não diferem em suas formas, dimensões ou nas inclinações relativas de suas partes. Não podendo elas diferir uma da outra, em qualquer dessas propriedades, as diferenças entre duas figuras congruentes devem estar somente naquelas propriedades que não pertencem à figura. De fato, essas diferenças estão no ato da sua reprodução: onde e sob que inclinação o gabarito será disposto, quando com ele se fizer uma cópia.

É por meio dessas duas propriedades da reprodução (e não da figura) que duas figuras congruentes podem ser individualizadas; todas as demais propriedades já constam do gabarito.

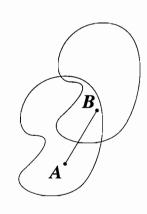
A translação é uma transformação por meio da qual todos os pontos de uma figura são deslocados no papel de uma mesma distância, numa mesma direção.

Qualquer figura comporta-se como um corpo rígido quando sujeita a uma translação. Isto quer dizer que a distância que separa dois pontos quaisquer da figura não se altera com a transformação. Os gabaritos são feitos de materiais rígidos e por isso, os desenhistas podem transladá-los, sem deformá-los.

Quando um desenhista usa um normógrafo para reproduzir um texto, ele costuma apoiar, combinadamente, um ou dois esquadros numa régua T de modo a poder deslizar a aresta do normógrafo ao longo da aresta desses esquadros.

Esquadros são triângulos retângulos usualmente comercializados aos pares — um deles feito da metade de um quadrado e outro, da metade de um triângulo equilátero. Essas formas foram possivelmente escolhidas para permitir, quando combinados, que suas arestas sirvam de trilho de apoio para realizar traços nas direções preferenciais³. Por meio desse expediente

Translação



³Veja na seção 17.5 outras possíveis razões que levaram os construtores de instrumentos

pode-se, por exemplo, aplicar os símbolos de um normógrafo, não apenas nas direções horizontal ou vertical, mas em qualquer das inclinações onde a linha guia forma, com a horizontal, um ângulo múltiplo de 15°:

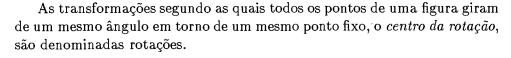
$$\{15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, \text{ etc}\}$$
.

Após transferir cada letra de um texto do normógrafo para o papel, o desenhista dispõe o instrumento para transferir a letra seguinte, deslizando-o sobre a aresta da régua ou do esquadro, da mesma forma que numa máquina de escrever as letras se sucedem na horizontal: cada uma transladada em relação à sua predecessora na palavra. Diferentemente da máquina de escrever, porém, o deslizamento do normógrafo pode ser feito ao longo de qualquer uma das direções preferenciais que os esquadros permitem.

Se P, de coordenadas [x,y], é um ponto qualquer de uma figura, então, após a translação [a,b] dessa figura, as coordenadas de Q passarão a ser [u,v], determinadas pelas relações

$$u = x + a$$

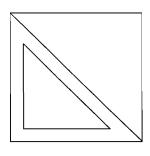
$$v = y + b.$$
(11.1)

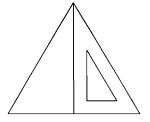


Nas rotações, como nas translações, as figuras comportam-se como corpos rígidos, isto é, a distância entre quaisquer dois pontos da figura não se altera após a transformação.

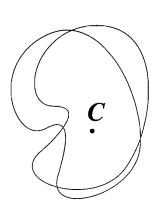
Para obter as novas coordenadas [u,v] de um ponto P, depois de girado de um ângulo θ em torno da origem, aplica-se uma $matriz\ de\ rotação$ às suas coordenadas originais [x,y]. Segue-se uma derivação dessa matriz.

Observe os pontos P e Q da figura 11.1, onde Q corresponde ao ponto que se obtém após girar P de um ângulo θ , na direção anti-horária, em torno da origem.









de desenho a escolher essas formas para os esquadros.

As relações entre as coordenadas cartesianas [x,y] de P e [u,v] de Q e suas correspondentes coordenadas polares⁴, $P=\{r,\alpha\}, Q=\{r,\alpha+\theta\}$, podem ser obtidas facilmente das relações trigonométricas construídas a partir da figura 11.1

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$u = r \cos (\alpha + \theta)$$

$$v = r \sin (\alpha + \theta)$$
(11.2)

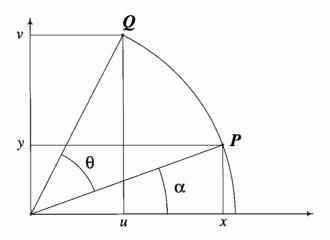


Figura 11.1: Rotação de um ponto em torno da origem

Expandindo as expressões de u e v, de acordo com as identidades trigonométricas fundamentais, obtemos

$$u = r\cos(\alpha + \theta) = r(\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta)$$

$$v = r\sin(\alpha + \theta) = r(\cos\alpha \cdot \sin\theta + \cos\theta \cdot \sin\alpha)$$
(11.3)

Confrontando esses resultados com os valores de x e y em (11.2), podemos rescrever (11.3) na forma

$$u = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$v = x \sin \theta + y \cos \theta$$
(11.4)

⁴Veja derivação equivalente na seção 5.1.2

Essa identidade pode ser rescrita na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = R_{\theta} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

onde R_{θ} é a matriz de rotação

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \tag{11.6}$$

Na notação usada em (11.4), os parâmetros da rotação, $(\sin \theta, \cos \theta)$ aparecem misturados às coordenadas [x,y] do ponto, ao passo que na notação adotada em (11.5), esses parâmetros estão separados em dois termos, um (R_{θ}) que diz respeito exclusivamente à rotação e o outro que diz respeito exclusivamente ao ponto. As vantagens dessa decomposição ou fatoração em dois termos independentes ficarão evidentes adiante, ainda neste capítulo — e não apenas aqui e agora, mas em várias outras aplicações e ocasiões.

Reflexões são transformações que permitem a geração de uma cópia da figura como se ela tivesse sido refletida por um espelho.

Reflexão

Numa reflexão, a cada ponto de uma figura, corresponde um outro ponto, simétrico deste com respeito a uma reta dada, conhecida como eixo de reflexão.

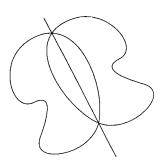
No desenho técnico podemos obter reflexões de figuras recortadas em gabaritos, se os usarmos voltando sua a face normal contra o papel.

Na figura ao lado, a reta desenhada representa o "espelho" que reflete o original para produzir sua imagem.

Por meio da composição de diferentes transformações geométricas, poderão ser obtidas reflexões relativas a eixos arbitrários, conforme descrito na seção 11.3.1.

As coordenadas [x, y] de um ponto P, sujeito a uma reflexão sobre o eixo horizontal, passam a ser [x, -y]. Quando esse mesmo ponto P for refletido sobre o eixo vertical, suas coordenadas passarão a ser [-x, y].

Podemos representar matricialmente os efeitos dessas reflexões horizontal



e vertical, respectivamente, por meio das expressões

$$\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right].$$

Reflexões sobre os eixos diagonais (inclinados de 45^o e -45^o) podem ser obtidas por meio das seguintes transformações

$$\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right].$$

A transformação identidade, designada pelo símbolo 1, quando aplicada a uma figura, a reproduz na sua forma e posições originais. Quando se deseja obter uma única cópia da figura original, isto é, na forma como ela foi construída, pode-se omitir a transformação identidade.

A ocorrência desta transformação é mais comum em expressões por meio das quais se pretende especificar ao computador uma figura transformada, juntamente com uma sua cópia não-transformada.

Identidade

11.2.2 Similaridades

O pantógrafo adiciona às isometrias uma nova transformação que lhe permite produzir cópias reduzidas ou ampliadas de figuras.

Esta nova transformação, denominada homotetia, tem, como no caso das rotações, um centro (o centro de homotetia), i.e., um ponto do plano onde ele e seu transformado coincidem.

Além de seu centro, a homotetia tem, como característica, um fator de escala λ que estabelece a proporção segundo a qual a figura será ampliada ou reduzida. Para $\lambda>1$, as homotetias resultam em ampliações; para $\lambda<1$, reduções. Quando $\lambda=1$, as dimensões da figura não se alteram. Nos casos em que $\lambda<0$, associadas à alteração das dimensões da figura, dar-se-á uma rotação de 180° da figura.

O centro de homotetia da figura ao lado está no ponto C.

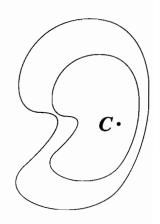
O conjunto das transformações examinadas acima, que inclui, além da identidade, três elementos

forma um novo grupo de transformações denominado grupo de similaridades⁵.

As cópias das figuras geradas por transformações similares poderão ter dimensões lineares diferentes de seus originais (isto é, nem sempre serão congruentes), mas ainda assim preservam algumas de suas propriedades invariantes: os ângulos formados por suas partes correspondentes são iguais.

A regra de modificação das coordenadas de um ponto P=[x,y] que produz sua homotetia Q=[u,v] é descrita pela operação $Q=\lambda P$ ou, em termos de suas coordenadas,

Homotetia



⁵A esse conjunto, convém adicionar as reflexões. No entanto, há razões para se dar à reflexão um tratamento diferente pois, em oposição às transformações relacionadas — que são contínuas — a reflexão no plano é uma transformação discreta (ainda que, quando vista no espaço, ela possa ser tratada como uma rotação de 180° em torno da reta de reflexão).

$$u = \lambda x v = \lambda y.$$
 (11.7)

11.2.3 Afinidades

Há outras transformações geométricas relevantes para o desenho técnico e artístico que podem ser adicionadas ao grupo de similaridades, formando o que se conhece por grupo de afinidades. As afinidades são também essenciais para a geração de projeções axonométricas de objetos sólidos, assim como para produzir alguns efeitos especiais em figuras planas.

Os efeitos das afinidades sobre uma figura podem ser melhor apreciados se observarmos as sombras produzidas por seu contorno sobre uma superfície plana quando iluminada pelo Sol: a silhueta da sombra é sempre uma transformada afim do contorno da figura.

As afinidades podem ser mais facilmente entendidas pelo principiante através de seus efeitos, do que a partir de suas causas. Esse é um inconveniente que deve ser superado por quem quiser explorar mais profundamente as oportunidades criadas pelo uso dos computadores para o desenho.

Comecemos por examinar um exemplo simples. Suponha que se pretenda "inclinar" a figura que vem nos servindo de exemplo até aqui. Se você já estiver familiarizado com as transformações isométricas ou com as de similaridade, já deve ter concluído que somente por meio delas não há como conseguir o efeito que se pretende. Isso significa que para obter esse efeito é necessário um outro tipo de transformação, diferente das já estudadas.

As afinidades, diferentemente das isometrias, não preservam distâncias nem ângulos. Há, no entanto, algumas propriedades importantes que permanecem invariantes quando as figuras são submetidas a transformações afins: retas paralelas são transformadas em retas paralelas; proporções entre segmentos de reta pertencentes a retas paralelas são também mantidas nas figuras transformadas.

As transformações afins poderão ser combinadas livremente entre si, de modo a produzir transformações mais complexas, multiplicando, assim, o conjunto de efeitos gráficos que podem ser obtidos.

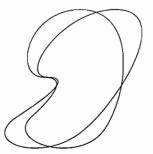
 \widetilde{U} Um ponto P de coordenadas [x,y], quando submetido a uma transformação afim, resulta num ponto Q, cujas coordenadas [u,v] são dadas pela identidade

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{11.8}$$

Podemos concluir da observação da expressão (11.8) que, para certos valores dos termos

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b\},\$$

uma transformação afim transforma-se numa isometria ou numa similaridade. Isto é, isometrias e similaridades representam casos particulares de transformações afins. A ilustração ao lado exemplifica a transformação afim que descreve a "inclinação" de uma figura, um tipo de deformação que se obtem, por exemplo, quando, após desenharmos uma figura na face lateral de uma pilha de papéis, deslocamos as folhas umas em relação às outras.



11.2.4 Ajuste de afinidade

Consideremos o seguinte problema:

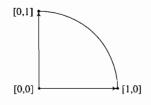
Determinar a transformação geométrica T que converte o triângulo α de vértices ABC no triângulo α' de vértices UVW.

O enunciado desse problema traduz-se na equação $\mathbf{T} \cdot \alpha = \alpha'$, onde \mathbf{T} é uma transformação geométrica.

Inicialmente examinemos o caso particular da transformação \mathbf{F} que converte o triângulo Ω , isósceles retângulo, de catetos unitários (ver figura ao lado), no triângulo α .

As coordenadas dos vértices ΩXY do triângulo Ω são

$$\Omega = [0, 0]$$
 $X = [1, 0]$
 $Y = [0, 1]$



Sejam

$$A = [A_x, A_y]$$

$$B = [B_x, B_y]$$

$$C = [C_x, C_y]$$

as coordenadas dos vértices do triângulo ABC.

A solução deste problema particular consiste em determinar os valores de todos os termos

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, z_x, z_y\}$$

que aparecem em (11.8), e determinam completamente a transformação F, isto é, determinaremos a transformação F que satisfaz a equação

$$\mathbf{F} \cdot \Omega = \alpha \tag{11.9}$$

A equação (11.9) é equivalente às seguintes três equações

$$\mathbf{F} \cdot \Omega = A \tag{11.10}$$

$$\mathbf{F} \cdot X = B \tag{11.11}$$

$$\mathbf{F} \cdot Y = C \tag{11.12}$$

cuja incógnita comum é a transformação F.

A forma matricial da equação (11.10) é

$$\left[egin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \ a_{21} & a_{22} \end{array}
ight] imes \left[egin{array}{c} 0 \ 0 \end{array}
ight] + \left[egin{array}{c} z_x \ z_y \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} A_x \ A_y \end{array}
ight]$$

cuja solução é trivial:

$$\left[egin{array}{c} z_x \ z_y \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} A_x \ A_y \end{array}
ight]$$

A equação (11.11) tem a forma

$$\left[egin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \ a_{21} & a_{22} \end{array}
ight] imes \left[egin{array}{c} 1 \ 0 \end{array}
ight] + \left[egin{array}{c} A_x \ A_y \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} B_x \ B_y \end{array}
ight]$$

cuja solução se obtém facilmente

$$\left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{array}\right].$$

A equação (11.12) se expressa na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}.$$

cuja solução também se obtém imediatamente:

$$\left[\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} C_x - A_x \\ C_y - A_y \end{array}\right]$$

Podemos, finalmente, escrever a transformação F, aplicada a um ponto genérico P = [x, y] do plano, na forma matricial⁶

$$\mathbf{F}: \left[\begin{array}{cc} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right]$$
 (11.13)

Para obter a solução geral do problema proposto, repetimos o procedimento que seguimos acima, para resolver o problema particular, buscando a solução ${\bf F}'$ da equação

Solução Geral

$$\mathbf{F}' \cdot \Omega = \alpha' \tag{11.14}$$

Substituindo Ω de (11.9) em (11.14), temos

$$\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \alpha = \alpha'$$

donde segue-se a solução do problema geral proposto,

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{F}^{-1}.$$

$$\pm S(\alpha) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{array} \right|.$$

Se definirmos os vetores $\mathbf{a} = B - A$ e $\mathbf{b} = C - A$, concluímos que a expressão acima coincide com o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

⁶O valor absoluto do determinante da matriz que aparece em (11.13) é igual ao dobro da área $S(\alpha)$ do triângulo α [30], isto é,

11.3 Composição de transformações

As transformações geométricas podem ser combinadas umas às outras por intermédio de uma operação denominada composição.

Dadas duas transformações geométricas a e b, podemos obter a transformação c, denominada composição dessas transformações. Essa composição é denotada pelo símbolo⁷

$$c = a \cdot b$$
.

Uma translação (11.1) seguida de uma rotação (11.5), por exemplo, é descrita pela transformação

$$\left[egin{array}{c} u \ v \end{array}
ight] = R_{ heta} imes \left[egin{array}{c} x + z_x \ y + z_y \end{array}
ight]$$

ao passo que uma rotação seguida de uma translação é descrita pela transformação

$$\left[egin{array}{c} u \\ v \end{array}
ight] = R_{ heta} imes \left[egin{array}{c} x \\ y \end{array}
ight] + \left[egin{array}{c} z_x \\ z_y \end{array}
ight].$$

A diferença entre os resultados obtidos nesses dois últimos casos ilustra um fato importante das transformações geométricas: elas não são *comutativas*⁸, isto é, uma translação seguida de uma rotação produz um resultado diferente daquele que se obtém quando uma rotação é seguida de uma translação.

11.3.1 Transformada de uma transformações

Suponha que você queira girar uma figura em torno de um ponto Z, distinto da origem. Como a transformação primitiva $Rot(\theta)$, definida em (11.6), somente produz rotações em torno da origem, deveremos combinar essa rotação

⁷O símbolo que aparece na expressão acima não deve ser confundido com o ponto-final '.' nem com o símbolo ∗ usado para designar a multiplicação ou o produto de polinômios geométricos, apresentados na seção 17.2.

⁸As operações de adição e multiplicação da álgebra ordinária são comutativas pois a+b=b+a e $a\times b=b\times a$.

a outras, para poder obter o efeito desejado. Essa combinação é expressa na forma⁹:

$$g = \operatorname{Tp}(Z) \cdot R_{\theta} \cdot \operatorname{Tp}(-Z)$$

onde Tp(Z) designa a translação (11.1).

A nova transformação g executa uma rotação de um ângulo θ em torno do ponto Z.

A expressão acima é um exemplo de um caso mais geral, muito comum na álgebra superior, denominado transformada de uma transformação:

Dadas duas transformações quaisquer a e b, podemos transformar a sob b, de acordo com a expressão

$$a \cdot b \cdot a^{-1} \tag{11.15}$$

onde a^{-1} representa a transformação inversa da transformação a.

A seqüência de operações que descreve o conserto de uma peça feito na bancada de um mecânico, descrita na página 60, pode ser representada na forma da transformada de operações elementares como a que fizemos acima, para as transformações. Podemos denotar a operação de retirar a peça da máquina, pelo símbolo a^{-1} .

Essa operação levará a peça até a bancada, na oficina do mecânico onde será feita a operação de reparo, que denotaremos pelo símbolo b. Quando o serviço estiver terminado, será necessário recolocar a peça de volta na máquina. Isso será feito por meio da operação inversa àquela pela qual a peça foi retirada da máquina e levada para a oficina. Como àquela operação havíamos dado o nome a^{-1} , a esta daremos, naturalmente o nome a, pois ela promove a operação inversa de recolocar a peça na máquina. A operação completa é, claramente, descrita pela expressão (11.15).

 $Advert\hat{e}ncia$: As operações acima descritas devem ser lidas da direita para a esquerda. Assim, a expressão 11.15 nos diz que a operação a^{-1} deve ser executada antes de b, e b antes de a.

Genericamente, dizemos que dadas duas transformações geométricas a e b, a transformação representada pela expressão (11.15) é denominada a

⁹Note que $Tp(-Z) = Tp^{-1}(Z)$.

transformada a da transformação b. Sua principal aplicação no desenho está na generalização das operações primitivas, tais como a rotação $\mathrm{Rot}(r)$ ou a homotetia $\mathrm{Scl}(r)$, para operarem em torno de centros arbitrários, ou as reflexões R_x e R_y , para produzirem reflexões sobre retas arbitrárias.

11.4 Instrumentos que transformam figuras

Na seção 8.2 examinamos os princípios em que se baseiam os instrumentos usados para traçar curvas; nesta seção, trataremos de dois instrumentos, o pantógrafo ou as aranhas, que implementam transformações. Os efeitos produzidos por esses instrumentos são em geral limitados, pois estes ficam restritos exclusivamente à transformação inplementada pelo instrumento, não sendo possível sua composição com outras transformações.

Pode-se mostrar matematicamente, por exemplo, que as espirais equiangulares são curvas que podem ser obtidas da combinação de um movimento de rotação, acoplado ao de uma homotetia. O primeiro consegue-se com um torno ou um compasso; o segundo, como veremos adiante, com o auxílio de um pantógrafo. Não há disponível um instrumento capaz de compor esses dois movimentos para produzir a espiral. Para compensar a falta de um tal instrumento, os desenhistas valem-se das curvas francesas que são formadas, como os gabaritos, de contornos recortados em material rígido, na forma de arcos dessas espirais.

As transformações, uma vez representadas matematicamente nas memórias dos computadores não estão sujeitas a essas restrições técnicas e podem ser facilmente combinadas umas às outras, o que amplia consideravelmente o poder do desenhista, para produzir os efeitos que deseja sobre suas figuras.

11.4.1 Pantógrafo

O pantógrafo é um instrumento ajustável, formado por duas pontas, uma seca e a outra dotada de grafite ou pena, capaz de reproduzir cópias ampliadas ou reduzidas de uma figura. Ele é formado por 4 hastes rígidas que podem ser articuladas duas a duas. Essas articulações são obtidas pela introdução de pequenos eixos em orifícios pré-perfurados em posições escol-

hidas pelo fabricante, ao longo de suas extensões. Para seu funcionamento correto, essas articulações devem ser localizadas nos vértices de um paralelogramo ABCD (fig. 11.2) 10 . O ponto O da haste AB será o centro da homotetia. Ele é fixado no papel pelo usuário na posição desejada.

Enquanto o desenhista movimenta o ponto D localizado na articulação das hastes AD e CD, de modo a acompanhar o contorno do desenho, uma pena ou uma ponta de grafite implantada no ponto P do pantógrafo, desenha, em sua trajetória, uma figura homotética à original. Como se pode observar, a figura desenhada pela pena localizada em P será uma redução da figura original. Se invertermos os papéis dos pontos D e P, isto é, se colocarmos a ponta de desenho em D e acompanharmos o contorno da figura com o ponto P, produziremos uma ampliação da figura original.

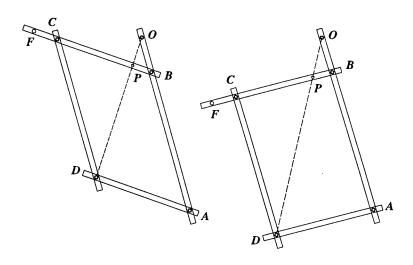


Figura 11.2: Pantógrafo em duas configurações

Pode-se observar, em qualquer das duas configurações do pantógrafo na figura 11.2, que os triângulos OBP e OAD são semelhantes. Embora, os valores de OD e OP sejam diferentes nas duas figuras, a relação entre eles é constante, pois tanto \overline{OB} quanto \overline{OA} , são os comprimentos fixos das hastes do pantógrafo.

 $^{^{10}}$ É por essa razão que as perfurações onde se inserem os eixos não podem ser feitas arbitrariamente; elas devem sempre possibilitar a montagem de um paralelogramo.

È fácil perceber que a reta OD intercepta o lado CB do paralelogramo sempre no mesmo ponto P, qualquer que seja o ângulo formado entre as hastes OA e AD. O número k

$$k = \frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

é o fator de homotetia e o ponto O, o centro da homotetia.

Após calibrar-se o pantógrafo para operar com o fator k de ampliação ou redução desejado — o que se faz escolhendo em que pontos A, B e D localizarem-se os eixos, e tendo escolhido o ponto no papel onde será fixado o centro O de homotetia, passa-se a acompanhar, com a ponta seca fixada na articulação D, o contorno da figura enquanto a outra ponta, fixada no ponto S é compelida, pelas articulações do instrumento, a mover-se segundo uma trajetória que realizará uma cópia transformada (ampliada ou reduzida) da figura. O pantógrafo, operado com cuidado e alguma prática, pode produzir resultados bastante satisfatórios[11].

11.4.2 Aranhas

Uma das transformações afins é implementada de forma aproximada, por meio de um instrumento destinado a reproduzir modificações em figuras de pequenas dimensões. Eles são utilizados nas "aranhas", que são instrumentos construídos para operar em conjunto com alguns normógrafos comerciais para produzir efeitos modificadores de letras.

Seu princípio de funcionamento está baseado no movimento de um triângulo rígido PQD.

O vértice D do triângulo está limitado a deslizar livremente sobre o eixo horizontal de referência, mas impedido de deslocar-se verticalmente. O outro vértice, P, pode mover-se livremente¹¹. Quando o vértice P for movimentado pelo desenhista de modo a acompanhar uma trajetória dada p, o vértice Q do triângulo descreverá uma outra trajetória q.

¹¹Pode-se concluir imediatamente, que o original da figura a ser reproduzida deve estar todo contido numa faixa delimitada por duas retas horizontais, a primeira distando *a* unidades acima desta e a segunda, *a* unidades abaixo.

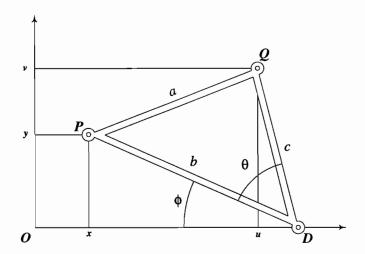


Figura 11.3: Coordenadas do ponto P transformado de Q pelo triángulo afim

Os lados PD e QD formam, entre si, um ângulo θ (fig. 11.3) Denotemos por a o comprimento do lado PQ, por b, o do lado PD e por c o comprimento do lado QD. Sejam [x,y] as coordenadas do ponto P e [u,v], as do ponto Q e d a distância do ponto D à origem O. Observando a figura 11.3, podemos descrever as coordenadas [u,v] do ponto Q em termos dos parâmetros auxiliares d e ϕ :

$$u = d - c\cos(\theta + \phi) = d - c\cos\theta\cos\phi + c\sin\theta\sin\phi$$
$$v = c\sin(\theta + \phi) = c\sin\theta\cos\phi + c\cos\theta\sin\phi$$

Para as figuras cujas dimensões verticais são pequenas, podemos adotar a aproximação $\cos\phi\approx 1$ e obter as seguintes identidades:

$$u \approx d - c\cos\theta + c\sin\theta\sin\phi$$

$$v \approx c\sin\theta + c\cos\theta\sin\phi$$
(11.16)

As coordenadas [x, y] de P em termos desses mesmos parâmetros

$$x \approx d - b$$
$$y = b \sin \phi$$

de onde obtemos os valores dos parâmetros auxiliares ϕ e d

$$\sin \phi = \frac{y}{b} \\
d \approx x + b \tag{11.17}$$

Substituindo os resultados de (11.17) em (11.16), temos

$$u \approx x + \sigma y + \alpha$$

$$v \approx \mu y + \beta$$
(11.18)

onde os parâmetros α, β, σ e μ são definidos de acordo com as expressões:

$$\mu = \frac{c}{b}\cos\theta = l/b$$

$$\sigma = \frac{c}{b}\sin\theta = h/b$$

$$\alpha = b(1-\mu) = b-l$$

$$\beta = b\sigma = h$$

onde l é a projeção do lado QD do triângulo sobre o lado PD e h, a altura do triângulo, tomada do vértice Q sobre o mesmo lado PD.

A transformação implementada pelo triângulo afim pode ser descrita, então, pela expressão matricial

$$\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc} 1 & \sigma \\ 0 & \mu \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right]$$

11.5 Notação

Tanto o artista interessado em desenhar uma figura no papel quanto o artesão encarregado de recortá-la num gabarito, deve preocupar-se com as "propriedades geométricas" dessa figura, isto é, as relações existentes entre as distâncias, os ângulos formados entre partes, etc. O problema deles é principalmente "geométrico" e consiste na localização de pontos, conforme discutido na parte I deste trabalho.

Para quem desenha contornos a partir das sombras projetadas por um gabarito, no entanto, o problema é de outra natureza. Não tendo que se preocupar com as propriedades geométricas das figuras, ele passa a preocupar-se em *como* manipular o gabarito para obter o efeito desejado. Sua atenção se

desloca das propriedades da figura e passa às propriedades das transformações que ele deve usar para obter da figura recortada no gabarito, um efeito gráfico qualquer. Podemos dizer então que o problema dele deixou de ser geométrico e passou a ser "algébrico".

O benefício maior que a abordagem "algébrica" traz ao desenhista está na notação conveniente que lhe permitirá representar simbolicamente as transformações geométricas para, por meio dela, comunicar-se mais rápida e precisamente com o computador.

Já vimos como a notação algébrica facilita a comunicação entre o desenhista e o computador, quando se trata de informar à máquina dos procedimentos a serem seguidos, para a solução desses problemas.

As mensagens por meio das quais desenhista e computador se comunicam referem-se, em alguns casos, a quantidades, comprimentos ou ângulos, representadas por números inteiros, racionais ou reais. Em outros casos elas referem-se a pontos do plano. Usam-se, então, expressões envolvendo números complexos, para representar as posições desses pontos no plano.

Podemos, como o fizemos para representar quantidades por números ordinários ou pontos por números complexos, designar as transformações geométricas por símbolos, e tratá-las convenientemente.

Transformações são entidades matemáticas especiais, para as quais se desenvolveu uma álgebra e uma aritmética próprias. Explorando as propriedades matemáticas das transformações e adotando as notações adequadas para representá-las, poderemos remeter ao computador não apenas as instruções relativas às transformações geométricas em si, mas também às composições que entre elas se formam para produzir novas transformações, o que facilita enormemente a tarefa de instruí-lo para realizar determinados efeitos de desenho.

Notação matricial. Na descrição das transformações geométricas apresentadas na seção 11.2, utilizamos a notação matricial, todas elas casos particulares da expressão (11.8) que pode ser resumida na fórmula

$$Q = \mathbf{A} \times P + \mathbf{z}$$

146

onde

$$\mathbf{A} = \left[egin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} \ a_{21} & a_{22} \end{array}
ight] \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{z} = \left[egin{array}{c} a \ b \end{array}
ight].$$

A notação matricial, embora capaz de descrever completamente a transformação, envolve um número excessivo de parâmetros, para a maioria dos casos, o que torna seu uso tedioso e freqüentemente induz-nos a leituras errôneas. A representação completa de uma translação na forma matricial, por exemplo, tem a forma

$$Q = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \times P + \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right].$$

ao passo que uma rotação é expressa na forma

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times P + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notação funcional. Para o caso dos ajustes de afinidade, apresentados na seção 11.2.4, podemos simplificar essa notação representando a transformação F na forma

$$Tp(A, B, C) (11.19)$$

de modo que a matriz que figura em (11.13), correspondente a essa transformação, passa a ser representada por

$$Tp(0, B - A, C - A).$$
 (11.20)

As representações (11.19) e (11.20) têm o mérito de envolver como parâmetros apenas objetos geométricos: os pontos $A, B \in C$, desvencilhando-se dos números $\{a_{ij}\}$, pouco expressivos ao desenhista.

Podemos representar a matriz **A** correspondente à transformação geral (11.8) na notação funcional da expressão (11.20) mediante artifício, construindo a expressão

$$Tp(0, [a_{11}, a_{21}], [a_{12}, a_{22}]).$$

11.5.1 Transformação inversa

Convém adotar para a transformação τ^{-1} , inversa da transformação τ , a notação $\operatorname{Inv}(\tau)$. Neste caso, não estamos fazendo um avanço em relação à legibilidade, mas uma concessão às limitações dos teclados que devem ser usados pelo desenhista, para comunicar suas instruções ao computador.

Transformação	Matriz	Notação
Translação horizontal	$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$	$\mathrm{T}_{m{x}}(a)$
Translação vertical	$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$	$\mathrm{T}_x(b)$
Translação	1 0 0 1	$\mathrm{Tp}([a,b])$
Reflexão horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	R_x
Reflexão vertical	-1 0 0 1	R_y
Meia-volta	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	HT
1/4 de volta	$\left[\begin{array}{cc}0&-1\\1&0\end{array}\right]$	QT
3/4 de volta	0 1 -1 0	iQT
Homotetia	$\left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right]$	$\mathrm{Scl}(\lambda)$
Rotação	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	$\mathrm{Rot}(heta)$

Tabela 11.1: Notação recomendada para algumas transformações afins

11.5.2 Composição de transformações

Para ilustrar a composição de duas transformações, consideremos, por exemplo, girar uma figura de um ângulo θ em torno da origem, e, em seguida, submeter a figura resultante a uma translação definida pelo número complexo [a,b]. A combinação dessas duas operações pode ser obtida por meio de uma única expressão:

$$\operatorname{Tp}([a,b]) \cdot \operatorname{Rot}(\theta)$$
.

Observe que o símbolo '·' não é mesmo usado para denotar a multiplicação entre dois número reais ou complexos. Para esta última operação convencionou-se adotar, em computação, o símbolo '*'.

Note que o efeito produzido pela composição acima (cuja seqüência deve ser lida da direita para a esquerda) é bastante diferente, conforme já alertamos anteriormente, do efeito produzido pela transformação definida pela expressão

$$\operatorname{Rot}(\theta)\cdot\operatorname{Tp}\left(\left[a,b\right]\right)$$
.

Nenhuma das notações apresentadas acima, com exceção da usada para representar o ajuste de afinidade

$$\operatorname{Tp}(P,Q,R)\cdot\operatorname{Inv}\left(\operatorname{Tp}(A,B,C)\right)$$

que representa a conversão do triângulo ABC no triângulo PQR, que torna claro que ao ponto A está associado o ponto P, a B, o ponto Q e ao ponto C, o ponto R — é muito expressiva para o desenhista. Para poder instruir o computador de forma mais sugestiva, adotamos notações funcionais mais simples, conforme constante da tabela 11.1.

12

Perspectiva

12.1 Introdução

A palavra perspectiva designa as técnicas usadas para representar graficamente, em uma superfície, objetos tridimensionais e suas relações espaciais.

Não existe uma forma única de se construir tais representações. De fato, uma simples inspeção do problema matemático que se coloca permite concluir que, embora seja sempre possível estabelecer uma transformação que faça corresponder a cada elemento de um domínio de três dimensões (onde existem os objetos e suas relações espaciais), um elemento de um outro domínio de duas dimensões (a tela onde esses objetos são representados), o inverso não é possível. Isto porque há sempre mais informação nos objetos do mundo tridimensional do que nas suas correspondentes representações bidimensionais.

Uma representação perspectiva surge, portanto, como um problema matematicamente indeterminado, exigindo uma simplificação do objeto representado. Essa indeterminação não se resolve pela matemática, mas somente pelo arbítrio: nesses casos é necessário que alguém decida sobre como se dará essa simplificação, isto é, quais qualidades dos objetos serão incluídas e quais serão excluídas na sua representação. Para diferentes escolhas, teremos, portanto, diferentes perspectivas.

R. Taton e A. Flocon, autores de um livro sobre o assunto [52], assim enunciam o problema:

Como retirar do objeto sua qualidade corporal, mantendo, ainda, todo seu significado?

Não se deve esperar, no entanto, que a expressão todo seu significado, que aqui aparece, tenha uma interpretação unânime ou consensual. Cada um de nós atribui diferentes valores às qualidades dos objetos observados e assim, nem todos concordaríamos com a escolha feita por uma pessoa qualquer.

Abstração. A partir do momento em que fazemos uma escolha, podemos passar a nos referir não mais aos objetos reais, mas às suas representações. Essa possibilidade de nos transportarmos do mundo real dos objetos para o mundo imaterial das representações consiste naquilo que é a essência do pensamento algébrico: a abstração.

Se quisermos caracterizar as diferentes escolas de pintura, poderemos valer-nos, por exemplo, de uma classificação baseada nas escolhas feitas por cada uma delas para representar a realidade. Essas escolhas refletem uma época com suas formas de ver o mundo, as possibilidades de sua tecnologia, suas preferências pela luz ou pela sombra, pela proporção ou pela disposição, pelo contorno ou pela extensão, pela precisão ou pela ilusão. Houve pensadores que insistiram em fazer entender a pintura como uma forma precisa de representar o mundo visível.

Quando, em meados do século XV, estabeleceu-se a fundamentação matemática para a perspectiva, houve quem entendesse que a pintura iria reduzir-se a uma mera técnica de transcrição, cujos resultados deixariam de depender do pintor para depender exclusivamente das possibilidades oferecidas pela técnica. Segundo essa corrente de pensamento, diferentes pintores, valendo-se das mesmas regras e das mesmas técnicas, produziriam sempre os mesmos resultados. A obediência a esse realismo radical, que pretendia identificar a pintura com os efeitos óticos da camera obscura (que hoje conhecemos por fotografia — figura 12.1), embora tivesse se tornado uma possibilidade com o desenvolvimento da perspectiva matemática, não se deu nem mesmo entre os pintores renascentistas, seus criadores, nem dentre seus mais fiéis seguidores.

12.2 Camera obscura — perspectiva cônica

A figura 12.1 ilustra o princípio de funcionamento de uma camera obscura onde as linhas AP, BQ, CR e DS representam as trajetórias seguidas pelos raios luminosos. Esse efeito pode ser obtido com precisão com o auxílio de objetivas fotográficas.

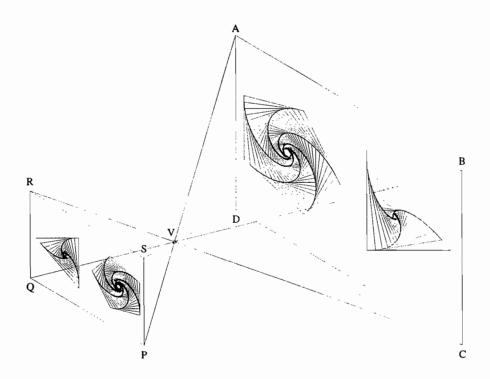


Figura 12.1: A camera obscura reproduz sobre PQRS a imagem invertida de um objeto real enquadrado em ABCD

O paradigma da camera obscura, pode ser obtido no computador por meio das técnicas (ray tracing). Segundo essa técnica, o computador deve executar grande quantidade de cálculos complexos para determinar as posições de todos os pontos que irão compor a imagem final. O que os autores dos algoritmos que implementam esses cálculos estão tentando fazer com que o computador é imitar aquilo que o fóton faz espontaneamente na natureza¹.

¹Considerando que o fóton é uma partícula ainda mais elementar do que o elétron, cabe

As bases matemáticas para se determinar na tela a localização dos pontos da imagem a partir dos pontos correspondentes do objeto real, foram desenvolvidos, como já vimos nas ilustrações de A. Dürer reproduzidas no capítulo 2, pelos pintores e matemáticos florentinos da Renascença, notadamente Brunelleschi e Alberti. Os algoritmos dos programas de computador desenvolvidos para gerar as imagens de objetos complexos, seguem o princípio ilustrado na figura 4.3 de A. Dürer, O desenhista do Alaúde.

12.3 Sombras — perspectiva cilíndrica

As técnicas de perspectiva baseadas no princípio da camera obscura são conhecidas por projeções cônicas, pois os raios luminosos, por emanarem de um vértice único descrevem, em suas trajetórias, as superfícies de cones. Neste capítulo não trataremos das projeções cônicas. Aqui serão tratadas apenas as projeções cilíndricas. Estas diferem das cônicas pois, neste caso, os raios luminosos são todos paralelos. As técnicas da perspectiva cilíndrica usam, como paradigma, as leis da ótica segundo as quais as sombras dos objetos são produzidas pelos raios solares. Dado que o Sol está a uma distância infinitamente maior do que as dimensões dos objetos cujas sombras percebemos, podemos, sem nenhum erro perceptível, considerar os raios solares como retas paralelas. Assim, entendemos que a sombra projetada por um objeto sólido sobre uma superfície plana é a projeções cilíndricas coincide com a da própria geometria grega.

relembrar aqui a observação do grande bioquímico húngaro e prêmio Nobel de Fisiologia e Medicina (1937), A. Szent-Györgyi[1893-1986] [4]:

Quando participei das atividades do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, eu o fiz na esperança de que, ao conviver com grandes físicos atômicos e matemáticos eu poderia aprender alguma coisa sobre a matéria viva. Mas assim que concluí que em qualquer sistema vivo há mais do que dois elétrons, percebi que os físicos nada tinham a me dizer. Com todos os seus computadores eles não podiam dizer o que o terceiro elétron poderia estar fazendo. O fato notável é que o elétron sabe exatamente o que fazer. É assim (concluí) que aquele pequeno elétron sabe algo que todos aqueles sábios de Princeton não sabem e isso só pode ser alguma coisa muito simples...

i (sir

Toda composição artística tem uma estrutura que a caracteriza. A estrutura é uma propriedade imaterial das criações artísticas que se constitui em um objeto autônomo de reflexão e apreciação. Nessa reflexão, o que se busca, e na apreciação, o que se percebe, é a ordem construtiva, isto é, as leis ou regras de composição.

A ciência que estuda as regras fundamentais das composições lingüísticas — a literatura ou a poesia — é a Gramática. Seria possível prover a análise e a síntese de composições plásticas de um instrumento tão valioso?

A transposição das técnicas de desenho para o computador, dada a natureza seqüencial deste, obriga-nos a abordar o desenho geométrico de um ponto de vista não convencional. É essa visão não convencional que nos dá uma resposta positiva à pergunta que nos colocamos.

Nesta parte do trabalho, deixamos de lado a expressão final dos desenhos como objeto de estudo para nos voltarmos para uma representação "textual" dessa obra, que seja passível de ser lida e processada por um computador.

A necessidade de traduzir um objeto que se expressa espacialmente — o desenho, que se manifesta numa superfície usualmente plana — para uma forma seqüencial que a represente — um texto cuja leitura, pelo homem ou pela máquina, se desenvolve no tempo — leva-nos a olhar não mais o resultado mas os processos técnicos que conduziram a esse resultado, isto é, a sua morfogênese.

A gramática das formas geométricas

13.1 Composição e linguagem

É costume tratar as obras de arte — literárias, musicais ou plásticas — como composições. A palavra composição deriva do verbo compor, que, por sua vez é formado da contração da conjunção com, de origem latina, com o verbo $p\hat{o}r$, este, também derivado do latim, ponere.

Somos levados a entender, dessa etimologia, o ato de *compor* como uma combinação de diversos *atos elementares de pôr*.

Usa-se o verbo $p\hat{o}r$ na forma: $p\hat{o}r$ alguma coisa em algum lugar. Encontramos, portanto, no uso do verbo $p\hat{o}r$, duas fontes de variedade: a das coisas e a dos lugares. Na oração "pôr x em y", x representa uma coisa (de um conjunto de coisas) e y, um lugar (de um conjunto de lugares). Referimo-nos àquilo que é posto, como componente.

Há uma grande diferença entre os métodos de síntese ou de análise das diferentes formas de composição artística, dependendo de onde se alojam os componentes, se no espaço ou no tempo. É comum contrapor-se as chamadas artes temporais — aquelas cujos elementos temáticos evoluem no tempo, como a música, a poesia e a literatura — às denominadas artes espaciais —

Componente

Espaço e Tempo

como o desenho, a pintura, a escultura ou a arquitetura — cujos elementos temáticos dispõem-se no espaço¹.

Seqüência e Linguagem

A contrapor as artes temporais às artes espaciais, está a noção de seqüência. Na apreciação estética das artes temporais, a apreensão do todo dá-se ao cabo de uma sucessão de sensações que se desenvolvem no tempo, provocando, no contemplador, transições de estados cognitivos ou de estados d'alma. Já na contemplação de uma obra de arte espacial, não é tão fácil identificar-se uma seqüência de apreciação.

Tomemos para análise das expressões seqüenciais, o exemplo concreto de um tipógrafo a compor uma linha de texto. Dizemos que nesse ofício o tipógrafo compõe um texto, pois ele reiteradamente põe coisas em lugares. Para ele, essas coisas são letras do alfabeto e os lugares, espaços na linha de texto. Um texto pode portanto ser reconhecido como uma composição seqüencial, isto é, uma seqüência de letras, cada nova letra disposta à direita da que a antecede.

O lugar ocupado por um elemento numa seqüência, deverá ser sempre imediatamente após seu *antecessor* ou imediatamente antes de seu *sucessor*. Portanto, ao compor uma linha, o tipógrafo não está livre para escolher os lugares onde irá colocar as letras: a natureza seqüencial do texto restringe os *lugares* onde o tipógrafo pode pôr as *coisas* (letras)².

Da mesma forma que uma linha de texto, a oração, o parágrafo, o capítulo, uma obra literária ou poética, são todas exemplos de composições seqüenciais. Também a música pode ser vista como uma composição seqüencial. Todas essas diferentes formas de expressão artística tornam-se — para quem nelas reconhece sua natureza seqüencial comum — equivalentes a um mesmo paradigma abstrato: o da linguagem.

Deixaremos por isso, de designá-las, como o fizemos até aqui, por artes temporais para passar a tratá-las por artes de expressão lingüística.

¹Na abordagem teórica a que nos propomos neste capítulo, excluiremos de seu escopo, em benefício da simplicidade, o teatro, a ópera ou o cinema, pois neles, as dimensões do tempo e espaço fundem-se para a formação do todo.

²Observe que o desenhista ou o pintor não está restrito a essas limitações. É precisamente essa liberdade que oculta a gramática subjacente às formas plásticas. Para tornar evidente essa gramática, devemos apelar para artifícios teóricos de que trataremos nas seções 13.2 e seguintes.

Graças à natureza seqüencial das composições temporais, tanto seus autores quanto seus apreciadores podem recorrer à Gramática. No entanto, por não divisarmos com igual clareza nas artes espaciais essas seqüências características, não nos acode, para apoio da síntese ou da análise, socorro semelhante.

O computador é, em essência, uma máquina seqüencial. Isso quer dizer que ele é determinado por um conjunto de estados internos que se sucedem, propelidos por seqüências de sinais externos que nele provocam "impressões". A especialidade do computador é ler e processar símbolos. Imagens, sons ou sinais de qualquer natureza devem estar acondicionados na forma de seqüências de símbolos (ou textos³) para poderem ser apropriadamente lidos e posteriormente processados. Ao "codificar" uma informação na forma de um texto dizemos que estamos reduzindo-a à forma lingüística.

Computador

13.2 Uma teoria da morfogênese

O hábito da linguagem comum nos ilude e parece obrigar-nos, sempre que ouvimos pronunciadas as palavras 'contorno' ou 'forma', a imaginar que se trata do contorno ou da forma de alguma coisa, que é um substrato material que toma essa forma. Cientificamente esse hábito remonta às causa materialis e causa formalis de Aristóteles. Mas quando chegamos às partículas últimas que compõem a matéria, nós vemos que perde o sentido pensar nas formas como se fossem constituídas de algum material. É como se elas fossem forma pura, nada senão forma; o que nós observamos sempre que as vemos é sua forma, não uma porção individual de matéria.

Erwin Schrödinger (1877-1961), Science and Humanism.

13.2.1 Forma imaterial

Uma abordagem morfogenética ao estudo das formas e estruturas geométricas de objetos consiste não em vê-las como propriedades desses objetos,

³Esses textos são, em qualquer caso e em última instância, longas cadeias de símbolos binários.

mas sim como o efeito dos processos naturais ou artificiais que lhes deram origem.

Os trabalhos em madeira ou metal, o desenho geométrico, a tecelagem, o assentamento de tijolos ou mesmo o desenvolvimento de um organismo, são exemplos de processos morfogenéticos. A despeito de suas diferenças, todos esses processos compartilham de uma mesma propriedade universal: eles são determinados por uma seqüência de transformações elementares.

Os tijolos são assentados numa parede de acordo com deslocamentos elementares; padrões são adicionados aos tecidos pelo tecelão em ciclos que se repetem. Similarmente, o giro de um compasso, o deslizamento da grafite pela aresta de uma régua ou ainda o desbaste de uma peça de metal ou de madeira no torno são formados pela acumulação contínua de transformações infinitesimais. O desenvolvimento de um organismo pluricelular é também o resultado de um processo seqüencial similar onde novas células transformadas são adicionadas àquelas que lhes deram origem.

Quando se desloca a atenção do efeito (a forma) para a causa (o processo morfogenético), pode-se reconhecer a forma como independente da substância de que é constituída. Podemos então, mais facilmente, concentrar nossa atenção na forma propriamente dita, despida das propriedades materiais irrelevantes. Na abstração que daí decorre, identificamos a essência da morfogênese, isto é, as regras que governam o processo morfogenético.

Em suma, podemos dizer, numa metáfora, que a morfogênese está nos andaimes, não no edifício.

Formas como Efeitos

Uma forma é determinada pelas transformações características que concorrem para a sua morfogênese. Se, em diferentes ocorrências de um processo morfogenético, tudo for mantido constante — exceto suas transformações características — então, formas diferentes serão produzidas.

Por exemplo, uma parede pode ser plana ou cilíndrica dependendo da transformação que a colocação de cada tijolo sofre em relação às colocações dos tijolos que lhe precedem durante sua construção; uma peça torneada será cilíndrica ou cônica dependendo da evolução das transformações infinitesimais ao longo de sua usinagem. As formas dos órgãos de um ser vivo são determinadas pela história das transformações intrínsecas que, por seu lado, dependem dos mecanismos de diferenciação celular característicos de cada

fase do desenvolvimento.

Nos processos morfogenéticos mais simples, as transformações características permanecem invariantes ao longo do desenvolvimento. Nesse caso, as formas que deles resultam são denominadas regulares e suas expressões matemáticas são reconhecidas como as $\acute{o}rbitas^4$ das transformações que os caracterizam.

Formas Regulares

Tais regularidades, extensivamente exploradas na síntese de fractais [40, 45, 29] e em modelagem de sistemas caóticos [21], podem ser descritas por meio de uma lei fundamental, segundo a qual qualquer forma regular pode ser completamente determinada por três elementos:

- uma transformação invariante,
- uma forma primitiva (célula) e
- um número que mede a extensão de toda a forma.

Formas não-regulares podem ser expressas por meio de polinômios geométricos⁵, como um agregado composto de peças distintas de formas regulares.

Na Geometria Clássica, as formas são vistas como entidades autônomas, derivadas de agentes externos, estranhos à Geometria. Nesta teoria, ao contrário, as formas não são vistas necessariamente como propriedades estranhas, mas como o resultado das transformações que as esculpem.

O Programa de Erlangen

Uma vez reconhecidas como órbitas dos grupos de transformações, as curvas que compõem as formas finais podem ser classificadas⁶ de acordo com o mesmo critério proposto por Felix Klein para a classificação das geometrias [6].

13.2.2 Instrumentos, ferramentas e órbitas

As trajetórias das máquinas-ferramentas são, em geral, órbitas de algum grupo de transformação. A régua e o compasso, por exemplo, implementam

⁴A palavra órbita é de uso corrente entre os matemáticos que estudam a Teoria dos Grupos de Transformações. Veja seção 13.9.1.

⁵Ver seção 17.2

⁶Veja essa classificação à página 178.

transformações euclidianas. Tais transformações são também características do torno. A maioria das obras feitas a partir de partes regulares como tijolos ou tesselas, pode ser vista como órbitas dos Grupos de Transformações de Simetria [57].

13.2.3 Morfogênese e linguagem

Pode-se constatar facilmente que as formas geométricas podem ser codificadas em termos de símbolos de um alfabeto convenientemente escolhido. De fato, uma vez que sejam conhecidas as transformações que esculpem uma forma e seja feita uma escolha conveniente de símbolos para a representação dessas transformações numa notação apropriada, os processos morfogenéticos podem ser codificados como sentenças de uma *Gramática com Estrutura de Frases*[25]. Portanto, formas e estruturas tornam-se um objeto legítimo da Teoria das Linguagens Formais, convertendo assim uma abordagem inicialmente transformacional numa abordagem lingüística, para o seu estudo.

Consequentemente, o processo morfogenético característico de uma máquina-ferramenta pode ser analisado sintaticamente e os seus limites e possibilidades, sistematicamente identificados.

Uma vez codificadas, as formas tornam-se perfeitamente plásticas, i.e., seu aspecto ou estrutura podem ser fácil e radicalmente modificados por meio de simples manipulação simbólica. Tal faculdade é potencialmente muito útil para uma variedade de aplicações no design, em projetos de engenharia, na automação da manufatura ou na editoração eletrônica.

13.2.4 Morfogênese dos seres vivos

Encerramos esta seção com uma aplicação da teoria da morfogênese seqüencial, numa tentativa de explicação para a origem e o desenvolvimento das formas dos seres vivos.

Em 1917, D'Arcy Thompson⁷ propôs [53], a partir da teoria das trans-

⁷D'Arcy Wentworth Thompson, (1860-1948) zoólogo escocês, autor da obra *On Growth and Form* onde está exposta a teoria aqui discutida.

formações geométricas, uma explicação engenhosa para a modificação das formas dos seres vivos. A teoria de Thompson é explicitamente inspirada na Teoria do Campo⁸. De acordo com essa abordagem, a evolução de uma forma noutra é vista como um processo de transformações globais envolvendo todo o organismo, em lugar de modificações locais nas partes do corpo. Essas modificações globais ocorreriam por efeito de um hipotético campo morfogenético, capaz de induzir certos "esforços" nos tecidos desses seres, esforços esses que provocariam deformações globais em seus corpos.

Se essa teoria tem o dom de formalizar, e dessa forma precisar, a noção de homologia — isto é, da equivalência de estruturas em seres diferentes — ela, no entanto, não explica a origem dessas formas nem tampouco como as novas formas oriundas desses campos seriam incorporadas aos seres vivos para serem transmitidas a seus descendentes. Por essas razões, podemos dizer que a teoria de Thompson trata da morfologia, mas não da morfogênese dos seres vivos.

As transformações geométricas podem ser usadas sob outro enfoque para explicar a origem das formas dos seres vivos. Segundo a Teoria da Morfogênese Seqüencial, podemos, em oposição à teoria de Thompson, imaginar que a origem das transformações é intrínseca ao ser e reside no material genético, na forma de códigos lingüísticos. A explicação da origem e variação das formas dispensa, assim, a hipótese da existência de "campos morfogenéticos". Em vez disso, ela pressupõe que cada ser vivo é dotado de uma máquina seqüencial capaz de responder a sinais emitidos pelo material genético⁹.

Tais sinais seriam "frases" de uma gramática e, dessa forma, a inspiração da teoria da morfogênese seqüencial está na Teoria das Linguagens Formais, inaugurada por Chomsky¹⁰, e não na Teoria do Campo.

⁸A Teoria do Campo é disciplina estabelecida na Física, e teve sua origem nos trabalhos de Faraday e Maxwell, em particular na noção de campo eletromagnético, proposta por este último.

⁹Na Second Conference on the Foundations of Information Science, realizada em Viena, em junho de 1996, o autor propôs a explicação para a origem e o desenvolvimento das formas vivas, aqui resumida. O extrato dessa conferência encontra-se publicado em [38]. Lá se sugere que os códigos originários dos sinais morfogenéticos estariam inscritos nos introns do DNA.

¹⁰ Avram Noam Chomsky (1925-), lingüista norte-americano, é um dos fundadores da teoria das gramáticas transformacionais e geratrizes, que tiveram profunda influência na Ciência da Computação. As linguagens artificiais como FORTRAN. Algol, Pascal e C bem

Essa abordagem nos leva a admitir a existência de um programa morfogenético, codificado em símbolos discretos no material genético dos seres vivos, organizados em uma estrutura lingüística molecular similar àquela hoje conhecida por "código genético", segundo o qual se expressam as mensagens que instruem a máquina celular a sintetizar as substâncias polipeptídeas.

As vantagens de uma abordagem gerativa sobre a dos campos morfogenéticos são evidentes. Ela fornece não apenas a explicação para a origem das formas dos seres vivos, mas também para a cronologia do desenvolvimento desses seres. Além disso, a explicação das modificações das formas dos indivíduos das espécies ao longo da evolução está em conformidade com as explicações filogenéticas estabelecidas.

13.3 Polinômios

Antes de expressar a lei fundamental da morfogênese na sua forma algébrica, convém recapitular os polinômios da álgebra ordinária. Esses polinômios têm, como pretendemos mostrar ao longo desta seção, elementos estruturais equivalentes aos das figuras geométricas, e por isso servir-nos-ão de ponto de partida para o estudo da sintaxe das formas.

Formas Polinomiais

As formas polinomiais ocorrem com freqüência em muitas situações. Tomemos, por exemplo, na representação dos números arábicos, o problema de decompor um número dado em suas casas decimais. O número 3467, por exemplo, decompõe-se em 3 milhares, 4 centenas, 6 dezenas e 7 unidades. Essa decomposição pode ser imediatamente traduzida para a notação das operações aritméticas fundamentais, dando-nos a expressão

$$3467 = 7 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3. \tag{13.1}$$

O número 10 aparece na expressão (13.1) porque a base de numeração usada é a decimal. A expressão (13.1) tem a forma polinomial com a qual os estudantes de álgebra elementar logo são obrigados a se familiarizar:

como seus tradutores automáticos (compiladores) foram inspiradas nessas teorias.

$$a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_1x^{n-1} + a_0x^n.$$
 (13.2)

Veremos a seguir, como se pode chegar à forma (13.2) por meio de um processo de construção següencial para o qual usamos os componentes

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_n.$$
 (13.3)

Para construir essa composição partimos de a_0 — tomado como forma elementar — e construímos as formas intermediárias z_k , conforme a seqüência

$$z_{0} = a_{0}$$

$$z_{1} = a_{1} + z_{0}x = a_{1} + a_{0}x$$

$$z_{2} = a_{2} + z_{1}x = a_{2} + (a_{1} + a_{0}x)x = a_{2} + a_{1}x + a_{0}x^{2}$$

$$z_{3} = a_{3} + z_{2}x = a_{3} + (a_{2} + z_{1}x)x = a_{3} + a_{2}x + a_{1}x^{2} + a_{0}x^{3}$$

$$\vdots$$

$$z_{n} = a_{n} + z_{n-1}x = a_{n} + a_{n-1}x + a_{n-2}x^{2} + \dots + a_{1}x^{n-1} + a_{0}x^{n}.$$

$$(13.4)$$

Pode-se reconhecer, na seqüência (13.4), a lei segundo a qual são gerados os polinômios do tipo (13.2). Essa lei assume a forma da relação de recorrência

$$z_k = a_k + z_{k-1}x. (13.5)$$

Podemos então tratar o termo z_n como uma composição formada pelos componentes relacionados em (13.3). O ato de compor é descrito pelas etapas independentes de pôr, cada uma delas denotada pela ação x^k . O "cimento" que dá totalidade à composição é o símbolo +.

Composição

13.4 Polinômio de figuras

Nesta seção, examinaremos a lei de formação (13.5) sob uma interpretação diferente¹¹. Vamos usá-la, não para saber que contas devem ser feitas para

¹¹A transposição dessas leis algébricas, para a geometria, foi realizada pelo autor [37, 38] com o intuito de possibilitar uma descrição lingüística rigorosa das formas e estruturas geométricas, de onde se pode derivar uma notação capaz de aumentar a precisão dos diálogos entre o desenhista e o computador. Os principais resultados dessa transposição estão implementados no programa Designer's Workbench.

determinar o valor do número 3467, mas para descrever o ato de imprimí-lo numa folha de papel, usando uma máquina de escrever.

Digitação de um número Tomemos, no lugar dos termos $a_0, a_1, \ldots a_n$, os símbolos gráficos $\{3,4,6,7\}$ do exemplo acima. Agora, não nos interessam mais os valores numéricos desses dígitos, mas suas representações gráficas; temos aqui os olhos do tipógrafo e não mais os do matemático. Na identidade (13.5), vemos agora em z_k , uma fase da construção do nosso número e, no lado direito da identidade, o ato de colocar mais um dígito na impressão inacabada do número.

$z_0 = a_0$	3	Imprime o símbolo '3' no papel
z ₀ x	3⊔	Desloca a folha de papel uma casa à esquerda
$z_1 = a_1 + z_0 x$	34	Adiciona o símbolo '4' ao número impresso
z_1x	34⊔	Desloca a folha de papel uma casa à esquerda
$z_2 = a_2 + z_1 x$	346	Adiciona o símbolo '6' ao número impresso
z_2x	346⊔	Desloca a folha de papel uma casa à esquerda
$z_3 = a_3 + z_2 x$	3467	Adiciona o símbolo '7' ao número impresso

Tabela 13.1: Evolução da digitação do número '3467' numa máquina de escrever.

Observando o processo da "montagem" do número na superfície do papel, vemos que seus algarismos vão aparecendo no papel, em seqüência, a cada toque.

No primeiro toque surge o algarismo 3. Segue-se, então a próxima etapa do processo de montagem do número, isto é, assim que a impressão do algarismo 3 estiver terminada, a folha de papel, impulsionada pelo carro da máquina, sofre um deslocamento para a esquerda. Para simbolizar essa nova

interpretação da lei de formação (13.5), denotaremos o deslocamento da máquina de escrever por x.

A tabela 13.1 detalha a evolução da digitação do número '3467' no papel. Nela, o espaço em branco que aparece à direita de cada algarismo digitado quando este sofre um deslocamento para a esquerda, está representado pelo símbolo U.

Adotando esses novos significados para os símbolos $a_0, a_1, \ldots a_n$ e x, podemos, então, reler a lei (13.5) e reconhecer a impressão de um novo algarismo a_k na folha de papel, como o resultado das operações de submeter a impressão inacabada z_{k-1} do nosso número a um deslocamento x do papel para a esquerda, seguido da impressão do tipo correspondente ao algarismo a_k na superfície do papel. Para enfatizar a diferença de significado que atribuimos à variável x que ocorre nos polinômios, passamos a denotá-la em negrito, por x.

Assim, representamos o processo usado para digitar o número '3467' pelo polinômio

$$7 + 6 \cdot \mathbf{x} + 4 \cdot \mathbf{x}^2 + 3 \cdot \mathbf{x}^3. \tag{13.6}$$

Confronte a expressão (13.6), que descreve um procedimento para desenhar uma figura, com a expressão (13.1) que descreve um procedimento para calcular o valor de um número. Enquanto aqui o símbolo x representa um movimento do carro da máquina de escrever, lá, em lugar de x encontra-se o número '10'.

Devidamente familiarizados com essa nova forma de ver a lei (13.5), consideremos então, como próximo exemplo, o assentamento de tijolos descrito na seção 13.2.

Assentamento de tijolos

Neste caso, podemos reler a lei de recorrência (13.5) tomando os termos $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ não mais como números ou dígitos, mas como tijolos. O símbolo \mathbf{x} , representará agora, a forma de assentar esses tijolos. Na identidade (13.5), vemos agora em z_k , um muro inacabado e, no lado direito da identidade, o ato de colocar mais um tijolo numa parede inacabada¹².

¹²A diferença importante neste exemplo é que a lei descreve um processo um pouco estranho de construção, pois nele é o muro e não o tijolo que sofre um deslocamento. Essa diferença não é relevante para nosso caso, pois ela significa apenas uma mudança do referencial segundo o qual observamos o processo de impressão do número.

O traçado de figuras

A partir desses exemplos, podemos generalizar ainda mais a identidade (13.5) como representante algébrica da lei fundamental da morfogênese para referir-se não apenas aos processos de digitação ou de assentamento de tijolos, mas também ao traçado de figuras. Assim, interpretaremos os termos da identidade (13.5) da seguinte forma:

- z_k é uma figura (uma forma geométrica inacabada),
- ak é uma figura elementar ou primitiva,
- x é uma transformação geométrica.
- '+' representa a superposição de duas partes da figura¹³.

Podemos dizer que a forma final z_n é uma composição formada pelos componentes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, arranjados conforme à lei expressa em (13.5), que é, por sua vez, estabelecida pela transformação \mathbf{x} .

Podemos, então, interpretar os polinômios (13.2) e os símbolos que o integram, da seguinte forma:

 o símbolo¹⁴ x designa uma transformação geométrica. A transformação x pode ser uma composição qualquer das transformações primitivas apresentadas na seção 11.3 como, por exemplo,

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_x(120) \cdot \mathrm{Rot}(60) \cdot \mathbf{T}_y(80).$$

- os símbolos a₀, a₁, a₂,..., a_n denotam componentes de uma composição, isto é, traços primitivos ou figuras compostas e
- o sinal '+' como a superposição de partes de uma figura para formar a composição final.

13.4.1 Órbita

Um caso particular de polinômio, muito importante para o desenho, ocorre quando uma composição é formada por um único e mesmo componente, isto

 $^{^{13}}$ Os pontos do desenho formam um conjunto. Portanto, podemos identificar a operação representada pelo símbolo '+' como a união, estudada na álgebra dos conjuntos, ainda que o símbolo comumente adotado por outros autores para representar essa operação seja o ' \cup '. Preferimos preservar o símbolo '+' principalmente porque o símbolo \cup não é encontrado nos teclados, nem é comum nas fontes de caracteres disponíveis hoje nos sistemas operacionais dos computadores.

 $^{^{14}}$ Representamos x em negrito para enfatizar que aqui se trata de uma transformação e diferenciá-la mais explicitamente das figuras, representadas pelos símbolos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

é, quando

$$a = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n,$$

a expressão polinomial (13.2) que representa a figura final z_{n-1} pode ser escrita na forma

$$a + a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{x}^2 + \ldots + a \cdot \mathbf{x}^{n-1} = a \cdot (1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^{n-1}).$$
 (13.7)

A expressão entre parênteses em (13.7) envolve apenas transformações: ela não se refere a nenhuma figura. Nessa expressão, reconhecemos a órbita da transformação x, que será apresentada na seção 17.4.5. A notação adotada neste trabalho para representar as órbitas é

$$a \cdot (1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^{n-1}) = a \cdot \operatorname{Orb}(n, \mathbf{x}).$$

13.5 Polinômios geométricos

A órbita é também uma forma polinomial envolvendo somente transformações, isto é, ela não inclui símbolos como $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. As formas polinomiais que envolvem apenas transformações, representam um papel importante na composição de desenhos por computador. Designaremos essas formas por polinômios geométricos¹⁵, para diferenciá-los dos polinômios de figuras.

Pode-se construir formas polinomiais mais complexas do que as órbitas, isto é, podemos aplicar às figuras, não apenas uma, mas duas (ou mais) transformações. Consideremos, então, o caso de duas transformações, x e y. As formas polinomiais da álgebra ordinária que envolvem duas variáveis são representadas na forma

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}x + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{22}x^2y^2 + \dots$$
 (13.8)

 $^{^{15}}$ Os polinômio geométricos apresentam uma diferença muito importante em relação aos polinômios ordinários da álgebra, onde são tratados como instâncias das estruturas denominadas anéis. Essa diferença se encontra nas propriedades da operação '+'. Enquanto nos anéis essa operação é característica de um grupo, nos polinômios geométricos isso não é verdade. De fato, neste último caso, esse símbolo designa a operação de união, para a qual uma equação do tipo a+x=b não tem solução, para quaisquer a e b. Polinômios geométricos não são, portanto, instâncias de anéis.

Nos termos a_{ij} que aparecem na expressão (13.8), o primeiro índice i representa o expoente de x e o segundo, j, o expoente de y. Tais formas polinomiais podem ser generalizadas para envolver não apenas duas, mas uma variedade maior de variáveis, w, x, y, z, etc.

Passemos do polinômio da álgebra ordinária (13.8) aos polinômios de figura. Expressões análogas derivadas da (13.8), envolvendo composições de diferentes transformações geométricas podem ser construídas como, por exemplo, o seguinte polinômio de figura, envolvendo os componentes $a, b \in c$

$$a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^4 \cdot \mathbf{z} + c \cdot \mathbf{z}^2 \cdot \mathbf{x} \tag{13.9}$$

A expressão (13.9) representa uma composição feita com as transformações $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sobre os componentes a, b, c, ao passo que o polinômio de figura

$$a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y} + c \cdot \mathbf{z},\tag{13.10}$$

apesar de envolver os mesmos componentes a, b, c e as mesmas transformações geométricas x, y, z, descreve uma composição diferente.

13.5.1 Polinômio de uma figura

Podemos, como fizemos ao construir a órbita na seção 13.4.1, imaginar composições como as expressas em (13.9) e (13.10), formadas não por três componentes, a, b, c, mas por um único, tal que

$$a = b = c$$

As expressões (13.9) e (13.10) passariam a ser escritas na forma

$$a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^4 \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}^2 \cdot \mathbf{x})$$

$$a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}).$$
(13.11)

Temos em (13.11) uma generalização das órbitas, formadas por expressões que envolvem composições representadas pelo símbolo '·' e superposições, designadas pelo símbolo '+', aplicadas a uma mesma figura. As expressões entre parênteses em (13.11), não envolvem nenhuma figura e são, também, formas polinomiais.

13.6 Produtos de polinômios geométricos

Podemos ir ainda mais adiante na exploração das formas polinomiais da álgebra ordinária, em benefício do desenho. Dois polinômios geométricos quaisquer podem ser "multiplicados", um pelo outro, para formar um novo polinômio geométrico. Para denotar o produto de dois polinômios nós os envolvemos, como na álgebra ordinária, pelos símbolos de abre e fecha parênteses e denotamos o produto pelo símbolo *, como no exemplo abaixo

$$(1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z}) * (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f}) * \operatorname{Orb}(n, \mathbf{p}). \tag{13.12}$$

No exemplo (13.12) observamos o produto de três polinômios, separados pelo símbolo '*'. Os dois primeiros polinômios geométricos aparecem envolvidos, cada um, pelo par de abre e fecha parênteses. O último polinômio geométrico é uma órbita; não é necessário envolvê-la pelo par de abre e fecha parênteses.

Com essa generalização dos polinômios geométricos, podemos representar uma composição f como sendo a superposição de outras composições, em expressões do tipo

$$f = a_0 \cdot \mathbf{T}_0 + a_1 \cdot \mathbf{T}_1 + a_2 \cdot \mathbf{T}_2 + \ldots + a_n \cdot \mathbf{T}_n.$$
 (13.13)

onde os $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n$ são polinômios como os exemplificados em (13.12) e os $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, os componentes da figura f.

13.7 Composição e componentes

Os componentes mais elementares de uma composição são os traços primitivos. Os traços primitivos de que tratamos neste trabalho são:

- o segmento de reta;
- as curvas cônicas (o círculo, a parábola. a elipse, a hipérbole) e seus arcos;
- as espirais e seus arcos;
- as curvas de Bézier.

13.6 Produtos de polinômios geométricos

Podemos ir ainda mais adiante na exploração das formas polinomiais da álgebra ordinária, em benefício do desenho. Dois polinômios geométricos quaisquer podem ser "multiplicados", um pelo outro, para formar um novo polinômio geométrico. Para denotar o produto de dois polinômios nós os envolvemos, como na álgebra ordinária, pelos símbolos de abre e fecha parênteses e denotamos o produto pelo símbolo *, como no exemplo abaixo

$$(\mathbf{1} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z}) * (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f}) * \operatorname{Orb}(n, \mathbf{p}). \tag{13.12}$$

No exemplo (13.12) observamos o produto de três polinômios, separados pelo símbolo '*'. Os dois primeiros polinômios geométricos aparecem envolvidos, cada um, pelo par de abre e fecha parênteses. O último polinômio geométrico é uma órbita; não é necessário envolvê-la pelo par de abre e fecha parênteses.

Com essa generalização dos polinômios geométricos, podemos representar uma composição f como sendo a superposição de outras composições, em expressões do tipo

$$f = a_0 \cdot \mathbf{T}_0 + a_1 \cdot \mathbf{T}_1 + a_2 \cdot \mathbf{T}_2 + \ldots + a_n \cdot \mathbf{T}_n. \tag{13.13}$$

onde os $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n$ são polinômios como os exemplificados em (13.12) e os $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, os componentes da figura f.

13.7 Composição e componentes

Os componentes mais elementares de uma composição são os traços primitivos. Os traços primitivos de que tratamos neste trabalho são:

- o segmento de reta;
- as curvas cônicas (o círculo, a parábola, a elipse, a hipérbole) e seus arcos;
- as espirais e seus arcos;
- as curvas de Bézier.

As composições podem ser obtidas não apenas da superposição de traços primitivos, mas de suas flexões, estas obtidas por sua vez, a partir das transformações geométricas aplicadas a traços primitivos.

Um componente pode também ser uma outra figura, de qualquer complexidade, como por exemplo, o desenho de uma letra, de um símbolo gráfico ou um outro desenho formado por um número arbitrário de outros componentes, desde que cada uma dessas figuras seja, em última instância, formada por traços primitivos.

13.8 A sintaxe do desenho

Os polinômios geométricos, por permitirem a obtenção de uma variedade ilimitada de flexões dos traços primitivos, fornecem uma forma sintática bastante geral, compacta e estritamente lingüística de representação de figuras formadas por traços.

Podemos então, interpretar os traços primitivos como o "léxico" de uma língua e os polinômios de figura — obtidos da aplicação de polinômios geométricos a esses traços — como as frases de uma linguagem do desenho.

As leis algébricas que regem a composição de polinômios geométricos, juntamente com o léxico formado pelos traços primitivos, integram o que poderíamos chamar de uma *Gramática das Formas Geométricas* ou, numa forma mais apropriada ao contexto deste trabalho, uma sintaxe do desenho.

13.9 Curvas e órbitas

No capítulo 8, referimo-nos aos traços como as moléculas do desenho, das quais os pontos são os átomos, ao passo que nas seções anteriores referimo-nos aos traços como as palavras de uma linguagem e aos pontos, como as letras dessa linguagem.

Nesta seção mostraremos porque os traços podem ser assim considerados. Veremos que essas unidades constitutivas do desenho geométrico podem surgir, não como "elementos primitivos", mas como conseqüências da ação

de transformações geométricas sobre pontos¹⁶.

Órbita de um ponto Na seção 13.4.1 vimos que uma órbita pode ser aplicada a uma figura qualquer. Nesta seção trataremos do caso extremo em que essa figura reduz-se a um ponto geométrico.

Consideremos a órbita $P \cdot \operatorname{Orb}(n, \mathbf{x})$ aplicada ao ponto P,

$$P \cdot \operatorname{Orb}(n, \mathbf{x}) = P \cdot \left(1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^{n-1}\right). \tag{13.14}$$

Essa órbita é formada por n pontos,

$$P_0 = P$$
, $P_1 = P \cdot \mathbf{x}$,... $P_k = P \cdot \mathbf{x}^k$,... $P_{n-1} = P \cdot \mathbf{x}^{n-1}$. (13.15)

Quem observar com atenção uma roda girando, poderá perceber a íntima relação que existe entre o movimento de rotação e o círculo e quem observar o movimento de uma bola sobre uma mesa de bilhar, poderá ver que existe uma relação semelhante entre a translação e a linha reta. A possibilidade de usarmos o compasso para desenhar círculos e a régua para gerar segmentos de reta é uma conseqüência dessas relações. Vamos examinar aqui essas relações de um ponto de vista matemático, mostrando a equivalência entre transformações contínuas e as curvas.

Para entender uma transformação contínua, vamos considerar, como exemplo, o caso em que a transformação \mathbf{x} em (13.14) é a rotação, em torno da origem, de um ângulo θ/n , onde θ é um ângulo arbitrário e n, um número inteiro, isto é, $\mathbf{x} = \text{Rot}(\theta/n)$.

Os pontos (13.15) da órbita (13.14) estão dispostos, igualmente espaçados, sobre uma circunferência de raio r = OP, formando, cada um com seu

Trajetórias e curvas

Rotação e Círculo

¹⁶ A leitura deste item é dispensável para quem esteja interessado apenas nos aspectos práticos do desenho por computador pois o assunto nele tratado é de natureza teórica e destina-se àqueles interessados em conhecer as fundações algébricas do *Designer's Workbench*. Ele serve também para mostrar que a relação das curvas primitivas que integram o programa não resultou de uma preferência do autor, mas do grupo de transformações nos quais o sistema está baseado, no caso, o grupo de afinidades.

vizinho, um arco de amplitude θ/n , conforme a seqüência

$$P_{0} = P,$$

$$P_{1} = P \cdot \text{Rot} (\theta/n), \dots$$

$$P_{k} = P \cdot \text{Rot}^{k} (\theta/n), \dots$$

$$P_{n-1} = P \cdot \text{Rot}^{n-1} (\theta/n).$$

13.9.1 Órbitas contínuas

Passagem ao limite

É fácil concluir que para a rotação,

$$\mathbf{x}^k = \operatorname{Rot}^k\left(\frac{\theta}{n}\right) = \operatorname{Rot}\left(\frac{k}{n}\theta\right).$$
 (13.16)

Tendo em vista a identidade (13.16), concluímos que à seqüência de pontos em (13.15) corresponde uma sucessão de $n\'umeros \ k/n$ e, tendo (13.14) em mente, podemos visualizar a órbita que vai se formando à medida que o número inteiro k percorre, em seqüência crescente, todos os valores de 0 a n-1.

Podemos constatar que, quando aumentamos o valor de n,

- a órbita continuará contida num arco de círculo com origem em $P_0 = P$;
- quanto maior o valor de n, mais próximos estarão uns dos outros, dois pontos consecutivos da órbita pois o arco θ/n que os separa, diminui quando n aumenta.
- o ponto terminal, P_{n-1} , ficará cada vez mais próximo do ponto de coordenadas $\{r, \theta\}$. De fato, as coordenadas do ponto P_{n-1} valem, conforme (13.15) e (13.16),

$$\left\{r, \left(\frac{n-1}{n}\right)\theta\right\}.$$

Assim, à medida que fazemos o valor de n aumentar, os pontos da órbita tendem a "encostar" uns nos outros.

Concreção

Já vimos na seção 1.6 que um ponto é um componente *invisível* de uma figura e, portanto, a órbita de um ponto será também invisível. Para tornar a órbita visível. *estipulamos* que

quando dois pontos "encostarem" um no outro, eles sofrerão uma alteração de suas propriedades — como se as "substâncias" de que são feitos sofressem uma "reação química" capaz de alterar seus atributos óticos — que os torna visíveis.

O que estamos fazendo por meio desse exercício mental é uma concreção, isto é, o processo inverso da abstração. Seguiremos, então, o caminho oposto daquele que trilhamos quando "destilamos" a linha reta¹⁷, para extrair sua representação abstrata. Na concreção, buscamos materializar uma idéia abstrata e, para isso, buscamos substâncias materiais que tenham propriedades próximas daquelas previstas para nossos objetos ideais.

Em oposição à abstração, que é um exercício puramente mental, a concreção é formada por um complexo de atividades tecnológicas. Para que essas atividades tenham sucesso, não bastam elucubrações, mas são necessárias incontáveis investigações e prospecções envolvendo equipamentos e métodos com substâncias reais até encontrar-se uma — se é que ela existe¹⁸ — que seja dotada das faculdades que desejamos.

As dificuldades não param aí. Descoberta a substância ideal, começa o trabalho de produzi-la industrialmente, em quantidade, qualidade e preço acessíveis, enquanto, em outra frente de trabalho, engenheiros projetam e indústrias produzem os instrumentos que permitirão ao homem comum explorar essas faculdades da substância sintetizada.

Ao caminhar pela via que nos leva do ponto ao pixel, chegaremos a um estágio em que cabe "materializá-lo". Nesse momento, damos aos pixels as propriedades típicas da matéria, como por exemplo, a faculdade de fundir-se ou de reagir quimicamente uns com os outros. Podemos então dizer que a órbita aparecerá no papel como um agregado de minúsculos pixels materializados, dispostos sobre um arco de círculo que liga o pixel P ao pixel $P \cdot \mathrm{Rot}(\theta)$.

Por meio desse expediente, podemos pensar num traço como o efeito obtido, quando se aplica a um ponto P a órbita contínua de uma transformação dada. Esse ponto é denominado origem do traço.

Traço

Tecnologia

¹⁷Ver seção 9.4, pg. 110.

¹⁸ Alguns alquimistas gastaram suas vidas buscando o elixir da longa vida; outros foram atrás da pedra filosofal, uma substância capaz de transformar metais ordinários em ouro. O espírito alquímico nunca abandonou o homem. Ainda hoje há muitos que crêem existir um elixir da tecnologia que, secretado pelos países ricos, fluirá destes aos pobres, graciosa e copiosamente.

Voltemos à órbita (13.14) como descrição do traço. Se denotarmos por t o número k/n, podemos dizer que quando k percorre a seqüência

$${0,1,2,\ldots,n-1},$$

o número t percorre os valores entre 0 e 1.

Quando importamos para nosso raciocínio a noção de *limite* inventada pelos matemáticos para o Cálculo Infinitesimal, pensamos numa órbita formada por *infinitos* pontos. Nesse caso, representamos a expressão dentro dos parênteses em (13.14), da seguinte forma

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Orb}(n, \mathbf{x}) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^{n-1} \right). \tag{13.17}$$

Enquanto no Cálculo Integral uma somatória de infinitos termos infinitesimais costuma ser representada pelo símbolo integral

$$\lim_{k \to \infty} \sum F(x_k) \, \Delta x_k = \int F(x) \, dx,$$

quando se trata das somatórias que aparecem nas órbitas (13.17), o símbolo '+' representa, não a operação de adição entre números, mas a operação de união, definida na Teoria dos Conjuntos. Em lugar dos símbolos \sum e \int , do cálculo integral, usaremos então, o símbolo \cup para representar a "somatória"

$$\bigcup_{k=0}^{k=n} \mathbf{x}^k = 1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^n$$

e o símbolo U para representar o limite dessa somatória

$$\lim_{n \to \infty} \bigcup_{k=0}^{k=n} \mathbf{x}^{k/n} = \sum_{t=0}^{t=1} \mathbf{x}^{t}$$
 (13.18)

Adotando para x em (13.14) a transformação $x = Rot(\theta)$, a expressão

$$P \cdot \bigcup_{t=0}^{t=1} \operatorname{Rot}^{t}(\theta) = P \cdot \bigcup_{t=0}^{t=1} \operatorname{Rot}(\theta t)$$

designará o conjunto formado por todos os pontos do arco de círculo de amplitude θ que tem origem no ponto P. Pela convenção adotada para os ângulos, o arco será traçado no sentido anti-horário.

A expressão (13.18) vale não apenas para as rotações, mas para uma variedade de outras transformações geométricas que puderem ser reduzidas a representações infinitesimais. Podemos dizer que a órbita de uma transformação τ sobre um ponto P é uma curva que tem origem em P e termina no ponto $P \cdot \tau$, e a representamos pela expressão

$$P \cdot \bigcup_{t=0}^{t=1} \tau^t \tag{13.19}$$

Suponhamos que a curva (13.19), gerada pela órbita da transformação τ pertencente a um dado grupo Γ , é transformada por outa transformação ϕ , pertencente ao mesmo grupo Γ , conforme a expressão

Transformada de uma curva

$$\phi^{-1}\left(P \cdot \bigcap_{t=0}^{t=1} \tau^t\right) \phi.$$

Pode-se mostrar que a curva transformada é órbita de outra transformação φ do mesmo grupo Γ . Essas transformações estão relacionadas entre si por meio da expressão

$$\varphi = \phi^{-1} \tau \phi$$
.

Podemos conceber, portanto, uma figura F desenhada exclusivamente a partir de arcos de curva produzidos por órbitas de transformações de um dado grupo Γ e, então, afirmar que

qualquer figura derivada de F por uma transformação ϕ do grupo Γ , será formada exclusivamente por arcos de curva gerados por órbitas de transformações desse mesmo grupo Γ .

Esse resultado é importante para as técnicas de desenho por computador, pois ele mostra que se for possível desenhar, por meio de um conjunto de algoritmos fundamentais, as curvas geradas pelas órbitas de todas as transformações de um dado grupo, então todas as figuras que forem representadas exclusivamente por arcos de curva produzidos por essas transformações, bem como todas as suas transformadas, poderão ser reproduzidas pelos mesmos algoritmos fundamentais.

De fato, decorre das propriedades dos grupos que se a cada transformação geométrica τ de um grupo Γ corresponder uma curva característica, então,

- à inversa τ^{-1} de τ correponderá uma curva característica desse mesmo grupo Γ .
- a qualquer composição de duas transformações desse grupo corresponderá uma outra curva característica desse mesmo grupo Γ.

Curvas e grupos

As propriedades morfogenéticas das transformações contínuas servem de fundação para uma Teoria do Traço, e de critério para a classificação das curvas segundo a mesma taxonomia proposta por Felix Klein para classificar as geometrias em seu famoso Programa de Erlangen. Nele, Klein sugeriu que se entendesse a geometria como [6]

o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações.

Assim, podemos classificar as curvas em

euclidianas que designam a reta e a circunferência, respectivamente, as órbitas da translação e rotação, transformações características do grupo euclidiano.

similares que designam as órbitas do grupo de similaridades, a saber, as curvas euclidianas (reta e o circunferência) e as espirais equiangulares (logarítmicas).

Minkowskianas que designam as órbitas do grupo de Minkowski;

afins que incluem, além das anteriores. as curvas cônicas (elipses, parábolas e hipérboles) e suas espirais.

projetivas que adicionam a todas as relacionadas acima, um conjunto menos conhecido de curvas.

¹⁹ Interessam-nos, em especial, dentre as transformações que caracterizam as geometrias, aquelas definidas pelos operadores primitivos dos grupos de Lie para o grupo de afinidades. A Teoria dos Grupos Contínuos de Transformações foi desenvolvida originalmente pelo matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842–1899). Essa teoria pode ser vista hoje como uma fusão de duas teorias até então independentes, a teoria dos grupos, de um lado, e a teoria dos espaços topológicos, de outro [47].

14

A imperfeição da linguagem

(...) Sinais convencionais (...) são aqueles que os seres vivos trocam mutuamente com a intenção de mostrar, tão bem quanto possível, os sentimentos de suas mentes, ou suas percepções, ou seus pensamentos. Não há razão para emitir-se um tal sinal exceto pelo desejo de expressar e transmitir à mente de outro, aquilo que o emissor do sinal tem em sua própria mente.

Santo Agostinho [354-430], Acêrca da Doutrina Cristã, Livro III, cap. 1, ano 397 d.C.

(...) o som que eu produzo por meio dos órgãos da fala, excita na mente de outro homem, que me ouve, a idéia que eu submeto à minha, quando falo.

John Locke [1632-1704], Ensaio Acerca do Entendimento Humano, livro III, Cap. III, § 3.

Filaleto — (...) não seria a finalidade primordial da linguagem excitar no espírito de quem me ouve uma idéia semelhante à minha?

Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716], Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano, Cap. III § 1.

A linguagem falada é não apenas o mais antigo, mas o principal processo de comunicação social, e o diálogo, uma de suas formas mais simples. É natural,

portanto, que os limites e as possibilidades da comunicação tenham sido buscados pelos pensadores antigos no estudo dessa forma de comunicação. Aristóteles assim referiu-se a esses limites [2]:

É impossível introduzir numa discussão, as próprias coisas discutidas: em lugar delas usamos seus nomes como símbolos e, por conseguinte, supomos que as conseqüências que decorrem dos nomes também decorram das próprias coisas (...). Mas os dois casos (...) não são semelhantes, pois os nomes são finitos (...) enquanto coisas são infinitas em número. É inevitável, portanto, que a mesma fórmula e um nome só tenham diferentes significados.

A justificativa dada por Aristóteles está, possivelmente, errada. Embora as coisas sejam infinitas em número, as frases de uma língua também o são. Se as primeiras são enumeráveis, então seria possível associar a uma coisa determinada, uma frase também determinada, pois as frases de uma língua são, também, enumeráveis. A diferença entre esses dois casos não está, portanto, na impossibilidade de se representar cada coisa por um nome, mas na inviabilidade prática de fazê-lo¹.

Parece-nos mais razoável atribuir os limites da comunicação a outra das características da linguagem referidas por Aristóteles nas reflexões reproduzidas acima:

(...) supomos que as conseqüências que decorrem dos nomes também decorram das próprias coisas.

A ambigüidade parece estar na impossibilidade de se estabelecer uma equivalência precisa entre as conseqüências que decorrem dos *nomes* e as conseqüências que decorrem das *coisas*.

Um diálogo que se trava entre dois interlocutores, pode ser decomposto em dois processos elementares: a expressão e a impressão. Ao *exprimir* uma idéia, aquele que fala tenciona *imprimi-la* na mente de quem ouve. Assim,

¹Mas as coisas não são assim tão simples. Segundo a Mecânica Quântica, as partículas microscópicas que constituem a matéria são indistinguíveis umas das outras, o que torna equívoca a noção de enumerabilidade que aqui se adota, bem como elimina a possibilidade de dar-se, a cada coisa do universo, um único nome identificador.

podemos entender a impressão como sendo a conseqüência ou efeito produzido por uma expressão. Esse efeito, porém, nem sempre é determinado, pois a uma mesma intenção expressa, podem corresponder os mais variados e inesperados efeitos, isto porque duas pessoas distintas podem ter, diante de uma mesma expressão, impressões diferentes. Assim, fica claro que o efeito produzido por uma mensagem não pode estar na mensagem em si, mas na forma como o cérebro de quem ouve as processa².

A ambigüidade da linguagem é uma permanente ameça à precisão em todo processo de comunicação, conforme se pode depreender de qualquer uma das três citações que encabeçam este capítulo. Santo Agostinho a expressa na forma de uma comunicação tão boa quanto possível, enquanto Leibniz nos apresenta um Filaleto satisfeito em extrair da comunicação, um resultado apenas semelhante.

14.1 Ambigüidade e rrro

Há muitos anos, as ligações interurbanas eram intermediadas por uma telefonista que estabelecia o contato entre os interlocutores. Conta-se que certa ocasião, um morador da cidade de São Paulo atendeu a um telefonema originário de Belo Horizonte. A telefonista, cumprindo o procedimento usual das ligações interurbanas fez a pergunta:

— É de São Paulo?

A resposta, em tom indignado, veio, imediata:

— Não senhora! Aqui é tudo Palmeiras!

Noutra ocasião, o seguinte diálogo telefônico foi ouvido de passagem:

— De onde falam?

²Tem sido um erro comum entre alguns autores da Teoria da Informação, atribuir propriedades semânticas (significado) a uma mensagem, para medir, pela entropia, sua quantidade de informação. Costumam esses autores argumentar que a mensagem tem mais ou menos informação conforme esta seja mais ou menos surpreendente a quem a recebe. Ora, o grau de surpresa é uma propriedade do receptor, não da mensagem [39]. Não se pode falar em significado de uma mensagem senão em referência ao efeito por ela provocado sobre o ouvinte.

Depois de um longo período de silêncio, uma voz triunfante respondeu:

— Debaixo da escada!

Os técnicos em comunicações costumam dizer que esses são problemas de *protocolo*. Os protocolos são símbolos ou sinais cujos significados são entendidos tão logo tenham sido percebidos, sem ambigüidade, por ambos interlocutores de um diálogo. Para esse fim, eles devem ter sido convencionados, isto é, em algum momento anterior, os significados desses sinais foram objeto de algum acordo estabelecido entre os interlocutores³.

Para exemplificar mais detalhadamente a necessidade de protocolos precisos, não ambíguos, consideremos a seguinte situação. Suponha que se pretenda explicar, a uma pessoa do outro lado da ligação telefônica, como desligar um equipamento eletrônico importado. O diálogo poderá ser mais ou menos assim:

- Veja se tem um botão escrito Power Off!
- Como é?
- P de pato, O de ovo, W de... de... de... Watt!
- O que é uóti?
- Dábliu. Parecem dois v de vaca grudados um no outro!
- Um em cima do outro?
- Não! Um do lado do outro! Então, de novo: P de pato, O de ovo, dois V...
- Espera que eu vou anotar... Dá para repetir?...

E assim segue um diálogo que se trunca a cada duas ou três mensagens e que pode culminar com a capitulação definitiva:

— Deslique o aparelho da tomada...

As referências às letras do alfabeto, servem, nas instruções transmitidas pelo telefone, de *protocolo de comunicação*. A citação de uma palavra iniciada por uma dessas letras é um recurso de redundância usado, na maioria das vezes, para enfrentar as ambigüidades originadas, não de um possível desconhecimento do código, mas da má qualidade da transmissão.

Esse artifício será inútil se um dos interlocutores for analfabeto. Isso porque um analfabeto, por não ter sido submetido a um processo de alfabetização (que é o momento em que ele toma conhecimento da convenção

³Convenções e protocolos são discutidos na seção 15.

adotada para as letras), não consegue construir em sua mente, uma imagem semelhante à de seu interlocutor.

14.2 Ambigüidade e arte

Nem sempre a ambigüidade é vista como causa de erro. Ela pode ser recurso importante para os autores de obras literárias.

Recorrendo exclusivamente à palavra, um escritor pode ultrapassar suas limitações e livrar-se das impurezas que corrompem a inspiração de suas idéias. Ao compor sua obra, ele recolhe, seleciona e processa as palavras como um alquimista manipula folhas, pétalas de flores, ervas ou raízes. Põese então a buscar suas essências macerando, cozendo e filtrando, até extrairlhes os princípios ativos num licor destilado. Em seguida faz como quem recomenda ao leitor:

Amanhã é quarta-feira; procura ficar só, à noite, em teu quarto (...) Quando estiveres na cama, toma este frasco e bebe até a última gota deste licor destilado. Imediatamente correrá por tuas veias um humor frio e letárgico (...) [51].

Uma obra literária é uma forma de comunicação, um diálogo incompleto por meio do qual um autor dirige-se ao leitor. O autor, de um lado, ao compor, reduz os complexos e elaborados atos de criação a atos elementares de pôr símbolos em uma dada seqüência. O leitor, de outro, ao apreciá-la, experimenta algo parecido com a operação inversa. Na leitura de uma obra, a mente do leitor deixa-se atravessar pelo fluxo do texto como se este fosse um "licor destilado a correr por suas veias" e a liberar seus princípios ativos. São esses os humores que, nesse fluxo, desencadeiam as transições cognitivas ou estéticas que constituem a essência da apreciação intelectual ou artística.

Dizemos, como já o fizemos ao discutir o diálogo, que o efeito de compor é a expressão e o efeito de decompor, a impressão. A primeira é obra do autor, a segunda, do leitor.

Expressão e Impressão

A impressão não é, exatamente, o processo inverso da expressão. Isso porque o meio no qual a obra literária está registrada — a escrita — é

usado de forma incompleta, tornando-se assim, incapaz de representar o todo concebido. O poder descritivo da linguagem resulta limitado; as idéias e as imagens registradas, incompletas.

Descritos, um lugar, um objeto ou uma paisagem, não têm forma; as ações não existem: não são mais do que um amontoado de símbolos inertes. Quem lhes dá as formas definitivas e a vida, é quem lê. Eles têm tantas formas distintas quantos leitores houver. Um leitor não é simplesmente o observador passivo de uma seqüência de símbolos gráficos postos a desfilar diante de seus olhos. Ele é um criador que, da leitura, reinventa a obra por seus próprios meios.

A linguagem escrita é ainda mais "falha" do que a falada. Para formarmos uma idéia desse "defeito", coloquemo-nos as seguintes questões:

Não é muito mais difícil identificar o sexo do autor de uma frase na linguagem escrita do que na falada? Não está a linguagem escrita despida de atributos intrínsecos à linguagem falada, tais como a entonação, o ritmo, a pronúncia ou a ênfase?

Podemos concluir das reflexões quase espontâneas que nos vêm à mente, como respostas a essas breves questões, que a linguagem escrita é uma versão mais destilada, mais impessoal, mais pura da expressão lingüística⁴. Em suma, mais desmaterializada, mais abstrata.

Ler uma obra literária ou poética consiste em reconstruir, em nossa mente, os vazios, tão inevitáveis quanto encantadores, deixados na obra pela falibilidade da escrita. Não são raros os autores que fazem das limitações da escrita um princípio estético, intensificando-as intencionalmente. A palavra escrita tem um poder sugestivo e encantador capaz de provocar no leitor, imaginações que transcendam o que está estritamente expresso⁵.

⁴Não é difícil imaginarmos uma notação mais completa onde, às letras e sinais de pontuação usuais, adicionássemos os símbolos das partituras musicais. Algumas das deficiências da escrita convencional acima denunciadas, seriam, dessa forma, facilmente contornadas. Não foi esse, no entanto, o caminho seguido pelas diferentes escritas em suas evoluções.

⁵Mallarmé, poeta simbolista francês (1842–1898), é um exemplo de esteta que perseguiu, deliberadamente através desse poder encantador que tem a palavra escrita, a multiplicação de impressões.

A escrita não é falha apenas por ser incapaz de veicular mensagens que produzam impressões unânimes pois, muitas vezes, um texto escrito não provoca em seu próprio autor, impressões coincidentes com as idéias que ele tenciona expressar.

É no preenchimento dos vazios da linguagem escrita, pela imaginação, que se realiza o espaço criativo da apreciação artística. Expressão e impressão devem ser vistos, portanto, como atos complementares de criação que conferem a uma composição, sua totalidade artística.

14.3 Ambigüidade e crime

(...) assim como ao contar, aqueles que não têm suficiente habilidade em manusear as suas pedrinhas, são logrados pelos espertos, também na argumentação, os que não estão familiarizados com o poder do significado das palavras, são vítimas de falsos raciocínios tanto quando discutem eles próprios como quando ouvem outros raciocinar.

Aristóteles, Dos Argumentos Sofísticos.

Como vimos na seção 14.1, a ambigüidade pode levar ao erro. Explorada com perícia, engenho e dolo, a ambigüidade pode ser usada, também — não para a arte — mas para o crime. Com astúcia, pode-se

Estelionato

obter para si ou para outrem, vantagem patrimonial ilícita, em prejuízo alheio, induzindo ou mantendo em erro alguém mediante artifício, ardil ou qualquer outro meio fraudulento 6 .

É a essa prática que se dá o nome de estelionato.

Pode-se dizer que a doutrina filosófica que serve de fundamento à ideologia predominante da mídia e da propaganda contemporâneos — embora isso possa não ser intencional e nem mesmo consciente — é a dos sofistas. A Reencarnação dos Sofistas

⁶estelionato in Aurélio Buarque de Hollanda Ferreira, Novo Dicionário da Língua Portuguesa.

São conhecidos os princípios sofistas que se tornaram prática dos editores inescrupulosos:

Uma mentira repetida à exaustão transforma-se em verdade.

Se nossas manchetes não estão de acordo com os fatos, tanto pior para os fatos!

Os sofistas, ao que tudo indica, não chegaram a formar uma escola filosófica, mas exerceram sempre alguma influência nas filosofias das diferentes épocas da história. Pode-se resumir o propósito dos sofistas da seguinte forma [19]:

Uma vez que todos os conteúdos possíveis do pensamento se equivalem, basta mostrar como dar mais ou menos peso a determinado conteúdo por força da sugestão, da persuasão e da simpatia para poder conquistar as massas e fazer prevalecer a opinião do mais hábil.

Num estudo analítico sobre a gramática feito por Moura Neves [42], encontramos explicados, com clareza, o interesse e a motivação dos sofistas pela linguagem⁷ e pelas demais formas de expressão:

O ensino da arte política que os sofistas pretendem, inclui a formulação de regras de conduta prática. Não se quer ensinar nenhuma verdade, apenas ensinar a vencer em todas as discussões, a ter sempre razão em todas as questões. Isto constitui a arte de persuadir, e, assim, a arte de falar. Visando à persuasão, a linguagem apenas conduz a si mesma, sem preocupação da verdade. Diz Platão que os sofistas não se preocupam em absoluto com obter a solução certa mas desejam unicamente conseguir que todos os ouvintes estejam de acordo com eles⁸. Importa a adesão, não o ensinamento do justo ou do injusto⁹.

(...) Para Platão, os sofistas, dando a ilusão de que tudo conhecem melhor do que ninguém, apresentam, a propósito de todas as coisas, ficções verbais que trazem a ilusão do verdadeiro. (...). Para Protágoras, o mais fraco de dois argumentos pode ser tornado o mais forte porque o fenômeno é enganador, é somente aparência.

⁷Uma análise do uso falacioso da linguagem pelos sofistas pode ser encontrada em [18].
⁸Platão, Fédon, 91a.

⁹Platão, Górgias, 455a.

Entre os grandes pensadores gregos, a reputação dos sofistas nunca foi muito alta. Platão e Aristóteles já sustentavam que

os sofistas não buscavam a verdade, mas apenas a vitória nos debates e estavam preparados para usar meios desonestos para alcançá-la.

14.4 O combate à ambigüidade

Quem desconsiderar a suprema certeza da Matemática estará alimentando a confusão e jamais conseguirá silenciar as contradições dos sofistas que levam à eterna charlatanice (...).

Leonardo da Vinci (1452-1519)

Há uma nítida oposição entre o pensamento sofista e o pensamento científico. Se alguma influência tiveram os sofistas sobre a prática científica foi a de forçarem os cientistas a combater sua própria ingenuidade e a aumentar o rigor de suas teorias justamente para torná-las mais resistentes aos ardis desses charlatães.

Enquanto os juristas e cientistas procuram, cada um a seu modo e à sua convicção, os meios para estabelecer a verdade, os sofistas dedicam-se a sustentar que a verdade não existe, que tudo é ilusório.

A nós parece difícil convencer um inocente, injustamente condenado por um crime praticado por outrem, de que sua condenação se deve à irrealidade da verdade. Quando se perde a fé na verdade, quando sua perseguição deixa de ser obstinada e sucumbe ao interesse ou à conveniência, então nenhuma justiça será mais possível e multiplicar-se-ão os injustiçados.

Verdade e Justica

Quando um homem é injustiçado, todos os outros estão ameaçados.

A verdade é única, a mentira, múltipla.

Somente pela palavra é que somos homens e nos entendemos. Se compreendêssemos claramente o horror e o alcance da mentira, contra ela pediríamos o suplício da fogueira que, com menor razão se aplica a outros crimes (...). Se, como a verdade, tivesse a mentira uma só face, eu a poderia ainda admitir, pois bastaria considerar certo o contrário do que dissesse o mentiroso; mas há cem mil maneiras de exprimir o reverso da verdade e o campo de ação da mentira não comporta limites.(...)¹⁰. Mil caminhos desviam da meta, um só conduz a ela.(...). Quanto é mais sociável o silêncio do que a linguagem mentirosa! [41]

Verdade e Ciência

Parece-nos ainda mais difícil, senão impossível, persuadir um cientista ou um engenheiro de que é possível, mediante ardil, induzir as forças da natureza a erro. É possível controlar as forças da natureza, se fizermos uso dessas mesmas forças. O que não é possível, é enganá-las.

A. Einstein nutria pela propaganda indisfarçável repulsa. Tanto pela propaganda do governo que lhe deixara a impressão de que o Estado, por meio de mentiras, iludia deliberadamente a juventude [3]; quanto pela propaganda comercial. Ele deplorava as cartas que lhe chegavam dos fornecedores de desinfetantes, águas de colônia, instrumentos musicais ou roupas, acenando milhares de dólares pela permissão para dizer que Einstein considerava seus produtos satisfatórios [9]

Não é um deplorável (sinal de) corrupção de nosso tempo, que empresas façam essas ofertas sem sequer pensar que estão querendo insultarme? Isso evidentemente significa que essa forma de corrupção — pois corrupção é o que isso significa — tornou-se corrente.

¹⁰ É mais fácil encontrar uma mentira que caiba em 30 segundos de propaganda televisiva do que esmerar-se para veicular a verdade. Além disso, a verdade é cara — demanda pesquisa, investigações, verificações — a mentira, pelo contrário, é grátis. Rezava um antigo ditado: a mentira tem pernas curtas. Hoje, com a proliferação dos sofistas na mídia, constatamos, desolados que a verdade também...

Convenções e protocolos

15.1 Transposição para o computador

Como vimos no capítulo 6, reduzir à álgebra e ao cálculo, os problemas fundamentais de determinar os pontos de interseção de retas e circunferências, é um passo importante para podermos trocar a Régua e Compasso pelo computador para resolver problemas geométricos. Mas não é o bastante.

Para que o computador possa resolver um problema geométrico como, por exemplo, a proposição 1 de Euclides reproduzida na seção 2.3, ele deve ser instruído corretamente, isto é, ele não pode ter nenhuma dúvida sobre qual procedimento deverá executar a cada instante. A comunicação entre o desenhista e o computador, como estamos vendo neste capítulo não pode deixar, a nenhum dos dois, margem para erros. Para isso é preciso, sem ambigüidade,

- 1. diferenciar os pontos conforme sua natureza, a saber, quais são os
 - pontos dados, isto é, aqueles cujas posições no plano estão indicadas no próprio enunciado do problema que, neste caso são os pontos A e B;
 - pontos derivados, isto é, aqueles cujas posições no plano devem ser determinadas a partir dos dados. Neste caso, C é um ponto derivado, determinado a partir dos pontos A e B.
- 2. constatar que as circunferências BCD e ACE não fazem parte da figura final, que é o triângulo ABC.

Quando se usa o computador para resolver este problema, não é necessário traçar essas circunferências para determinar a posição do ponto C. O computador não determina a posição desse ponto a partir de traços feitos com o auxílio da régua e do compasso, mas por meio do cálculo, que não deixa "rastros" no papel.

No desenho com o compasso, essas circunferências servem apenas como linhas auxiliares, construídas exclusivamente para determinar a posição do ponto C; são como os *andaimes* das construções de um edifício que, ao final, são removidos.

- 3. constatar que os únicos traços que devem ser mantidos no desenho final, são
 - ullet o segmento de reta AB, que faz parte do enunciado, e
 - os segmentos AC e BC, traçados na etapa 3 da construção.
- 4. observar que há duas escolhas possíveis para o ponto C (as circunferências BCD e ACE cruzam-se em dois pontos distintos).

Quando se usa a régua e o compasso a escolha desse ponto é simples. De fato, ao redigir a etapa 3 da construção, não nos preocupamos em registrar como fizemos para escolher, desses dois pontos, aquele a que demos o nome C. Isso não foi necessário porque a figura que ilustra a construção elimina eventuais dúvidas que possam surgir ao leitor. Além disso, a natureza do problema é tal que qualquer que seja a escolha, sempre obteremos um triângulo equilátero como resultado.

Mas para o computador, isso não basta. Para que ele possa chegar ao mesmo resultado que chegamos nesse processo de escolha, ele deveria ser informado de todas as etapas do raciocínio que seguimos para chegar à decisão final.

Como vemos, ao instruir um computador para o desenho, deveremos ser bastante precisos, se não quisermos colocá-lo numa situação que pode tornar-se embaraçosa... Neste capítulo serão discutidos os protocolos e convenções usados para tornar mais preciso o processo de comunicação entre o desenhista e o computador.

Na solução da proposição 2, como no caso do triângulo equilátero, podemos dar o nome C a qualquer um dos dois pontos. Uma vez escolhido o ponto de nome C, o nome F ficará automaticamente destinado ao outro. Qualquer que seja nossa escolha para os nomes, o resultado será o mesmo. Há casos, no entanto, em que nós devemos deixar claro a qual dos dois pontos

estamos nos referindo. Essas situações e as formas para contorná-las, serão

examinadas mais adiante, neste capítulo.

Designação de uma reta. No desenho com régua e compasso, considerase determinada uma reta, quando dois distintos de seus pontos estiverem determinados. Portanto, uma vez conhecidos os pontos C e F, a mediatriz do segmento AB estará determinada.

Ambigüidade

No traçado da mediatriz, no entanto, surge um novo problema. No desenho geométrico tradicional costuma-se traçar, não a reta toda — o que é impossível — mas um segmento representativo dessa reta, isto é, um segmento que dê a um observador, uma idéia suficiente da função dessa reta no desenho.

Mas o que significa um segmento representativo? Como poderemos instruir o computador para que ele se torne capaz de responder a essa questão?

Dotar o computador de uma inteligência própria tem sido um grande e recorrente desafio para os engenheiros e cientistas da computação e, enquanto eles não encontram a resposta, a atitude mais simples (e, por enquanto, a mais sábia) é fugir dela. Em lugar de dar ao computador as condições para resolver autonomamente a questão, devemos resolvê-la, nós mesmos, pelo arbítrio:

Escolhemos o segmento CF (pois já o conhecemos) como representativo da mediatriz de AB.

A solução da proposição 4 por meio do computador é muito mais simples. De fato, a obtenção do ponto médio de um segmento é uma operação primitiva para o computador assim como são primitivas, na construção com régua e compasso, as operações que permitem determinar os pontos de interseção de duas circunferências, de duas retas ou de uma reta com uma circunferência¹.

Para que a comunicação seja mais perfeita num diálogo, cada interlocutor deve empenhar-se em construir expressões precisas. Deve buscar as palavras certas, escolhendo-as com cuidado e o intuito de eliminar as possibilidades de engano; deve, em suma, esforçar-se para reduzir a um mínimo a variedade de impressões que elas possam provocar em seu ouvinte.

Tomemos como exemplo de ambigüidade, a situação que ocorre quando buscamos a solução do problema enunciado na proposição 1 da seção 2.3, quando podemos nos defrontar com o seguinte dilema: qual dos dois pontos encontrados como interseção das duas circunferências devemos escolher? Problemas desse tipo surgem no desenho geométrico quando buscamos seja a interseção de duas circunferências, seja a de uma reta e uma circunferência.

¹Veja seção 2.4.

Problemas de Comunicação

Quando somos nós mesmos a desenhar, essa escolha é nossa. Por não termos um interlocutor com quem dialogar, não nos damos conta de que temos aí um problema de comunicação que resolvemos inconscientemente. Somente percebemos que existe esse problema, quando nos propusermos a instruir alguém (que não nós mesmos) para fazer o desenho por nós. Como comunicar-lhe nossa escolha?

Quando um professor desenha um problema geométrico na lousa, na esperança de que seus alunos o resolvam em seus cadernos, surge o problema de comunicação. Neste caso, não é difícil contornar a dificuldade que surge porque os alunos podem, por simples inspeção visual, descobrir a qual dos pontos o professor se refere. Além disso, o professor está lá presente, para esclarecer possíveis dúvidas.

Imaginem agora uma situação em que o professor não poderá mais valerse da lousa nem de nenhuma outra forma de representação visual para comunicar-se com seus alunos. Suponha, para fixar as idéias, que ele deverá fazê-lo por telefonema ou por meio de uma transmissão radiofônica. Nestas circunstâncias o problema de comunicação torna-se mais complexo. É uma complicação semelhante que surge quando pretendemos instruir um computador a desenhar para nós.

15.2 A instrução do computador

Se nos propusermos a resolver os problemas geométricos, não mais por meio da régua e do compasso, mas por meio do computador, nós deveremos emitir instruções mais precisas que não poderão apelar para recursos de inspeção visual, como por exemplo, é o ponto de cima ou trata-se do ponto da esquerda.

Por essa razão devemos buscar uma notação apropriada por meio da qual sejamos capazes de instruir a máquina a realizar as operações matemáticas necessárias para determinar as coordenadas dos pontos obtidos nos três tipos de interseção discutidos na seção 2.4.

Nessa notação uma reta será sempre determinada por dois de seus pontos. Uma circunferência poderá ser definida seja por seus centro e raio, seja por seu centro e um ponto nela contido.

Os pontos de interseção dessas linhas serão denotados por expressões matemáticas. A notação concebida para essas expressões tem o propósito de dar a seu leitor a capacidade de identificar, imediatamente, o ponto em questão.

Intersecões

Duas retas. São dadas duas retas, uma determinada pelos pontos A e B e a outra pelos pontos C e D. Denotamos a interseção P dessas duas retas pela expressão

$$P = LxL(A, B, C, D).$$

que se lê da seguinte forma:

P = LxL(A, B, C, D)	significa
P =	P está na
$L_{\mathbf{X}}L$	interseção de duas retas,
A, B	a primeira reta passa por AB e
C, D	a segunda reta passa por CD .

Duas retas no plano podem ter um ou nenhum ponto em comum. Quando as duas retas são paralelas, elas não se interceptam. Não existindo o ponto P de interseção, o computador deverá responder emitindo uma mensagem de erro.

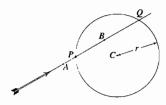
Reta e circunferência (centro e raio). São dadas uma reta que passa pelos pontos A e B e uma circunferência com centro em C e raio r. Usamos a seguinte notação para designar a interseção P dessas duas linhas:

$$P = LxC(A, B, C, r),$$

que se lê da seguinte forma:

P = LxC(A, B, C, r)	significa
P =	P está na
LxC	interseção de uma reta com uma circunferência,
A,B	a reta passa por AB , no sentido de A para B e
C, r	a circunferência tem centro em C e raio r .

Essas duas linhas podem ter nenhuma, uma ou duas soluções. Nos casos em que houver dois pontos de interseção, a ambigüidade deve ser eliminada por referência à seguinte convenção:



O ponto P será aquele que uma flecha, vinda dos confins da reta, no sentido de A para B, tocar, em primeiro lugar, a circunferência.

Assim, enquanto a expressão

$$P = \operatorname{LxC}(A, B, C, r),$$

denota um dos pontos da interseção, a expressão

$$Q = \operatorname{LxC}(B, A, C, r),$$

denotará o outro.

Reta e circunferência (centro e ponto). São dadas uma reta que passa pelos pontos A e B e uma circunferência com centro em C e que passa por P. Usamos a seguinte notação para designar a interseção P dessas duas linhas:

$$P = \text{LxCP}(A, B, C, P).$$

com o seguinte significado:

P = LxCP(A, B, C, P)	significa
P =	P está na
LxCP	interseção de uma reta com uma circunferência,
A,B	a reta passa por AB , no sentido de A para B e
C,D	a circunferência tem centro em C e passa por D .

As convenções para eliminar eventual ambigüidade são as mesmas adotadas para o caso centro e raio.

Duas circunferências (centro e raio). São dadas duas circunferências, uma com centro em A e raio a, e a outra com centro em B e raio b. A interseção P dessas duas circunferências é denotada pela expressão

$$P = \operatorname{CxC}(A, a, B, b),$$

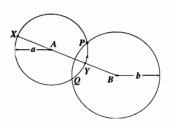
cujo significado é:

P = CxC(A, a, B, b)	significa
P =	P está na
CxC	interseção de duas circunferências,
A, a	a primeira tem centro em A e raio a e
B, b	a segunda, centro em B e raio b .

Quando buscamos determinar a interseção entre duas circunferências, podemos chegar a uma de quatro situações. As duas circunferências podem ter:

- nenhum ponto em comum. Essa situação pode ocorrer quando uma circunferência está inteiramente contida na outra ou quando a distância entre seus centros for superior à soma de seus raios.
- um ponto em comum. Neste caso, as circunferências são tangentes, caso em que a distância entre seus centros é igual à soma de seus raios.
- dois pontos em comum. Neste caso, precisamos escolher qual dos dois pontos é o de nosso interesse.
- todos os pontos em comum. Neste caso diz-se que elas são coincidentes, isto é, (A,a) e (B,b) designam a mesma circunferência.

Nos casos em que as circunferências têm duas interseções, adotamos a convenção que segue para saber qual delas é a designada pela expressão P = CxC(A, a, B, b).



Imagine a reta que une os centros das duas circunferências. Essa reta corta a primeira circunferência (a que tem centro em A) em dois pontos, um, X, fora da segunda, e o outro, Y, dentro dela.

Partindo do ponto Y, caminhe sobre a primeira circunferência, no sentido anti-horário, até chegar ao ponto P em que esta cruza a segunda, que é onde se encontra o ponto selecionado.

Se pretendermos nos referir ao outro ponto, basta modificar a expressão que o define, comutando a primeira circunferência pela segunda. Assim, enquanto a expressão

$$P = \operatorname{CxC}(A, a, B, b),$$

denota um dos pontos da interseção, a expressão

$$Q = CxC(B, b, A, a),$$

designa o outro.

Duas circunferências (centro e ponto). A interseção P de duas circunferências, uma delas definida por seu centro A e por um ponto X sobre

a circunferência, e a outra, por seu centro B e um ponto Y sobre ela, é denotada pela expressão

$$P = CxCP(A, V, B, W),$$

cujo significado é:

P = CxCP(A, V, B, W)	significa
P =	P está na
CVCP	interseção de duas circunferências,
A, V	a primeira tem centro em A e passa por V e
B,W	a segunda, centro em B e passa por W .

A notação e as convenções para eliminar eventual ambigüidade são as mesmas adotadas para o caso centro e raio.

Solução Impossível

Como vimos, alguns dos problemas geométricos tratados acima podem não ter solução. Duas circunferências podem não se tocar; uma reta pode não cortar uma circunferência ou ainda, duas retas das quais se busca a interseção, podem ser paralelas. Esses casos devem estar previstos nas convenções. Como o computador não poderá localizar esse ponto (pois ele não existe), ele informará seu instrutor enviando-lhe uma mensagem de erro, mencionando algo como "interseção inexistente" ou "retas paralelas".

Considerações sobre notação

16.1 Simplicidade e Inteligibilidade

Embora a notação adotada para representar as transformações constantes da tabela 11.1, quando tomadas isoladamente, sejam mais expressivas do que suas correspondentes matriciais, elas não são tão completas quanto estas. Isso significa que não é possível representar, a partir delas ou de combinações delas, qualquer transformação das possíveis de se representar, por meio da notação matricial.

Na ausência de uma ciência da notação, colocamo-nos, então, a seguinte questão:

Como substituir a notação matricial por outra, funcional, mais simples e mais inteligível?

Entendemos por mais simples uma notação que envolva um menor número de parâmetros. Assim, a notação $\mathrm{Rot}(\theta)$ é mais simples do que a notação $\mathrm{Tp}(0,[\cos\theta,\sin\theta],[-\sin\theta,\cos\theta])$ e a notação HT (meia-volta) é, por sua vez, mais simples do que a notação $\mathrm{Rot}(180)$.

Simplicidade

Entendemos uma notação como sendo mais inteligível do que outra, se a primeira informa o desenhista mais diretamente do que a segunda sobre o efeito produzido pela transformação que ela designa, isto é, uma notação

Inteligibilidade

que exige do desenhista menor esforço de interpretação. Embora a capacidade de interpretação dos símbolos possa ser desenvolvida com o treino e pela experiência, deve-se evitar a utilização de notações complexas sempre que possível, pois por demandarem por atividades mentais de decodificação, derivação e, em alguns casos, até de dedução, elas constituem fonte de erros. Imagine uma cidade onde suas autoridades tivessem substituído as placas de trânsito por rébus ou charadas.

A invenção de uma boa notação é muito mais arte do que ciência. Na concepção de um símbolo, seu autor deve ter em mente seu propósito, sua capacidade de sugestão e a facilidade de apreensão do símbolo como um todo pelo leitor.

Uma notação não deve ter como movente a vaidade de seu autor. Os estudantes de matemática e de física são muitas vezes obrigados a submeterse a notações medíocres, criadas por autores que, julgando-se um Euler ou um Dirac¹, são, no entanto, destituídos de talento para tanto.

Certa ocasião fui obrigado a atravessar uma extensa dedução em que a compreensão do texto reduzia-se a identificar qual, dentre os 11 (onze!) modificadores de uma variável, sofria alteração de uma etapa a outra da explicação.

Essa experiência ficou registrada em minha memória como uma combinação das seguintes impressões:

- de estar relendo Alice no País dos Espelhos:
 - Oras! Mas eu poderia ter resolvido esse problema de uma maneira muito mais complicada! disse a rainha vermelha, profundamente orgulhosa.
- de estar num pesadelo em que as variáveis eram carnavalescos perdidos em fantasias cheias de enfeites e lantejoulas.
- de estar diante de um passatempo do tipo Onde está Wally?

Por essas razões considero uma obrigação de todo autor consciencioso

¹O formalismo notacional proposto por P. A. M. Dirac para a Mecânica Quântica é um raríssimo exemplo de sistema simbólico dotado de funcionalidade intrínseca. Ele inclui, de forma notável, muitos dos "princípios ativos" da álgebra. Não obstante seus méritos, ele exige erudição e dificilmente poderia ser aplicado como meio de comunicação para um público iletrado. Há linguagens de computação como a APL, por exemplo, inspirada na noção de operadores explorada por Dirac.

dominar seus impulsos para inventar novas notações. Se necessário, fazê-lo com critério.

O uso do computador no desenho cria um problema de notação que precisa ser enfrentado. Faz parte da concepção de qualquer programa de computador eliminar ou reduzir as impedâncias encontradas por seus usuários: a dificuldade de comunicar-se com a máquina. Na maioria das vezes, essa dificuldade é causada por uma notação mal concebida.

16.2 Notação para os grupos de Lie

Uma resposta bastante satisfatória à questão colocada acima pode ser encontrada numa notação derivada da teoria dos grupos contínuos de M. S. Lie.

As transformações de que nos ocuparemos são do tipo (11.8) pois elas representam as operações mais comumente encontradas nas composições gráficas, a saber, translações, rotações, ampliações, reduções, inclinações, etc. Do ponto de vista matemático elas podem ser reconhecidas como elementos de um grupo clássico, conhecido na álgebra pelo símbolo 2 \mathbf{GL}_2 .

Simplicidade. A teoria de Lie possibilita especificar as transformações do grupo GL_2 , não em termos da fixação simultânea (que é o que queremos evitar) de seus seis parâmetros

$${a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b},$$

mas em termos da composição de membros independentes de um conjunto de seis transformações elementares ou primitivas, denominadas geratrizes dos elementos do grupo. Essas transformações geratrizes tornam possível resolver a questão da simplicidade da notação das transformações enunciada acima, pois cada uma das geratrizes de GL_2 é monoparamétrica, i. e., é completamente especificada por um único parâmetro.

Além de geratrizes das demais transformações do grupo, os operadores assim definidos, têm a faculdade de determinar, em equações diferenciais,

²As letras **G** e **L** são as iniciais da expressão inglesa *General Linear* e o algarismo 2 refere-se à dimensão do espaço de que estamos tratando [33].

curvas características. Denominaremos — em referência à teoria exposta na seção 13.2 — esses de operadores morfogenéticos.

16.2.1 Os operadores morfogenéticos do plano

Os operadores morfogenéticos bidimensionais, descritos em termos dos operadores diferenciais,

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial x}$$
 e $\hat{q} = \frac{\partial}{\partial y}$,

estão relacionados na tabela 16.1.

Translações	$\pounds_1 = \hat{p}$	$\mathcal{L}_2 = \hat{q}$
Rotações	$\pounds_3 = x\hat{q} - y\hat{p}$	$\pounds_4 = x\hat{q} + y\hat{p}$
Dilatações	$\pounds_5 = x\hat{p} - y\hat{q}$	$\pounds_6 = x\hat{p} + y\hat{q}$
Projeções	$\pounds_7 = x(x\hat{p} + y\hat{q})$	$\mathcal{L}_8 = y \overline{(x\hat{p} + y\hat{q})}$

Tabela 16.1: Operadores morfogenéticos do plano

As transformações finitas primitivas correspondentes aos operadores de Lie, relacionados na tabela 16.1, estão reproduzidas na tabela 16.2.

Translação horizontal	$\pounds_1 = \hat{p}$	$T_x(\alpha) = \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases}$
Translação vertical	$\pounds_2 = \hat{q}$	$T_{y}(\beta) = \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \beta \end{cases}$
Rotação	$\pounds_3 = x\hat{q} - y\hat{p}$	$Rot(\omega) = \begin{cases} x' = x \cos \omega + y \sin \omega \\ y' = -x \sin \omega + y \cos \omega \end{cases}$
Rotação hiperbólica	$\pounds_4 = x\hat{q} + y\hat{p}$	$Hb(\nu) = \begin{cases} x' = x \cosh \nu + y \sinh \nu \\ y' = x \sinh \nu + y \cosh \nu \end{cases}$
Estiramento isocórico	$\pounds_5 = x\hat{p} - y\hat{q}$	$\operatorname{Li}(\mu) = \begin{cases} x' = xe^{\mu} \\ y' = ye^{-\mu} \end{cases}$
Homotetia	$\pounds_6 = x\hat{p} + y\hat{q}$	$Scl(\kappa) = \begin{cases} x' = xe^{\kappa} \\ y' = ye^{\kappa} \end{cases}$
Projetividade horizontal	$\mathcal{L}_7 = x(x\hat{p} + y\hat{q})$	$P_x(\xi) = \begin{cases} x' = x/(1 - \xi x) \\ y' = y/(1 - \xi x) \end{cases}$
Projetividade vertical	$\mathcal{L}_8 = y(x\hat{p} + y\hat{q})$	$P_{y}(\eta) = \begin{cases} x' = x/(1 - \eta y) \\ y' = y/(1 - \eta y) \end{cases}$

Tabela 16.2: Transformações geratrizes do grupo GL₂.

Dentre os subgrupos mais importantes de GL2 para o desenho, estão:

```
translações [\pounds_1, \pounds_2];
isometrias [\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3];
similaridades [\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \pounds_6];
linear especial SL_2 [\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \pounds_4, \pounds_5];
linear geral GL_2 [\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \pounds_4, \pounds_5, \pounds_6] e
projetividades [\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \pounds_4, \pounds_5, \pounds_6, \pounds_7, \pounds_8]
```

Inteligibilidade. Embora para um usuário versado em matemática, todas as transformações constantes da tabela 16.2 sejam inteligíveis, não se pode esperar o mesmo de um desenhista, pouco familiarizado com teoria dos grupos ou funções hiperbólicas.

Há outras transformações monoparamétricas de GL_2 que são mais familiares aos desenhistas. São elas as inclinações e dilatações, horizontais e verticais, assim representadas na notação matricial:

Inclinação horizontal	$\mathrm{Sly}(artheta)$	$\left[egin{array}{cc} 1 & 0 \ anartheta & 1 \end{array} ight]$
lnclinação vertical	$Slx(\theta)$	$\left[egin{array}{ccc} 1 & an heta^{\cdot} \ 0 & 1 \end{array} ight]$
Dilatação horizontal	Sx(ξ)	$\left[\begin{array}{cc} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$
Dilatação vertical	$\mathrm{Sy}(\eta)$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{array}\right]$

onde ϑ representa o ângulo formado entre uma reta originalmente horizontal e sua transformada, θ , o ângulo formado entre uma reta originalmente vertical e sua transformada, ξ , o fator de escala segundo o qual as dimensões horizontais de uma figura são alteradas e η , o fator que altera suas dimensões verticais.

É fácil verificar que



$$Sx(\xi) = H\left(\frac{\ln \xi}{2}\right) \cdot L\left(-\frac{\ln \xi}{2}\right)$$

$$Sy(\eta) = H\left(\frac{\ln \eta}{2}\right) \cdot L\left(\frac{\ln \eta}{2}\right)$$
(16.1)

A figura ao lado ilustra a letra **A** nas órbitas Orb(10, H(0.125)) (acima) e Orb(7, Slx(0.2)) (abaixo).

16.2.2 Órbitas das transformações GL_2

As órbitas das transformações afins, (\mathbf{GL}_2) são soluções da equação diferencial (16.2)

$$\dot{\mathbf{r}} = (\kappa \mathbf{I} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \tag{16.2}$$

onde I é a matriz identidade,

$$\mathbf{r} = \left[egin{array}{c} x \\ y \end{array}
ight]; \qquad \mathbf{B} = \left[egin{array}{cc} \mu & \nu - \omega \\ \nu + \omega & -\mu \end{array}
ight] \qquad \mathbf{c} \qquad \mathbf{c} = \left[egin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}
ight].$$

Se definirmos

$$m = \omega^2 - (\nu^2 + \mu^2) \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}(t) = \cos\left(\sqrt{-m}t\right)\mathbf{I} + \frac{1}{\sqrt{-m}}\sin\left(\sqrt{-m}t\right)\mathbf{B} \quad \text{se} \quad m < 0 \\ \mathbf{H}(t) = \cosh\left(\sqrt{m}t\right)\mathbf{I} + \frac{1}{\sqrt{m}}\sinh\left(\sqrt{m}t\right)\mathbf{B} \quad \text{se} \quad m > 0 \end{cases}$$

podemos expressar as soluções da equação (16.2) da seguinte forma

$$m = 0 \begin{cases} k = 0 \begin{cases} (1) & \mathbf{r}_{0} \\ (2) & \mathbf{r}_{0} + t\mathbf{c} \end{cases} \\ \mathbf{B} \neq 0 \begin{cases} (3) & (\mathbf{I} + t\mathbf{B}) \cdot \mathbf{r}_{0} \\ (4) & \mathbf{r}_{0} + t(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_{0} + \mathbf{c}) + \frac{t^{2}}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \end{cases} \\ k \neq 0 \begin{cases} (5) & e^{\kappa t}(\mathbf{I} + t\mathbf{B}) \cdot \mathbf{r}_{0} \\ (6) & e^{\kappa t}(\mathbf{I} + t\mathbf{B}) \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{c} - \frac{1}{\kappa^{2}}\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}\right) - \frac{\mathbf{c}}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^{2}}\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \end{cases}$$

$$m = \kappa^{2} \begin{cases} (7) & \mathbf{r}_{0} + \left(\frac{e^{2\kappa t} - 1}{2\kappa}\right) \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_{0} \\ (8) & \mathbf{r}_{0} + \left(\frac{e^{2\kappa t} - 1}{2\kappa}\right) \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \frac{1}{2\kappa}\mathbf{c}\right) + t\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2\kappa}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{c} \end{cases}$$

$$m < 0 \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \begin{cases} (9) \quad \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{r}_0 \\ (10) \quad \mathbf{C}(t) \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ (11) \quad e^{\kappa t} \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{r}_0 \\ (12) \quad e^{\kappa t} \mathbf{C}(t) \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \end{cases}$$

$$m > 0 \begin{cases} k = 0 \begin{cases} (13) & \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{r}_{0} \\ (14) & \mathbf{H}(t) \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{c} \end{cases}$$
$$k \neq 0 \begin{cases} (15) & e^{\kappa t} \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{r}_{0} \\ (16) & e^{\kappa t} \mathbf{H}(t) \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \end{cases}$$

16.3 Geração de curvas

Podemos aproximar qualquer uma das curvas relacionadas acima por linhas poligonais usando as órbitas discretas, conforme apresentado na seção 13.4.1.

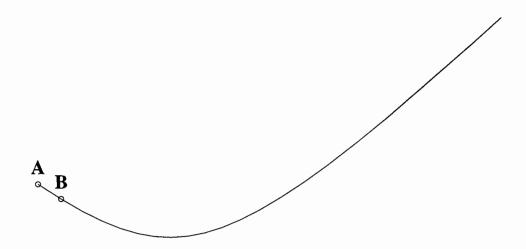


Figura 16.1: Movimento do segmento AB numa órbita Hb.

Na figura 16.1, o ponto B foi gerado de A pela transformação f = Hb(0.125) e na figura 16.2, pela transformação f = Cyt(1/32). A transformação f, reiterada vinte vezes na órbita Crb(20, f), produz o polígono hiperbólico da figura 16.1 e o polígono regular da figura 16.2. Quando o segmento AB é de pequenas dimensões, aa linha poligonal produzida por uma órbita discreta pode ser visualmente confundida com uma linha curva. A espiral logarítmica desenhada na figura 7.1 foi obtida da mesma forma que as curvas acima. Trata-se de uma linha poligonal obtida pela iteração sobre um segmento de reta da transformação obtida da combinação de uma rotação de f0 com uma homotetia de contração, de fator f0.9875

$$Rot(-4) \cdot Scl(0.9875).$$

³Veja tabela 16.2.

⁴A transformação Cyt(f) está aplicada na construção da rosácea da ilustração da página 218.

⁵A transformação f corresponde a uma rotação hiperbólica.

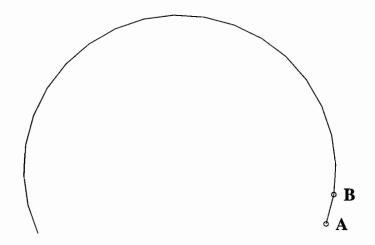


Figura 16.2: Movimento do segmento AB numa órbita de rotação.

Esse método de geração de curvas garante generalidade a um programa de desenho por computador pois permite que se obtenham todas as curvas características do grupo de afinidades. As curvas mais comuns como a reta, a circunferência, as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) e as espirais equiangulares⁶ (logarítmicas), são, em geral, tratadas por algoritmos próprios, que visem maiores rapidez e precisão. æ

⁶Familiares aos desenhistas, não pelo nome, mas por serem as curvas que figuram nas curvas francesas[46].

Parte V A composição de figuras

17

Ritmos e simetrias

17.1 Figuras compostas

Uma técnica usual na composição de figuras complexas, popularmente denominada "colagem", consiste em aplicar à superfície de trabalho, uma ou mais cópias de várias figuras. Para obter-se o resultado desejado, as cópias não podem ser superpostas arbitrariamente, mas colocadas cuidadosamente nos lugares corretos e, quando possível, nas proporções apropriadas.

Para colocar uma figura na posição desejada o desenhista deve poder deslocá-la livremente sobre a superfície do trabalho. Quando esse deslocamento se dá sem ser acompanhado de uma inclinação da figura, ele é denominado translação. Para modificar-se a inclinação da figura de modo a dispô-la na direção certa, é necessário o concurso de uma rotação. Para alterarem-se uniformemente as dimensões da figura de modo a ajustá-la às proporções desejadas, deve-se submetê-la a uma homotetia e assim por diante. Cada uma dessas operações, que resulta na colocação da figura de uma determinada forma na área de trabalho, é uma transformação geométrica.

Para poder manipular uma figura composta, isto é, uma figura formada a partir de várias outras, é necessário que, além de ser possível submeter cada uma de suas componentes a transformações geométricas independentes, se possa também identificar univocamente cada uma delas. É graças a essa identificação que se pode garantir que nos desenhos realizados pela máquina,

tanto esta quanto o autor estarão referindo-se à mesma componente de uma figura.

Compor uma figura complexa a partir de outras, consiste, portanto, em associar, ao nome de cada uma delas, as instruções necessárias para sua correta colocação na superfície do desenho. Dessas instruções deverão constar todas as informações sobre qual figura, onde, em que ângulo, com que tamanho etc., essa figura deverá ser inserida. A forma mais apropriada para se fornecer essas instruções ao computador é o polinômio geométrico apresentado na seção 13.3.

17.2 Polinômios e composições

No restante deste capítulo usaremos os conceitos introduzidos na seção 13.3. Os polinômios geométricos são usados sempre que se quiser inserir, na superfície do desenho, mais de uma cópia de uma mesma figura. Quando essas cópias (da mesma figura) a serem inseridas diferirem apenas nas transformações a que elas estão sujeitas, e não em seus parâmetros endógenos, é desnecessário fazer duas (ou mais) inserções distintas da mesma. Em lugar disso, pode-se associar à mesma figura, mais de uma transformação geométrica, separando-as pelo símbolo '+', de modo a formar uma expressão algébrica.

Uma figura poderá ser submetida a um polinômio geométrico da mesma forma que ela pode ser submetida a uma única transformação. Por exemplo, duas cópias de uma mesma figura, a primeira a ser colocada na superfície do desenho como ela é (na forma como ela foi criada originalmente) e a segunda, deslocada na direção horizontal de 120 pixels à sua esquerda, poderão ser obtidas submetendo-se essa figura ao seguinte polinômio geométrico:

$$1 + T_x(-120)$$
.

Tanto o símbolo 1 quanto o símbolo $T_x(-120)$ na expressão acima, designam transformações geométricas; o primeiro símbolo representa a transformação identidade e o segundo, uma translação horizontal de 120 unidades para a esquerda.

Os polinômios geométricos podem ser mais complexos, envolvendo um número maior de transformações. O polinômio:

$$1 + R_x + R_y + R_x \cdot R_y, (17.1)$$

por exemplo, poderá produzir 4 diferentes cópias da figura à qual se aplica, da seguinte forma:

- a primeira cópia (que sofre a ação da transformação identidade) é uma reprodução exata da figura à qual ela se aplica, em seus tamanho e posição originais;
- a segunda cópia (que sofre a ação da transformação R_x) aparecerá como a reflexão da figura original sobre um espelho horizontal;
- a terceira cópia (que sofre a ação da transformação R_y) aparecerá como a reflexão da figura original sobre um espelho vertical;
- a quarta cópia (que sofre a ação combinada das transformações R_x e R_y) aparecerá como uma rotação da figura original, de meia volta em torno da origem;

17.3 Produto de polinômios geométricos

Os polinômios geométricos obedecem à maioria das regras da álgebra elementar. Assim, a expressão (17.1) poderia ser fatorada de modo a formar o produto de dois polinômios geométricos:

$$(1+R_x)*(1+R_y).$$

Esta última expressão é também um polinômio geométrico.

Advertência: O produto de dois polinômios geométricos é representado pelo símbolo '*'. Não o confunda com o símbolo '.' utilizado para representar a composição de duas transformações geométricas.

Se, como fazemos na álgebra ordinária, abrirmos os parênteses da expressão acima, recuperaremos, conforme a lei distributiva da álgebra, a expressão original. Podemos obter uma expressão diferente para esse mesmo polinômio geométrico, se nos valermos a identidade $HT = R_x \cdot R_y$:

$$1 + R_x + R_y + HT. (17.2)$$

17.4 Simetrias

Em virtude de sua estrutura algébrica, os polinômios geométricos proporcionam uma forma conveniente e precisa, para representar figuras dotadas de simetrias intrínsecas.

Para iniciar nossa exploração das figuras simétricas, comecemos por examinar de que maneira o polinômio acima pode ser usado na geração de uma figura dotada de simetrias, como por exemplo, uma das formas da letra I.

A figura ao lado mostra um elemento gráfico primitivo e abaixo, o efeito que se obtém quando esse elemento é submetido ao polinômio geométrico (17.2).

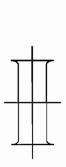
Para melhor explorar as simetrias intrínsecas das figuras, convém estudar mais profundamente as propriedades das composições das transformações geométricas bem como os efeitos que elas produzem sobre as figuras.

17.4.1 Composição e simetrias

A exploração das simetrias é uma das atividades intrínsecas à criação artística.

A composição pode ser definida como a arte de arranjar componentes para formar um todo. O que há de original numa composição não está nos componentes, pois estes, isoladamente não possuem esta qualidade, mas no arranjo que deles se faz e que dá ao resultado o poder de sugerir ou surpreender quem o contemple. Assim é na composição literária. Nela, o inédito não está nas palavras, velhas de milhares de anos, mas nos seus arranjos que o autor compõe. Da mesma forma, o que caracteriza um ser vivo não está nos nucleotídeos que isoladamente compõe suas moléculas genéticas, mas nas formações em que elas se arranjam, para dar a seu portador a individualidade.

Assim se dá, também, nas composições do design. Aqui, como na linguagem, esconde-se, subjacente às palavras, uma gramática invisível a reger as orações que, com o sem o concurso de sua consciência, conduz o autor em seu ato de criação.



Uma das regras fundamentais dessa gramática é o ritmo.

17.4.2 Ritmo

Ritmo é um princípio estético fundamental que se aplica tanto ao espaço quanto ao tempo, e que está na base de todas as expressões artísticas. O ritmo pode ser caracterizado como a ocorrência regular de um motivo elementar.

A palavra regular deriva do vocábulo latino regula que significa regra, lei, norma. Uma figura regular é, portanto, qualquer figura cujas partes obedeçam a certas regras.

Uma das regras mais simples de composição é a repetição. A primeira idéia de ritmo que vem à mente da maioria de nós, são as percussões repetidas num tambor. As obras musicais são as expressões artísticas onde a percepção do ritmo é a mais imediata. Também na poesia a repetição é um recurso perceptível: as rimas, elementos fonéticos idênticos, repetem-se numa cadência característica que denuncia a regularidade. A origem estritamente fonética da rima estabelece através do ritmo que regula seu uso, uma relação muito íntima entre a poesia e a música.

O ritmo não é apenas um traço de união entre a música e a poesia. Ele está igualmente presente nas regras subjacentes às composições visuais, como pretendemos mostrar a seguir.

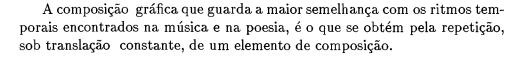
17.4.3 Ritmos unidimensionais

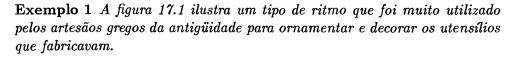
As simetrias bilaterais são uma forma elementar de ritmo. Figuras com simetria bilateral são aquelas obtidas sob efeito de um espelho. Essas simetrias constituem-se num dos caracteres distintivos dos seres vivos, abundantemente encontradas nos reinos vegetal ou animal. Elas podem ser diretamente observadas quando comparamos nossas mãos: a mão direita é a imagem especular da mão direita.

Embora à primeira vista possa parecer estranho tratar as simetrias bilaterais como ritmo, as considerações que se farão adiante deixarão mais claro Simetrias bilaterais

porque elas são assim classificadas.

Simetrias Translacionais





A figura ao lado apresenta o motivo elementar — a unidade fundamental do ritmo — que aparece repetido na figura 17.1. Para compor a fita ornamental, cada cópia do motivo elementar deve ser deslocada horizontalmente em relação à anterior. de uma distância igual ao comprimento do segmento AB.

 $Esse\ efeito\ pode\ ser\ conseguido\ por\ interm\'edio\ do\ seguinte\ polin\^omio\ geom\'etrico$

$$1 + T_x(x) + T_x(2x) + T_x(3x) + \ldots + T_x(7x),$$

onde $x = \Re(B - A)$. A amplitude x dessas translações é calculada a partir das coordenadas dos pontos A e B da rota que define o motivo elementar, de modo a garantir o ajuste correto das cópias consecutivas do motivo.

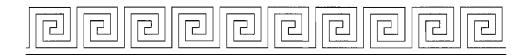


Figura 17.1: Ornamentação grega

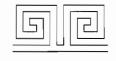
Este é o tipo de simetria que pode ser associado mais facilmente à nossa idéia de ritmo, como bem ilustra o exemplo a seguir.

Nas partituras musicais — que no contexto deste capítulo devem ser vistas como um desenho geométrico — compassos que se repetem marcam o ritmo da composição. Nesses compassos, os símbolos gráficos que representam as notas musicais repetem-se a distâncias constantes, como se tivessem sido produzidas por um polinômio geométrico similar ao que produziu a



figura 17.1, onde a distância x representa a largura de um compasso da partitura. No caso da música, o ritmo desenvolve-se no tempo ao passo que os ritmos geométricos desenvolvem-se no espaço.

Exemplo 2 Se submetermos o motivo usado para compor a fig. 17.1, a uma reflexão vertical R_y , obtemos o novo motivo ilustrado ao lado, este dotado de simetria bilateral. Esse novo motivo poderá ser então submetido a uma série de translações horizontais idênticas (agora com diferentes deslocamentos) para gerar outro tipo de simetria que se pode observar na figura 17.2.



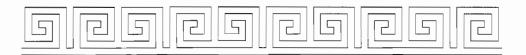


Figura 17.2: Ritmo com motivo de simetria bilateral

17.4.4 Ritmos de rotação

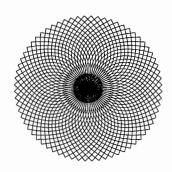
Para os artesãos gregos da antigüidade, a aplicação rítmica de um motivo a utensílios como vasos, taças (superfícies de revolução em geral) não podia ser entendida como uma repetição arbitrária e ilimitada de uma translação, pois uma vez completada uma volta em torno da peça, as aplicações posteriores da translação resultariam em simples superposição.



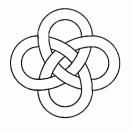
As simetrias que examinamos na seção 17.4.2 estão restritas a ornamentos lineares. No entanto, os mesmos princípios de ritmo podem ser aplicados a quaisquer transformações geométricas e as figuras que elas produzem serão também dotadas de simetrias.

A rotação é uma transformação que produz efeitos similares à translação. Podemos aplicar, por exemplo, a idéia de ritmo às rotações em torno de um centro fixo no plano.

A circunferência é um exemplo de figura completamente simétrica em relação à rotação em torno de seu centro, da mesma forma que a reta é uma figura completamente simétrica em relação a uma translação deslizando



sobre si mesma. Os polígonos regulares apresentam também simetria de rotação. Se girarmos um polígono regular de n lados, em torno de seu centro, de um múltiplo qualquer de $\frac{1}{n}$ de volta, ele superpor-se-á a si mesmo.



Polígonos Regulares

Automorfismo. As figuras ao lado ilustram exemplos de simetria obtida por rotação. Cada uma delas, após girada em torno de seu centro, em qualquer sentido — horário ou anti-horário — sobrepõe-se a si mesma, confundindo-se com esta. A esta coincidência entre a figura original e sua transformada dá-se o nome de automorfismo.

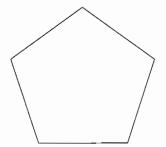
No primeiro exemplo, o motivo gira de um múltiplo de $\frac{2\pi}{3}$, no segundo, de $\frac{2\pi}{7}$ e no terceiro, de $\frac{\pi}{2}$.

Costuma-se chamar de regulares os polígonos de lados iguais e inscritos numa circunferência.

São exemplos de polígonos regulares,

- o triângulo equilátero que aparece na proposição 1 dos Elementos de Euclides¹,
- o quadrado, encontrado com muita freqüência nas obras civis,
- o pentágono que se obtém quando se aperta cuidadosamente, até formar uma dobradura, um nó simples dado numa tira estreita de papel,
- · o hexágono que se observa nas colméias,
- o dodecágono que compõe o mostrador da maioria dos relógios.

Exemplo 3 Construção do pentágono regular. Consideremos a Rota AB, cujas coordenadas são:



$$A = 50 * Cy(3/20)$$

$$B = - \sim A$$

Quando a Rota AB for submetida ao polinômio:

$$1 + \text{Rot}(72) + \text{Rot}(2 * 72) + \text{Rot}(3 * 72) + \text{Rot}(4 * 72)$$

obtemos o pentágono regular.

¹Reproduzido na seção 2.3.

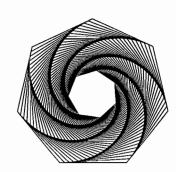
Exemplo 4 Polígonos encaixantes. Tomemos como motivo elementar um polígono regular de n lados. Se girarmos esse polígono de um ângulo α em torno do centro do polígono e, ao mesmo tempo, reduzirmos suas dimensões lineares de um fator β , dado pela expressão

$$\beta = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \alpha\right)},$$

veremos que os vértices do novo polígono assim formado apoiar-se-ão sobre os lados do polígono original. Aplicando reiteradamente essa transformação composta descrita pela expressão

$$\tau = \mathrm{Scl}(\beta) \cdot \mathrm{Rot}(\alpha)$$

aos polígonos que se formam sucessivamente, temos o padrão de encaixes ilustrado na figura ao lado 2 .



17.4.5 Órbitas

Levando em conta as identidades:

$$T_x(2x) = T_x(x) \cdot T_x(x)$$

$$Rot(2 \cdot \alpha) = Rot(\alpha) \cdot Rot(\alpha)$$

$$Scl(\beta^2) \cdot Rot(2\alpha) = (Scl(\beta) \cdot Rot(\alpha)) \cdot (Scl(\beta) \cdot Rot(\alpha))$$

e as expressões dos polinômios geométricos que geram os ornamentos das figuras 17.1 e 17.2, o pentágono regular do exemplo 3 ou os polígonos encaixantes do exemplo 4, perceberemos que todas essas figuras podem ser obtidas a partir do mesmo polinômio genérico

bastando substituir τ , em cada caso, por uma das transformações:

$$\tau = T_x(\Re(B - A))$$

$$\tau = T_x(2\Re(B - A))$$

$$\tau = \text{Rot}(72)$$

$$\tau = \text{Scl}(\beta) \cdot \text{Rot}(\alpha)$$

 $^{^2\}mathrm{O}$ processo construtivo desta figura está detalhado nas proposições 8 no capítulo 19 e 12 em 21.1

As expressões do tipo

$$1 + \tau + \tau \cdot \tau + \tau \cdot \tau \cdot \tau + \dots + \underbrace{\tau \cdot \tau \cdot \tau}_{n \text{ parcelas}} = \underbrace{1 + \tau + \tau^2 + \tau^3 + \dots + \tau^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = (17.3)$$

são as órbitas apresentadas na seção 13.3.

O desenhista comunica a órbita (17.3) ao computador, por intermédio da expressão

$$Orb(n, \tau)$$

onde n representa o número de elementos contidos na expressão (de fato, o número de cópias da figura), e τ a transformação reiteradamente aplicada à figura.

Os polinômios geométricos dos exemplos acima podem ser representados como órbitas, pelas expressões:

$$Orb(8, T_x(\Re (B-A)))$$

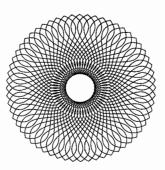
 $Orb(8, T_x(2\Re (B-A)))$
 $Orb(5, \operatorname{Rot}(72))$
 $Orb(4, \operatorname{Scl}(\cos(\alpha)) \cdot \operatorname{Rot}(\alpha))$

Exemplo 5 A figura ao lado ilustra outra simetria de rotação. Sua construção está baseada em curvas de Bézier de 4 pontos cujos pontos de referência estão localizados nos vértices de um quadrado; os pontos extremos, localizados em vértices opostos, de modo que a curva resultante forma uma inflexão, como ocorre no desenho da letra "S".

Várias cópias desse motivo elementar são reproduzidas, cada uma girada de $\frac{2\pi}{n}$ radianos em relação à anterior, segundo o polinômio geométrico

$$Orb(n, CyT(1/n)). (17.4)$$

A transformação CyT, corresponde a uma rotação de $\frac{1}{n}$ de volta, isto é, $\frac{2\pi}{n}$ radianos. Na figura, n=17.



17.4.6 Representação algébrica dos ritmos

Embora as simetrias bilateral e translacional tenham aparências muito distintas, do ponto de vista algébrico elas são equivalentes, pois a simetria bilateral, como a translacional, é rítmica. Nesta última, a transformação (reflexão) sobre uma reta é aplicada apenas uma vez. Seria inútil aplicá-la mais de uma vez, porque todas as demais figuras produzidas iriam superporse às originais.

Nas simetrias rotacionais, pode ocorrer um fenômeno semelhante ao das reflexões. Ele ocorre quando o ângulo de rotação for expresso por um múltiplo ou submúltiplo racional de π . Nesses casos, após um determinado número de repetições da transformação, a figura transformada irá ocupar o mesmo lugar da original.

Nas simetrias translacionais, diferentemente das refletivas ou das rotacionais racionais, a transformação pode ser aplicada indefinidamente, produzindo, a cada vez, uma figura diferente, pois a cada aplicação da transformação, uma nova cópia da figura será adicionada à anterior.

Efeitos interessantes podem ser obtidos se usarmos as transformações similares ou afins como geradoras de simetrias.

Similaridades e Afinidades

Quando adicionamos a homotetia às rotações, podemos gerar figuras rítmicas infinitas, mesmo naqueles casos em que o ângulo de rotação estiver em relação racional com o número π .

As transformações similares são obtidas da combinação de translações, rotações e homotetias.

Similaridades excêntricas podem produzir efeitos interessantes. Tais excentricidades podem ser obtidas por meio da combinação de uma homotetia com uma rotação, nos casos em que os centros de homotetia e de rotação forem distintos do centro da figura (quando esta tiver centro).

A figura ao lado foi obtida da iteração de um grande número de cópias de um mesmo motivo elementar submetido a uma combinação de rotações e homotetias — como as que geraram os polígonos encaixados, por exemplo — com a diferença de que, neste caso, o centro de rotação está bastante afastado da figura original. As combinações de transformações envolvendo homotetias

Excentricidades



e rotações são muito comuns em seres vivos. Um estudo sistemático dessas ocorrências em microorganismos, plantas e animais, pode ser encontrado em [53].

Afinidades

Quando às transformações características das similaridades adicionamos inclinações, compressões horizontais ou verticais, etc., obtemos as transformações conhecidas por *afinidades*. Simetrias baseadas nas afinidades são extensivamente utilizadas pelos projetistas de logotipos, tipos de imprensa e uma variedade de símbolos visuais.

A figura seguinte é um exemplo de um ritmo de afinidade. O motivo elementar que deu origem a este exemplo é construído de forma semelhante ao que gerou a rosácea do exemplo 5.

Sua construção³ consiste em

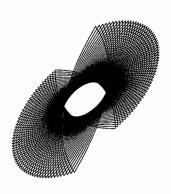
- inscrever uma parábola num dos dois triângulos retângulos em que se decompõe um quadrado, quando cortado em dois ao longo de sua diagonal,
- refletir essa parábola, sobre essa diagonal, formando uma nova figura,
- $\bullet\,$ modificar cumulativamente essa figura pela ação da órbita de uma mesma transformação afim $\tau\,$

Orb (n, τ) .

onde au combina uma expansão horizontal, uma compressão vertical e uma rotação.

O resultado final pode ser observado na figura ao lado.

³O processo construtivo desta figura está discutido na proposição 33 da seção 21.4.



17.5 Grupos de simetria plana

Esta seção trata da geração de figuras geométricas que se ajustam de modo a cobrir uma superfície, sem deixar, sobre ela, falhas ou vãos.

Muitos trabalhos de arte em tecelagem, azulejos ou pavimentação buscam formas de recobrir o plano por meio do ajuste de elementos geométricos idênticos. Nos artefatos e edifícios remanescentes das mais antigas civilizações, podem ser encontrados exemplos notáveis da exploração desse tipo de simetrias⁴.

A simetria ocorre tão frequentemente nas artes e na natureza que é difícil encontrar uma definição que satisfaça a todos os interessados. São diversas as abordagens que podem ser adotadas, mas para nosso propósito e para a maioria das situações a seguinte definição é satisfatória [17]:

Simetria é uma regularidade peculiar observada no arranjo de objetos ou partes, no plano ou no espaço.

A noção mais importante na definição acima é a de regularidade, com a qual já travamos contato na seção 17.4.2.

As principais aplicações das técnicas discutidas neste capítulo ocorrem com freqüência

- nas composições de fitas ornamentais, para as quais concorrem translações sobre uma reta. Essas translações podem ser combinadas a reflexões sobre eixos perpendiculares a essa reta.
- nas composições de ornamentos sobre discos (pratos, recipientes, jardins, etc.), gerados principalmente por rotações.
- na tesselaria⁵ a arte que trata do recobrimento de superfícies planas (pisos, paredes, tecidos, tapetes, embalagens, etc.) por meio de peças elementares (tesselas) onde grupos definidos em termos de duas, três ou quatro transformações (reflexões, rotações e translações⁶) formam as "engrenagens dos mecanismos" de construção desses ornamentos.

⁴Os artesãos reconhecidos como os mais notáveis mestres dessa forma de expressão foram os artistas islâmicos. O representante mais conhecido das obras desses artífices no mundo ocidental, encontra-se no castelo de Alhambra, na Espanha [7, 23].

⁵Técnica herdada dos mosaicistas.

 $^{^6 \}rm \acute{E}$ possível descrever rotações e translações exclusivamente em termos de reflexões sobre retas.

Cristalografia

A partida para o estudo sistemático da simetria foi dado no início do século XIX, dirigido ao entendimento dos cristais. Os cristalógrafos de então estavam, entre outras coisas, empenhados em encontrar uma solução para o seguinte problema:

de que forma os átomos⁷ das substâncias, idênticos uns aos outros, organizam-se para preencher o espaço e formar os corpos cristalinos?

A teoria que resultou dessas investigações encontrou, nas composições de transformações geométricas, as leis que regem a formação de estruturas simétricas a partir de elementos idênticos. Somente mais tarde — no final do século XIX — é que as simetrias planas passaram a ser objeto de estudo sistemático⁸.

A teoria matemática encontrada para resolver o problema dos cristalógrafos (a teoria dos grupos) foi então aplicada para analisar e descrever as regras
que devem ser obedecidas para a correta pavimentação das superfícies planas.
Uma das conclusões desses estudos foi a descoberta de que há essencialmente
230 formas algebricamente distintas de se preencher o espaço com unidades
idênticas (átomos). Somente neste século demonstrou-se que há apenas 17
diferentes modalidades para se recobrir um plano.

A exploração de todas essas 17 formas de cobrir o plano está longe de ser um problema matemático trivial [57]. Esses grupos de simetrias planas podem ser classificados de diferentes modos, dependendo da natureza de seu motivo ou das regras de seu preenchimento⁹. Para fins do design interessanos estudar as relações existentes entre suas transformações características pois essas relações permitem com que façamos dos elementos básicos de composição, geratrizes de contornos ou de ornamentos caleidoscópicos.

Contornos que se encaixam sem deixar vãos podem ser gerados a partir de curvas (quase) arbitrárias que, sob a ação das transformações características dos grupos de simetria plana, formam arranjos que delimitam regiões fechadas do plano. Esses arranjos fechados passam a servir como contornos

Contornos

⁷Note-se que a teoria atômica de Dalton tinha pouquíssimos adeptos naquela época.

⁸De acordo com Coxeter, o primeiro tratamento matemático dado aos grupos de cristalografia plana data de 1897, feito por Fricke Klein.

⁹O tratamento matemático completo desse assunto está muito além do escopo deste trabalho. Aqui examinaremos apenas as aplicações mais elementares da teoria dos grupos de transformações, visando sua aplicação ao *design*.

para o recorte de ladrilhos ou azulejos ou, genericamente, peças de tesselaria (tesselas) que devem então ser justapostas de modo a cobrir uma região de uma superfície plana.

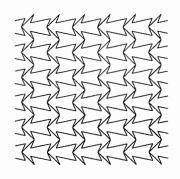
Para recobrir o plano, deve-se reproduzir cópias do motivo elementar, umas contíguas às outras. Por essa razão, é preciso calibrar as dimensões do motivo elementar de modo que à execução de cada uma dessas operações, o motivo seja corretamente disposto em relação aos demais, para que não fique nenhum vão ou falha na superfície.

Consideramos arranjos caleidoscópicos aqueles gerados por figuras desenhadas em regiões cujos contornos são fixos e matematicamente pré-estabelecidos.

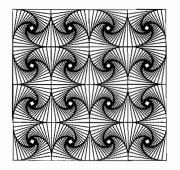
Esse princípio de geração de imagens é usado nos caleidoscópios. Nesses instrumentos, lâminas retangulares de superfícies espelhadas são montadas de modo a formar um prisma de corte triangular ou retangular. Pequenos pedaços de um material transparente colorido são depositados na base do prisma. Examinada contra a luz, sua imagem aparece multiplicada pelas reflexões sobre as paredes espelhadas das lâminas, formando uma composição regular.

Esses efeitos podem ser conseguidos da aplicação a uma figura enquadrada pelas transformações características dos grupos conhecidos pelos símbolos pmm, p4m, p31m e p6m, que se desenvolvem, respectivamente, sobre um retângulo, a metade de um quadrado (cortado pela diagonal), o triângulo equilátero e a metade de um triângulo equilátero 10.

Qualquer figura contida em uma dessas regiões poderá ser utilizada como motivo para essas simetrias. A figura ao lado ilustra um exemplo de pavimentação do plano, baseado nas regras do grupo caleidoscópico **pmm**¹¹: o



Caleidoscópios



¹⁰A teoria dos grupos de simetria plana demonstra que os contornos formados pela metade de um triângulo equilátero ou os obtidos da divisão de um quadrado em dois por sua diagonal, ocorrem nos ornamentos dotados de simetria p4m e p6m, não por acidente ou por preferência, mas por necessidade. Esse determinante matemático pode explicar a razão do sucesso dos esquadros, instrumentos de desenho construídos nessas formas (veja outras consideraçõessobre esses instrumentos à página 129).

¹¹Este mesmo ornamento pode também ser reconhecido como gerado pelas transformações características do grupo **p4g**, obviamente com outro motivo elementar.

O algoritmo que produz o elemento de composição que faz parte deste ornamento pode ser encontrado, por exemplo, em [1]. Uma derivação mais geral, baseada na con-

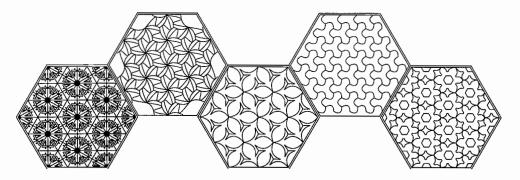


Figura 17.3: Simetrias sobre redes de triângulos equiláteros ou suas metades

motivo elementar (um arranjo de quadrados encaixados) reflete-se reiteradamente sobre os lados espelhados de um quadrado.

O apêndice 21 apresenta os algoritmos para a construção dos 17 grupos de simetrias planas. Nas figuras 17.3 e 17.4 estão ilustrados alguns exemplos de simetrias de pavimentação do plano.

strução de polígonos encaixados com um número arbitrário de vértices, estabelecido por um parâmetro variável, está apresentada nas proposições 8 e 12.

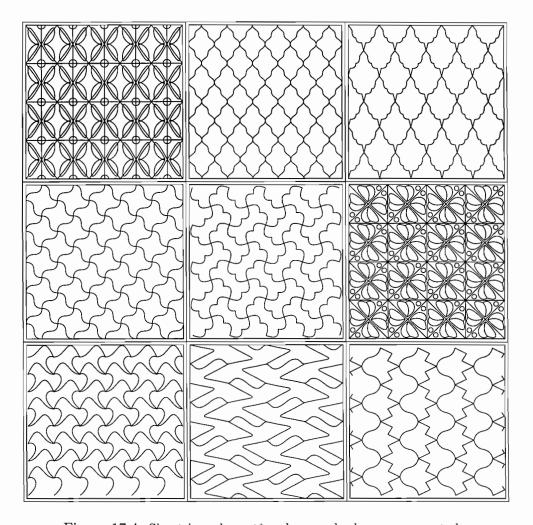


Figura 17.4: Simetrias sobre retângulos, quadrados ou suas metades

17.6 Imagens 3-D

Um exemplo notável de aplicação de ritmos unidimensionais pode ser observado nas figuras conhecidas por *olho mágico*. Por meio da reprodução, numa mesma página, de órbitas horizontais com períodos espaciais¹² distintos, uma observação cuidadosa nos dá a sensação de profundidade (fig 17.5).

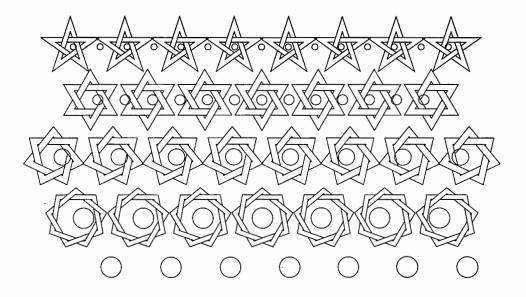


Figura 17.5: Sensação de 3-D

Para se conseguir a impressão de que as estrelas da figura 17.5 encontramse em planos de *profundidades distintas*, é necessária alguma paciência. A dificuldade em perceber de imediato vem do hábito, bastante firmado, de controlar os músculos do olho. A focalização e a convergência são feitas por músculos distintos, mas nosso sistema nervoso, pelo hábito, controla-os como um todo integrado.

Se conseguirmos desacoplar esses controles, poderemos, fixando duas estrelas consecutivas, forçar a convergência de nossos olhos de modo a fazer essas duas estrelas superporem-se, ao mesmo tempo em que procuramos man-

¹²Distâncias entre duas cópias consecutivas.

ter focalizado o desenho que vemos no papel. Quando tivermos alcançado a independência desses dois controles — convergência para a superposição e focalização — então teremos a sensação de que as estrelas "saltam" do (ou "afundam" no) papel.

Observando a figura 17.5, tendo em conta os conceitos discutidos neste capítulo, podemos perceber que a distância que separa duas estrelas consecutivas de cinco pontas não é a mesma que separa duas estrelas consecutivas de seis ou sete pontas, por exemplo. É esse descompasso entre as coleções de estrelas que dá à nossa percepção, a sensação de 3-D.

Parte VI Aplicações

Proposições fundamentais

18.1 Pontos e linhas poligonais

Proposição 1 Construir uma linha poligonal.

Uma rota determina uma linha poligonal. Neste exemplo representamos, a título de ilustração, uma rota ramificada definida por pontos de nomes indexados.

Consideremos a seguinte rota

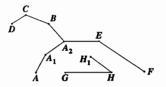
$$A..[BCD]EF \sqcup GH. \tag{18.1}$$

Nomes dos pontos. Os símbolos '·' que aparecem na rota designam pontos cujos nomes são formados por uma letra maiúscula, seguida de um índice numérico, conforme a seguinte regra:

- 1. A letra que integra o nome do ponto designado pelo símbolo '.' é a primeira que ocorre à esquerda desse símbolo¹.
- O valor do número que forma o índice numérico é dado pela posição do símbolo '.' que designa o ponto, contado a partir da letra que lhe dá nome.

¹Por essa razão, uma rota não pode principiar pelo símbolo '.'.

Exemplo: a sequência 'P...', define os pontos $P, P_1, P_2 \in P_3$.



Dessa forma, os pontos definidos na rota (18.1) são:

$$A, A_1, A_2, B, C, D, E, F, G, H, H_1.$$

Modificadores de rota. Constam dessa rota os modificadores '[' e ']' que especificam uma ramificação que faz a linha bifurcar-se no ponto A_2 , nos dois ramos: ' A_2BCD ' e ' A_2EF '. O símbolo \sqcup faz o trecho ' GHH_1 ' da linha poligonal destacar-se dos demais.

Proposição 2 Determinar o ponto P sobre uma semi-reta AB e que esteja a uma distância dada r de A.

Objetivo. Apresentar a função complexa versor de segmento de reta, representada pela expressão vs(c), onde c é um número complexo.

Tomemos do enunciado de nosso problema, a origem A e como ponto arbitrário sobre a semi-reta, o ponto B. A função vs(B-A) fornece o versor de B-A, isto é, um número complexo que tem o mesmo sentido e direção de B-A, mas cujo comprimento é igual a 1.

A solução de nosso problema pode, então, ser expressa na forma

$$P = A + r * vs(B - A).$$

Note-se que o enunciado se refere não a uma reta, mas a uma semi-reta. Esta informação adicional é necessária para que seja possível determinar qual dos dois pontos, que distam r de A (um em cada semi-reta), constitui a solução. As coordenadas do outro ponto Q, referente à semi-reta BA, são

$$Q = A + r * vs(A - B).$$

Proposição 3 Construir um polígono regular.

Neste exercício estuda-se a criação e utilização de uma variável complexa.

Um polígono regular é uma linha poligonal fechada tal que a

- 1. distância entre um ponto da linha e seu antecessor (ou sucessor) é constante.
- 2. o ângulo formado por uma aresta e sua sucessora (ou antecessora) é constante.

Construiremos, neste exemplo, um polígono regular de 7 lados.

Para isso inserimos uma rota contendo 8 pontos:

ABCDEFGH

Em seguida, devemos escrever as coordenadas de cada um desses pontos. Fixamos inicialmente as coordenadas do ponto A com o valor, digamos, [0,180]. Para a construção de B, sucessor de A, seguiremos a técnica inspirada no transferidor.

Denotemos por O a origem das coordenadas. Como nosso polígono tem 7 lados, devemos colocar o ponto B de tal modo que o segmento OB forme com OA o ângulo de $\frac{2\pi}{7}$ ($\frac{1}{7}$ de volta) em torno da origem. Atribuimos ao ponto B a expressão

$$B = O + Cy(1/7) * (A - O).$$
 (18.2)

O efeito da multiplicação de Cy(1/7) por A - O é fazer o ponto B girar sobre a circunferência com centro na origem O que passa por A.

Construção dos Vértices. Determinada a posição do ponto B, podemos passar à construção dos demais vértices do polígono.

As coordenadas de C, sucessor de B, serão determinadas analogamente:

$$C = O + Cy(1/7) * (B - O).$$
 (18.3)

Como outras expressões semelhantes a (18.3) irão ocorrer para os demais pontos, podemos facilitar a digitação e acelerar o processamento se definirmos uma variável complexa de nome, digamos, m, por meio da expressão

$$m = Cy(1/7)$$

Uma vez que a origem O tem coordenadas [0,0], podemos eliminar O das expressões (18.2) e (18.3) e reescrevê-las nas formas

$$B = m * A$$
$$C = m * B.$$

Repetimos o procedimento acima para determinar as posições dos demais pontos D, E, F, G e H, estabelecendo, para eles, respectivamente, as expressões

$$D = C * m,$$

 $E = D * m,$
 $F = E * m,$
 $G = F * m,$
 $H = A.$

Observe que, em lugar de adotar para H a expressão 'G * m', preferimos fazer o ponto H coincidir com o ponto A. Os efeitos são exatamente os mesmos, mas na forma apresentada, percebe-se mais claramente que se trata de um polígono fechado.

Proposição 4 Inscrever três parábolas osculantes nos pontos médios dos lados de um triângulo dado.

Objetivo. Apresentar a função e uso dos modificadores de rota '{' e '}'.

Criamos um novo desenho definido pela rota

$$\{ABCDE\}$$

cujos pontos A, B, C, D e E têm as seguintes coordenadas:

$$A = (B + D)/2$$

$$B = [120, 200]$$

$$C = [190, -125]$$

$$D = [-200, -200]$$

$$E = A$$

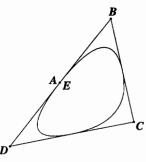
As coordenadas dos pontos B, C e D foram escolhidas arbitrariamente.

Execução do desenho. Ao encontrar o símbolo '{', o computador inicia o desenho de uma parábola que parte do ponto A, segue, tangente ao lado DB até o ponto médio do segmento BC, onde tangencia esse segmento; continua desenhando outra parábola que parte desse ponto e, tangenciando esse mesmo segmento BC, segue até o ponto médio do segmento CD, tangenciando-o nesse ponto. Uma última parábola, tangente ao segmento CD, é desenhada desse último ponto até o ponto E, onde tangencia o segmento BD. Os traços terminam nesse ponto, ao encontrar o símbolo '}'. Duas quaisquer dessas parábolas têm um ponto em comum e ambas são tangentes a um mesmo lado do triângulo nesse mesmo ponto. Dizemos que elas são osculantes nesse ponto.

Ao acompanhar esse exercício podemos entender como o computador interpreta a ocorrência dos símbolos '{' e '}' numa rota. Consideremos a rota

$$\{ABCD...WXYZ\}$$

Ela representa uma curva única formada por uma seqüência de arcos osculantes de parábola. Essa curva parte do ponto A, onde tangencia o segmento AB e termina no ponto Z, onde tangencia o segmento YZ. Os demais pontos de osculação são os pontos médios dos segmentos BC, CD, \ldots, WX e XY; a curva tangencia todos esses segmentos.



Proposição 5 Desenhar a folha estilizada de uma planta.

Duas curvas de Bézier e uma parábola são suficientes para simular a folha de uma planta que será usada adiante no exercício 34.

O contorno da folha pode ser definido pela rota

Observe que o ponto C_1 , denotado pelo símbolo '_' que sucede C na rota, é um ponto de inflexão que concatena duas curvas de Bézier: ' $ABCC_1$ ' e ' C_1EFG '.

O ponto J foi incluído para permitir a inserção da parábola ' AJC_1 ' que completa o desenho. A figura ao lado ilustra a folha estilizada, formada pelas curvas definidas pela rota (18.4).

Pontos determinados por equações

Proposição 6 Inscrever, num triângulo dado ABC, um quadrado apoiado sobre o lado AB.

Objetivo. Mostrar a utilização de variáveis em expressões aritméticas, para a solução de problemas geométricos.

Consideremos um triângulo de vértices ABC e denotemos por $c = \overline{AB}$ o comprimento do lado AB e por $h = \overline{CH}$ a altura do triângulo, tomada a partir do vértice C, sobre o lado AB. Busca-se o comprimento x do lado do quadrado inscrito neste triângulo.

Supondo o problema resolvido, percebemos que o lado PQ do quadrado é paralelo ao lado AB do triângulo. Podemos reconhecer na figura 19.1 dois triângulos semelhantes, a saber, ACB e PCQ.

No triângulo maior, o comprimento da base é c, e o de sua altura, é h. Esses segmentos correspondem, no triângulo menor, respectivamente, ao lado PQ, cujo comprimento é x (a incógnita do problema) e à altura CJ, cujo comprimento é h-x. Podemos, baseados na semelhança dos triângulos, escrever a relação existente entre esses valores:

$$\frac{c}{x} = \frac{h}{h - x},$$

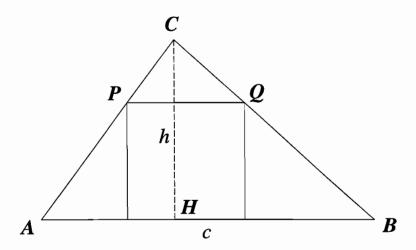


Figura 19.1: Quadrado inscrito num triângulo

donde se obtém

$$x = \frac{ch}{c+h}.$$

Quando esses valores são conhecidos, as posições dos pontos P e Q podem ser facilmente determinadas: eles estão na interseção dos lados AC e BC com a reta que é simultaneamente paralela à base AB e que dista, dessa base, do comprimento x.

Proposição 7 Inscrever um círculo num arbelo.

A região delimitada pelos três semi-círculos tangentes, aos pares, na figura 19.2 é denominada *arbelo*, ou "faca do sapateiro", uma forma que se tornou famosa na Geometria por ter sido objeto de investigação de alguns dos grandes geômetras da Antigüidade, como Arquimedes de Siracusa [287-212 a.C.] ou Papos da Alexandria [c. sec IV] [6].

Enunciado. O problema que aqui nos interessa pode ser enunciado da seguinte forma:

São dadas três circunferências¹ (figura 19.2),

$$\alpha = C(P, p), \quad \beta = C(Q, q) \quad e \quad \gamma = C(O, p + q).$$

Busca-se a circunferência $\rho=C(R,r)$, tangente simultaneamente às três circunferências dadas.

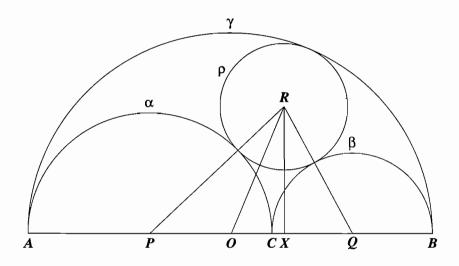


Figura 19.2: Círculo inscrito num arbelo

Observa-se na figura 19.2 que OP = q e que OQ = p. Essas identidades podem não ser evidentes, mas pode-se chegar a elas lembrando que

¹A notação $\alpha = C(P, p)$ designa uma circunferência de centro em P e raio p.

$$\overline{AO} = \overline{AP} + \overline{PO} = p + q$$
, donde $\overline{PO} = q$
 $\overline{BO} = \overline{BQ} + \overline{QO} = q + p$, donde $\overline{QO} = p$.

Definimos o ponto X, projeção do ponto R sobre a reta AB. Denotando por x = OX e y = XR, podemos escrever as relações pitagóricas para os três triângulos retângulos PXR, QXR e OXR:

$$(q+x)^2 + y^2 = (p+r)^2 (19.1)$$

$$(p-x)^2 + y^2 = (q+r)^2 (19.2)$$

$$x^{2} + y^{2} = (p + q - r)^{2}. (19.3)$$

Subtraindo (19.3) de (19.1), temos²

$$q(q+2x) = (2p+q)(2r-q)$$
(19.4)

e subtraindo (19.2) de (19.1), temos

$$p(p-2x) = (2q+p)(2r-p), (19.5)$$

Eliminando-se x do sistema de equações formado pelas (19.4) e (19.5), podemos finalmente, obter o valor do raio r da circunferência ρ

$$r = \frac{pq(p+q)}{p^2 + pq + q^2}. (19.6)$$

Construção. Suponhamos já fixados no desenho os pontos $A, B \in C$ a partir dos quais estão determinadas as circunferências $\alpha \in \beta$. Criamos $P \in Q$, pontos médios respectivamente dos segmentos $AC \in BC$

$$P = (A + C)/2$$

 $Q = (B + C)/2$.

Em seguida, criamos as variáveis

$$\begin{aligned} p &= \text{mod}(P - A) \\ q &= \text{mod}(Q - C) \\ r &= p * q * (p + q)/(p^2 + p * q + q^2) \end{aligned}$$

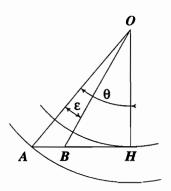
²Nessa subtração, aplique a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

onde r é o raio da circunferência buscada.

O ponto R, centro da circunferência buscada, está na interseção das circunferências $\mathrm{C}(P,p+r)$ e $\mathrm{C}(Q,q+r)$, determinada pela expressão

$$R = \operatorname{CxC}(P, p + r, Q, q + r).$$

Proposição 8 Inscrever um polígono regular noutro semelhante



Consideremos um polígono regular de n lados. Seja r o raio da circunferência circunscrita a esse polígono e O seu centro.

Considere-se, agora, o retângulo AOH da figura, onde A representa um dos vértices do polígono e H é o ponto médio de um dos lados do polígono que tem A por vértice³. Dessa forma, o ângulo θ formado em O pelos lados AO e HO do triângulo AOH é dado pela relação

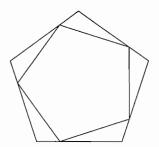
$$\theta = \angle AOH = \frac{\pi}{n}$$

Denotemos por B o vértice do polígono encaixado no polígono dado. Por construção, A,B e H estão numa mesma reta. Denotemos por ϵ o ângulo $\angle AOB$ e por μ a relação

$$\mu = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}.$$

Pode-se perceber facilmente, observando os triângulos retângulos AOH e BOH que entre as grandezas θ, μ e ϵ pode-se estabelecer a equação

$$\mu = \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \epsilon)} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos(\frac{\pi}{n} - \epsilon)},\tag{19.7}$$



que relaciona entre si o fator de contração 4 μ , o ângulo de rotação ϵ de um polígono em relação ao outro e o número n de lados do polígono.

Exercício. Construa um pentágono regular e, usando o método apresentado na proposição 3, inscreva nele um segundo pentágono que forme um ângulo⁵ $\epsilon = 3^{\circ}$ com o primeiro, de modo a reproduzir a figura ao lado.

 $^{^3}$ O segmento OH é denominado apótema do polígono e seu comprimento $s=\overline{OH}$ é o raio da circunferência inscrita ao polígono.

⁴É a relação entre os raios das circunferências circunscritas aos polígonos externo e inscrito, respectivamente.

⁵Para um polígono de n lados, o ângulo ϵ deve satisfazer as desigualdades $0 < \epsilon < \frac{2\pi}{n}$.

Transformação de figuras

20.1 Procedimentos fundamentais

Procedimento 1 Construir a imagem de uma figura refletida sobre um eixo central.

Um eixo central é qualquer reta que passa pela origem das coordenadas. Consideraremos aqui as reflexões sobre quatro eixos centrais. São eles, os eixos horizontal e vertical de referência e, duas bissetrizes dos ângulos que entre eles se formam, conforme ilustrado na figura ao lado.

Os símbolos usados para designar essas reflexões são

Rx reflexão sobre o eixo horizontal. Este eixo refere-se à direção Leste-Oeste da "rosa dos ventos".

Ry reflexão sobre o eixo vertical ou direção Norte-Sul.

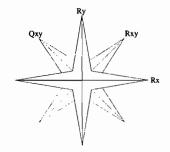
Rxy reflexão sobre a bissetriz que corta os quadrantes 1 e 3 ou direção Sudoeste-Nordeste.

Qxy reflexão sobre a bissetriz que corta os quadrantes 2 e 4 ou direção Sudeste-Noroeste.

Procedimento 2 Deslocar uma figura.

Para deslocar uma figura de um ponto P a um ponto Q, deve-se submetêla à transformação

$$\operatorname{Tp}(P-Q)$$



Deslocamentos nas direções horizontal e vertical podem ser conseguidos fornecendo-se a distância a ser deslocada, como nas expressões seguintes

- Tx(a) para deslocar a figura de uma distância a na direção horizontal. O deslocamento dar-se-á para a direita se a > 0 e para a esquerda se a < 0.
- $\mathrm{Ty}(b)$ para deslocar a figura de uma distância b na direção vertical. O deslocamento dar-se-á para cima se b>0 e para a baixo se b<0.

Pode-se também representar um deslocamento escrevendo o argumento da transformação em coordenadas polares. A expressão

$$\operatorname{Tp}(P + \{a, \theta\})$$

deslocará a figura de uma distância r, na direção do ângulo θ .

Procedimento 3 Girar uma figura em torno da origem das coordenadas.

Para girar uma figura de um ângulo θ , em torno da origem, deve-se submetê-la a uma das expressões constantes da tabela abaixo. A expressão usada depende do ângulo de rotação, bem como da unidade em que ele é expresso.

θ	Expressão
1/2 volta	HT
1/4 de volta	QT
3/4 de volta	IQT
em graus	$\mathrm{Rot}(heta)$
em fração de volta	$\mathrm{Cyt}(\theta)$

Assim, uma rotação de 1/2 volta pode ser conseguida pela expressão HT ou, dentre outras, por uma das seguintes expressões equivalentes

Rot(180) Cyt(1/2) $QT \cdot QT$ $Rx \cdot Ry$

Procedimento 4 Girar uma figura em torno de um ponto qualquer.

A rotação de uma figura de um ângulo θ , em torno de um ponto P qualquer, pode ser conseguida submetendo-a à expressão

$$\operatorname{Tp}(P) \cdot \operatorname{Rot}(\theta) \cdot \operatorname{Tp}(-P)$$
 (20.1)

Em lugar da transformação $Rot(\theta)$ que figura em (20.1), pode-se usar qualquer expressão que descreva uma rotação, como por exemplo, HT, QT, IQT, $Cyt(\theta)$, etc.

Procedimento 5 Refletir uma figura sobre uma reta qualquer.

Qualquer reta do plano pode ser tratada como refletora. A forma mais conveniente para se comunicar ao computador a posição de uma reta é mediante a especificação de dois de seus pontos, digamos os pontos A e B. Para conseguirmos a reflexão de uma figura sobre a reta AB, a submetemos à expressão

$$\operatorname{Tp}(P,Q) \cdot \operatorname{Rx} \cdot \operatorname{ITp}(P,Q)$$
 (20.2)

Denotemos por O a origem das coordenadas [0,0] e por I o ponto unidade, de coordenadas [1,0]. A transformação $\operatorname{Tp}(P,Q)$ 'converte' o segmento OI no segmento PQ, mas ao fazê-lo, converterá, segundo a mesmas regras, não apenas esse segmento, mas todos os demais pontos que formam a figura. Assim, se essa conversão for uma translação, todos os pontos da figura serão transladados da mesma distância; se ela incluir uma rotação em torno de um ponto P qualquer, toda a figura sofrerá essa rotação. O mesmo se dará se houver uma ampliação ou uma redução, isto é,

As transformações que forem necessárias para converter o segmento OI no segmento PQ serão aplicadas uniformemente a todos os pontos da figura.

A transformação $\mathrm{ITp}(P,Q)$ é a operação inversa à $\mathrm{Tp}(P,Q)$, isto é, é uma transformação que 'converte' o segmento PQ no segmento OI (e consequentemente, toda a figura).

Uma vez que as operações descritas na composição (20.2) são realizadas da direita para a esquerda, tudo se passa como se a figura sofresse, nesse processo, a seguinte seqüência de transformações:

- a transformação ITp(P,Q), segundo a qual a figura, como um todo, é transformada, de modo a fazer a reta PQ coincidir com o eixo horizontal de referência; Para isso, o ponto P será deslocado até a origem e, em seguida o ponto Q será girado até alcançar o eixo horizontal de referência;
- 2. a figura será então uniformemente esticada ou encolhida (isto é, sofrerá uma homotetia) até que o comprimento do segmento PQ seja igual à unidade. Neste momento teremos uma representação similar da figura, disposta em relação ao eixo horizontal de referência, na mesma disposição que a figura original está em relação à reta PQ;
- 3. a reflexão dessa figura similar sobre o eixo horizontal de referência;
- 4. a transformação Tp(P,Q) realiza a operação inversa à executada na etapa 1, isto é, a figura similar, agora refletida, é modificada de modo a assumir a forma que teria a figura original refletida sobre a reta PQ.

20.2 Transformações geométricas

Proposição 9 Reenquadrar uma figura de um paralelogramo para outro.

O objetivo deste exercício é enquadrar num paralelogramo dado, uma figura previamente enquadrada noutro paralelogramo.

Tomemos uma figura qualquer (ver figura 20.1), enquadrada num paralelogramo dado, de vértices OXZY.

Consideremos um outro paralelogramo arbitrário ABDC e apliquemos à figura a seguinte transformação

$$\operatorname{Tp}(A, B, C) \cdot \operatorname{Inv}(\operatorname{Tp}(O, X, Y)).$$
 (20.3)

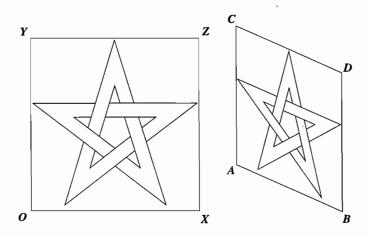


Figura 20.1: Ajuste de afinidade

A figura 20.1 mostra, lado a lado, os dois enquadramentos, o original e o transformado. Sob a ação da transformação 20.3, o ponto O transforma-se no ponto A, o ponto X em B e o ponto Y em C.

O exemplo acima ilustra uma propriedade importante dos ajustes de afinidade: eles permitem simular o fenômeno das sombras de figuras proje-

tadas pelo Sol^1 sobre uma superfície plana. De fato, não é difícil imaginarmos que o enquadre OXZY represente a esquadria de uma janela e o retângulo ABDC as sombras da janela e da figura, nela colada, projetadas sobre a parede.

Para se obter a reprodução geométrica desse efeito basta conhecer as posições de seis pontos²:

- três pontos que determinam o plano onde está a figura (o plano da janela).
- três pontos correspondentes³ que determinam o plano onde está projetada a sombra dessa figura (o plano da parede).

¹Ou por qualquer fonte luminosa que emita raios paralelos.

 $^{^2}$ Os pontos Z e D criados acima não são essenciais para a determinação da transformação 20.3; eles servem apenas para melhor visualizarmos os efeitos dessa transformação.

³Para que a projeção reflita com exatidão o efeito da sombra, é necessário que estes três pontos formem um triângulo congruente àquele que determina o plano da janela.

21

Simetrias

21.1 Simetrias circulares

Proposição 10 Construir (novamente) um polígono regular de n lados.

O procedimento utilizado para resolver o problema da proposição $\bf 3$ aplica-se a um polígono de n lados, quando o valor de n é fixado.

Neste estudo apresentamos uma outra técnica que permite construir polígonos regulares de n lados, onde o valor de n é variável. Essa técnica está baseada na especificação da *órbita de uma transformação geométrica*, por meio da qual o polígono é construído a partir da rotação, reiterada n-1 vezes, de um dos lados desse polígono, produzindo o efeito desejado.

Uma vez que todo polígono regular é inscritível numa circunferência, criamos inicialmente a variável real r, que determinará o raio dessa circunferência, e atribuimos a essa variável, digamos, o valor r=160. Em seguida, criamos a variável n que determinará o número de vértices do polígono, fixando-lhe, a título de exemplo, o valor n=7. Admitimos que o centro do polígono está na origem, de coordenadas [0,0].

Cada vértice do poligono está a uma distância r do seu centro, portanto podemos afirmar que as coordenadas polares de um vértice P qualquer desse

poligono são representadas pela forma genérica

$$P = \{r, \theta\}$$

onde o ângulo θ depende do número de vértices do polígono.

A escolha do valor de θ é arbitrária, pois depende de sob que inclinação queremos dispor o polígono na figura. Se desejarmos que nosso polígono apareça como que apoiado sobre uma base horizontal, podemos colocar dois vértices consecutivos do polígono, digamos P e Q, sobre uma mesma reta horizontal. Consegue-se esse efeito adotando para P e Q, as coordenadas

$$P = \{r, (3/2 - 1/n) * \pi\}$$

$$Q = \{r, (3/2 + 1/n) * \pi\}$$
(21.1)

Obervando as coordenadas dos pontos P e Q, constatamos que ambos estão sobre a circunferência de raio r, o primeiro formando com a vertical um ângulo de π/n e o segundo, um ângulo de $-\pi/n$, de tal modo que entre si formem um ângulo de $2\pi/n$.

Base do polígono. Para criar o segmento PQ, podemos, a exemplo do que foi feito na proposição 1, criar uma rota 'PQ'. Após criada a rota, alteramos as coordenadas dos pontos $P \in Q$, conforme as identidade (21.1). Teremos, então, a base de nosso polígono completa.

 $Rotação\ da\ base\ do\ polígono.$ Neste caso, a transformação que gera, a partir da base PQ, um novo lado do polígono, é uma rotação de 1/n de volta em torno da origem. Essa transformação é representada pela expressão ${\rm CyT}(1/n)$ ou ${\rm Rot}(360/n)$.

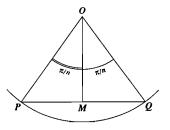
Para podermos superpor o segmento original à sua cópia "girada" de 1/n de volta, escrevemos no campo de polinômio, a expressão

$$1 + \text{CyT}(1/n)$$
.

Para termos três lados desenhados, escrevemos a expressão

$$1 + \operatorname{CyT}(1/n) + \operatorname{CyT}(1/n) \cdot \operatorname{CyT}(1/n)$$
.

Poderíamos continuar a construir expressões envolvendo "parcelas" adicionais para os demais lados do polígono, até completá-lo. Mas isso não



seria nada prático para um polígono com um número grande de lados, nem estaria de acordo com o objetivo de nosso problema que é o de obter uma representação do polígono que independa do valor atribuído ao número n de lados. Para contornar essa limitação, usa-se a \acute{orbita}^1 e que, neste exemplo, assume a forma

$$Orb(n, CyT(1/n)). (21.2)$$

Aplicada ao lado PQ, essa órbita produzirá o polígono regular desejado.

Órbita de uma transformação. A órbita de uma transformação τ é definida pela expressão:

$$Orb(n,\tau) = \underbrace{1 + \tau + \tau^2 + \tau^3 + \ldots + \tau^{n-1}}_{n \text{ "parcelas"}}$$
(21.3)

A presença de n "parcelas" na expressão acima garante que essa órbita produzirá n cópias da mesma figura recorrentemente transformadas pela transformação τ .

¹A definição abstrata de órbita encontra-se na seção 13.4.1.

Proposição 11 Construir uma estrela de braços entrelaçados.

Observando atentamente a figura ao lado, podemos perceber que ela é formada pela superposição de uma figura mais elementar (apresentada em destaque na página 255), que se repete em torno do centro. Denominamos essa figura elementar de geratriz da figura final. Tomando como exemplo a construção do polígono regular obtido na proposição 10— cuja geratriz se resume a um simples segmento de reta— podemos construir a estrela completa. Para isso, submeteremos a geratriz a uma órbita rotacional, como o fizemos com o lado do polígono, no exemplo referido.

Para facilitar a discussão que segue, encararemos os vértices (pontas) da estrela como se fossem as marcas de um mostrador de relógio e adotaremos as seguintes definições:



Estrela Interna é a outra estrela, formada pelos pontos que estão no mesmo raio dos vértices da estrela externa.

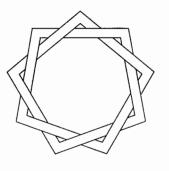
Vértice antecessor O antecessor de um vértice X é o primeiro vértice que o ponteiro de nosso relógio fictício alcança, logo após ter deixado o vértice X. Usaremos as metáforas seguintes: o antecessor de X é o pai de X; o "antecessor do antecessor" de X, seu $av\hat{o}$ e o "antecessor do antecessor do antecessor" de X, seu $bisav\hat{o}^2$.

Vértice sucessor O sucessor de um vértice X é o primeiro vértice que o ponteiro de nosso relógio fictício alcançaria, logo após ter partido de X, se estivesse girando no sentido oposto (anti-horário). Como no caso dos antecessores, trataremos o sucessor de X como seu filho, o "sucessor do sucessor" de X como seu neto e o "sucessor do sucessor do sucessor" de X como seu bisneto.

Além disso, definimos a variável real n, para representar o número de pontas (vértices) da estrela e a variável complexa m por meio da expressão

$$m = Cy(1/n)$$
.

Graças às propriedades da variável complexa m, podemos representar facilmente os antecessores e sucessores de um vértice qualquer A da estrela pelas expressões:





²Estas convenções seguem as da trigonometria. Nela, os ângulos crescem no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, por isso as palavras antecessor e sucessor parecem estar invertidas.

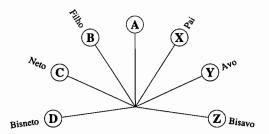


Figura 21.1: Posições de A modificadas pela variável complexa m = Cy(1/12)

Pai de A: X = A/m Filho de A: B = A*mAvô de A: $Y = A/m^2$ Neto de A: $C = A*m^2$ Bisavô de A: $Z = A/m^3$ Bisneto de A: $D = A*m^3$

Construção. Iniciamos o desenho, inserindo uma Rota que represente as duas linhas poligonais desconexas que formam a figura elementar. Adotando para os pontos os mesmos nomes que aparecem na figura ao lado, construímos a rota

$$ABC \sqcup DEF$$

Vértice B Criamos uma variável real r que estabelece o raio do círculo circunscrito à estrela e colocamos o vértice superior da estrela (ponto B) na posição de coordenadas [0,r].

Vértice E Observando a figura, constatamos que E é o vértice mais alto da estrela interna. Sendo essas duas estrelas semelhantes, podemos tratar a estrela interna como uma homotetia da estrela externa, estabelecendo assim, como coordenadas do ponto E, as mesmas do ponto B, multiplicadas por um fator de redução μ . Tratamos μ como uma variável real e definimos o vértice B com as coordenadas

$$E = \mu * B$$

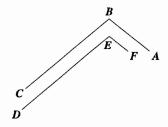
 $V\'{e}rtice~A~$ Observando a estrela completa, constatamos que o ponto A está na interseção de dois braços da estrela. Um deles liga os dois vértices imediatamente contíguos ao vértice B, isto é, liga o pai de B ao filho de B.

O outro braço tem uma extremidade no vértice B e a outra, em seu $av\hat{o}$. Podemos, assim, escrever a expressão que fornece as coordenadas do ponto A

$$A = LxL(B/m, B*m, B, B/m^2).$$

ou, em palavras que descrevem as relações de parentesco de B:

$$A = LxL(pai,filho,B,Avô).$$



 $V\'{e}rtice~C~$ Este ponto está na interseção de outros dois braços da estrela. Um deles parte do vértice B e termina no seu neto, e o outro, parte do filho de E e termina no bisneto de E. Suas coordenadas são

$$C = LxL(B, B * m^2, E * m, E * m^2 * m)$$

Vértice D Este vértice encontra-se na interseção de dois braços da estrela interna. Um deles parte de E e termina no neto de E, e o outro parte do filho de E e termina no bisneto de E, donde as coordenadas de D são

$$D = LxL(E, E * m^2, E * m, E * m^2 * m)$$

Vértice F Finalmente, o ponto F encontra-se na interseção de outros dois braços, um da estrela interna e outro da externa. O primeiro parte do vértice E e termina no avô de E, e o outro parte do filho de E e termina no pai de E. Suas coordenadas são

$$F = LxL(E, E/m^2, B * m, B/m).$$

Com essas operações, terminamos a construção da figura elementar. Para completar a estrela, basta definir o polinômio geométrico com a mesma expressão (21.2) usada na construção do polígono regular da proposição 10.

Pode-se agora experimentar os efeitos da alteração dos valores de n,r e μ sobre o desenho e constatar seus limites. O valor de n, por exemplo, não deve ser inferior a 5, caso contrário não se formam estrelas. A variável μ também tem limitações: à medida que o valor de n aumenta, o de μ deve aproximar-se de 1. Pode-se observar, também, que se n for ímpar, os braços da estrela entrelaçam-se formando uma tira única, mas se n for par, a estrela será formada por duas tiras desconexas.

Proposição 12 Construir uma seqüência de polígonos encaixados, de modo que os vértices de cada polígono da seqüência esteja apoiado nos lados de seu envolvente, e forme com este um ângulo constante.

Neste exercício combinaremos os resultados das proposições 8 e 10, para construir uma seqüência de polígonos inscritos uns nos outros.

Para isso criamos as variáveis reais ϵ , θ e μ com os valores experimentados no exercício 8 e usamos a expressão (19.7) da proposição 10. Criamos também a variável m que representará o número de polígonos inscritos uns nos outros, que comporão nosso desenho final (ver figura à página 4).

Compomos então, o polinômio geométrico construído na proposição 10 com o polinômio

$$Orb(m, Rot(\epsilon * 180/\pi) \cdot Scl(\mu)),$$

onde a transformação Rot representa uma rotação em torno da origem³, a transformação 'Scl(s)' representa uma homotetia com centro na origem, de amplitude s (ampliação ou redução) para obter o polinômio final⁴

$$\operatorname{Orb}(m, \operatorname{Rot}(\epsilon * 180/\pi) \cdot \operatorname{Scl}(\mu)) * \operatorname{Orb}(n, \operatorname{CyT}(1/n)).$$

³O argumento ϕ de 'Rot (ϕ) ' deve ser fornecido em graus.

⁴Observe a diferença entre o símbolo '·' que se usa para designar a composição de duas transformações e o símbolo '*', utilizado para representar a composição de dois polinômios.

Proposição 13 Construir o logotipo da FAU-USP.

O logotipo da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de São Paulo é, segundo Ludovico Martino, seu criador, a associação de um corte de uma coluna dórica, símbolo da Arquitetura, e a imagem do Sol, símbolo do Urbanismo⁵.

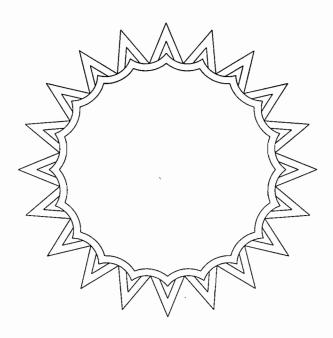


Figura 21.2: Logotipo da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da USP

As colunas são composições regulares cujo corte pode ser interpretado, para fins de construção geométrica, como um conjunto de arcos de círculo, com 90° de abertura, cujos centros estão dispostos nos vértices de um polígono regular de vinte lados. A concatenação desses arcos forma o corte da coluna que se sobrepõe a um conjunto de triângulos isóceles que simbolizam o Sol. Esses triângulos apóiam-se nos pontos médios dos arcos, e têm seu vértice superior no mesmo raio que passa pelo ponto de encontro de dois arcos consecutivos da coluna.

⁵Entrevista concedida à revista Design Gráfico, Ano 4, nº 13.

O símbolo, representado ao lado, conforme impresso na sede da FAU, é formado pela concatenação de um elemento de composição preenchido em cor amarela e disposto sobre o polígono regular de vinte lados, conforme ilustrado na figura ao lado.

O processo construtivo aqui apresentado é uma variante da figura original⁶, modificada para ser representada por traços de contorno que delimitam faixas de espessura pré-estabelecida.

Todos os traços curvos que constam desse elemento são arcos de círculo centrados em P. As posições dos pontos de referência desse componente são determinadas pelas seguintes propriedades:

- Iniciamos a construção pelo ponto A, situado a uma distância r do centro O do logotipo. Para explorar a simetria do elemento básico, de modo a simplificar as expressões das coordenadas dos demais pontos da figura, colocamos o ponto A sobre o eixo horizontal de referência.
- O ponto P está num raio que parte de O e forma com o eixo horizontal de referência, o ângulo α = 9°. O triângulo APD é 1/8 de um octógono regular inscrito numa circunferência de raio PA.
- 3. Os pontos B e C estão sobre uma circunferência com centro em P, de raio r-e, onde e é a espessura das faixas que formam a figura. Eles estão também sobre a reta OP.
- 4. O ponto E está na interseção do círculo Cp(P,A) com o eixo horizontal de referência.
- 5. O ponto F está no eixo horizontal de referência e à distância e da reta DE.
- 6. O ponto G está sobre a circunferência Cp(P, A) e à distância e da reta DE.

Anexando a esse elemento, sua imagem refletida pelo eixo horizontal de referência, segundo o polinômio geométrico

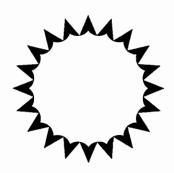
$$1 + Rx$$

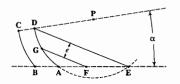
obtemos a figura ao lado

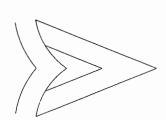
Essa figura é, por sua vez, superposta a suas imagens giradas de 18º em torno da origem. O polinômio geométrico

Orb
$$(20, Rot(18)) * (1 + Rx),$$

gera o símbolo representado na figura 21.2 a partir do elemento inicial.







⁶Esse processo foi baseado no método desenvolvido, sob orientação de Martino, por J. T. de Azevedo Maia, do LPG — Laboratório de Programação Gráfica da FAU-USP.

21.2 Fitas ornamentais

Proposição 14 Desenhar uma fita ornamental.

Neste estudo desenvolveremos a fita ilustrada na figura 17.1. Usaremos como geratriz dessa composição, o tema apresentado na página 214.

Nesta técnica de composição, conforme descrito no exemplo 1 discutido na seção 17.4.3, deslocamos o tema horizontalmente para a direita de modo a fazer o ponto A superpor-se a B (ou para a esquerda, fazendo B superpor-se a A).

Para conseguir esse deslocamento, submetemos a geratriz à translação horizontal Tp(B-A).

Quando submetemos uma figura a uma transformação, obtemos uma cópia transformada dessa figura, mas não mais a figura original. Para desenharmos as duas figuras (a original e sua transformada) lado a lado, devemos submetê-la, não a uma transformação simples, mas à união de duas transformações, o que se consegue com o polinômio geométrico representado pela expressão

$$1 + Tx(mod(A - B)).$$

A expressão (21.3) nos dá a fórmula para replicar n vezes um elemento geratriz, segundo uma transformação τ . Neste caso, $\tau = \text{Tp}(A-B)$. Para obtermos uma faixa ornamental composta de n réplicas da geratriz, preenchemos o campo do polinômio onde está definida a geratriz, com a expressão

$$Orb(n, Tp(A - B))$$
.

Proposição 15 Dispor um motivo grego sobre um círculo.

Para adaptar a ornamentação desenvolvida na proposição 14 de modo a ajustá-la a um círculo, é necessário redefinir todos os pontos do elemento de composição, conforme a ilustração da figura 21.3. Neste caso adotamos as coordenadas polares, pois seu uso facilita a representação dos pontos de referência da figura.

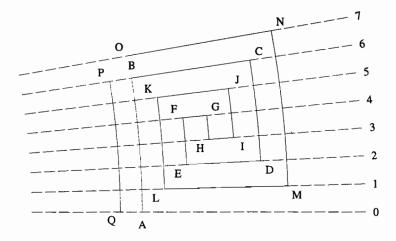


Figura 21.3: Geratriz da ornamentação grega sobre um círculo

As coordenadas dos pontos A, B, \ldots, P, Q que definem o contorno do elemento de composição, são dadas pela fórmula genérica

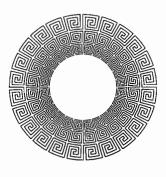
$$\{z,g*\frac{2*\pi}{7n}\},$$

onde r é o raio mais interno dos arcos, n é o número de repetições do elemento de composição em uma volta e $s,t\ldots,x,y$ são os raios dos demais arcos concêntricos. Esses raios são determinados pelas expressões

$$s = r * f, \quad t = s * f, \quad u = t * f,$$

 $v = u * f, \quad w = v * f, \quad x = w * f,$
 $y = x * f.$ (21.4)

262



A construção é feita de modo que cada ponto do elemento de composição fica na interseção de:

- ullet uma das circunferências concêntricas cujos raios r, s, \dots, y estão definidos em (21.4)
- e uma das retas radiais (que passam pelo centro das circunferências) formando com a horizontal um dos ângulos $\{0, \alpha, 2\alpha, \dots, 7\alpha, \}$ (observe as retas tracejadas na figura 21.3).

O ornamento da figura ao lado foi produzido aplicando-se ao elemento de composição, acima, a órbita

$$Orb(4, Rx \cdot Scl(r/y) \cdot p) * Orb(n, p)$$

onde p = Rot(360/n).

A presença da reflexão Rx no polinômio faz com que haja um inversão da figura a cada nova iteração.

21.3 Recobrimento do plano

A tecnologia que marcou este século tem sido fortemente influenciada pelos princípios tayloristas⁷, segundo os quais os processos técnicos devem estar subordinados à racionalidade econômica.

Não é uma mera coincidência que a produção de alfinetes, automóveis ou sanduíches, tenham, na busca da uniformidade, um denominador comum. Também na construção civil, em especial nas operações de recobrimento de superfícies planas (que ocorrem, por exemplo, na pavimentação de um piso ou na construção de uma parede), a utilização de partes ou peças idênticas tem sido determinada, até muito recentemente⁸, por conveniências técnicas ditadas, por sua vez, pela racionalidade econômica.

De fato, a produtividade de um artífice encarregado de executar uma operação de recobrimento é maior quando ele não está obrigado a procurar, numa coleção de peças irregulares, pelo contorno mais apropriado a cada assentamento. Além disso, os requisitos de economia e qualidade impostos para a produção de objetos em escala industrial tem sido alcançados, em geral, por meio da reprodução de objetos idênticos, dos quais qualquer fonte de variedade (considerada em geral como falha ou ruído) tenha sido reduzida a um mínimo.

Não apenas por razões industriais ou construtivas, mas muitas vezes por motivações estéticas⁹, as preferências dos construtores acabam por recair em materiais de construção como tijolos, lajotas, telhas ou azulejos regulares, de dimensões uniformes.

Nesta seção apresentaremos as representações, na notação algébrica proposta en 13.3, as 17 formas distintas de se pavimentar um plano, a partir de formas idênticas.

⁷Nome dado aos métodos de organização científica do trabalho propostos pelo engenheiro norte-americano Frederick Winslow Taylor (1856–1915).

⁸Somente nas últimas décadas a utilização intesiva da informática tornou possível a introdução econômica de alguma "variedade" nos processos industriais.

⁹Veja seção 17.5

Proposição 16 Recobrimento do plano por simetria p1.

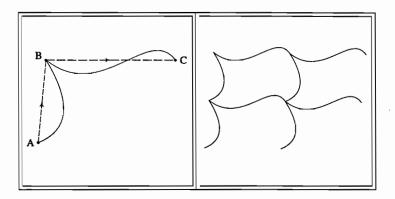


Figura 21.4: Elemento de composição para o grupo p1.

O procedimento mais simples para se recobrir uma superfície plana por meio da repetição regular de um padrão de contorno, consiste em escolher, sobre uma curva qualquer, um ponto arbitrário B, não colinear com suas extremidades AC.

Podemos agora, repetindo translações idênticas, fazer com que a curva ABC, submetida a duas translações convenientes, determine um domínio no plano que servirá para cobrir uma extensão desejada da sua superfície. As duas translações a ser aplicadas ao contorno são:

- O deslocamento Tp(B-A) que leva o ponto A a coincidir com o ponto B.
- O deslocamento Tp(C-B) que leva o ponto B a coincidir com o ponto C.

O contorno original, superposto àquele que se obtém como efeito dessas duas transformações, produz o elemento de composição que se observa na parte direita da figura 21.4. Essa superposição se obtém da ação combinada de duas translações

$$(1 + Tp(A - B)) * (1 + Tp(C - B))$$
 (21.5)

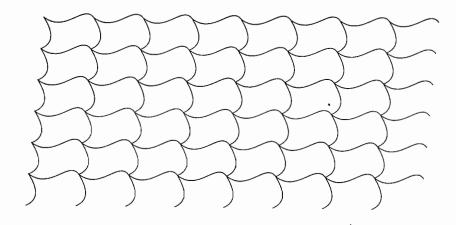
sobre o contorno original.

Os polinômios compostos em (21.5) produzem apenas quatro cópias do contorno. Para obtermos um número maior de cópias, substituímos os polinômios nessa expressão por suas correspondentes órbitas¹⁰

$$Orb(n, Tp(A - B)) * Orb(m, Tp(C - B)), \qquad (21.6)$$

onde n representa o número de cópias produzidas na direção da reta AB e m, o número de cópias geradas na direção da reta BC.

O resultado dessas duas órbitas produz o padrão da figura abaixo.



¹⁰ A expressão $1 + \tau$ é equivalente à órbita $Orb(2, \tau)$.

Proposição 17 Recobrimento do plano por simetria p2.

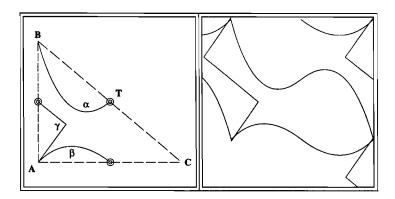


Figura 21.5: Elemento de composição para o grupo p2.

Consideremos um triângulo ABC e os pontos médios de seus lados, PQR. A simetria $\mathbf{p2}$ baseia-se na delimitação de um domínio do plano formado a partir de três curvas, α, β e γ , cujas extremidades estão apoiadas respectivamente sobre os segmentos BP, CQ e AR, conforme ilustrado na figura 21.5.

O procedimento para 'pavimentar' o plano consiste em fazer girar essas curvas em torno dos pontos médios P,Q e R do triângulo. O polinômio que gera uma meia-volta em torno de um ponto qualquer Z é representado pela expressão

$$1 + \operatorname{Tp}(Z) \cdot \operatorname{HT} \cdot \operatorname{Tp}(-Z) \tag{21.7}$$

Fazendo $Z=P,\ Z=Q$ e Z=R em (21.7), construímos três polinômios independentes,

$$a = 1 + \operatorname{Tp}(P) \cdot \operatorname{HT} \cdot \operatorname{Tp}(-P)$$

$$b = 1 + \operatorname{Tp}(Q) \cdot \operatorname{HT} \cdot \operatorname{Tp}(-Q)$$

$$c = 1 + \operatorname{Tp}(R) \cdot \operatorname{HT} \cdot \operatorname{Tp}(-R).$$

Quando submetemos as curvas α, β e γ ao polinômio

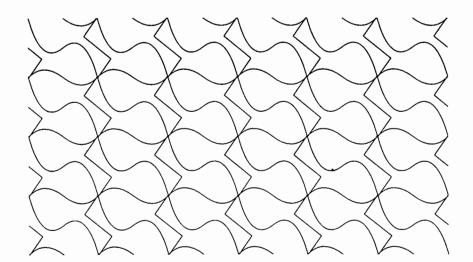
$$1 + a + b + c$$

vemos que suas extremidades superpõem-se, gerando contornos fechados, conforme ilustrado à direita da figura 21.5.

Submetendo a peça de preenchimento assim formada, a translações determinadas pelos vetores B-A e C-A, conforme o polinômio

$$\operatorname{Orb}(n, Tp(B-A)) * \operatorname{Orb}(m, Tp(C-A)).$$

teremos a replicação desse motivo, recobrindo uma região do plano de extensão $n(B-A)\times m(C-A)$.



Proposição 18 Recobrimento do plano por simetria pm.

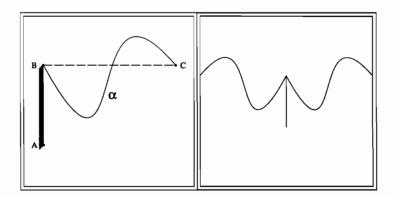
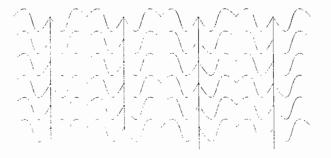


Figura 21.6: Elemento de composição para o grupo pm.

As simetrias pm são geradas por uma reflexão e por translações horizontais e verticais. Consideremos o triângulo retângulo ABC, o segmento de reta AB e uma curva arbitrária α com extremidades nos vértices B e C do triângulo. Essa curva e sua reflexão sobre o eixo AB, está reproduzida na figura 21.6.

Sob o efeito de uma série de translações, horizontais e verticais, produz-se o resultado que segue.



Proposição 19 Recobrimento do plano por simetria p3.

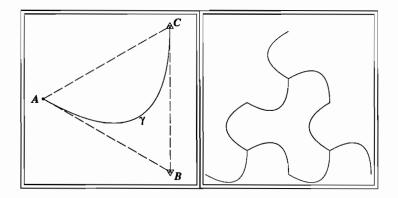


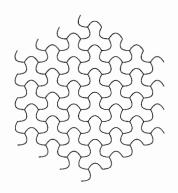
Figura 21.7: Elemento de composição para o grupo p3.

Com extremidades sobre os vértices AC de um triângulo equilátero, ajustamos uma curva arbitrária, conforme ilustrado no triângulo da figura 21.7.

Tomando os vértices A e B como centros de rotação, reproduzimos cópias dessa curva, giradas de 1/3 de volta em torno de cada um desses pontos. Superpondo translações do elemento de composição assim obtido, obtemos a figura reproduzida ao lado.

As colméias das abelhas são um exemplo do grupo de simetria p3. Essas construções são a justaposição de pequenos cilindros circulares. As regiões de contacto entre esses cilindros são preenchidas pelo material produzido pelas abelhas, dando a impressão de um conjunto de hexágonos regulares encostados uns nos outros.

Para desenhar uma colméia usando a derivação acima, substitua a curva da figura 21.7 pelo segmento de reta que une os pontos AC.



Proposição 20 Recobrimento do plano por simetria p4.

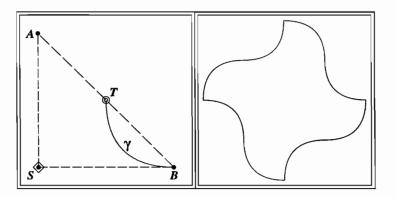


Figura 21.8: Elemento de composição para o grupo p4.

Na figura 21.8, à esquerda, estão representadas as regras do grupo de simetria ${\bf p4}$ para construir um elemento de composição (isto é, o contorno das peças do jogo) para o recobrimento do plano. Essa peça é construída a partir de uma curva arbitrária, que tem uma extremidade no ponto médio T da diagonal AB de um quadrado.

Essa curva será submetida, reiteradamente, às seguintes operações:

1. 1/2 volta em torno do ponto T. Os pequenos círculos concêntricos com centro em T indicam rotações de 1/2 volta em torno desse ponto. Combina-se a curva original γ com sua cópia girada de 1/2 volta em torno de T ao submetê-la à ação do polinômio

$$a = 1 + \text{Tp}(T) \cdot \text{HT} \cdot \text{Tp}(-T).$$

conforme se mostrou na descrição do procedimento 4.

2. 1/4 de volta em torno de S. Pode-se, independentemente do que se fez na etapa 1, obter quatro cópias da curva original, cada uma girada de 1/4 volta em torno de S em relação à curva anterior, se aplicarmos a ela o polinômio¹¹

Orb
$$(4, Tp(S) \cdot QT \cdot Tp(-S))$$
.

Fazendo S coincidir com a origem, a expressão se simplifica, passando a ser

$$b = \text{Orb}(4, QT)$$
,

 $^{^{11}{\}rm O}$ pequeno quadrado que enquadra o ponto S na figura 21.8 indica rotações de 1/4 de volta em torno desse ponto.

razão porque é conveniente, ao desenharmos a figura primitiva, fazer S = [0,0]. Pode-se combinar os efeitos obtidos nas etapas 1 e 2, executando-se o polinômio b*a

3. Translações horizontais. A órbita

$$c = \text{Orb}(m, \text{Tp}(2 * (B - S)))$$
 (21.8)

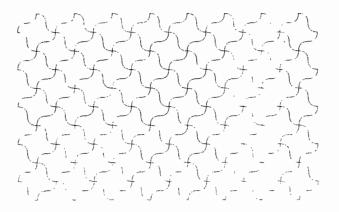
reitera uma translação horizontal que produz n cópias da curva original, onde cada cópia está distanciada de sua antecessora ou sucessora, da mesma distância 2|B-S| Pode-se combinar os efeitos obtidos nas etapas anteriores executando-se o polinômio c*b*a.

4. Translações verticais. A órbita

$$d = \text{Orb}(n, \text{Ty}(2 * (A - S)))$$
 (21.9)

reitera uma translação vertical que produz m cópias da curva original, onde cada cópia está distanciada de sua antecessora ou sucessora, da mesma distância 2|A-S| Pode-se combinar os efeitos obtidos nas etapas anteriores executando-se o polinômio d*c*b*a.

A combinação de todos esses polinômios produz o efeito de recobrir uma extensão do plano determinada pelas dimensões do quadrado e definida pelos parâmetros m e n, conforme ilustra a figura a seguir.



Proposição 21 Recobrimento do plano por simetria p6.

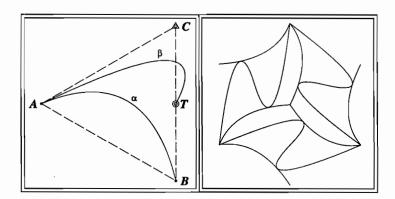


Figura 21.9: Elemento de composição para o grupo p6.

À esquerda da figura 21.9, encontra-se a ilustração do elemento de composição que será usado para exemplificar a simetria do grupo $\mathbf{p6}$. Num triângulo equilátero ABC, determina-se o ponto médio T de um dos lados, digamos, o lado BC. Traçamos duas curvas arbitrárias, ambas partindo do ponto A; uma delas, denotada pela letra grega α , termina no ponto B e a outra, designada pela letra β , tem sua extremidade final no ponto T.

Essas duas curvas, quando submetidas às transformações características do grupo de simetria **p6**, a saber,

 Uma meia-volta em torno do ponto T. Para que a figura original apareça juntamente com sua transformada, submetemos ao polinômio

$$1 + Tp(T) \cdot HT \cdot Tp(-T)$$

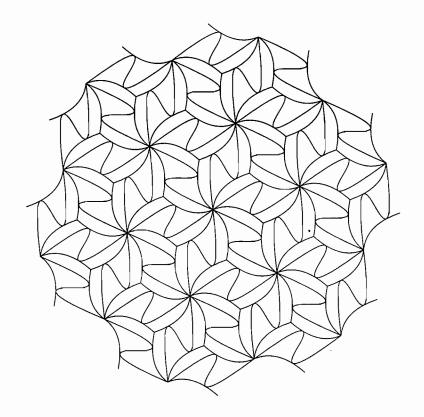
obtido conforme descrito na proposição 17.

 Um terço de volta em torno do ponto C. Para que a figura original apareça juntamente com sua transformada, submetemos ao polinômio

que produz três cópias idênticas do elemento fundamental, cada um girada de 1/3 de volta no sentido anti-horário em relação à sua antecessora. Essa rotação se faz tendo a origem por centro. Por essa razão, ao construirmos a curva, colocamos o ponto C sobre a origem.

assumem o aspecto mostrado na figura 21.9.

A superposição de translações do elemento de composição assim obtido produz a ilustração que segue.



Proposição 22 Recobrimento do plano por simetria p4m.

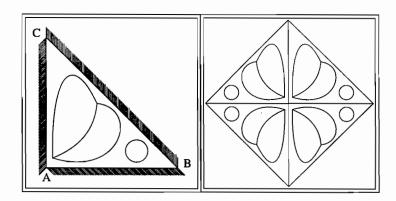


Figura 21.10: Elemento de composição para o grupo p4m.

As simetrias p4m são do tipo caleidoscópico. Elas baseiam-se nas múltiplas reflexões que se obtêm sobre os lados espelhados de triângulo retângulo isóceles (a metade de um quadrado, cortado por sua diagonal), de uma figura inscrita no seu interior. Consideremos o triângulo ABC cujos catetos AB e AC repousam, respectivamente, sobre os eixos horizontal e vertical de referência.

Tomemos por base a figura inscrita no triângulo de faces espelhadas, conforme reproduzido na figura 21.10.

Aplicando à figura de base o polinômio

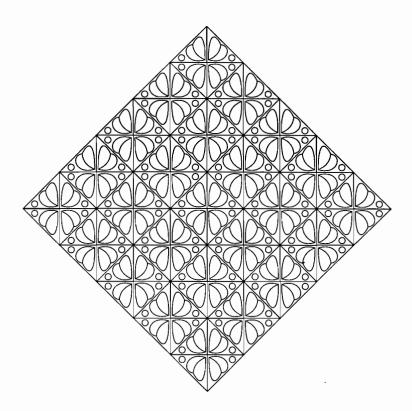
$$(1 + Rx) * (1 + Ry)$$

obtemos um novo elemento de composição, ilustrado à direita da figura 21.10, formado pela figura original de base, à qual se adicionam as três imagens refletidas sobre as três paredes do triângulo retângulo isóceles.

A figura 21.10 mostra o aspecto que o elemento de base toma depois de superposto a suas imagens refletidas sobre os lados do triângulo.

Esse novo elemento de composição, assim formado, serve de motivo para o recobrimento do plano, pela superposição de suas cópias obtidas por meio

da repetição de translações nas direções dos lados do quadrado, de amplitude constante. A figura a seguir ilustra o resultado da aplicação dessas órbitas.



Proposição 23 Recobrimento do plano por simetria p4g.

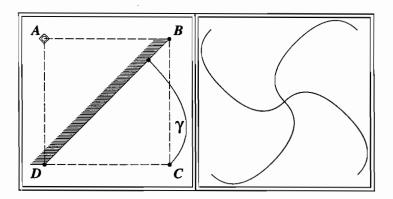
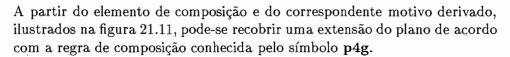


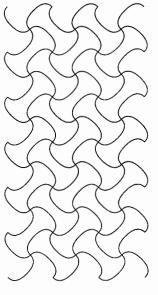
Figura 21.11: Elemento de composição para o grupo p4g.



Neste caso, executam-se reflexões sobre os quatro lados do quadrado de referência que encerra o elemento de composição. Essas quatro reflexões, que produzem o resultado ilustrado na metade direita da figura 21.11, podem ser obtidas submetendo-se o elemento de composição ao polinômio

$$(1 + Rx) * (1 + Ry) = 1 + Rx + Ry + HT.$$

Aplicando-se a esse novo elemento de composição, translações horizontais e verticais, semelhantes aos polinômios de translação (21.8) e (21.9) do exercício 20, obtém-se o resultado final, representado na figura ao lado.



Proposição 24 Recobrimento do plano por simetria p31m.

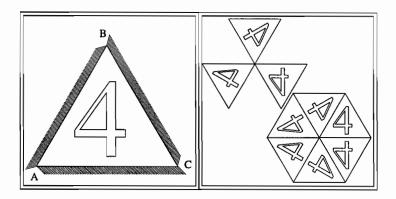


Figura 21.12: Elemento de composição para o grupo p31m.

As simetrias do grupo **p31m**, como as do grupo **p4m**, examinadas no exercício 20, são do tipo caleidoscópico. As paredes refletoras, neste caso, formam um triângulo equilátero.

Consideremos o triângulo equilátero ABC com centro na origem. À esquerda da figura 21.12 encontra-se o elemento de base que será usado para a composição que irá recobrir uma extensão do plano segundo as regras do grupo caleidoscópico **p31m**. Colocamos os vértices do triângulo ABC nas posições

$$A = [-\sqrt{3}, 1] * r/2$$

$$B = [0, 1] * r$$

$$C = [\sqrt{3}, 1] * r/2$$

onde r é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

O elemento de base das simetrias **p31m** pode ser qualquer figura delimitada por um triângulo equilátero.

As reflexões do elemento de base sobre os lados do triângulo podem ser obtidas a partir de composições de transformações, envolvendo as reflexões elementares Rx ou Ry. As transformações primitivas Rx e Ry produzem imagens refletidas respectivamente sobre os eixos horizontal ou vertical de referência. Por essa razão devemos fazer coincidir, antes de refletir, as faces refletoras do triângulo, sobre esses eixos.

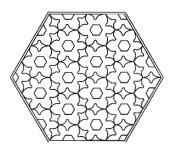
Construímos as transformações

$$\begin{aligned} \theta &= \mathrm{CyT}(1/6) \\ \alpha &= \mathrm{Inv}(\theta) \cdot \mathrm{Rx} \cdot \theta \\ \beta &= \mathrm{Inv}(\theta) \cdot \alpha \cdot \theta \\ \gamma &= \mathrm{Inv}(\theta) \cdot \beta \cdot \theta. \end{aligned}$$

onde θ representa uma rotação de 1/6 de volta no sentido anti-horário, em torno da origem.

O segundo elemento da figura 21.12 ilustra o resultado da aplicação, ao elemento de base do polinômio

$$(\alpha + \beta + \gamma) * \operatorname{Tp}(-A).$$



A partir da figura obtida, por reflexão sobre a reta horizontal, obtemos uma nova composição, onde as diversas imagens formadas por reflexão do elementos de base recobrem a área delimitada por um hexágono regular, conforme aparece à direita da figura 21.12.

Por meio de translações sucessivas pode-se pavimentar uma região selecionada, conforme ilustrado na figura ao lado.

Proposição 25 Recobrimento do plano por simetria cm.

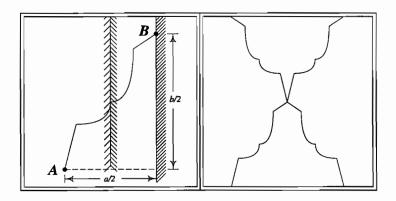
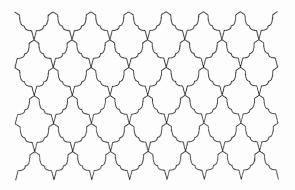


Figura 21.13: Elemento de composição para o grupo cm.

A simetria **cm** é gerada por uma reflexão simples sobre o eixo vertical que passa por B (veja figura 21.13) e por uma reflexão com deslocamento, também na direção vertical, que passa pelo ponto médio do segmento AB.

A curva que liga os pontos AB transforma-se no contorno de uma região fechada, quando submetida às transformações características do grupo ${\bf cm}$. A composição da direita na figura 21.13 representa o resultado da aplicação das transformações características à curva inicial. Esse elemento de composição assim obtido é, em seguida, submetido à ação combinada de translações horizontais e verticais, para produzir o resultado ilustrado abaixo.



Proposição 26 Recobrimento do plano por simetria cmm.

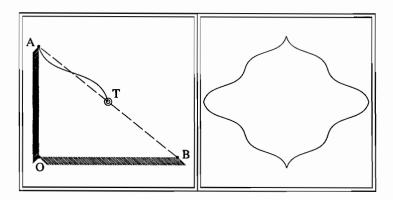


Figura 21.14: Elemento de composição para o grupo cmm.

O grupo de simetria cmm tem como transformações características:

- ullet uma meia-volta em torno do ponto médio T da hipotenusa AB de um triângulo retângulo AOB,
- uma reflexão sobre o cateto OA e
- uma reflexão sobre o cateto OB.

Essas transformações superpostas combinam uma curva, com extremidades em AT num contorno fechado, que se ajusta sobre si mesma. A curva ilustrada juntamente com a representação das três transformações acima, na parte esquerda da figura 21.14, produz o contorno fechado que aparece à sua direita.

Submetida à combinação das órbitas de duas translações,

$$Orb(m, Ty(a)) * Orb(n, Tx(b))$$

o elemento de composição gera a figura ao lado.



Proposição 27 Recobrimento do plano por simetria pmm.

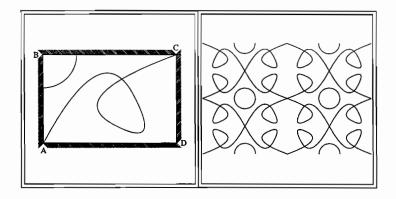


Figura 21.15: Elemento de composição para o grupo pmm.

As simetrias pmm são geradas por quatro reflexões sobre as quatro arestas de um retângulo ABCD (veja figura 21.15).

Dispomos o retângulo fazendo o vértice A coincidir com a origem e os lados AD e AB repousarem, respectivamente, sobre os eixos horizontal e vertical de referência. Dessa forma, as reflexões sobre os lados AD e AB são representadas, respectivamente, pelas transformações primitivas Rx e Ry.

Para representarmos as reflexões sobre os lados BC e CD, usamos as expressões

$$t = \operatorname{Tp}(B, C) \cdot \operatorname{Rx} \cdot \operatorname{Inv} \left(\operatorname{Tp}(B, C) \right)$$
$$v = \operatorname{Tp}(D, C) \cdot \operatorname{Rx} \cdot \operatorname{Inv} \left(\operatorname{Tp}(D, C) \right)$$

pois a transformação $\operatorname{Inv}(\operatorname{Tp}(X,Y))$ converte um segmento qualquer XY no segmento com as extremidades nos pontos [0,0] e [1,0], e a transformação $\operatorname{Tp}(X,Y)$ realiza a operação inversa. A intercalação da transformação Rx nas expressões acima produz o resultado desejado.

Aplicando-se o polinômio

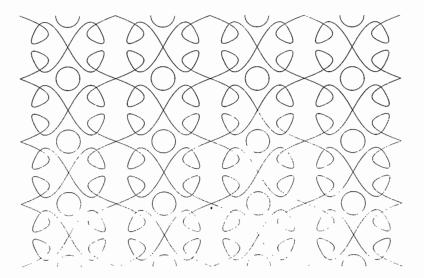
$$(1+t)*(1+v)*(1+Rx+Ry+HT)$$

à figura original representada à esquerda da figura 21.15, obtemos o elemento de composição ilustrado à direita dessa mesma figura.

A aplicação das órbitas combinadas na expressão

$$\mathrm{Orb}\left(n,\mathrm{Ty}(b+b)\right)*\mathrm{Orb}\left(m,\mathrm{Tx}(a+a)\right),$$

à peça de composição obtida, gera a figura ilustrada a seguir.



Proposição 28 Recobrimento do plano por simetria pmg.

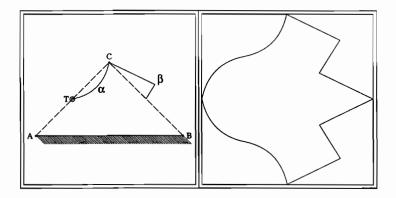


Figura 21.16: Elemento de composição para o grupo pmg.

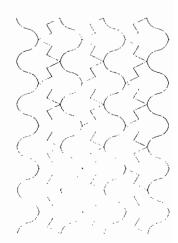
As simetrias do grupo pmg são caracterizadas por duas transformações definidas sobre a metade de um quadrado, recortado por uma diagonal. No ponto médio T de um dos lados desse quadrado, localiza-se o centro de uma meia-volta, e a diagonal XY desse quadrado representa um eixo de reflexão.

Para reproduzir a curva arbitrária α desenhada com uma das extremidades sobre o ponto T, e a outra sobre o vértice C do quadrado (veja figura 21.16), executamos as seguinte operações:

 fazemos uma cópia da curva adicionando-lhe uma sua imagem obtida da aplicação de uma meia-volta em torno do ponto T. Essa transformação pode ser representada pela expressão

$$Tp(T) \cdot HT \cdot Tp(-T)$$
.

 refletimos essa nova imagem composta sobre o eixo horizontal, executando a transformação Rx, obtendo assim a peça que aparece à direita da figura 21.16.



Proposição 29 Recobrimento do plano por simetria pg.

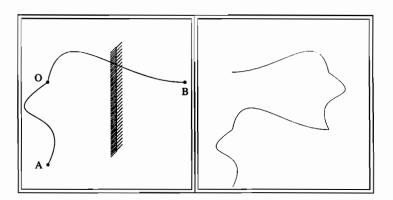


Figura 21.17: Elemento de composição para o grupo pg.

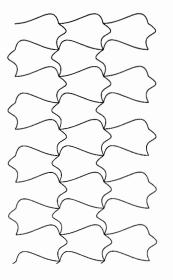
As simetrias do grupo pg são produzidas por uma reflexão com deslocamento e complementadas por translações. As reflexões com deslocamento estão representadas pela linha vertical duplamente hachurada que passa pelo ponto médio do segmento AB. Uma curva arbitrária, apoiada nos vértices AOB de um triângulo retângulo, conforme ilustrado na figura 21.17 é refletida sobre o eixo vertical ao mesmo tempo em que sofre uma translação também vertical. Com essa reflexão combinada à translação, o ponto A passa a coincidir com o ponto B, conforme se pode observar na imagem à direita da figura 21.17.

Obtém-se a composição final, após a repetição de translações nas direções horizontal e vertical, conforme as órbitas

$$\mathrm{Orb}\left(m,\mathrm{Tx}(b)\right)\cdot\mathrm{Orb}\left(n,\mathrm{Ty}(2*a)\right)$$

onde a é o comprimento do cateto OA do triângulo e b, o comprimento do outro cateto, OB.

Os valores de m e n determinam o número de repetições do motivo elementar nas direções horizontal e vertical, respectivamente e, portanto, a extensão da superfície recoberta por ele. O efeito dessa composição pode ser observado na figura ao lado.



Proposição 30 Recobrimento do plano por simetria pgg.

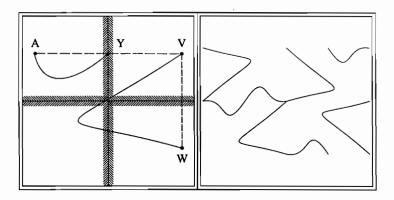


Figura 21.18: Elemento de composição para o grupo pgg.

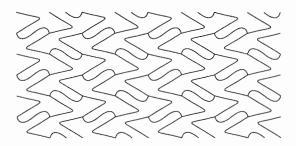
Nas simetrias pgg, curvas arbitrárias podem formar contornos fechados por reflexões ortogonais com deslizamento. Tomam-se os eixos horizontal e vertical de referência como eixos de reflexão com deslizamento. As transformações que produzem essas reflexões são descritas pelas expressões

$$Rx \cdot Tx(a)$$

 $Ry \cdot Ty(b)$

que promovem, além de uma translação, uma reflexão conjugada.

A imagem da esquerda na figura 21.18 ilustra essas transformações e a imagem da direita, o efeito de suas aplicações à curva elementar. Submetendose essas composições a translações horizontais e verticais, obtemos o efeito da figura seguinte.



Proposição 31 Recobrimento do plano por simetria p3m1.

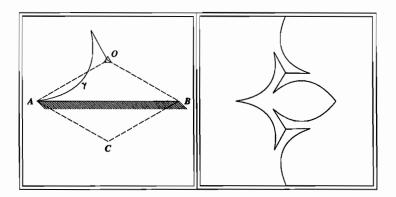
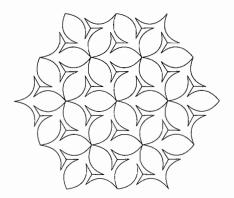


Figura 21.19: Elemento de composição para o grupo p3m1.

As simetrias do grupo **p3m1** combinam uma rotação de 1/3 de volta, em torno de um dos vértices de um triângulo equilátero, e uma reflexão sobre um de seus lados.

Na figura 21.19 o vértice A do triângulo está sobre o eixo horizontal de referência que também serve de eixo refletor. As rotações de 1/3 de volta são feitas em torno do centro O do triângulo. O efeito dessas duas transformações combinadas pode ser observado na parte direita da figura 21.19. Submetendo-se o resultado obtido a uma composição dessas transformações, obtém-se a figura abaixo.



Proposição 32 Recobrimento do plano por simetria p6m.

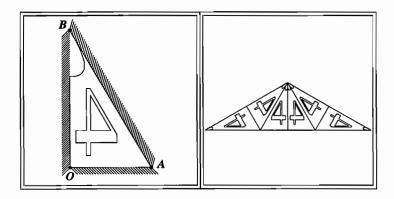


Figura 21.20: Elemento de composição para o grupo p6m.

Os geradores do grupo de simetrias **p6m** são três reflexões sobre os lados da metade de um triângulo equilátero, conforme ilustrado à esquerda da figura 21.20.

A metade de um triângulo equilátero é um triângulo retângulo cujos catetos dispomos apoiados nos eixos horizontal e vertical, de forma que as reflexões primitivas Rx e Ry coincidam com duas das reflexões que geram as simetrias **p6m**. Por essa razão a imagem do algarismo '4' aparece invertida. A outra reflexão, sobre a hipotenusa do triângulo, pode ser representada pela expressão

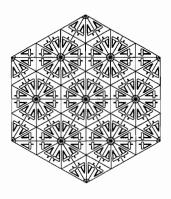
$$s = \operatorname{Tp}(A, B) \cdot \operatorname{Rx} \cdot \operatorname{Inv}(\operatorname{Tp}(A, B))$$

Construímos então, o polinômio

$$p = (1 + Ry) * (1 + s * (1 + Rx))$$

que, quando aplicado ao elemento de composição produz como, resultado, a peça que aparece à direita da figura 21.20.

Seguimos, então, os mesmos procedimentos descritos na proposição 21 para obter o resultado ao lado.



21.4 Simetrias não-congruentes

Proposição 33 Construir simetrias a partir de órbitas de transformações afins.

Neste exercício apresentamos o processo construtivo da figura da página 220.

Consideremos a figura ao lado, gerada a partir de um arco de parábola inscrito num triângulo retângulo isóceles (a metade de um quadrado, cortado em sua diagonal.). Superpomos essa curva à sua imagem refletida pela hiponetusa do triângulo. As extremidades desses dois arcos assim formados tocam-se em dois vértices opostos do quadrado.

Podemos representar essas duas curvas por meio da rota

$$(AB_{\overline{\cdot}}CD)$$

onde os pontos A, B, B_1, C e D = A representam os vértices do quadrado. Observe que na rota, o ponto B_1 está representado pelo símbolo ' \bot '.

Se definirmos uma variável d para representar o comprimento (em unidades de pixel) do lado do quadrado, podemos estabelecer as seguintes coordenadas para os vértices do quadrado

$$A = [-d, d]$$

$$B = XY(B_1, A)$$

$$B_1 = -A$$

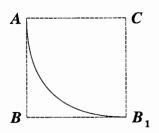
$$C = -B$$

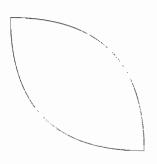
$$D = A$$

A função $XY(B_1,A)$ determina um ponto cuja componente horizontal é a mesma de B_1 e cuja componente vertical, a mesma de A. Essa função fornece um resultado idêntico ao da expressão $[Re(B_1), Im(A)]$.

Podemos transformar essa figura no elemento geratriz de uma composição, se a submetermos à órbita de alguma transformação. A título de exemplo, consideremos o polinômio geométrico

$$\mathrm{Orb}(n, \mathrm{S}_{\mathbf{x}}(1.035) \cdot \mathrm{S}_{\mathbf{y}}(0.975) \cdot \mathrm{Rot}(3))$$



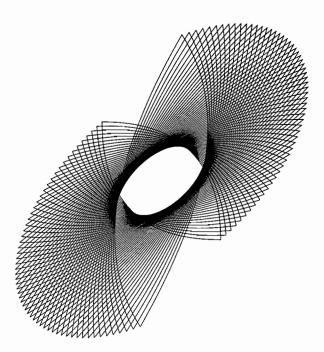


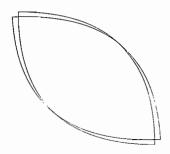
onde,

- n é o número de réplicas transformadas pela transformação expressa pela composição que aparece à direita da vírgula. Experimento com diferentes valores de n; na figura ao lado, n = 60.
- 2. A transformação $S_x(1.035)$ provoca uma dilatação horizontal de 3.5%;
- 3. A transformação $S_y(0.975)$ provoca uma contração vertical de 97.5%;
- 4. A transformação Rot(3) provoca uma rotação de 3º em torno do centro da tela.

O segundo argumento de Orb — a expressão que aparece à direita da vírgula — representa a *composição* das transformações 2, 3 e 4, nessa ordem. Embora a especificação de uma composição de transformações deva ser feita nessa ordem, o computador executa-as seguindo a ordem inversa.

Assim, para conhecermos o efeito composto dessas transformações, devemos ler a expressão da direita para a esquerda: em cada iteração, a figura sofre, em relação à anterior, primeiro uma rotação de 3°, em seguida uma contração vertical de 97.5% e, finalmente, uma dilatação horizontal de 3.5%. Esta ressalva é importante pois a composição de transformações não é uma operação comutativa.





Proposição 34 Desenhar uma árvore estilizada

Pode-se construir, a partir da folha estilizada, desenvolvida no exercício 5, uma estrutura que lembra uma árvore.

Para isso construimos primeiramente um "galho" da árvore, aplicando à folha da proposição 5, um polinômio do tipo

$$Orb(n, Rx \cdot \mu \cdot \tau), \qquad (21.10)$$

onde n é o número de folhas no galho, μ é uma contração (homotetia com fator f<1) e τ , uma translação. O resultado pode ser observado na figura 21.21.



Figura 21.21: Estilização de um galho de árvore

Em seguida, usamos essa composição como elemento final, ilustrada ao lado, submetendo-o ao polinômio

$$\operatorname{Orb}(m,\operatorname{Ry}\cdot\lambda\cdot\phi),$$

semelhante ao expresso em (21.10), onde m é o número de galhos da árvore, λ é uma contração e ϕ , uma translação.



Proposição 35 Simetria de similaridade

Neste ensaio construiremos um logotipo baseado em espirais equiangulares (ou espirais logarítmicas) que lembra uma curva francesa.

Toda espiral equiangular tem um centro que é, ao mesmo tempo, o centro de uma rotação e de uma homotetia. Denotemos por O esse ponto.

Podemos definir uma espiral por três pontos: seu centro e dois pontos, digamos, A e B sobre a curva. A forma mais compacta para se representar analiticamente uma espiral equiangular é por meio de coordenadas polares ou por números complexos. Adotaremos a segunda representação. Um ponto qualquer da curva pode ser caracterizado por seu raio vetor, isto é, um vetor com origem no centro da espiral e a outra extremidade no ponto considerado da curva. Assim, o raio vetor de um ponto P qualquer sobre a curva é definido pelo número complexo P-O.

Para descrever completamente a curva, isto é, podermos determinar um ponto qualquer sobre ela, calculamos inicialmente o número complexo determinado pelos raios vetores B-O e A-O.

$$z = \frac{B - O}{A - O}$$

Qualquer ponto P da curva poderá ser expresso na forma

$$P = O + (A - O)z^t$$

onde t é um número real.

As coordenadas desse ponto podem ser determinadas a partir das funções complexas exp e ln, por meio da expressão

$$P = O + (A - O) * \exp(t * \ln(z)).$$

Para construir o logotipo, estabelecemos as posições dos três pontos O, A e B que determinam a espiral equiangular bem como o valor do número t. A partir desses valores, desenhamos a espiral e determinamos a posição do ponto P.

Um outro ponto Q, sobre a mesma espiral, pode ser determinado a partir da posição do ponto P, por exemplo, segundo a expressão

$$Q = O + (P - O) * z * z$$

Para podermos construir a simetria por meia-volta, determinamos o ponto médio M do segmento AP

$$M = (A + P)/2$$

Conhecido esse ponto, podemos determinar o ponto C, de origem da espiral externa, por meio da expressão

$$C = 2 * M - Q$$

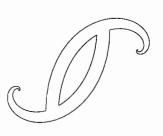
garantindo que M seja também ponto médio do segmento QC.

Escolhemos um ponto D, também arbitrário, que juntamente com C e O fixam os três pontos que determinam a espiral externa e a desenhamos.

Para obtermos o resultado desejado, deslocamos toda a figura para o centro da tela, o que se consegue executando a translação $\operatorname{Tp}(-M)$ e, em seguida promovemos uma meia-volta, superposta à figura original. Isso se consegue por meio do polinômio:

$$(1 + HT) \cdot Tp(-M)$$
.

O resultado pode ser visto na figura ao lado.



Parte VII

Apêndices

Apêndice A

Curvas cônicas

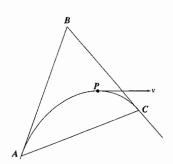
A.1 Especificação de uma curva cônica

Neste apêndice trataremos de três formas alternativas de se representar arcos de curva cônicos, a saber, a representação baricêntrica, a paramétrica e a cartesiana. É a partir delas que se instrui o computador para, dadas as especificações de um arco de cônica fornecidas pelo desenhista, desenhá-lo com precisão.

Uma das formas mais convenientes para um desenhista comunicar a forma desejada de um arco de curva cônica ao computador é a partir da fixação de quatro pontos: três deles, A, C e P, sobre a curva e um quarto ponto, B, fora dela.

Pode-se imaginar esse arco de curva como a trajetória de um ponto material que se move com velocidade v (ver figura ao lado). O ponto parte de A com uma velocidade proporcional ao comprimento do lado AB e chega a C a uma velocidade proporcional ao comprimento do lado BC.

Considere na figura A.1 o arco de curva que tem por pontos de referência os vértices do triângulo A,B,C e um ponto P sobre a curva. Para definir corretamente um arco, o ponto P deve ser interno ao ângulo formado pelas semi-retas BA e BC. Veremos a seguir, que dependendo da posição do ponto P em relação ao triângulo ABC, poderemos especificar um arco de



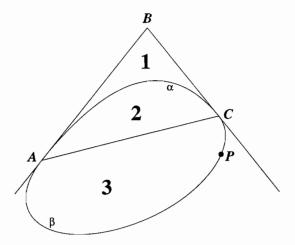


Figura A.1: Cônica inscrita num triângulo ABC

hipérbole, de parábola ou de elipse. A curva especificada por esse método será tangente ao lado AB no vértice A do triângulo ABC e tangente ao lado AC no ponto C.

A forma que apresentamos acima para definir um arco de cônica é conveniente para o desenhista, mas não é a mais econômica. De fato, ao fixar os quatro pontos A, B, C e P, estamos envolvendo oito número reais. Pode-se mostrar, no entanto, que bastam sete números reais (seis correspondentes aos três pontos A, B e C e um sétimo, μ , suficiente para determinar completamente o arco).

Para entender esse fato, examinemos a situação semelhante que ocorre na definição de uma circunferência, ocasião em que se pode adotar uma das seguintes duas alternativas:

- fixando seu centro C e um ponto P sobre a circunferência.
- fixando seu centro C e seu raio r.

Comparando esses dois métodos, percebemos que, enquanto o primeiro exige a fixação de quatro números reais, a saber, as duas coordenadas do centro C e as duas outras do ponto P, o segundo exige apenas três. Um

exame mais atento mostra, no entanto, que esses dois métodos não são de fato equivalentes pois do primeiro pode-se chegar ao segundo, mas a partir do segundo não se consegue chegar ao primeiro, isto é, determinar a posição do ponto P.

Do ponto de vista de quem estiver interessado na construção da circunferência como um todo, e não tiver nenhum interesse particular no ponto P, o segundo método será preferível por ser mais econômico. Do ponto de vista do desenhista, porém, o segundo método é mais apropriado, pois um ponto é um objeto capaz de dar uma idéia melhor, mais visual do arco.

O mesmo se dá com a especificação da cônica: ambos os métodos permitem a deteminação do arco, mas apenas o primeiro está associado a um ponto específico desse arco. Como neste apêndice estamos olhando os arcos de curva do ponto de vista não do desenhista, mas do computador, adotaremos a especificação feita em termos de um parâmetro real μ .

Uma vez fixados os quatro pontos A, B, C e P pelo desenhista, pode-se, a partir de suas coordenadas, calcular o valor do parâmetro μ .

A forma da curva é determinada pelo parâmetro μ , conforme mostrado na tabela A.1.

A curva correspondente ao valor $\mu=0$, denotada na figura A.1 pela letra grega α , é uma parábola. O ângulo delimitado pelas semi-retas BA e BC está dividido em três regiões:

- a região 1, delimitada pela parábola α e pelos segmentos AB e BC corresponde ao domínio das hipérboles;
- $\bullet\,$ a região 2, delimitada pela parábola α e pelo lado AC corresponde ao domínio das elipses internas ao triângulo;
- a região 3, delimitada pelo prolongamento dos segmentos BA (a semi-reta que passa por AB, mas não contém B) pelo prolongamento dos segmentos BC (a semi-reta que passa por BC, mas não contém B) e pelo segmento AC é a região complementar das elipses, externa ao triângulo ABC.

¹A parábola α , especificada pelas convenções acima, é a mesma curva que se obtém quando, numa rota, três pontos consecutivos forem delimitados pelos símbolos abre '(' e fecha parênteses ')'.

$-1 < \mu < 0$	arco de hipérbole inscrito em ABC
$\mu = 0$	arco de parábola inscrito em ABC
$0 < \mu < 1$	arco de elipse inscrito em ABC
$\mu = 1$	segmento de reta BC
$\mu > 1$	arco de elipse circunscrito a ABC

Tabela A.1: Curvas cônicas determinadas por um parâmetro real μ .

A.2 Representação baricêntrica

A representação baricêntrica permite determinar a posição de qualquer ponto da curva em referência aos vértices $A,B\in C$ do triângulo da figura A.1 e do valor da variável μ . Ela permite também determinar as posições dos pontos notáveis das curvas cônicas, a saber, o vértice e o foco da parábola, o centro, os focos e os eixos maior e menor da elipse ou da hipérbole, etc.

Para os cálculos adiante, definimos as variáveis complexas $U, V \in W$, expressas em termos desses três pontos:

$$V = A - B$$

$$U = C - B$$

$$W = C - A$$

Se X denota um ponto qualquer da curva, suas coordenadas baricêntricas podem ser expressas por meio das identidades:

$$a_0 = \frac{V \otimes (X - B)}{V \otimes U},$$

$$a_1 = -\frac{W \otimes (X - A)}{W \otimes U} = -\frac{W \otimes (X - C)}{W \otimes V}$$
 e
$$a_2 = \frac{U \otimes (X - B)}{U \otimes V}$$

Utilizamos aqui a notação $a \otimes b$ para representar o produto vetorial ² do vetor $a = [a_x, a_y]$ pelo vetor $b = [b_x, b_y]$, que se define pela identidade:

$$a \otimes b = a_x b_y - a_y b_x$$

Lembrando que $V \otimes U = -U \otimes V$, tem-se, das relações acima, a identidade

$$(V \otimes U) \times (U \otimes V) = -(W \otimes U)^{2}$$

donde, substituindo na identidade fundamental de uma curva cônica na representação baricêntrica,

$$a_0 \cdot a_2 = ka_1^2 \tag{A.1}$$

onde

$$k = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu + 1}{\mu - 1} \right),\,$$

resulta

$$(V \otimes (X - B) \times (U \otimes (X - B)) = k(W \otimes (X - A) \times (W \otimes (X - C))$$

Definindo as variáveis

$$\begin{array}{ll} v = (V \otimes X) & p = (V \otimes B) \\ u = (U \otimes X) & q = (U \otimes B) \\ w = (W \otimes X) & r = (W \otimes A) \end{array} ,$$

podemos reescrever a equação da cônica na forma

$$(v-p)(u-q) = -k(w-r)^{2}$$
(A.2)

² As coordenadas baricêntricas aplicam-se a uma figura no espaço. Estamos usando-a aqui na sua representação plana. O produto vetorial, assim como o produto escalar, são operações originárias dos "quatérnions" de W. R. Hamilton. Segundo Girard, foi J. W. Gibbs, matemático norte-americano, quem os dissociou e lhes deu conotações independentes [20].

A.2.1 Pontos notáveis das curvas cônicas

Definindo os parâmetros³:

$$\begin{split} \epsilon &= \frac{(\mu+1)^2}{8\mu}, \\ \alpha &= |U|^2, \\ \beta &= U \cdot V, \\ \gamma &= |V|^2, \\ \delta &= \alpha \gamma - \beta^2 = |U \times V|^2, \\ \zeta &= \alpha + \gamma + 2\beta = |U + V|^2, \\ \eta &= \alpha + \gamma - 2\beta = |U - V|^2, \end{split}$$

temos as seguintes fórmulas:

Centro da cônica	$C = B + \epsilon(U + V)$
Vértice da parábola	$X = B + \left(\frac{\gamma + \beta}{\zeta}\right)^2 U + \left(\frac{\alpha + \beta}{\zeta}\right)^2 V$
Foco da parábola	$F = B + \frac{\gamma U + \alpha V}{\zeta}$

A.3 Representação paramétrica

Uma curva cônica pode também ser escrita em termos de um parâmetro real t:

$$P(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \left[(1-t)^2 Q_0 + 2t(1-t)Q_1 + t^2 Q_2 \right], \tag{A.3}$$

onde

$$\sigma(t) = 1 + \mu(1 - 2t)^2$$

³As expressões acima foram retiradas de [34].

e os pontos Q_0 , Q_1 e Q_2 têm as coordenadas:

$$Q_0 = (1 + \mu)A$$

 $Q_1 = (1 - \mu)B$
 $Q_2 = (1 + \mu)C$

onde A,B e C são os vértices do triângulo da figura A.1 e μ , o parâmetro da cônica, conforme definido em A.2.

Observe-se que a expressão entre chaves em (A.3) corresponde a uma parábola. Pode-se imaginar que, à medida que t aumenta, o denominador $\sigma(t)$ modula a posição de cada ponto da parábola, transformando-a numa outra cônica (uma elipse ou uma hipérbole).

A.4 Representação cartesiana

A representação cartesiana é mais comumente usada nos livros-texto de Geometria Analítica. Aqui, diferentemente do que ocorre nas representações paramétricas, as posições dos pontos da curva não são definidos por uma função de trajetória, mas por uma equação que as coordenadas x e y de cada ponto da curva deve satisfazer. A equação das curvas cônicas é da forma polinomial quadrática, um caso particular de (13.8),

$$Ax^{2} + 2Bxy + Cy^{2} + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$
 (A.4)

Os coeficientes A, B, C, D, E e F da equação (A.4) da curva cônica podem ser obtidos a partir da representação baricêntrica, por meio da identidade (A.2)

$$A = k(y_2 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)(y_0 - y_1)$$

$$B = -k(x_2 - x_0)(y_2 - y_0) - \left[(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) + \frac{1}{2}(x_0 - x_1)(y_2 - y_1) \right]$$

$$C = k(x_2 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)(x_0 - x_1)$$

$$D = \frac{1}{2} \left[p(y_0 - y_1) + q(y_0 - y_1) \right] + kr(y_2 - y_0)$$

$$E = -\frac{1}{2} \left\{ \left[p(x_0 - x_1) + q(x_2 - x_1) \right] + kr(x_2 - x_0) \right\}$$

$$F = pq + kr^2$$

As coordenadas do centro da cônica são dadas pela solução do sistema

de equações [15]:

$$Ax_0 + By_0 + D = 0$$

$$Bx_0 + Cy_0 + E = 0$$

Designando por δ o determinante

$$\delta = \left\| egin{array}{cc} A & B \ B & C \end{array} \right\|$$

A grandeza $\delta=AC-B^2$ é composta dos coeficientes dos termos quadráticos da cônica. As coordenadas do centro podem ser obtidas, portanto, a partir das identidades:

$$x_0 = \frac{1}{\delta} \left\| \begin{array}{cc} B & D \\ C & E \end{array} \right\|; \qquad y_0 = \frac{1}{\delta} \left\| \begin{array}{cc} D & A \\ E & B \end{array} \right\|$$

ou, numa forma mais apropriada à conversão para uma linguagem de programação:

$$x_0 = \frac{(BE - CD)}{\delta}, \qquad y_0 = \frac{(BD - AE)}{\delta}$$

Quando $\delta=0$, a cônica não tem centro: trata-se, portanto, de uma parábola. Se denotarmos por x' e y' as coordenadas dos pontos da cônica em relação ao centro $[x_0,y_0]$, a representação cartesiana da cônica simplifica-se para

$$Ax'^{2} + 2Bx'y' + Cy'^{2} + F' = 0.$$

onde $F' = Dx_0 + Ey_0 + F$.

A.4.1 Cônicas com centro

Nos casos em que $\delta \neq 0$, a equação da cônica pode simplificar-se ainda mais, passando a ser apresentada pela identidade

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$$

Para se determinar os valores de A' e C' podemos valer-nos das seguintes identidades

$$A' = A\cos(2\alpha) + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin(2\alpha)$$

$$B' = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha))$$

$$C' = A\sin(2\alpha) - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos(2\alpha)$$

$$A' + C' = A + C$$

$$A' - C' = (A - C)\cos(2\alpha) + 2B\sin(2\alpha)$$

$$2B' = (C - A)\sin(2\alpha) + 2B\cos(2\alpha)$$

ou, vetorialmente, em termos do produto escalar:

$$C' + A' = C + A$$

 $C' - A' = ([\cos(2\alpha), \sin(2\alpha)]|[C - A, 2B])$

A tangente do ângulo 2α é facilmente obtida a partir da relação B'=0 (A.4.1):

$$\tan(2\alpha) = \frac{2B}{C - A}$$

A representação canônica da cônica é

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $\pm a^2 = -\frac{F'}{A'}$ e $\pm b^2 = -\frac{F'}{C'}$. Os sinais dos coeficientes da representação canônica devem ser determinados a partir da identidade

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$$

A partir desses valores, é possível conhecer as coordenadas dos vértices e dos focos em relação aos eixos canônicos. Para determinar as coordenadas desses pontos em relação aos eixos originais, é necessário aplicar a transformação inversa. Assim, se os pontos da cônica sofreram a transformação composta

$$Rot(\alpha) \cdot Tp([x_0, y_0]),$$

os pontos notáveis deverão sofrer a transformação inversa

$$\operatorname{Tp}\left(\left[-x_0,-y_0\right]\right)\cdot\operatorname{Rot}(-\alpha)$$

Assim, nas coordenadas reduzidas, os vértices tem coordenadas [0,a], [b,0] e os focos, coordenadas $[0,\pm c]$, onde c é obtido da relação $a^2+c^2=b^2$.

A.5 Pontos notáveis das cônicas

A.5.1 Parábola

Pode-se obter as coordenadas do vértice V da parábola inscrita no triângulo ABC por meio da expressão complexa PVx(A,B,C), onde A,B e C são as coordenadas dos vértices do triângulo no qual a parábola está inscrita.

Foco da parábola. As coordenadas do foco F da parábola inscrita no triângulo ABC podem ser obtidas por meio da expressão complexa

$$PFc(A, B, C)$$
,

onde A,B e C são as coordenadas dos vértices do triângulo no qual a parábola está inscrita.

Eixo e diretriz da parábola. A reta que passa pelo foco F e pelo vértice V da parábola inscrita no triângulo ABC é denominada eixo da parábola. Ela divide a parábola em duas metades simétricas. A diretriz da parábola é a reta dd', que passa pelo ponto P (simétrico de F em relação a V) e é perpendicular ao eixo da parábola.

A.5.2 Elipse

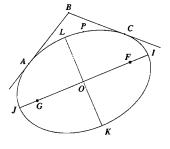
Focos da elipse. Há dois focos F e G, dispostos sobre o eixo máximo IJ da elipse, simétricos em relação ao centro O.

A soma

$$FP + GP = 2a$$

das distâncias que separam os focos da elipse de qualquer ponto ${\cal P}$ sobre a elipse é constante.

Para se obter as coordenadas do foco mais próximo do ponto B do triângulo, utiliza-se a função $\operatorname{CnFP}(A,B,C,P)$.



O outro foco pode ser determinado a partir deste, e do centro da elipse. Seja $F = \operatorname{CnFP}(A, B, C, P)$ um dos focos, e $C = \operatorname{CnFP}(A, B, C, P)$ seu centro. Então,

$$G = 2C - F$$
.

Centro da elipse. Pode-se obter as coordenadas do centro da elipse por meio da função complexa CnCP(A, B, C, P) ou criando-se um novo ponto com essas coordenadas.

Vértices. A elipse possui 4 vértices: I e J são os vértices relativos a seu eixo máximo e K e L são os vértices relativos a seu eixo mínimo.

Os vértices opõem-se dois a dois em relação ao centro Ω . Denota-se o comprimento do segmento IJ por 2a e por 2b o comprimento do segmento KL (figura à página 304.).

e ded Co_{gr}adia

Apêndice B

Curvas de Bézier

Uma curva de Bézier de grau n é definida por meio do polinômio de Bernshteĭn 1

$$\mathbf{B}_{n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{k} (1-t)^{n-k} \mathbf{P}_{k},$$
 (B.1)

onde os \mathbf{P}_k são pontos do plano (ou do espaço) denominados pontos de controle.

Se adotarmos a notação \mathbf{P}^k em lugar de \mathbf{P}_k , podemos representar (simbolicamente) a expressão (B.1) na forma[50]:

$$\mathbf{B}_n(t) = \left[t\mathbf{P} + (1-t)\right]^n,$$

É fácil verificar que:

$$\mathbf{B}_n(0) = \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{B}_n(1) = \mathbf{P}_n.$$
 (B.2)

¹De acordo com D. E. Knuth [32], Sergei N. Bernshteĭn utilizou esses polinômios em 1912, em seu trabalho pioneiro sobre aproximações. P. Bézier foi o primeiro a explorar as propriedades computacionais das curvas que levam seu nome para implementar em o programa UNISURF (operacional a partir de 1972), destinado à modelagem de superfícies no projeto de carrocerias de automóveis da empresa Régie Renault [43].

Para n=0, a curva de Bézier resume-se a um ponto, \mathbf{P}_0 . Para n=1, a curva é uma reta e a expressão (B.1) coincide com a conhecida fórmula de interpolação linear:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(1-t) + \mathbf{P}_1 t \tag{B.3}$$

B.1 Bézier quadrática — parábola

Examinemos nesta seção o caso n=2:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}(1-t)^2 + 2\mathbf{B}t(1-t) + \mathbf{C}t^2$$
 (B.4)

B.1.1 Interpolações

O ponto P(1/2) pode ser representado na forma:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}\right) + \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2}\right)\right] \tag{B.5}$$

O ponto

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}\right)$$

é o ponto médio do segmento AB (ver fig. B.1). Por sua vez, o ponto

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2}\right)$$

é o ponto médio do segmento BC. Concluímos então que

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{R} = \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{Q}}{2}\right)$$

é o ponto médio do segmento PQ.

Agora examinaremos P(1/4):

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9\mathbf{A} + 6\mathbf{B} + \mathbf{C}}{16} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{A} + \mathbf{P}}{2} + \frac{\mathbf{P} + \mathbf{R}}{2}\right]$$
(B.6)

As identidades (B.5) e (B.6) descrevem uma regra geral para a obtenção de um ponto da curva: uma se refere ao triângulo **ABC** e a outra, ao triângulo **APR**. De fato, fazendo-se as seguintes substituições:

$$B \Leftarrow P$$
$$C \Leftarrow R$$

trocamos o triângulo ABC pelo triângulo APR.

Repetindo essa derivação para P(3/4), obtemos:

$$\mathbf{P}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{Q}}{2}\right) + \left(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{P}_2}{2}\right)\right] \tag{B.7}$$

isto é, o triângulo **ABC** foi substituído pelo triângulo **RQC**. Essas identidades possibilitam a construção do algoritmo descrito na seção seguinte.

B.1.2 Construção

Dado um triângulo ABC (figura B.1), podemos construir a parábola inscrita nesse triângulo, determinando:

- 1. O ponto médio P do segmento AB,
- 2. O ponto médio Q do segmento BC,
- 3. O ponto médio R do segmento PQ.

O ponto R pertence à parábola e o segmento PQ é tangente a essa curva em R.

Os demais pontos da parábola podem ser obtidos repetindo-se o procedimento acima para os triângulos APR e RQC. A figura B.1 mostra a obtenção do ponto U da parábola obtido dessa forma: S é ponto médio de AP, T é ponto médio de PR e U é ponto médio de ST. De fato, os arcos de parábola inscritos nos triângulos APR e RQC pertencem à parábola inscrita no triângulo ABC.

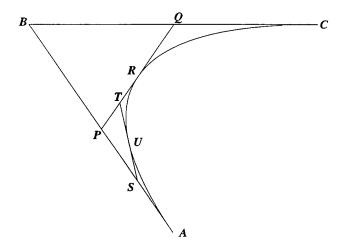


Figura B.1: Construção da parábola inscrita no triângulo ABC

B.2 Bézier cúbica

A curva mais comumente utilizada nos programas de computação gráfica é a Bézier cúbica $\mathbf{B}_3(t)$:

$$\mathbf{B}_3(t) = \mathbf{Z}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{Z}_1t(1-t)^2 + 3\mathbf{Z}_2t^2(1-t) + \mathbf{Z}_3t^3$$
 (B.8)

Essa curva propicia o desenho de uma variedade de formas, dependendo das posições relativas dos pontos $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{B}$ e $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{C}$, em relação aos pontos extremos do arco $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{A}$ e $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{D}$ (veja figura B.2).

Enquanto a parábola é uma curva necessariamente plana, a curva de Bézier cúbica pode ser reversa no espaço. A figura B.3, embora tenha sido produzida num editor $2\mathbf{D}$, a partir de quatro pontos coplanares ABCD, tem exatamente o mesmo aspecto da projeção, sobre o plano ABC, da curva reversa de Bézier $\mathbf{B}_3(t)$ inscrita sobre dois segmentos reversos AB e CD de um paralelepípedo no espaço.

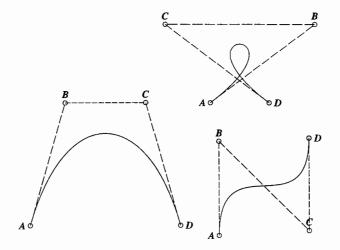


Figura B.2: Variantes da curva de Bézier $\mathbf{B}_3(t)$

B.2.1 Propriedades notáveis

Para t = 1/2, tem-se:

$$\mathbf{B}_{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \left[\mathbf{Z}_{0} + 3\mathbf{Z}_{1} + 3\mathbf{Z}_{2} + \mathbf{Z}_{3} \right] \tag{B.9}$$

A derivada primeira de (B.8) em relação a t vale:

$$\dot{\mathbf{B}}_{3}(t) = 3\left[(\mathbf{Z}_{1} - \mathbf{Z}_{0})(1 - t)^{2} + 2(\mathbf{Z}_{2} - \mathbf{Z}_{1})t(1 - t) + (\mathbf{Z}_{3} - \mathbf{Z}_{2})t^{2} \right]$$
(B.10)

que, nos pontos t=0 e t=1 assume, respectivamente, os valores:

$$\dot{\mathbf{B}}_3(0) = 3\left(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_0\right)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_3(1) = 3\left(\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2\right)$$

isto é, a curva é tangente ao segmento $\overline{\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1}$ no ponto \mathbf{Z}_0 e tangente ao segmento $\overline{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$ no ponto \mathbf{Z}_3 .

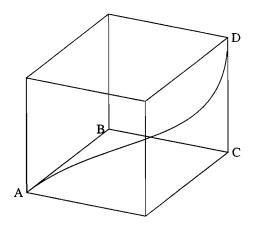


Figura B.3: Curva de Bézier reversa $\mathbf{B}_3(t)$

B.3 Expressão paramétrica para as cônicas

Uma curva cônica $\mathbf{K}(t)$, inscrita num triângulo \mathbf{ABC} (ver figura A.1), pode ser expressa pela seguinte representação paramétrica [34]:

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{1 + \mu(1 - 2t)^2} \left[(1 - t)^2 \mathbf{Q}_A + 2t(1 - t)\mathbf{Q}_B + t^2 \mathbf{Q}_C \right], \quad (B.11)$$

onde

$$\mathbf{Q}_A = (1 + \mu)\mathbf{A},$$

$$\mathbf{Q}_B = (1 - \mu)\mathbf{B},$$

$$\mathbf{Q}_C = (1 + \mu)\mathbf{C}.$$

Apêndice C

Propriedades da parábola

Neste apêndice examinaremos algumas propriedades da parábola: a análise cinemática dos corpos em movimento sujeitos a uma força constante, a equação não-paramétrica da parábola usualmente estudada nos compêndios de Geometria Analítica, e uma revisão do estudo geométrico das propriedades da parábola.

C.1 Cinemática

Para estudarmos os aspectos cinemáticos de um corpo cujo movimento é descrito pela lei de trajetória (B.4), colocarmos essa identidade na forma de série de potências:

$$\mathbf{P}(t) = 2\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{B}\right)t^2 + 2\left(\mathbf{B} - \mathbf{A}\right)t + \mathbf{A}$$
 (C.1)

Lembrando da cinemática dos projéteis, estudada nos cursos de Física Básica, concluímos que a curva de Bézier para n=2 corresponde à trajetória do movimento de uma partícula material num campo de aceleração γ constante,

 $\gamma = 4\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2} - \mathbf{B}\right)$

que parte do ponto ${\bf A}$ no instante t=0 e cuja velocidade inicial ${\bf v}_0$ é dada pela identidade

$$\mathbf{v}_0 = 2\left(\mathbf{B} - \mathbf{A}\right)$$

De fato, derivando P(t) em realção a t, temos:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = 2\left[\mathbf{B} - \mathbf{A} + t\left(\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)\right] \tag{C.2}$$

Das identidades

$$\dot{\mathbf{P}}(0) = 2 (\mathbf{B} - \mathbf{A}),
\dot{\mathbf{P}}(1) = 2 (\mathbf{C} - \mathbf{B}).$$
(C.3)

concluímos que a curva $\mathbf{P}(t)$ é tangente ao segmento \mathbf{AB} no ponto \mathbf{A} e tangente ao segmento \mathbf{BC} no ponto \mathbf{C} . Dizemos que a curva está inscrita no ângulo \mathbf{ABC} .

Segundo a interpretação cinemática acima, podemos dizer que o ponto material — a ponta da pena de um desenhista que siga a lei de movimento descrita pela fórmula (B.4) — desloca-se da posição inicial A, com velocidade vetorial 2(B-A), e passa pelo ponto C, no instante t=1, com velocidade 2(C-B).

Derivando $\dot{\mathbf{P}}(t)$, da identidade (C.2), em relação a t, temos a aceleração

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = 4\left[\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2}\right) - \mathbf{B}\right] = \gamma \tag{C.4}$$

A interpretação cinemática é simples: trata-se da curva produzida por uma aceleração constante, na direção da reta que passa por ${\bf B}$ e pelo ponto médio do segmento ${\bf AC}$. Na figura C.1, o canhão aponta para o ponto B para acertar no alvo C. O ponto B e o ponto médio M do segmento AC estão numa mesma vertical¹.

¹A teoria do movimento dos mísseis foi desenvolvida por Galileu.

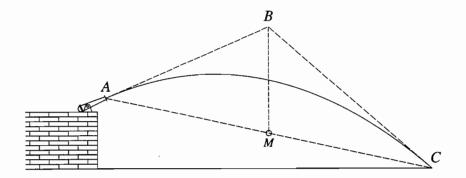


Figura C.1: A trajetória da bala lançada por um canhão é uma parábola

C.2 Equação não-paramétrica da parábola

A parábola pode ser representada como uma curva de Bézier de 3 pontos, expressa na forma paramétrica

$$x = at^{2} + bt + x_{0}$$

 $y = ct^{2} + dt + y_{0}.$ (C.5)

Se multiplicarmos a primeira equação por c, a segunda por a e subtrairmos a primeira da segunda, eliminamos o termo quadrático e obtemos:

$$ay - cx = (ad - bc)t + ay_0 - cx_0$$
 (C.6)

de onde isolamos t

$$t = \frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc}.$$

Substituindo t em qualquer uma das equações (C.5):

$$x = a \left[\frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc} \right]^2 + b \left[\frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc} \right] + x_0 \quad (C.7)$$

$$y = c \left[\frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc} \right]^2 + d \left[\frac{a(y - y_0) - c(x - x_0)}{ad - bc} \right] + y_0. \quad (C.8)$$

obtemos a representação de uma curva cônica. Adotando a notação

$$\xi = x - x_0$$

$$\eta = y - y_0$$

$$\Delta = ad - bc,$$

reescrevemos uma das expressões acima na forma canônica:

$$a^{3}\eta^{2} - 2a^{2}c\eta\xi + ac^{2}\xi^{2} + ab\eta - (bc + \Delta)\xi = 0.$$
 (C.9)

que é a equação de uma parábola.

C.3 Propriedades da parábola

Examinemos o seguinte

Teorema C.1 (Arquimedes). O ponto médio P da mediana BM do triángulo ABC está na parábola e a tangente ST à parábola, no ponto P, corta os lados AB e BC em seus pontos médios.

Demonstração. Consideremos dois pontos A e C da parábola (fig. C.2), suas tangentes AB e BC nesses pontos e imaginemos conhecidos a diretriz r e o foco F da parábola.

Sejam os pontos P,Q e R, respectivamente, as projeções normais dos vértices do triângulo ABC sobre a diretriz r (fig. C.3). O Ponto B, por ser interseção das tangentes à parábola nos pontos A e C, é também — e por isso — a interseção das mediatrizes dos segmentos FP e FR. Daí conclui-se:

$$BP = BR = BF$$

isto é, B é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo PFR (figura C.4).

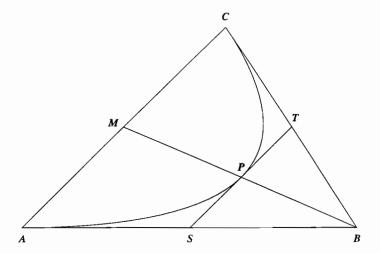


Figura C.2: Parábola inscrita no triângulo ABC

Conclui-se, então, que os triângulos BQR = BQP são iguais. De fato, BQ é comum aos dois triângulos e cada um deles é, por construção, retângulo, pois Q é a projeção normal de B sobre r. Assim, Q é o ponto médio de PR.

Determinemos, agora, o ponto X onde a parábola cruza a reta BQ. Esse ponto está na interseção dessa reta BQ com a mediatriz do segmento FQ^2 . Denotemos por S e T os pontos nos quais essa mediatriz corta os lados AB e BC. Mostremos que esses pontos são os pontos médios do segmento AB e BC.

Ora, S está na interseção das mediatrizes de FP e FQ, donde se conclui que

$$SP = SQ = SF$$

isto é, S é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo FQP.

Similarmente, T está na interseção das mediatrizes FQ e FR, donde se

²Qualquer ponto sobre a parábola equidista do seu foco F e da sua diretriz r.

 $^{{}^{3}}BQ = \text{Mediatriz}(FP) \text{ e } ST = \text{Mediatriz}(FQ).$

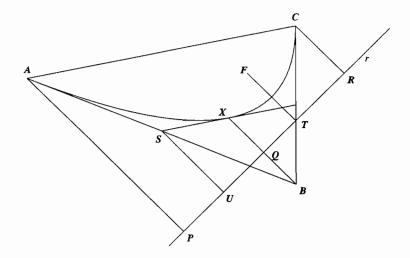


Figura C.3: Projeções PQR de ABC sobre a diretriz r da parábola

conclui que

$$TQ = TR = TF$$

isto é, T é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo FQR.

Consideremos⁴ a projeção normal U do ponto S, sobre a diretriz r. Da igualdade de triângulos conclui-se:

$$PSU = QSU$$

pois:

- 1. ambos são triângulos retângulos;
- 2. têm um mesmo lado (SU) comum e
- 3. os lados PS e QS são iguais, conforme demonstrado acima.

Portanto, U é o ponto médio do segmento PQ. Como as três retas AP, SU e BQ são paralelas entre si (todas normais a r), e a reta AB é secante às três, fica demonstrado, pelo teorema de Tales, que S é ponto médio do segmento AB.

 $^{^4}$ As mesmas conclusões poderão ser obtidas para a projeção do ponto T sobre essa mesma reta, mas não serão reproduzidas para não congestionar a figura.

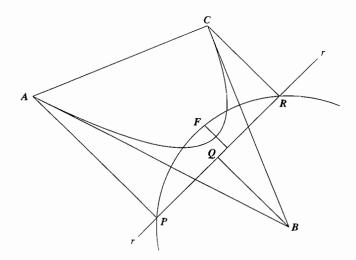


Figura C.4: B é centro da circunferência circunscrita ao triangulo PFR

Do paralelismo das retas AP.BQ e CR e da igualdade PQ = QR, conclui-se que a reta BQ corta o lado AC em duas partes iguais, no ponto M. Como a reta que passa por ST é paralela à reta que passa por AC conclui-se que X = P é ponto médio ST e ponto médio da mediana SM. q.e.d.

C.3.1 Área da parábola

O algoritmo de construção recursiva da parábola já era conhecido por Arquimedes de Siracusa. Ele o usou, não para construir um arco de parábola, mas para determinar a área delimitada por esse arco e o triângulo nele inscrito. Adiante reproduzimos, de forma adaptada às convenções adotadas para a representação das curvas de Bézier, o método de Arquimedes [6].

Dados três pontos ABC (ver figura C.5), determinam-se, recursivamente os pontos da parábola inscrita no triângulo formado por esses três pontos, conforme descrito na seção B.1.2. Pode-se, a partir desse processo construtivo, determinar a área da parábola.

⁵Cada um dos extremos desses segmentos é ponto médio de um lado do triângulo.

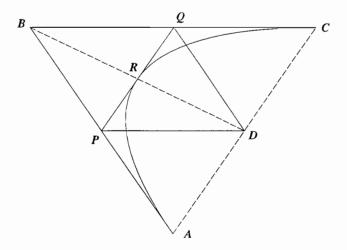


Figura C.5: Construção da parábola inscrita no triángulo ABC

O ponto R pertence à parábola que é, nesse ponto, tangente ao segmento PQ. Sendo a parábola:

- tangente a AB em A.
- ullet tangente a BC em C e
- tangente a PQ em R.

concluímos que o arco de parábola ARC está todo contido no trapézio formado pelos pontos APQC.

Resulta daí que a área desse trapézio é uma primeira aproximação (por excesso) para a área da parábola. A área do trapézio APQC obtém-se da área do triângulo ABC da qual se retirou uma quarta parte, formada pelo triângulo PBQ. Para perceber que o triângulo APQ é a quarta parte de ABC, imagine o ponto médio D do segmento AC e verifique que os 4 triângulos APD, PDQ, DQC e PBQ são iguais. Isto é, na construção da parábola a partir do triângulo original ABC, a primeira etapa eliminou o triângulo PBQ.

Denotamos por A_0 a área do triângulo ABC. Ao final da primeira etapa, eliminando uma quarta parte de A_0 , teremos a aproximação A_1 para a área da parábola:

 $A_1 = A_0 - \frac{1}{4}A_0$

Nas etapas seguintes, executadas conforme o algoritmo descrito na seção B.1.2, do triângulo APR retiramos uma sua quarta parte, assim como a mesma quantidade do triângulo RQC. obtendo a aproximação seguinte

$$A_2 = A_1 - \frac{1}{4} \text{Area}(APR) - \frac{1}{4} \text{Area}(RQC) = A_0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right].$$

Na n^a iteração temos:

$$A_n = A_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right] \right\}.$$

O valor da somatória da progressão geométrica dentro dos colchetes é 4/3. donde se determina a área da parábola

$$A = \frac{2}{3}A_0.$$

Conclusões

Quando era ainda estudante pré-universitário impressionei-me com a seguinte proposição⁶:

A melhor maneira de se demonstrar a existência da solução de um problema é construí-la.

Se esse critério de demonstração (que a mim parece, de todos, o mais persuasivo) for aceitável, acredito que o programa *Designer's Workbench* anexo a este trabalho, incorpora as demonstrações de todas as teses enumeradas na Introdução. Mas, para responder a uma eventual objeção de que não o seja⁷, apresento, a seguir, as conclusões a que cheguei em relação àquelas teses.

O traçar como processo seqüencial. Os computadores são máquinas seqüenciais. Pode-se dizer, portanto, que o reconhecimento de que o ato de traçar é um processo seqüencial. deu-se por volta de 1950, data em que os computadores começaram a ser usados para desenhar⁸. Pode-se invocar, portanto, os programas que controlavam esses computadores, como elementos da demonstração de que o desenho pode ser visto (ainda que o tivesse sido de forma inconsciente) como um processo seqüencial. A constatação do fato em si não constitui, porém, conhecimento suficiente para que nele se reconheça importância ou dele se explore toda sua potencialidade.

A estrutura polinomial dos desenhos. Algum tempo se passou entre o momento em que considerei esse um fato relevante — quando propus as

⁶ Atribuída por Abrão Bloch, a Carlos Marmo, do Curso Anglo Latino.

⁷Eu mesmo tenho objeções à aceitação indiscriminada de hipóteses "por resultados". Hoje aceitamos sem grande resistência (ou, quem sabe?, por desistência) noções como a função de onda na mecânica quântica ou o princípio de Boltzmann na mecânica estatística, não por serem diretamente evidentes ou empiricamente evidenciáveis, mas por seus "resultados". Quanto a minhas objeções acerca do princípio de Boltzmann, ver *Phys Ess*, 10(4), 608-14, 1997.

⁸W. M. Newman e R. F. Sproull afirmam que as primeiras figuras exibidas numa tela de vídeo geradas por um computador, ocorreram no MIT em 1950 [43].

bases algébricas da linguagem LPG — e o instante em que fui capaz de reconhecer, oculta no gesto de traçar, a mão livre ou por meio de instrumentos, a estrutura de um processo polinomial.

A chave para esse reconhecimento veio-me acidentalmente quando, ao folhear um livro-texto de álgebra no qual as variáveis de polinômios estavam grafadas em negrito, vi, nesses símbolos diferenciados, algo mais do que eu estava acostumado a perceber. A seqüência de idéias que me vieram, estão passadas a limpo na seção 13.3.

Uma tentativa de descrever os automorfismos por meio da "equação"

$$z = a + zx, (C.10)$$

e escrito sua solução na forma

$$z = a(I - x)^{-1} = a + ax + ax^{2} + ax^{3} + \dots$$
 (C.11)

remeteu-me a idéia de órbita, que eu já vira nas descrições dos algoritmos genéticos, usados para a geração de figuras fractais.

Pouco depois, explicitei a condição de seqüencialidade que está implícita em (C.10), reescrevendo-a na forma (13.5). Dessa representação pode-se derivar expressões finitas da forma polinomial (13.2).

Suportado pela interpretação da lei descrita na seção 13.3, convencime da natureza polinomial dos processos morfogenéticos, em especial do desenho. Essa generalização mostrou que esses polinômios podem servir para descrever não apenas formas geradas por órbitas, mas também por outros processos menos regulares.

Assim, compondo os ingredientes que identifiquei como essenciais para caracterizar os processos morfogenéticos, pude definir os polinômios geométricos 9 Π , de acordo com a sintaxe:

$$\Pi ::= \Pi + T | T
T ::= F | T * F
F ::= A | (\Pi)
A ::= \mu | A. \mu$$
(C.12)

⁹discutidos na seção 13.5.

onde μ é representativo de um elemento do grupo Γ de transformações. Em seguida, definem-se as figuras compostas, K, por meio da gramática

$$\begin{split} K &::= \Phi | K + \Phi \\ \Phi &::= a | < \Pi | K > \end{split} \tag{C.13}$$

onde a representa um elemento de um conjunto α de figuras primitivas.

Denominei a álgebra subjacente a essa gramática, de Sistema Morfogenético. Uma constatação interessante é a de que há um Sistema Morfogenético distinto para cada grupo e por isso, convém qualificá-lo, chamando-o de Sistema Morfogenético do grupo Γ . Podemos dizer, então, que a Régua e Compasso (aos quais se adiciona, obviamente a intervenção do desenhista) formam um Sistema Morfegenético do grupo euclidiano; o torno forma outro Sistema Morfogenético de um segundo grupo; a prática de assentamento de tijolos, de um terceiro, e assim por diante¹⁰.

Órbitas contínuas. Observando a órbita discreta de uma transformação plana τ , formada pelos pontos

$$P, P \cdot \tau, P \cdot \tau^2, \dots$$

indaguei-me como encontrar uma transformação ϕ tal que, $\phi^2=\tau$ e, dessa forma interpolar entre os pontos P e $P\cdot \tau$ da órbita dada, um terceiro ponto $P'=P\cdot \phi$.

A solução para esse problema encontra-se na teoria de Lie das transformações finitas contínuas. Constatei, então, com o auxílio dessa teoria, que uma passagem ao limite para as expressões do tipo (C.11), permitia fundir num único sistema algébrico, as leis de composição de figuras expressas nas gramáticas (C.12) e (C.13), com as leis de geração de traços, estas, órbitas dos grupos de transformações.

Uma vez que figuras podem ser compostas pela ação de um grupo de transformações e as órbitas, geradas por outro grupo de transformações,

¹⁰ A generalidade do sistema que obtive, evidenciada pela facilidade com que se encontram exemplos de aplicação como os que aqui estão servindo de ilustração, levou-me a conjeturar acerca da existência de uma gramática do gesto, de que tratei em Uma Teoria da Tecnologia, Rev. USP, set-nov, 1990.

grupos em princípio distintos, constatei a conveniência de confundi-los, restringindo o primeiro àqueles grupos sujeitos às condições de Lie para as transformações finitas contínuas. Dessa forma, o conjunto de figuras primitivas α , torna-se derivado do grupo Γ e, portanto, o conjunto de figuras primitivas α fica restrito às órbitas dos elementos desse mesmo grupo Γ .

Essa restrição dupla, do conjunto de figuras e do grupo de composições de um lado, e do conjunto de figuras, de outro, pode parecer, à primeira vista, uma mutilação. Porém, nos casos práticos, pode-se constatar ser sempre possível aproximar um traço arbitrário por uma seqüência de arcos de órbitas dos elementos de um dado grupo Γ e, no caso do desenho, a escolha do grupo GL_2 , que preenche os requisitos de Lie, mostra-se a mais adequada pois pode-se considerar padrão na literatura sobre editoração eletrônica.

Se, como é praxe fazer nas obras expositivas sobre Desenho Geométrico, abstrairmos dos traços seus atributos óticos, podemos afirmar, dentro do escopo das premissas e definições acima, que:

qualquer figura gerada a partir de traços pode ser aproximada (quando não representada exatamente) por expressões algébricas simbólicas de um Sistema Morfogenético.

Notação para as órbitas. Vários problemas limitaram adotar no *Designer's Workbench*, na sua forma completa, o formalismo algébrico a que cheguei. Dentre eles, posso citar:

- Linguagens como a PostScript, adotadas como padrão industrial para a geração de arte-final. não incluem algoritmos para o desenho de todas as órbitas de GL₂.
 Estas devem ser aproximadas por segmentos de reta ou de arcos;
- não é simples prever a curva que se obterá a partir da especificação de uma órbita e tampouco deduzir qual transformação e quais parâmetros dessa transformação irão produzir uma curva imaginada. Não é, portanto, realista supor que um designer venha a especificar uma curva por meio de parâmetros de transformações, ainda que, ao traçar a mão livre, ele esteja seguindo a órbita de alguma transformação característica de sua anatomia.
- Não convém fugir das formas mais tradicionais de se especificar as curvas mais populares, sob pena de impedir o desenhista de usar os conhecimentos e as habilidades adquiridas em treinamento anterior. Quando se especifica uma circunferência, é costume fazê-lo informando seu centro e seu raio, seu centro e um ponto ou ainda, três de seus pontos. Ao especificá-la, não é comum pensar na circunferência como órbita de uma rotação.

Infelizmente, por causa dessas limitações que decorrem da força dos hábitos humanos, não pude conferir à ferramenta que desenvolvi, a mesma elegância que me sensibilizou no resultado matemático a que cheguei. Quando concebi a sintaxe do *Designer's Workbench*, fui compelido a camuflar, sob as formas mais tradicionais de descrição de curvas, as especificações de órbitas, o que me impediu de dar ao programa toda unidade e coerência que caracterizam o modelo algébrico.

Notação para as transformações. A representação adotada pelos livrostexto de Computação Gráfica e para o grupo \mathbf{GL}_2 é a matricial. Ela faz parte das operações primitivas incluídas no PostScript. Tal representação é precisa, porém pouco inteligível e nada simples. As dificuldades enfrentadas para adotá-la numa ferramenta dirigida a designers são da mesma natureza das que limitam a descrição de curvas por meio de órbitas. Senti, portanto, a necessidade de buscar uma notação mais simples e mais legível para representá-las.

Reconhecendo que algumas dessas transformações, como a translação e a rotação, permitiam representações monoparamétricas, indaguei-me se não seria possível simplificar a representação matricial, encontrando outras transformações monoparamétricas, de modo a tornar possível "decompor" uma transformação \mathbf{GL}_2 qualquer em um produto de "fatores primos" monoparamétricos.

Uma resposta parcial, mas satisfatória para essa questão pode ser encontrada também no escopo da teoria de Lie das transformações contínuas. Ela não nos dá o caminho para que, dada uma matriz \mathbf{GL}_2 qualquer, possamos decompô-la em fatores primos monoparamétricos. Porém, fornecenos a solução do problema inverso, igualmente importante: determinar o conjunto mínimo de transformações monoparamétricas capaz de determinar completamente o grupo das transformações \mathbf{GL}_2 . Esse resultado é suficiente para garantir que a notação que adotei no Designer's Workbench é completa, além de mais simples e mais inteligível do que a matricial.

A matemática no 2º grau. Esforcei-me em redigir este trabalho na forma de um livro destinado aos interessados no uso do computador para o desenho, bem como para servir eventualmente de livro-texto para um

curso introdutório de geometria que tenha por propósito explorar, numa visão panorâmica, a geometria de Euclides, a geometria analítica, as propriedades geométricas da álgebra dos números complexos e a geometria transformacional¹¹.

Pretendo, por seu intermédio, demonstrar a tese de que "o conhecimento necessário para usar o programa Designer's Workbench está contida nos programas de matemática do 2º grau". De fato, para que o Designer's Workbench possa ser operacional nas mãos de um estudante do 2º grau, basta reforçar as interpretações geométricas dos números complexos e dos grupos de transformação (o que nem sempre é feito nesses cursos, mormente quando ministrados por adeptos da axiomática antisséptica ou da abstração precoce) bem como (o que é inédito, mas suponho, de baixo custo didático) provê-los com uma interpretação adicional para as variáveis dos polinômios.

Quero crer que a ferramenta que aqui proponho tem o mérito educacional de colocar, lado a lado, geometria e álgebra, para que seus métodos e objetivos sejam postos, ora em confronto. ora em cooperação, propiciando ao estudante um embasamento conceitual mais firme.

Ferramenta para deficientes. Anima-me também a esperança de que, ao tornar o desenho ainda mais independente de habilidades motrizes, esta abordagem traga àqueles acometidos de determinadas disfunções neuronais ou aos portadores de certas deficiências físicas, uma opção a mais para que explorem, com o auxílio do computador, seus talentos como desenhistas.

Ferramenta para profissionais. Finalmente, devo enfatizar que julgo o *Designer's Workbench* apto para o uso profissional em *design*, para aquelas aplicações em que precisão e complexidade sejam determinantes¹².

Elas ocorrem nos desenhos de engenharia e arquitetura, na confecção de logotipos, na produção de impressos de segurança, nas ilustrações de livros

¹¹ Aí se inclui o curso de computação gráfica ministrado no IFUSP.

¹²Convenci-me disso a partir da reação que observei nos poucos profissionais de design a quem apresentei uma versão preliminar do Designer's Workbench. Ao que me consta, os recursos derivados deste trabalho que inclui no Designer's Workbench, não estão disponíveis nas ferramentas de desenho oferecidas no mercado.

técnicos e científicos, etc. Todas as figuras que ilustram este trabalho 13 , foram geradas com o auxílio do Designer's Workbench e convertidas para PostScript para a integrar presente impressão.

¹³Com exceção das reproduções dos desenhos de A. Dürer, nas páginas 40,41 e 42.

Bibliografia

- [1] I. O. Angell, A Practical Introduction to Computer Graphics, The Macmillan Press, 1981.
- [2] Aristóteles, Dos Argumentos Sofísticos.
- [3] Bernstein, J., Einstein, Ed. Cultrix (sem data).
- [4] L. von Bertalanffy em General System Theory, Penguin Books, 1973).
- [5] M. Born, Einstein's Theory of Relativity, Dover Publications, Inc., 1965.
- [6] Carl B. Boyer, História da Matemática, trad. Elza Gomide Ed. Blücher, EDUSP, 1974.
- [7] J. Bronowski, A Escalada do Homem, Martins Fontes Editora Editora da Universidade de Brasília, 1979.
- [8] J. E. Campbell, Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Continuous Transformation Groups, Chelsea Publ. Comp., 1966.
- [9] Clark, R. W., Einstein: The life and times, Avon Books 1984.
- [10] R. Courant e H. Robbins, What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, Oxford University Press, 1941.
- [11] T. Dalley (ed.): The Complete Guide to Illustration and Design techniques and materials, Chartwell Books Inc. 1986.
- [12] T. Dantzig, Number, the Language of Science, George Allen & Unwin Ltd., London, 1947.
- [13] R. Descartes, A Geometria.

- [14] N. F. Éfimov, Éléments de Géometrie Analytique, MIR Publishers, Moscou, 1969.
- [15] N. F. Éfimov, Higher Geometry, MIR Publishers, Moscou, 1980.
- [16] Euclid, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Great Books of the Western World — Encyclopædia Britannica, Inc., 1952.
- [17] Y. Flint, Essentials of Crystallography, MIR, Moscou.
- [18] O. M. Garcia, Comunicação em Prosa Moderna, 14ª ed., Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1988.
- [19] T. R. Giles, Introdução à Filosofia, EPU/EDUSP 1980.
- [20] P. R. Girard, The Quaternion Group and Modern Physics, Eur. J. Phys, 5 (1984) 25-32.
- [21] Gleick, Chaos Making a New Science, Viking Penguin, 1987.
- [22] J. E. Gordon, Structure. or Why Things don't fall Down, Pelican Books, 1978.
- [23] O. Grabar, La Alhambra: iconografia, formas y valores, Alianza Editorial, Madrid, 1981.
- [24] H. W. Guggenheimer, Differential Geometry, Dover Publ., Inc., 1977.
- [25] Hopcroft, Language And Automata, 1969.
- [26] Grande Enciclopédia Larousse Cultural, Círculo do Livro, 1988.
- [27] L. Jacob, Le Calcul Mécanique Appareils arithmétiques el algébriques Intégrateurs, Gaston Doin Éditeur, Paris, 1911.
- [28] P. Karlson, A Magia dos Números A Matemática ao Alcance de Todos, Ed. Globo, 1961.
- [29] Yoichiro Kawaguchi, Growth Morphogenesis a journey to the origins of form, Yoichiro Kawaguchi and JICC Publishing Inc., 1985.
- [30] D. Kléténik, *Problèmes de Géométrie Analytique*, p.21, §6, Ed. de La Paix, Moscou.

- [31] M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, 1970.
- [32] D. E. Knuth: The METAFONTbook Addison Wesley Publishing Company, 1986.
- [33] A. I. Kostrikin, Introducción al Álgebra, MIR, Moscou, 1980.
- [34] Eugene T. Y. Lee, The rational Bézier Representation for Conics, in G. E. Farin, Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, SIAM.
- [35] John Locke (1632-1704), Ensaios sobre o Entendimento Humano.
- [36] Julian Coolidge Lowell, A History of Geometrical Methods.
- [37] Claudio Z. Mammana, Funções Geratrizes de Figuras, Anais do V SEM-ISH – Seminário Integrado de Software e Hardware Nacionais vol I–1978.
- [38] Claudio Z. Mammana, Introns and Development, Informatik Forum, ISSN 1010-6111 Band 11, Nr. 1, März 1997, Viena Áustria.
- [39] Claudio Z. Mammana. The Natural History of Information Processors, ch. 27 in W. Hofkirchner (ed.) The Quest for a Unified Theory of Information, pp. 371-386. Gordon and Breach Publishers, 1999.
- [40] B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 1982.
- [41] Michel de Montaigne, Ensaios, 1580.
- [42] Maria Helena de Moura Neves, A Vertente Grega da Gramática Tradicional, HUCITEC Editora Universidade de Brasília, 1987.
- [43] W. M. Newman & R. F. Sproull, Principles of Interactive Computer Graphics, McGraw-Hill, 1979.
- [44] Sir I. Newton, Mathematical Principles of Natural Philosophy, Great Books of the Western World Encyclopædia Britannica, Inc. 1952.
- [45] Norton, Generation and Display of Geometruc Fractals in 3-D, Computerr Graphics v. 16 n° 3, 1982.
- [46] G. Oster, Les Spirales, La Recherche, 44, pp. 316-324, avril, 1974.
- [47] L. S. Pontriaguin, Grupos Continuos, Ed. MIR, 1978.

- [48] PostScript Language Reference Manual, Adobe Systems Inc., 1988.
- [49] Paolo Rossi, *I filosofi e le macchine 1400-1700*, Giangiacomo Feltrinelli Editore. 1966.
- [50] A. J. Schwartz, Subdividing Bézier Curves and Surfaces, in G. E. Farin, Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, SIAM.
- [51] W. Shakespeare, Romeu e Julieta, ato 4, cena I.
- [52] Sophus Lie, M., Theory of Transformation Groups in R. Hermann, Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper, Math. Sci. Press, 1975.
- [53] R. Taton e A. Flocon: A Perspectiva, Difusão Européia do Livro (trad. Raimundo Rodrigues Pereira) SP Brasil - 1967.
- [54] D'Arcy Wentworth Thompson, On Growth and Form, Cambridge University Press, edição abreviada, 1997.
- [55] Vitruvius. The Ten Books on Architecture, trad. Morris Hicky Morgan, Dover Publ. 1960.n
- [56] D. Wells. C. Young & D. Farmer, Criações em Ray Tracing, Berkeley Brasil Editora, 1993.
- [57] Caspar Wessel, On the Analytical Representation of Direction in Henrietta Midonick, The Trasury of Mathematics, vol 2, Penguin Books, 1965.
- [58] H. Weyl, Symmetry, J. Wash. Ac. Sci, 28, 253-271, 1938.
- [59] A. P. Wills, Vector Analysis with an Introduction to Tensor Analysis, Dover Publ. Inc., 1958.

Índice Remissivo

afinidade, 97, 100, 134, 173, 178, Cartesianas, 29, 53, 130 219, 220, 288 Polares, 29, 53, 130, 251 Alberti, Leon Battista, 39, 152 cristalografia, 222 curvas, 8-11, 85, 88, 93, 94, 105, ALGOL, 116, 163 Alhambra, 221 107, 113, 114, 119–121, 161, ambigüidade, 190 218, 288, 295 aranhas, 142 cônicas, 160, 171 aritmética complexa, 48, 62, 116 circunferência, 25, 27, 29, 67, Argumento, 53 68, 71-73, 89, 91-93, 97, Complexo conjugado, 53 99, 101, 103, 122, 173, 178, Módulo, 53 189-196, 205, 215, 216, 234, 241-244, 251, 252, 259, 262, Parte imaginária, 53 Parte real, 53 296, 297 Astronomia, 84 de Bézier, 119-121, 171, 237, 307 Bernoulli, James, 83, 85 e órbitas, 172 bissetriz, 25, 35-37 elipse, 297, 298, 304, 305 Born, Max, 82, 323 francesas, 1, 7, 140, 205, 291 Brunelleschi, Filippo, 152 hipérbole, 90, 91, 98–100, 171, 297, 298 caleidoscópio, 223, 277 parábola, 85, 90, 95-98, 171, catenária, 104, 105 220, 236, 288, 297, 298, Chomsky, Noam, 163 304, 308 compressão, 106, 107, 220 componentes, 4, 9-11, 31, 157, 171 D'Arcy Thompson, 162 inserções, 210 Dürer, Albrecht, 7, 17, 39-42, 152 contornos, 222 Descartes, René, 7, 42, 115, 323 Coordenadas, 5, 20, 33, 41, 42, 44, Desenho, 4 45, 49, 58, 59, 62, 99, 114, Designer's Workbench, 12, 90, 165, 116, 122, 127, 133, 135, 173

136, 143, 192, 234, 304

Einstein, Albert, 82, 109, 188 elipse, 85, 92–95, 100, 101, 171 enquadramento, 249 espirais, 83, 85, 90 esquadro, 20, 29, 91, 96, 128, 129 Euclides, 17, 24, 115, 128, 216, 324 Euler, Leonhard, 50, 59, 65 Linha de, 37

faca do sapateiro, 241 Faraday, Michael, 163 FAU, 258 Filarete, Antonio Averlino, xvi. 26 fio, 89, 91, 105–107, 110, 111 fio de prumo, 105, 108–110 FORTRAN, 116, 163

Física, 2, 81, 82, 84

Galileu Galilei, 85, 314 Gaudíy Cornet, Antonio, 107 Geometria, 2, 4, 17, 20-22, 24, 28, 81, 82, 86-88, 107, 114, 115, 152, 161, 241 Analítica, 7, 20, 43 grupo, 2, 85, 127, 133, 134, 161, 162, 177, 221, 222

Hertz, Heinrich, 12

interpolação, 61 isometrias, 127, 133–135

Kepler, Johannes, 84, 85 Klein, Felix, 161, 178 Knuth, Donald E., 8

Lavoisier, Antoine Laurent, xv Leibniz, Gottfried, Wilhelm, 179 Leonardo da Vinci, 187 Lie, Marius Sophus, 178 liga-pontos, 113–115 linha poligonal, 231 Lobachevsky, Nikolai Ivanovich, 82 música, 213 Maxwell, James Clerk, 163 mediatriz, 25, 33, 97, 190, 191

Newton, Isaac, 87, 325

Minkowski, Hermann, 178

Montaigne, Michel de, 188, 325 morfogênese, 155, 160, 162–164, 168

órbita, 84, 161, 162, 168–172, 217, 218, 226, 251, 253, 254, 261, 264, 266, 268–270, 272, 274, 276, 277, 279–281, 283–288

ornamentos discos, 221 fitas, 221 tesselaria, 221

pantógrafo, 140
parábola, 121
paralelogramo, 141, 142
Pascal, Blaise, 116, 163
Pintura, 4
pixel, 2, 43–45, 288
Platão, 83, 84
poesia, 213
polinômios, 63, 164, 165, 257
de Figuras, 165
geométricos, 138, 161, 169–171,
210–212, 214, 216–218, 252,
256, 257, 260, 288
produto de, 171
polígono, 59, 60, 216, 219, 234, 235,

251-254, 256, 257

polígono inscrito noutro. 244	p3 , 269
regular, 244, 251, 258	p4g , 276
Pontos	p4m, 274
derivados, 26, 27, 122, 189	p4, 270
Nome de, 25, 33, 44, 114, 115,	p6m , 287
117-120, 180, 190, 210, 231	p6 , 272
primitivos, 122	pgg, 285
PostScript, 5, 326	pg, 284
Programa de Erlangen, 161, 178	pmg, 283
protocolo, 11, 28, 182, 190	$\mathbf{pmm}, 281$
	$\mathbf{pm}, 268$
Régua e Compasso, 1, 7–9, 17, 20–	bilteral, 213
25, 27, 28, 32, 34, 86. 91,	similaridade, 133–135, 178, 219
100, 122, 160, 161, 190-	Sintaxe, 172
192	T 1 T 1 1 1 W 000
regular, 59, 84, 85, 161, 213, 215,	Taylor, Frederick W., 263
216, 234, 254, 256	trac, 3-5, 9-11, 20, 25, 87, 88, 90,
Relatividade, 82	91, 113, 115, 116, 118, 122,
ritmo, 213	128, 190, 236
rota, 114–121, 214, 216, 231, 232,	como órbita, 175
234, 236, 252, 255. 288,	trajetória, 85, 90, 91, 151, 152, 161
297	tração, 106, 107, 111
modificadores de, 232	transformação, 97, 123, 126-129,
osculação, 10, 120, 236	131–140, 142, 145–148, 160–
Osculações encadeadas, 120	163, 168–170, 172, 173, 175–
poligonais, 117–119, 121, 231,	178, 197, 199–202, 204, 209–
255	212, 215, 217–223, 245–249,
ramificações, 114, 118, 120	251-253, 257, 260, 264, 277-
Schrödinger, Erwin, 159	281, 283, 286, 288, 289
Shakespeare, William, 183, 326	Identidade, 132 reflexões, 245
simetria, 2, 11, 19, 45, 83, 98, 112,	rotação, 60, 83, 127, 129, 133,
162, 212–216, 218, 219, 221	138, 140, 173, 174, 209,
cmm , 280	211, 215, 216, 218–220, 246,
cm , 279	247, 252, 257, 289
p1 , 264	translação, 11, 127–129, 138,
p2 , 266	139, 147, 209, 210, 214,
p31m , 277	215, 219, 245, 260
p3m1, 286	transferidor, 29, 234
= '	or wildicitati, 20, 201

triângulo, 25, 27, 31-37, 63-65, 76-78, 93, 94, 96, 97, 101, 115, 116, 122, 128, 135–137, 142– 144, 148, 189, 190, 216, 220, 223, 224, 236, 239, 240, 242, 244, 250, 258, 259, 266, 268, 269, 272, 274, 277, 280, 284, 286-288, 295–298, 301, 304, 310, 316, 319–321 altura do, 31, 33-35, 239 baricentro, 31-33, 37, 122 circuncentro, 31, 33-35, 37 incentro, 31, 35, 36 ortocentro, 31, 33-35, 37 quadrado inscrito num, 239

variáveis. 64, 122, 234, 251, 254–257, 288 Vitruvius Pollio. Marcus, 23, 106, 326 voussoirs, 107

Wessel, Caspar, 48, 51, 326