TÓPICOS EM TEORIA DA RENORMALIZAÇÃO

MARCELO OTAVIO CAMINHA GOMES

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Livre-Docente.

SÃO PAULO
1979

TÓPICOS EM TEORIA DA RENORMALIZAÇÃO

MARCELO OTAVIO CAMINHA GOMES

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Livre-Docente

SÃO PAULO
1979

Agradecimentos

- Aos Profs. A.J. da Silva, E. Abdalla e Roland Köberle pelas várias discussões e sugestões.

- Ao Conselho Nacional de Pesquisas pelo apoio financeiro parcial.

- A Neusa Maria Martin pelo trabalho de datilografia.

R E S U M O

1. Fazemos uma extensão do algoritmo de produtos normais de Zimmermann para o caso de uma teoria relativística de campos a uma temperatura $T \neq 0$. Deduzimos as equações do grupo de renormalização para as funções de Green e para o potencial termodinâmico do modelo A^4. A teoria com massa zero é brevemente discutida e a possível restauração da simetria O(N) no caso de um modelo com N campos escalares é examinada.

2. O problema de indução de contratermos em alguns modelos bidimensionais, com T=0, é analisado. Para os modelos considerados (modelo de Federbush e um modelo com dois campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 interagindo com um campo fermiônico massivo via a interação $g_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\phi_1 + g_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\partial_\mu\phi_2$) é mostrado que é possível construir um esquema de subtrações preservando os cancelamentos de divergências entre os gráficos contribuintes para as funções de 4 pontos dos férmions. Limites de massa zero, no caso do modelo com acoplamento derivativo são discutidos.

Discutimos também a perturbação na massa do férmion no modelo com acoplamento derivativo. A série perturbativa (singular no infravermelho) é ressomada e então é mostrado que, para $\dim \psi < 1$ e $\dim(\bar{\psi}\psi) < 2$, as funções de Green Euclidianas resultam finitas pela adição de um contratermo.

I N D I C E

Introdução 1

I. Teoria Quântica de Campos a uma temperatura $T \neq 0$ 7

I.1 O formalismo do tempo imaginário 7

I.2 O problema da renormalização 10

II. Produtos normais no modelo A^4 a uma temperatura $T \neq 0$. 23

Apêndice 33

III. Modelos bidimensionais 35

III.1 Um modelo com acoplamento derivativo 35

III.2 O modelo de Federbush 51

IV. Perturbação na massa no modelo com acoplamento derivativo 58

IV.1 O modelo não perturbado 58

IV.2 Comportamento ultravioleta da série perturbativa 60

Referências 67

Introdução

Nesta tese serão apresentados e discutidos alguns tópicos de renormalização em Teoria Quântica dos Campos.

Na primeira parte é feita uma extensão do algoritmo usual de produtos normais para o caso de uma teoria de campos a uma temperatura $T \neq 0$, no chamado formalismo do tempo imaginário. Este formalismo do tempo imaginário foi inicialmente desenvolvido no contexto não relativístico por Matsubara[1] em 1955 e tem muitas aplicações no estudo de sistemas com muitos corpos[2].

Apesar do formalismo de Matsubara ter sido estendido para sistemas relativísticos, já há cerca de 20 anos[3], o interesse pelo estudo das propriedades de teorias relativísticas de campos a uma temperatura $T \neq 0$, teve grande impulso mais recentemente. Em particular a possível restauração de simetrias que são espontaneamente quebradas em $T=0$, uma conjectura inicialmente formulada por Kirzhnits e Linde[4], tem sido investigada em vários modelos[4-8], Os resultados dessas investigações indicam que uma transição de fase realmente ocorre em uma grande variedade de teorias onde a quebra de simetria é caracterizada pelo valor esperado no vácuo não nulo de algum campo escalar. Por outro lado, uma temperatura crítica aparentemente não existe se a quebra de simetria decorre, como exemplificado no modelo de Schwinger[9], das propriedades a curtas distâncias (espaço-tempo) da teoria[6]. Restauração de simetrias devida a um aumento da densidade da matéria também tem sido estudada[10].*

Uma questão fundamental no formalismo com $T \neq 0$ é aquela da renormalização. Vários autores, com grau variável de rigor têm dedicado atenção a este problema[3,11,12] e o resultado dessas investigações pode ser resumido na afirmativa de que as divergências que ocorrem em $T=0$ não são modificadas por variações da tem

---

* Em modelos com parâmetros da ordem de grandeza das constantes das interações fracas os valores críticos da temperatura ou densidade são extremamente elevados[5,10]. Assim parte do interesse nesses estudos reside em aplicações a estrelas de neutrons e a estágios iniciais do universo.

peratura. De um modo bastante simples, embora heurístico, este resultado pode ser entendido se recordarmos que as funções de Green com $T \neq 0$ diferem daquelas de uma teoria de campos Euclidiana simplesmente pelo fato de que a variável "tempo" τ é limitada ao intervalo $0 \leq \tau \leq \beta = 1/T$. As propriedades da teoria a curtas distâncias (espaço-tempo) e portanto o problema da renormalização não devem ser afetados por variações da temperatura.

Neste ponto gostaríamos de lembrar que dentro da teoria de campos usual (isto é $T=0$ e métrica de Minkowski) existe um tratamento bastante efetivo do problema de renormalização que é o chamado algoritmo de produtos normais de Zimmermann[13,14]. No procedimento de Zimmermann as partes divergentes dos gráficos que ocorrem na série perturbativa são explicitamente subtraidos de acordo com a fórmula da floresta. As condições de normalização que definem a teoria (posição dos pólos e valor dos resíduos dos propagadores assim como a definição das várias constantes de acoplamento) são implementadas pela introdução de contratermos finitos. Várias são as aplicações destes métodos em teoria de campos[13-15], particularmente no estudo de simetrias.

Nos capítulos I e II o esquema de BPHZ, como é comumente conhecido o método de Zimmermann, será estendido para o caso $T \neq 0$.* Um primeiro passo nesse sentido é a obtenção de uma fórmula, onde às partes divergentes, independentes da temperatura, associadas com um gráfico genérico sejam explicitamente exibidas. No capítulo I, seguindo as considerações da ref.11, mostramos como tal expressão pode ser deduzida. A fórmula em questão permite-nos fazer uma extensão bastante simples do esquema de BPHZ, resultando amplitudes de Feynman bem definidas.

Apesar das considerações terem sido restritas a teorias envolvendo somente campos escalares e com todos potenciais químicos iguais a zero, aparentemente não existem problemas em estender o formalismo para situações mais gerais.

No capítulo II deduzimos as equações do grupo de renormalização para as funções de Green e para o potencial termodinâmico, no caso do modelo A^4. O caso da teoria com massa zero é

---

* Para um esboço veja ref.16.

brevemente discutido e a restauração da simetria O(N), num modelo envolvendo N campos escalares, é analisada.

No restante da tese (capítulos III e IV) são discutidos alguns problemas de renormalização em alguns modelos bidimensionais (com T=0 e métrica de Minkowski). No capítulo III são tratados um modelo com acoplamento derivativo e o modelo de Federbush.

O modelo com acoplamento derivativo que discutiremos descreve dois campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 (ϕ_2 é pseudo-escalar), de massas m_1 e m_2, acoplados com um campo fermiônico ψ, de massa M, via a interação

$$g_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\varphi_1 \quad + \quad g_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\partial_\mu\varphi_2 \tag{i.1}$$

Um aspecto interessante deste modelo é que, formalmente, a partir dele vários modelos bidimensionais de interesse podem ser obtidos. Esses modelos são

1) Modelo de Schroer[17,18]: $g_2 = 0$ e $m_1 = 0$

2) Modelo de Rothe e Stamatescu[19]: $g_1 = 0$, $M = 0$

3) Modelo de Thirring (Setor de férmions)[20]: $g_1^2=-g_2^2=g$, $m_1 = m_2 = 0$.

O modelo de Federbush[21,18], por outro lado, descreve dois campos fermiônicos ψ_1 e ψ_2 de massas M_1 e M_2 com uma interação dada por

$$g(\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_2) \tag{i.2}$$

Concernente tanto ao modelo com acoplamento derivativo (i.1), como ao de Federbush, existe o chamado problema da geração de contratermos: gráficos de Feynman próprios com 4 linhas de férmions externas são superficialmente logaritmicamente divergentes e requerem subtração. O processo de subtração pode em geral induzir contratermos diferentes dos já presentes na Lagrangiana original (e daí gerar ambiguidades). A presença de tais contratermos pode modificar de maneira substancial as propriedades do modelo[22-24]. Entretanto, tais subtrações são desnecessárias se, devido a alguma simetria assintótica, houver um cancelamento das

divergências dos vários gráficos envolvidos. Este problema foi discutido em detalhe no caso do modelo de Rothe e Stamatescu massivo, na ref. 25.

Para o caso dos modelos em questão é mostrado, no capítulo III, que um esquema de subtrações pode ser construido preservando os cancelamentos acima mencionados. Este esquema é uma versão suave[27] do esquema de BPHZ usual (empregado no capítulo I) e corresponde a uma ligeira modificação daqueles empregados nas referências 25,28. Equações de movimento e identidades de Ward podem ser deduzidas da maneira usual. Em particular, a ausência de correções radiativas para a anomalia da corrente axial é uma consequência imediata de esquema de subtrações proposto.

Uma outra vantagem do esquema empregado é que ele permite discutir limites de massa zero de uma maneira relativamente simples. Isto é exemplificado no caso do modelo com acoplamento derivativo onde o limite $M \to 0$ e (em seguida) m_1, $m_2 \to 0$ é discutido.

No capítulo IV um outro possível procedimento para o estudo perturbativo do modelo com acoplamento derivativo é apresentado. Especificamente, o modelo com $M=0$ é solúvel sendo ϕ_1 e ϕ_2 campos livres de massas m_1 e m_2, respectivamente, e

$$\psi = :e^{ig_1\varphi_1 + ig_2\gamma^5\varphi_2}: \psi_f \qquad (i.3)$$

com ψ_f um campo de Dirac livre de massa zero. Podemos pois, em princípio, estudar a situação em que o termo de massa do férmion, $M\bar{\psi}\psi$, é considerado como uma perturbação em torno da solução (i.3)*. Este tipo de enfoque foi analisado na referência 29 para o caso do modelo de Rothe e Stamatescu e na referência 30 para o caso do modelo de Thirring. Os aspéctos técnicos envolvidos no caso do modelo com acoplamento derivativo são inteiramente análogos aos dessas referências.**

---

* Como é bem sabido, a equivalência entre os modelos de Thirring massivo e o de Sine-Gordon foi descoberta por Coleman[31], a partir de considerações semelhantes.

** Por este motivo a discussão será relativamente sucinta e visa somente fornecer uma idéia mais geral de possíveis desenvolvimentos perturbativos em modelos bidimensionais.

O produto normal associado com $\bar{\psi}\psi$ pode ser convenientemente definido por

$$N[\bar{\psi}\psi] = :e^{+2ig_2\gamma^5_{\alpha\beta}\varphi_2}: \; :\bar{\psi}_{f\alpha}\psi_{f\beta}: \qquad (i.4)$$

em ordem mais baixa de perturbação. De (i.4) vemos que ϕ_1 permanece um campo livre de massa m_1. Divergências infravermelhas, provenientes do fato que ψ_f é um campo de massa zero, podem ser eliminadas através de uma soma parcial da série perturbativa, essa soma consistindo na transferência de um termo proporcional a $:\bar{\psi}_f\psi_f:$ para a Lagrangiana não perturbada.

O comportamento no ultravioleta, da série perturbativa resultante, é analisado na região Euclidiana. Os resultados obtidos desse estudo concordam com o intuitivamente esperado. Como os campos ψ e $N\bar{\psi}\psi$ tem dimensões

$$\dim \psi = \frac{1}{2} + \frac{g_1^2 + g_2^2}{4\pi}$$

$$\dim N[\bar{\psi}\psi] = 1 + \frac{g_2^2}{\pi}$$

esperamos que a série perturbativa faça sentido na região $g_1^2 + g_2^2 < 2\pi$ e $g_2^2 < \pi$. Da discussão do capítulo IV vemos que tais resultados são corretos, ou seja, se $\dim \bar{\psi} < 1$ e $\dim(N\bar{\psi}\psi) < 2$ as funções de Green resultam finitas, com somente a adição de um contratermo $c(:\cos 2g_2\,\phi_2: -1)$, a parte finita de c podendo ser ajustada pela fixação da massa do campo pseudo escalar ϕ_2.

Alguma notação a ser usada:

1. Nossa métrica é dada por

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu \; ; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$$

em 4 dimensões e $g^{00} = -g^{11} = 1$ em duas dimensões. Assim

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}, \qquad px = p_0 x_0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$$

2. Em duas dimensões

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{a}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} a_\nu, \qquad \gamma^\mu \gamma^5 = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu, \qquad \varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O produto direto das matrizes A e B é indicado por $A \otimes B$.

Capítulo I

Teoria Quântica de Campos a uma temperatura $T \neq 0$.

1. O formalismo do tempo imaginário.

Antes de discutirmos o problema da renormalização, vamos nesta seção, recordar rapidamente o formalismo do tempo imaginário para uma teoria quântica de campos a uma temperatura finita. Por simplicidade consideraremos somente o caso de bosons com todos potenciais químicos iguais a zero*

Em teoria quântica relativística de campos a função de Green ordenada no tempo $\langle T\, \phi(x)\phi(y)\rangle = \Delta_F\,(x-y,m)$ de um campo escalar neutro, livre, de massa m, é a solução da equação

$$(\Box_x + m^2)\,\Delta_F(x-y,m) = -i\,\delta(x-y) \qquad (1.1)$$

que satisfaz condições de contorno apropriadas à ordenação temporal.

Devido a analogia entre a matriz densidade $\rho = e^{-\beta H}$ e o operador de evolução $U = e^{-itH}$ para tempos imaginários é conveniente, no estudo de sistemas de muitos corpos a temperatura $T=1/\beta$, a introdução de uma função de Green dependente da temperatura na qual cada uma das variáveis "tempo" é imaginária e restrita ao intervalo de 0 a $-i\beta$.

No caso de um sistema relativístico de bosons sem interação a uma temperatura T esta função de Green é dada pela média estatística

$$G_F(x-y,m) = \langle T\,\phi(x)\,\phi(y)\rangle = \frac{Tr\; e^{-\beta H_0}\, T\,\phi(x)\,\phi(y)}{Tr\; e^{-\beta H_0}} \qquad (1.2)$$

---

* A restrição não é essencial. Ela corresponde a sistemas com os valores médios de todas cargas conservadas iguais a zero. Eventuais comentários serão feitos sobre situação envolvendo férmions.

onde a operação de ordenação para tempos imaginários é definida por

$$T\ \phi(x)\,\phi(y) = \begin{cases} \phi(x)\,\phi(y) & \text{se} \quad ix_0 > iy_0 \\ \phi(y)\,\phi(x) & \text{se} \quad iy_0 > ix_0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

Funções de Green envolvendo um número maior de campos são definidas semelhantemente.

De (1.2) e (1.3) vê-se que $G_F(x-y,m)$ satisfaz (1.1), com x_0 estendido para valores imaginários e a condição de periodicidade

$$G_F(x-y,m)\Big|_{x_0=0} = G_F(x-y,m)\Big|_{x_0=-i\beta}$$

Uma representação adequada, satisfazendo as condições acima é

$$G_F(x,m) = -\frac{1}{i\beta}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-ipx}\,\frac{i}{p^2-m^2} \qquad (1.4)^*$$

onde

$$p = \left(p_0 = W_N = \frac{2N\pi i}{\beta},\ \vec{p}\right)$$

A formula inversa de (1.4) é

$$\Delta_F(p,m) = \frac{i}{p^2-m^2} = \int_0^{-i\beta} dx_0 \int d^3x\, e^{ipx}\, G_F(x,m) \qquad (1.5)$$

---

* No caso de férmions a função de Green correspondente é dada por

$$S_F(x,M) = \langle T\,\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\rangle = -\frac{1}{i\beta}\sum_N\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-ipx}\,\frac{i}{\gamma^0(p_0+\mu)-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}-M}$$

com $p_0 = \frac{\pi i}{\beta}(2N+1)$. μ é o potencial químico.

No caso em que interações estão presentes a densidade de Lagrangiana do sistema é escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_i \left(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - m_i^2 \phi_i \phi_i \right) \tag{1.6}$$

onde $\mathcal{L}_{int}$ inclue todas as interações.

As funções de Green associadas a (1.6) são dadas formalmente por

$$G^{(N)}_{i_1,\dots,i_N}(x_1,\dots,x_N) = \langle T\, \phi^0_{i_1}(x_1) \dots \phi^0_{i_N}(x_N) \exp \int d^4x\, \mathcal{L}_{int}(\phi^0_i(x)) \rangle_{0c} \tag{1.7}$$

onde $\tau = i x_0$, $\int d^4x = \int d^3x \int_0^\beta d\tau$ e ϕ^0 é o campo livre como especificado por $\mathcal{L}_0$. O índice c em (1.7) significa a omissão dos diagramas de vácuo.

Pela aplicação do teorema de Wick[2] obtemos a expansão usual da teoria quântica de campos, em termos de diagramas de Feynman, com as substituições

$$p_0 \longrightarrow \frac{2\pi N i}{\beta}$$

$$\int d^4p \longrightarrow \frac{i}{\beta} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int d^3p \tag{1.8}$$

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \longrightarrow -i\beta\, (2\pi)^3\, \delta_{N_1 + \dots + N_n, 0}\, \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)$$

2. O problema da renormalização

Como é bem sabido, as funções de Green de uma teoria relativística de campos envolvem integrais formais as quais podemos tornar bem definidas por algum processo de subtração. É uma das características de modelos ditos renormalizáveis que estas subtrações podem ser implementadas pela adição de um número finito de contratermos as Lagrangianas que descrevem tais modelos.

Ao considerarmos o caso de uma teoria de campos relativística a uma temperatura $T \neq 0$ uma pergunta que surge naturalmente é se os contratermos necessários para tornar as funções de Green bem definidas podem ser escolhidos independentes da temperatura. Em outras palavras a questão é se as partes divergentes são ou não dependentes da temperatura.

Neste capítulo mostraremos que o problema da renormalização é essencialmente independente da temperatura. Entretanto, antes de passarmos a discussão do caso geral, vamos considerar dois exemplos que servem para ilustrar as idéias e a notação a serem empregadas.

Como primeiro exemplo, consideramos o gráfico da fig.1 o qual esta associado com a integral

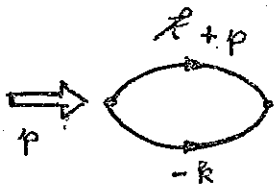


Fig.1

$$\int dk\, I_G = \int dk \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \qquad (1.9)$$

onde

$$\int dk = \frac{i}{\beta} \sum_N \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad k^0 = \frac{2\pi N i}{\beta}, \quad p^0 = \frac{2\pi N_0 i}{\beta} \qquad (1.10)$$

como é claro da fig.2, podemos usar a identidade[11]

$$\frac{i}{\beta} \sum_{N=-\infty}^{\infty} f(k_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{dk^0 f(k^0)}{e^{\beta k_0} - 1} = \int_T dk_0 f(k^0) + \int_0 dk_0 f(k^0) \qquad (1.11)$$

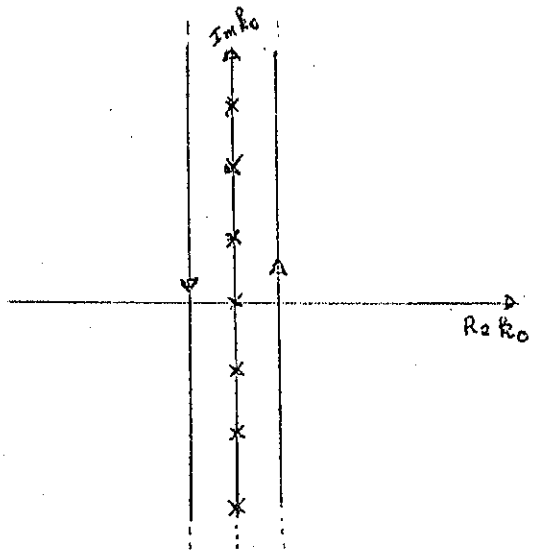


Fig.2. O circuito c empregado em (1.11). As cruzes indicam as posições dos pólos de $\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}$

onde

$$\int_T dk^0 f(k^0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk^0 \frac{f(k^0)}{e^{\beta k_0}-1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} dk^0 \frac{f(k^0)}{e^{-\beta k_0}-1} \tag{1.12a}$$

e

$$\int_0 dk^0 f(k^0) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{2\pi} f(k^0) \tag{1.12b}$$

para reescrever (1.9) como

$$A + B \tag{1.13}$$

onde

$$A = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \int d^3k \; I_G \tag{1.13a}$$

$$B = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \left[\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk_0 \frac{I_G}{e^{\beta k_0}-1} + \int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} dk_0 \frac{I_G}{e^{-\beta k_0}-1} \right] \tag{1.13b}$$

A integral A é logaritmicamente divergente e requer uma subtração para torná-la bem definida. Por outro lado, as integrais em B, as quais dependem explicitamente da temperatura, são condicionalmente convergentes. Realmente, completando os contornos das integrações na variável k^0, em B, por semicírculos no infinito vemos que essas integrais adquirem fatores de convergência do tipo

$$\frac{1}{e^{\beta \omega_k}-1} \quad , \quad \omega_k = (\vec{k}'^2 + m^2)^{1/2}$$

que tornam as integrais tridimensionais restantes absolutamente convergentes.

Como segundo exemplo, consideremos o caso um pouco mais complicado de um gráfico com dois circuitos (fig.3a)

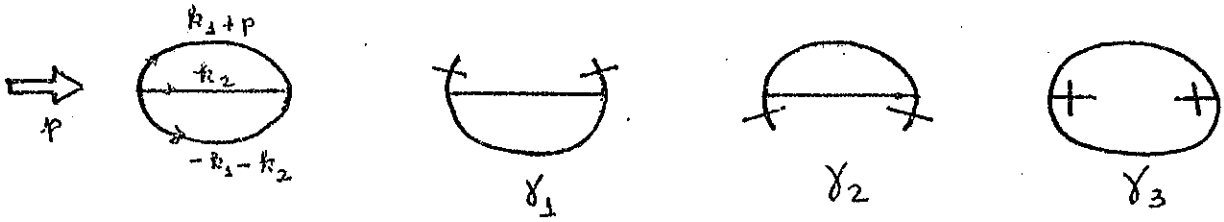


Fig.3: a) Gráfico G com dois circuitos, b) subgráficos γ_1, γ_2 e γ_3 de G.

Neste caso a integral não subtraida é dada por

$$\bar{J}(p,m) = \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 \, I_G$$

$$I_G = \frac{i}{(p+k_1)^2-m^2} \, \frac{i}{k_2^2-m^2} \, \frac{i}{(k_1+k_2)^2-m^2} \tag{1.14}$$

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_j = \frac{i}{\ell} \sum_{N_j} \int \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \quad , \quad k_j^0 = \frac{2\pi N_j}{\ell} i \quad , \quad p^0 = \frac{2\pi N_0}{\ell} i$$

Usando (1.11) para a integral em k_1^0 resulta

$$\bar{J}(p,m) = \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \int_0 dk_1 \, I_G + \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \int_T dk_1 \, I_G \tag{1.15}$$

com

$$\int_0 dk = \int_0 dk_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad , \quad \int_T dk = \int_T dk_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

Considerando o segundo termo em (1.15), procedemos da maneira análoga ao do primeiro exemplo, isto é, completamos o contôrno evitando os pólos de k_1^0 no eixo imaginário. Assim obtemos, simbolicamente

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \int_T dk_1 I_G = \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \, \frac{i}{k_2^2-m^2} \, \frac{i}{(k_1+k_2)^2-m^2} \left(\text{P.F.T.} \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 \, \frac{i}{(k_1+p)^2-m^2} \right) +$$

$$+ \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \, \frac{i}{k_2^2-m^2} \, \frac{i}{(k_1+p)^2-m^2} \left(\text{P. F. T.} \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 \, \frac{i}{(k_1+k_2)^2-m^2} \right) \tag{1.16}$$

As expressões entre parênteses no lado direito de (1.16) indicam as contribuições para $\int_T dk_1^0$ provenientes dos pólos de $\Delta_F(k_1+p)$ e $\Delta_F(k_1+k_2)$, respectivamente (o primeiro termo no lado direito, por exemplo, é igual a

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2W_{k_1p}} \Delta_F(k_2)\left[\frac{1}{e^{\beta(W_{k_1p}-p^0)}-1} \Delta_F(k_1+k_2)\Big|_{k_1^0+p^0=W_{k_1p}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^{\beta(W_{k_1p}+p^0)}-1} \Delta_F(k_1+k_2)\Big|_{k_1^0+p^0=-W_{k_1p}} \right] ,$$

$$W_{k_1p} = \left((\vec{k}_1+\vec{p})^2+m^2\right)^{1/2} \qquad).$$

Tendo em conta que em (1.16) $e^{\pm\beta p^0} = e^{\pm\beta k_2^0} = 1$, estas expressões entre parênteses são explicitamente convergentes no que se refere a integração k_1. Por este motivo usamos o símbolo P.F.T (significando parte finita dependente da temperatura) para indicar essas contribuições.

Indicando por G/γ_i o gráfico obtido pela contração de γ_i (fig.3) a um ponto, podemos escrever (1.16) como

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2\, I_{\gamma_1}\left(\text{P.F.T.} \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1\, I_{G/\gamma_1}\right) + \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2\, I_{\gamma_2}\left(\text{P.F.T.} \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1\, I_{G/\gamma_2}\right) \tag{1.17}$$

Em (1.17) cada parcela representa a soma de dois termos (lembre que I_{γ_i} depende de k_1).

Consideremos agora a integração em k_2^0. Usando (1.11) em (1.15) obtemos que o primeiro termos nesta última equação é

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \int_0 dk_1\, I_G = I_1 + I_2 + I_3 \tag{1.18}$$

$$I_1 = \int_0 dk_2 \int_0 dk_1\, I_G \tag{1.18a}$$

$$I_2 = \int_0 dk_1 \frac{i}{(k_1+k_2)^2-m^2} \frac{i}{(k_1+p)^2-m^2} \left(\int_T dk_2 \frac{i}{k_2^2-m^2} \right) \tag{1.18b}$$

$$I_3 = \int_0 dk_1 \frac{i}{k_2^2 - m^2} \frac{i}{(k_1+p)^2 - m^2} \left(\int_T dk_2 \frac{i}{(k_1+k_2)^2 - m^2} \right) \qquad (1.18c)$$

A integral I_1 é a contribuição de T=0 para a expressão original (1.15). Ela é quadraticamente divergente e necessita de subtrações. Em (1.18b) e (1.18c) as expressões entre parênteses representam, como antes, as contribuições para $\int_T dk_2^0$ provenientes dos pólos de $\Delta_F(k_2)$ e $\Delta_F(k_1 + k_2)$, respectivamente. Em particular, I_2 pode ser escrita como

$$I_2 = \int_0 dk_1 \, I_{\gamma_3} \left(P.F.T \int dk_2 \, I_{G/\gamma_3} \right) \qquad (1.19)$$

A integral I_3 resulta finita se após completarmos o contorno k_2^0 (o que produz fatores do tipo

$$\frac{1}{e^{\beta(w_{k_1k_2} - k_1^0)} - 1} \quad , \quad w_{k_1k_2} = \left[(\vec{k_1} + \vec{k_2})^2 + m^2 \right]^{1/2} \Big)$$

completarmos também o contorno k_1^0, evitando desta feita os pólos de

$$\frac{1}{e^{\beta(w_{k_1k_2} - k_1^0)} - 1}$$

A integral I_3, calculada desta forma é uma contribuição para a parte finita da integral original.

O segundo termo em (1.15) (o qual é igual a (1.17)) é tratado semelhantemente, obtendo-se

$$\int dk_2 \int_T dk_1 \, I_G = \int_0 dk_2 \, I_{\gamma_1} \left(P.F.T. \int dk_1 \, I_{G/\gamma_1} \right) +$$

$$+ \int_0 dk_2 \, I_{\gamma_2} \left(P.F.T. \int dk_1 \, I_{G/\gamma_2} \right. + \int_T dk_2 \int_T dk_1 \, I_G$$

(1.20)

O último termo em (1.20) é finito e somado à I_3 constitui a parte finita dependente da temperatura da integral original. Esta soma será representada como

$$P.F.T \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 dk_2 \; I_G \tag{1.21}$$

Juntando os resultados acima temos

$$\bar{J}(p,m) = \int_0 dk_2 \int_0 dk_1 \; I_G + \int_0 dk_2 \; I_{\gamma_1} \left(P.F.T. \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_3 \; I_{G/\gamma_1} \right)$$

$$+ \int_0 dk_2 \; I_{\gamma_2} \left(P.F.T. \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 \; I_{G/\gamma_2} \right. +$$

$$+ \int_0 dk_3 \; I_{\gamma_3} \left(P.F.T. \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_2 \; I_{G/\gamma_3} \right) + P.F.T. \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 dk_2 \; I_G$$

Vemos assim que $\bar{J}(p,m)$ pode ser escrita de maneira compacta como

$$\bar{J}(p,m) = \sum_K \int_0 dk_{i_{s+1}} \ldots dk_{i_2} \; I_K \left(P.F.T. \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_{i_1} \ldots dk_{i_s} \; I_{G/K} \right) \tag{1.22}$$

onde a soma estende-se sobre todos subgráficos próprios (1 PI), incluindo G e ϕ, de G.

Passemos agora a considerar um gráfico genérico. De um modo geral teremos integrais do tipo

$$\bar{J}(p,m) = \sum\!\!\!\!\!\!\int dk_1 \ldots dk_H \; I_G(p,k,m) \quad \text{onde}$$

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dk_j = \frac{i}{\beta} \sum_{N_j} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \;, \quad k_j^0 = \frac{2\pi N_j}{\beta} i \;, \quad p_j^0 = \frac{2\pi \bar{N}_j}{\beta} i$$

$$I_G(p,k,m) = \prod_{V_i \in G} P_{V_i} \prod_{L \in L(G)} \Delta_F(\ell_L) \tag{1.23}$$

$p = \{p_1^\mu, \ldots, p_m^\mu\}$, $\mu = 0,1,2,3$ = base para os momentos externos

$k = \{k_1^\mu, \ldots, k_H^\mu\}$, $\mu = 0,1,2,3$ = base para os momentos internos

P_{V_i} = monômio nos momentos das linhas juntando-se no vértice V_i.

$L(G)$ = conjunto das linhas de G.

A expressão (1.23) não é em geral convergente e deve ser complementada com alguma prescrição que forneça uma parte finita. A prescrição que daremos, análoga a de BPHZ usual, consiste na aplicação de operadores de subtração (operadores de Taylor) as partes divergentes contidas em (1.23). Antes disso, semelhantemente ao que fizemos nos exemplos, vamos reescrever (1.23) de maneira tal que as partes divergentes (independentes da temperatura) sejam explicitamente exibidas. Isto requer um pouco mais de notação.

Seja $K = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ um conjunto de subgráficos próprios de G com a propriedade que quaisquer dois desses subgráficos são disjuntos. Para cada conjunto deste tipo definimos

$$I_K = \prod_{i=1}^{n} I_{\gamma_i} \tag{1.24a}$$

$$I_{G/K} = I_{G/\gamma_1 \cdots \gamma_n} \tag{1.24b}$$

onde $G/\gamma_1 \cdots \gamma_n$ é o gráfico reduzido, obtido pela contração de todos γ_i, $i = 1, \ldots, n$ a um ponto.

Definimos também uma ordem normal de integração para G estabelecendo que k_j é posterior a k_i se $j > i$. A utilidade desta definição provém do fato que ela permite especificar de modo não ambíguo as variáveis de integração que são associadas com o gráfico reduzido G/K. Assim diremos que k_a é uma variável de integração de G/K se pelo menos um dos propagadores $\Delta_F(\ell)$ de $I_{G/K}$ depender de k_a e, além disso, se esta dependência não puder ser eliminada por uma redefinição das variáveis de integração k_j com $j < a$ de G/K. Por exemplo se

$$I_{G/K} = \frac{i}{(k_1+k_2)^2 - m^2} \; \frac{i}{(k_1+k_2+k_3)^2 - m^2} \qquad \text{então } k_1 \text{ e } k_3$$

(mas não k_2) são variáveis de integração de G/K.

A ordem normal de integração em G induz uma correspondente ordem normal em G/K: Se k_{i_1} precede k_{i_2} em G então, por definição, o mesmo acontece em G/K.

A fórmula básica que permite estender o formalismo usual de BPHZ para o caso de funções de Green com $T \neq 0$ é

$$\bar{I}(p,m) = \sum_K \int_0 dk_{i_{p+1}} \ldots dk_{i_H} \, I_K \left(P.F.T. \int dk_{i_1} \ldots dk_{i_p} \, I_{G/K} \right) \tag{1.25}$$

onde a soma é sobre todas as famílias K de subgráficos próprios disjuntos de G (incluindo G e ϕ); $k_{i_1} \ldots k_{i_s}$ são as variáveis de integração do gráfico G/K determinadas como acima. A parte finita dependente da temperatura do gráfico G/K

$$P.F.T. \int dk_{i_1} \ldots dk_{i_p} \, I_{G/K}$$

é dada pela soma de todas contribuições finitas em todas variáveis de integração de G/K. Essas contribuições são obtidas pelo uso de (1.11), seguindo a ordem normal em G/K da maneira como fizemos nos exemplos considerados.

Para provar (1.25), usamos (1.11) seguindo a ordem normal de integração em G. Começamos então considerando a integração k_1 e na parte $\int_T dk_1$ completamos o contorno de k_1^0 com semicírculos no infinito*, mas evitando os pólos dos fatores $\frac{1}{e^{\pm\beta k_0}-1}$. Como resultado obter-se-á uma soma de termos provenientes das contribuições dos pólos dos propagadores que dependem de k_1. A operação produzindo o resíduo de um determinado pólo é comumente chamada de abertura da linha associada com o propagador correspondente aquele pólo. A razão é que se

$$\ell = k_1 + \sum_{j>1} \alpha_{1,j} \, k_j + q_\ell \tag{1.26}$$

$$|\alpha_{1,j}| = 0, 1$$

---

* Se P_V em (1.23) for de grau suficientemente elevado é subentendido que uma regularização permitindo a deformação do contorno é empregada. Após a aplicação do teorema dos resíduos, tal regularização pode ser eliminada.

q_ℓ : combinação linear dos momentos externos a G

então o termo correspondente ao pólo em k_1^0 de $\Delta_F(\ell)$ conterá um fator

$$\frac{1}{e^{\beta w_\ell} - 1} \quad , \quad w_\ell = (\vec{\ell}'^2 + m^2)^{1/2} \tag{1.27}$$

e a integral resultante será superficialmente convergente em todos hiperplanos onde $\vec{\ell}$ seja variável. Possíveis divergências ainda existentes estão portanto associadas com o gráfico obtido pelo corte da linha considerada*.

Consideramos a seguir a integração na variável k_2, usando novamente (1.11). Deixando temporariamente de lado as partes envolvendo $\int_0 dk_2$ os outros termos são tratados de maneira semelhante ao da integração em k_1: Na parte $\int_T dk_2 \int_T dk_1 \, I_G$ fechando o contorno na variável k_2^0, obtemos integrais que são superficialmente convergentes nos hiperplanos onde pelo menos dois dos tri-momentos das linhas abertas sejam variáveis. Na parte $\int_T dk_2 \int_0 dk_1 \, I_G$ procedemos também a abertura das linhas associadas com os pólos em k_2^0. Se a linha aberta contiver k_1 (ou seja, se ℓ depender de k_1) a contribuição resultante conterá um fator do tipo

$$\frac{1}{e^{\beta(w_\ell - k_1^0)} - 1} \qquad w_\ell = (\vec{\ell}'^2 + m^2)^{1/2} \tag{1.28}$$

Neste caso continua-se a operação, completando o contorno da variável k_1^0 (mas evitando os pólos de (1.28)), obtendo-se como resultado termos que correspondem a abertura de pelo menos duas linhas.

Procedendo-se desta maneira, obtemos após o desenvolvimento de n-ésima integração que (1.23) equivale a

---

* Se o gráfico resultante não for próprio, as divergências estarão concentradas em suas partes próprias. Segue-se que, nestes casos, a operação em questão equivale a abertura de mais de uma linha.

$$\bar{J}(p,m) = \int dk_{n+1} \cdots \int dk_H \left\{ \sum_K^{(n)} \int dk_{i_{s+1}} \cdots dk_{i_n} \, I_K \left(P.F.T. \int dk_{i_1} \cdots dk_{i_s} \, I_{G/K} \right) \right\}$$

(1.29)

onde o índice (n) acima do somatório é para indicar que a soma estende-se sobre todos conjuntos de subgráficos de G com a propriedade que a possível dependência dos propagadores de $I_{G/K}$ com qualquer dos momentos k_j, $j = n+1, n+2, \ldots, H$ possa ser eliminada por uma redefinição das variáveis da integração de G/K.

Fórmula (1.29) pode ser verificada por inspeção nos casos n = 1,2. Ela reduz-se a (1.25) no caso n = H.

Suponha que (1.29) seja válida para um determinado n. Então, desenvolvendo a integração na variável k_{n+1}, conforme (1.11), obtemos

$$\bar{J}(p,m) = \bar{J}_1(p,m) + \bar{J}_2(p,m) \qquad (1.30)$$

onde

$$\bar{J}_1(p,m) = \int dk_{n+2} \cdots dk_H \left\{ \sum_K^{(n)} \int_0 dk_{i_{s+1}} \cdots dk_{i_n} \, dk_{n+1} \, I_K \left(P.F.T. \int dk_{i_1} \cdots dk_{i_s} \, I_{G/K} \right) \right\}$$

$$\bar{J}_2(p,m) = \int dk_{n+2} \cdots dk_H \left\{ \sum_K^{(n)} \int_0 dk_{i_{s+1}} \cdots dk_{i_n} \int_T dk_{n+1} \, I_K \left(P.F.T. \int dk_{i_1} \cdots dk_{i_s} \, I_{G/K} \right) \right\}$$

$\bar{J}_1$ (p,m) reune as contribuições dos conjuntos K tais que k_{n+1} (assim como $k_{n+2}, \ldots, k_H$) não é uma variável de integração de $I_{G/K}$.

Consideremos um termos genérico, K, da soma contribuindo para $\bar{J}_2$ (p,m). Ao completarmos o contorno de integração na variável k^0_{n+1} observamos que os pólos contribuintes tem um momento ℓ tal que

$$\ell_0 = k_{0\,n+1} + \sum_{\substack{k_i \in K \\ i < n+1}} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0 + \sum_{\substack{k_i \in K \\ i > n+1}} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0 +$$

$$+ \sum_{k_i \in G/K} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0 + q_\ell^0 \qquad (1.31)$$

onde se $k_i \in G/K$ então k_i^0 deve ser entendido como a posição do polo da correspondente linha de G/K. Usando que $e^{\pm \xi q_\ell^0} = e^{\pm \xi k_i^0} = 1$ para i > n+1 vemos que o termo resultante conterá um fator do tipo

$$\frac{\Theta\left(W_\ell - \sum_{k_i \in G/K} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0\right)}{e^{\xi\left(W_\ell - \sum_{\substack{k_i \in K \\ i < n+1}} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0 - \sum_{k_i \in G/K} \alpha_{n+1,i}\, k_i^0\right)} - 1} \qquad (1.32)$$

A função de Heaviside e a exponencial em (1.32) garantem a convergência ultravioleta da integral resultante nos hiperplanos onde $\vec{\ell}$ e/ou qualquer dos $k_i^0 \in G/K$ forem variáveis.

Observe ainda que a dependência de ℓ em (1.31) com os momentos k_i, i > n+1, pode ser eliminada por uma redefinição da variável k_{n+1}.

A seguir eliminamos a dependência de (1.32) nas variáveis $k_i \in K$ completando sucessivamente os contornos mas evitando os pólos de (1.32). É claro que este procedimento produzirá integrais convergentes nos hiperplanos onde $\vec{\ell}$ e/ou quaisquer dos momentos das linhas cortadas forem variáveis.

Colecionando os termos que correspondem a gráficos topologicamente equivalente (i.é. que tem as mesmas linhas cortadas) vemos que os conjuntos K de (1.30) são mapeados em conjuntos K' que tem a propriedade que a possível dependência de $I_{G/K'}$ com os momentos k_j, j = n+2, n+3,...,H possa ser eliminada por uma redefinição das variáveis de integração de G/K'. Isto finaliza a demonstração de (1.25).

Alguns comentários são necessários

1) A ordem de integração nas variáveis k_0 é arbitrária e diferente ordens resultarão na mesma parte finita (como será definida posteriormente). Isto é claro se a expressão original é regularizada (por exemplo, a la Pauli-Villars). Por outro lado, feitas as subtrações necessárias a regularização pode ser eliminada.

2) Resíduos de pólos de ordem ≥ 2 produzem operadores de derivação que atuam também em I_K e a fórmula (1.25) desenvolvida por extenso resulta em geral extremamente complicada.

3) Como dito anteriormente a expressão (1.25) é ainda formal e necessita de uma prescrição para torná-la bem definida. É o que faremos a seguir.

Seja $d(\gamma)$ o grau de divergência superficial do gráfico γ, i.e.

$$d(\gamma) = 4\, m(\gamma) - 2\, n_\gamma + \sum_{\substack{a \\ V_a \in \gamma}} D_{V_a} \tag{1.33}$$

onde $m(\gamma)$ = nº de circuitos independentes de γ

n_γ = nº de linhas internas de γ

D_{V_a} = grau do monômio P_{V_a} correspondente ao vértice V_a.

Em analogia com o processo de BPHZ usual, a expressão subtraida correspondente a (1.25) é definida por

$$\bar{J}_R(p, m, G) = \sum_K \int_0 dk_{i_{D+1}} \cdots dk_{i_H}\, R_K \left(P.F.T. \int dk_{i_1} \cdots dk_{i_D}\, I_{G/K} \right)$$

onde

$$R_K = \prod_{i=1}^{n} R_{\gamma_i} \tag{1.34}*$$

$$R_{\gamma_i} = \sum_{U \in \mathcal{F}_{\gamma_i}} \prod_{\gamma_i \in U} - t^{d(\gamma)}\, I_{\gamma_i} \tag{1.35}$$

---

* Em geral a parte finita associada a G/K depende da escolha dos circuitos independentes. Tal não acontece com $\bar{J}_R - \bar{J}_R \big|_{T=0}$

sendo $\mathcal{F}_{\gamma_i}$ o conjunto de todas florestas de γ_i

$t^{d(\gamma)}$ = operador de Taylor até ordem $d(\gamma)$ nos momentos externos de γ.

A atribuição de momento para cada subgráfico γ em (1.34-35) deve ser admissível. Isto significa que se ℓ_L^γ é o momento fluindo através da linha $L \in \gamma$ então

$$\ell_L = \ell_L^\gamma = k_L^\gamma + p_L^\gamma$$

onde p_L^γ é uma combinação linear dos momentos externos, p^γ, de γ e k_L^γ é uma combinação linear das variáveis de integração de γ (ou seja, k_L^γ deve independer dos momentos externos de G e dos momentos de integração do gráfico reduzido G/γ). Com esta escolha um dado termo de subtração é formalmente igual ao produto da amplitude de um certo gráfico reduzido por um coeficiente (divergente) independente da temperatura.

A convergência de $\bar{J}_R(p, m, G)$ é uma consequência imediata da discussão acima e do teorema de Zimmermann[32,14] sobre o esquema de BPHZ.

Muitas vezes é útil considerar a possibilidade de fazer mais subtração que o necessário na definição (1.34). Isto pode ser feito de uma maneira sistemática através da substituição de $d(\gamma)$ em (1.35) por $\delta(\gamma)$, dado por

$$\delta(\gamma) = 4 - B_\gamma - \sum_{V_a \in \gamma} (4 - \delta_a) \qquad (1.36)$$

onde B_γ = nº de linhas externas de γ

$\delta_a = d_a + c_a$

d_a = dimensão do vértice $V_a \equiv D_{V_a}$ + nº de linhas juntando-se em V_a.

c_a é um inteiro não negativo.

No caso particular em que todos c_a são iguais a zero então $d(\gamma) = \delta(\gamma)$.

Capítulo II

Produtos Normais no modelo A^4 a uma temperatura $T \neq 0$

A fim de exemplificar o uso do formalismo desenvolvido no capítulo anterior consideremos o caso da teoria A^4, descrita pela densidade de Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{m^2}{2} A^2 \tag{II.1}$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{b}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \frac{a}{2} A^2 - \frac{(g-c)}{4!} A^4$$

As funções de Green são dadas por

$$G^{(N)}(x_1, \ldots, x_N) = \langle T A(x_1) \ldots A(x_N) \rangle = \text{Parte finita de}$$

$$\langle T A^0(x_1) \ldots A^0(x_N) \exp \int d^4x \, \mathcal{L}_{int}(A^0) \rangle_0 \tag{II.2}$$

onde $\int d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3x$ e A^0 é o campo livre especificado por $\mathcal{L}_0$. A omissão dos diagramas contendo pelo menos uma componente desconexa sem nenhuma linha externa é subentendida. Considerando a expansão de Feynman de (II.2), a prescrição de se tomar a parte finita consiste na substituição de $\bar{J}(p,m,G)$ por $\bar{J}_R(p,m,G)$. O grau de divergência superficial correspondente ao gráfico γ é dado por

$$d(\gamma) = 4 - N_\gamma \tag{II.3}$$

N_γ = nº de linhas externas de γ.

Os parâmetros a, b e c são independentes da temperatura e são determinados a partir das condições de normalização da Teoria. Seja $\Gamma^{(N)}(p_1, \ldots, p_N)$ a função de vértice de N pontos, no espaço dos momentos, isto é

$$-i\beta\,(2\pi)^3\,\delta_{N_1+\dots+N_N,0}\;\delta^3\Big(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\Big)\,.\,\Gamma^{(N)}(p_1,\dots p_N) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N}\int_0^{-i\beta} dx_{0j}\;\prod_{k=1}^{N}\int d^3x_k\;\exp i\sum_{i=1}^{N} p_i x_i\;\langle T\,A(x_1)\dots A(x_N)\rangle^{Prop} \qquad (11.4)$$

$$N > 2$$

$$\Gamma^{(2)}(p,-p) = -\left[\Delta_F'(p,m^2)\right]^{-1} \qquad (11.5)$$

onde Prop significa que somente gráficos próprios devem ser considerados. Em particular

$$\Gamma^{(2)}(p,-p) = i\left[p^2 - m^2 + a + b\,p^2 + \hat{\Sigma}(p)\right]$$

$$\Gamma^{(4)}(p_1,\dots p_4) = i(c-g) + \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1,\dots p_4) \qquad (11.6)$$

Quando T=0 as funções de N pontos tem a mesma forma que as da teoria A^4 no espaço de Minkowski, mas p_0 é imaginário puro (i.e. a métrica é Euclidiana).

As condições que determinam a, b e c são aquelas da teoria com T = 0:

$$\Gamma^{(2)}(p,-p)\Big|_{\substack{p^2=m^2\\ T=0}} = 0$$

$$\Gamma^{(2)}(p,-p)\Big|_{\substack{p^2=\mu^2\\ T=0}} = i(\mu^2 - m^2) \qquad (11.7)$$

$$\Gamma^{(4)}(p_1,\dots,p_4) = \Big|_{\substack{T=0\\ p_i\cdot p_j=\frac{\mu^2}{3}(4\delta_{ij}-1)}} = -ig$$

Produtos normais podem ser introduzidos por uma ligeira modificação do formalismo: se θ é qualquer produto formal do campo básico e de suas derivadas definimos o produto normal $N_\delta[\theta]$ por

$$\langle T\,N_\delta[\Theta](x)\prod_i A(x_i)\rangle = \text{P.F.}\,\langle T\,\Theta^{(0)}(x)\prod_i A^0(x_i)\;e^{\int d^4x\,\mathcal{L}_{int}(A^0)}\rangle_0 \qquad (11.8)$$

onde novamente é subentendida a omissão de todos os diagramas contendo pelo menos uma componente desconexa sem nenhuma linha externa. Os gráficos contribuindo para (II.8) contem um vértice especial V associado com $\theta(x)$ e a prescrição da parte finita corresponde ao uso de (I .34-35) com

$$\delta(\gamma) = \begin{cases} \delta - N_\gamma & \text{se } V \in \gamma \\ 4 - N_\gamma & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{II.9}$$

onde δ = dimensão de $\theta + c$, $c \geq 0$

Os produtos normais definidos por (II.8), (II.9) satisfazem algumas relações importantes tais como:

1) <u>Fórmula de derivação</u>:

$$\partial_\mu \langle T N_\delta [\theta](x) \prod A(x_i) \rangle = \langle T N_\delta [\partial_\mu \theta](x) \prod A(x_i) \rangle \tag{II.10}$$

a qual é uma consequência imediata da propriedade: $p_\mu t_p^\delta f(p) = t_p^{\delta+1} p_\mu f(p)$ dos operadores de Taylor.

2) <u>Condições de Normalização em T=0</u>. Se $0 \leq M \leq \delta - N$ e D^M é qualquer operador diferencial de ordem M em $p_1, \ldots, p_N$ então

$$D^M \Gamma^{(N)}_{\theta,\delta}(p_i = 0) \Big|_{T=0} = \text{contribuição do gráfico trivial} \tag{II.11}$$

3) <u>Equações de Movimento</u>. São generalizações das equações de Euler-Lagrange para campos clássicos. Um exemplo é a equação "bilinear" de movimento

$$\langle T N_4 [A(\partial^2 + m^2) A](x) X \rangle = \frac{g-c}{3!} \langle T N_4 [A^4](x) X \rangle - b \langle T N_4 [A \partial^2 A](x) X \rangle$$

$$+ a \langle T N_4 [A^2](x) X \rangle + \sum_k \delta(x - x_k) \langle T X \rangle , \tag{II.12}$$

$$X = \prod_i A(x_i)$$

$$\delta(x - x_k) = \delta(\tau - \tau_k)\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_k) , \quad (\tau_k = i\, x_k^0)$$

a qual pode ser deduzida notando que a operação $(\partial^2 + m^2)A$ corresponde a amputação da linha associada com o campo A. Em contraste com (II.12), as equações de movimento para produtos normais não bilineares ($N_5[A^2\partial^2 A]$, por exemplo) envolvem termos adicionais, sem análogo clássico (isto não será discutido nesta tese)[14]

4) Identidades de Zimmermann. São identidades relacionando produtos normais de diferentes graus:

$$\langle T N_S[\Theta](x) \mathbb{X} \rangle = \langle T N_\varphi[\Theta](x) \mathbb{X} \rangle + \sum a_i \langle T N_S[\Theta_i](x) \mathbb{X} \rangle \tag{II.13}$$

Estas relações são deduzidas no apêndice. Note que os coeficientes a_i podem ser determinados pelo uso das condições de normalização (II.11) e são independentes da temperatura.

Vemos assim que as relações básicas do algoritmo de produtos normais são mantidas. Como um exemplo das aplicações vamos deduzir as equações do grupo de renormalização para a teoria A^4. Definimos, simbolicamente, os seguintes operadores diferenciais de vértice (DVO_s):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x \; N_4[A^2](x) \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x \; N_4[\partial_\mu A \partial^\mu A](x) \\ \Delta_3 &= \frac{1}{4!}\int_0^\beta d\tau \int d^3x \; N_4[A^4](x) \end{aligned} \tag{II.14}$$

As seguintes relações são facilmente estabelecidas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu^2}\Gamma^{(N)} &= \left[\frac{\partial a}{\partial \mu^2}\Delta_1 + \frac{\partial b}{\partial \mu^2}\Delta_2 + \frac{\partial c}{\partial \mu^2}\Delta_3\right]\Gamma^{(N)} \\ \frac{\partial}{\partial g}\Gamma^{(N)} &= \left[\frac{\partial a}{\partial g}\Delta_1 + \frac{\partial b}{\partial g}\Delta_2 + \frac{\partial}{\partial g}(c-g)\Delta_3\right]\Gamma^{(N)} \\ N\Gamma^{(N)} &= \left[2(a-m^2)\Delta_1 + 2(1+b)\Delta_2 + 4(c-g)\Delta_3\right]\Gamma^{(N)} \end{aligned} \tag{II.15}$$

Observe que a última das equações (II.15) é uma consequência imediata da eq. (II.12).

Usando estas equações obtemos a equação do grupo de renormalização

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - N\gamma\right] \Gamma^{(N)} = 0 \tag{II.16}$$

(II.16) pode ser demonstrada usando (II.15) e igualando a zero o coeficiente de cada DVO. Obtemos

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma\right](a - m^2) = 0$$

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma\right](1 + b) = 0$$

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - 4\gamma\right](c - g) = 0 \tag{II.17}$$

As duas últimas das equações (II.17) podem ser usadas para determinar σ e γ (observe que em ordem mais baixa o determinante dos coeficientes é diferente de zero). Para verificar a primeira das equações (II.17) usamos que

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma\right] \Gamma^{(2)} \Big|_{\substack{T=0 \\ p^2 = m^2}} = 0 \tag{II.18}$$

pois a operações de tomar-se $p^2 = m^2$ comuta com $\frac{\partial}{\partial \mu^2}$ e $\frac{\partial}{\partial g}$. Usando, novamente, (II.15) em (II.18), obtemos

$$\left[\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma\right)(a - m^2)\right] \Delta_1 \Gamma^{(2)} \Big|_{\substack{T=0 \\ p^2 = m^2}} = 0$$

da qual a primeira das equações (II.17) segue pois em ordem mais baixa de perturbação $\Delta_1 \Gamma^{(2)} \Big|_{\substack{T=0 \\ p^2 = m^2}} \neq 0$

Observemos que das equações (II.17) resulta

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g}\right) \frac{a - m^2}{1 + b} = 0 \tag{II.19}$$

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g}\right) \frac{c - g}{(1 + b)^2} = 0 \tag{II.20}$$

Portanto grandezas F, cuja dependência em μ^2 e g for somente através de

$$m'^2 = \frac{m^2 - a}{1 + b} \qquad e \qquad g' = \frac{g - c}{(1 + b)^2} , \tag{II.21}$$

são invariantes do grupo de renormalização

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g}\right) F = 0 \tag{II.22}$$

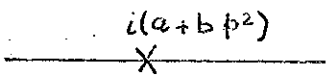
Isto é o que acontece com o potencial termodinâmico por unidade de volume Ω (ou seja a pressão)

$$\Omega = - \frac{1}{\beta} \lg \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} \tag{II.23}$$

onde H é a Hamiltoniana*. De fato, da teoria de muitos corpos[2] sabemos que uma fórmula alternativa para (II.23) é

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \left\langle T\, e^{\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}(A^0)} - 1 \right\rangle_0 \tag{II.24}$$

onde Ω_0 é o potencial termodinâmico correspondente a H_0. É conveniente reescrever (II.24) de modo tal que no segundo termo só apareçam gráficos esqueleto (que não possuem vértices bilineares do tipo



).

Somando sobre todos os vértices bilineares o propagador livre é "vestido" como segue

---

* É subentendida a omissão de um fator $(2\pi)^3\, \delta(0)$ correspondente ao volume.

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \longrightarrow \frac{i}{(1+b)\,p^2 - (m^2 - a)} \tag{11.25}$$

nos gráficos contendo somente vértices quadrilineares (A^4). Os gráficos que não contêm vértices A^4 podem também ser combinados e seu efeito em (11.24) é a substituição

$$\Omega_0 \longrightarrow \bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \Big|_{m^2 \longrightarrow m'^2 = \frac{m^2 - a}{1+b}} \tag{11.26}$$

$$= \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lg\left(1 - e^{-\beta W_k}\right) \quad , \quad W_k = \left(\vec{k}^2 + m'^2\right)^{1/2}$$

e assim (11.24) torna-se

$$\Omega = \bar{\Omega}_0 - \frac{1}{\beta} \left\langle T\, e^{\int d^4x\, \bar{\mathcal{L}}_{int}} - 1 \right\rangle_0 \tag{11.27}$$

onde

$$\bar{\mathcal{L}}_{int} = \frac{c - g}{4!} A^4 \quad \text{e} \quad \Delta_F(p) = \frac{i}{(1+b)(p^2 - m'^2)}$$

Usando a identidade topológica, relacionando o número de linhas internas, n_G, com o de vértices, V_G, (não existem linhas externas) do diagrama G

$$n_G = 2\, V_G \ ,$$

obtemos

$$\left\langle T\, e^{\int d^4x\, \bar{\mathcal{L}}_{int}} - 1 \right\rangle_0 = \left\langle T\, e^{\int d^4x\, \bar{\mathcal{L}}_{int}} - 1 \right\rangle_0 \Bigg|_{\substack{g - c \longrightarrow g' \\ \Delta_F(p) \to (1+b)\Delta_F(p)}} \tag{11.28}$$

Da discussão acima resulta

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial g}\right) \Omega = 0 \tag{11.29}$$

Portanto, no que se refere a Ω, variações em μ^2 correspondem a redefinições da constante de acoplamento.

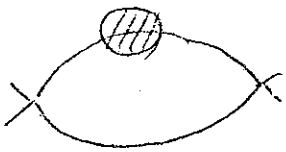
A discussão que fizemos pode ser generalizada para teorias com férmions (o caso de teorias de Gauge requer, todavia, um pouco mais de cuidado - ver ref. 33). Neste caso a fórmula (1.11) do capítulo I deve ser substituída por

$$\frac{i}{\beta}\sum_{N=-\infty}^{\infty} f\left(k_0=\frac{(2N+1)\pi i}{\beta}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk^0\,\frac{f(k^0)}{e^{\beta k^0}+1} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} dk^0\,\frac{f(k^0)}{e^{-\beta k^0}+1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} dk^0\, f(k^0) \qquad (11.30)$$

A inclusão de um potencial químico associado com um valor não nulo de alguma carga conservada pode ser feita através de modificações simples dessas fórmulas[11,12].

Teorias com massa zero requerem uma análise mais cuidadosa devido a possível ocorrência de divergências infravermelhas. Consideremos o caso específico do modelo A^4. No caso em que T=0 , o processo de renormalização fora da concha de massa que adotamos é suficiente para a obtenção de funções de Green bem definidas (para momentos não excepcionais). Por outro lado se $T\neq 0$ novas divergências infravermelhas podem ocorrer como exemplificado no gráfico ao lado, pois $\hat{\Sigma}(p=0)\big|_{T\neq 0}$ não será necessariamente zero.



Uma possível saida para essa situação pode vir da observação que contribuições de gráficos do tipo

possuem uma parte finita não nula, para $T\neq 0$ e em princípio podem gerar uma massa. Dito de outra forma, se nas amplitudes contribuindo para as funções de Green o vértice A^4 é escrito como

$$A^4(x) = :A^4(x):_c + 6\,\langle A^2(x)\rangle\, A^2(x) \qquad (11.31)$$

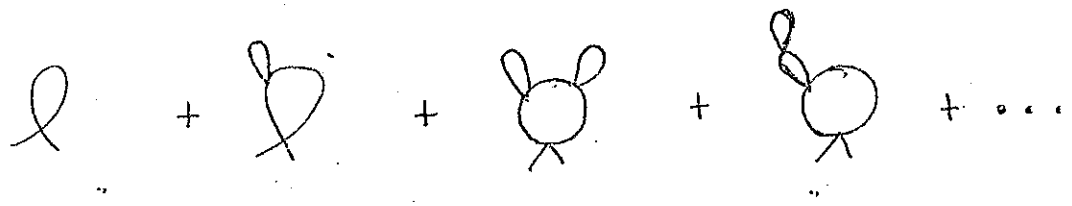
onde a contração de campos dentro da "ordenação de Wick" ($\overset{\circ}{\cdot}\ \overset{\circ}{\cdot}$) não é permitida, obtemos uma massa (corte infravermelho) dada por*

$$m_\rho^2 = \frac{g}{2} \langle A^2 \rangle_T \tag{11.32}$$

com $\langle A^2 \rangle_T$ significando a parte de $\langle A^2 \rangle$ correspondente a $T \neq 0$. Temos assim

$$m_\rho^2 = \frac{g}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{W_k} \frac{1}{e^{\beta W_k} - 1} \quad , \qquad W_k = (\vec{k}^2 + m_\rho^2)^{1/2} \tag{11.33}$$

(11.33) resume todas as contribuições dos gráficos



(11.34)

É facilmente verificado que, para $g>0$, (11.33) admite uma solução $m_\rho^2 = cT^2$, com $c > 0$. Por esse motivo as subtrações do esquema de BPHZ empregado no capítulo I dependerão explicitamente da temperatura.

Um raciocínio semelhante ao empregado acima pode ser feito para o estudo qualitativo da possível restauração de simetrias que são espontaneamente quebradas em $T=0$.

Como exemplo[5,6] consideremos o modelo descrito pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (\partial_\mu A_i)^2 + \frac{m^2}{2} \sum_{i=1}^{N} A_i A_i - \frac{g^2}{4!} \left(\sum_{i=1}^{N} A_i A_i \right)^2 \tag{11.35}$$

onde, para $T=0$, a quebra de simetria $O(N)$ surge devido ao fato que, em (11.35), o termo de massa comparece com o sinal errado . Por outro lado, nos gráficos contribuindo para as funções de Green, analogamente à equação (11.31), temos

---

* Isto corresponde a um rearranjo da série perturbativa. O efeito das divergências ultravioletas deve ser considerado a posteriori.

$$A^4 = (\sum A_i A_i)^2 = :A^4: \quad + \quad 2(N+2)\langle A_1^2\rangle A^2 \tag{11.36}$$

e portanto uma massa efetiva dada por

$$m_\beta^2 = -m^2 + g^2\frac{(N+2)}{6}\langle A_1^2\rangle_T \tag{11.37}$$

ou seja

$$m_\beta^2 + m^2 = g^2\frac{(N+2)}{6}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{W_k(e^{\beta W_k}-1)}, \qquad W_k = (\vec{k}^2 + m_\beta^2)^{1/2}$$

A restauração da simetria ocorre então a partir do valor $T=T_c$ para o qual $m_\beta^2 = 0$

$$m^2 = g^2\frac{(N+2)}{3}\int_0^\infty\frac{dE}{(2\pi)^2}\frac{E}{e^{\beta E}-1} = g\frac{N+2}{72}T_c^2 \quad \therefore$$

$$T_c^2 = \frac{72\,m^2}{g^2(N+2)} \tag{11.38}$$

Para $T > T_c$, m_β^2 é positivo e a simetria é restaurada. Para $T \sim T_c$ existem problemas infravermelhos adicionais uma vez que nessa região $m_\beta^2 \sim 0$.

Apêndice

Sejam $\bar{J}_R^{\delta}(p,m,G)$ e $\bar{J}_R^{\phi}(p,m,G)$ as integrais subtraidas correspondentes ao gráfico G nas expansões de $\langle TN_{\delta}[\theta]X\rangle$ e $\langle TN_{\phi}[\theta]X\rangle$, respectivamente. Nós temos

$$\bar{J}_R^{\delta} - \bar{J}_R^{\varphi} = \sum_{K'} \int_0 dk_{i_{s+1}} \cdots dk_{i_H} \left(R_{K'}^{\delta} - R_{K'}^{\varphi} \right) \times$$

$$\left(P.\,F.T. \int dk_{i_1} \cdots dk_{i_s} \; I_{G/K'} \right) \qquad (A.1)$$

onde a soma estende-se sobre os conjuntos $K' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ tais que um dos $\gamma_i \in K'$ contém o vértice especial, V , associado a θ. O vértice pertence a somente um dos γ_i pois os gráficos em K' são disjuntos. Para um dado K' seja Γ o gráfico $\in$ K' contendo V. Então

$$R_{K'}^{\delta} - R_{K'}^{\varphi} = \prod_{\substack{\gamma_i \in K' \\ \gamma_i \neq \Gamma}} (R_{\gamma_i}) \left(R_{\Gamma}^{\delta} - R_{\Gamma}^{\varphi} \right) \qquad (A.2)$$

A diferença $R_{\Gamma}^{\delta} - R_{\Gamma}^{\phi}$ é tratada como no caso T=0.[14] Escrevendo

$$t_{\gamma}^{\delta} = t_{\gamma}^{\varphi} + \left(t_{\gamma}^{\delta} - t_{\gamma}^{\varphi} \right) \qquad \text{se} \quad V \in \gamma$$

vemos que $\prod_{\gamma} - t^{\delta(\gamma)} I_{\Gamma}$ é igual a uma soma de termos obtidos pela substituição de $t_{\gamma}^{\delta(\gamma)}$ $(V \in \gamma)$ ora por t_{γ}^{ϕ} ora por $t_{\gamma}^{\delta} - t_{\gamma}^{\phi}$. O termo contendo somente t_{γ}^{ϕ} cancela o segundo em (A.2). Designando por $\tau \in U$ o primeiro gráfico em $\prod_{\gamma} t_{\gamma}^{\delta(\gamma)}$, da direita para a esquerda, a ser substituido por $t_{\gamma}^{\delta} - t_{\gamma}^{\phi}$, os termos restantes podem ser rearranjados, obtendo-se

$$R_{\Gamma}^{\varphi} - R_{\Gamma}^{\delta} = \sum_{\tau} \sum_{U \in \mathcal{F}_{\Gamma/\tau}} \prod_{\gamma \in U} \left(-t_{\gamma}^{\delta(\gamma)} \right) P_{\tau} \, I_{\Gamma/\tau} \qquad (A.3)$$

onde

$$P_{\tau} = \left(t_{\tau}^{\delta} - t_{\tau}^{\varphi} \right) R_{\tau}^{\varphi} \qquad (A.4)$$

(A.4) é uma soma de termo do tipo

$$p^{\tau}_{1\mu_1} \cdots p^{\tau}_{m\mu_m} \left(\frac{\partial^m}{\partial p^{\prime\tau}_{1\mu_1} \cdots \partial p^{\prime\tau}_{m\mu_m}} R^{\varphi}_{\tau} (p^{\prime\tau}, k^{\tau}) \Big|_{p^{\prime\tau}=0} \right) \tag{A.5}$$

onde k^{τ} depende somente das variáveis de integração de Γ. A integral de (A.5) nos k^{τ} é absolutamente convergente e pode ser fatorada na expressão (A.1). Por outro lado, o monômio $p^{\tau}_{1\mu_1} \cdots p^{\tau}_{m\mu_m}$ pode ser associado com o vértice reduzido $V(\tau)$, obtido pela contração de τ a um ponto. Se isto é feito, obtemos a seguinte contribuição de (A.5) para $\bar{J}^{\phi}_{R} - \bar{J}^{\delta}_{R}$:

$$F_{\tau} \sum_{K'} \int_0 dk_{K'/\tau} \; R_{K'/\tau} \; \left(P.F.T. \oint dk_{G/K'} \; I_{G/K'} \right)$$

onde

$$K'/\tau = \{ \gamma_1, \cdots \Gamma/\tau, \cdots \gamma_n \} \quad , \qquad R_{K'/\tau} = \prod_{\gamma_i \neq \Gamma} (R_{\gamma_i}) \; R_{\Gamma/\tau}$$

e $dk_{K'/\tau}$ designa o elemento de integração nas variáveis de K'/τ.

$$F^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\tau} = \int dk^{\tau} \; \frac{\partial^m}{\partial p^{\tau}_{1\mu_1} \cdots \partial p^{\tau}_{m\mu_m}} R^{\varphi}_{\tau} (p^{\tau}, k^{\tau}) \Big|_{p^{\tau}=0}$$

Agora $I_{G/K'} = I_{G/\tau / \frac{K'}{\tau}}$ e daí é claro que se a soma em K' é feita obteremos

$$F^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\tau} \; \bar{J}_{R_{\mu_1 \cdots \mu_m}} (p, m, G/\tau) \tag{A.6}$$

com o monômio $p_{1\mu_1} \cdots p_{m\mu_m}$ associado com $V(\tau)$. A equação (II.13) é uma consequência imediata de (A.6).

Capítulo III

Modelos bidimensionais

1. Um modelo com acoplamento derivativo

Nós começamos nossa discussão perturbativa de alguns modelos bidimensionais considerando o modelo descrito pela Lagrangiana clássica.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 - \frac{m_1^2}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - \frac{m_2^2}{2}\varphi_2^2 +$$

$$+\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi - M\bar{\psi}\psi + g_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\varphi_1 + g_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\partial_\mu\varphi_2 \qquad (III.1)$$

a qual fornece as equações de movimento

$$(i\partial\!\!\!/ - M)\psi = -g_1\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\varphi_1 - g_2\gamma^\mu\gamma^5\psi\,\partial_\mu\varphi_2 \qquad (III.2a)$$

$$(\partial^2 + m_1^2)\varphi_1 = -g_1\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \qquad (III.2b)$$

$$(\partial^2 + m_2^2)\varphi_2 = -g_2\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) \qquad (III.2c)$$

A invariância da Lagrangiana (III.1) por transformações de Gauge de primeira espécie implica que a corrente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é conservada

$$\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) = 0$$

e assim ϕ_1 é um campo livre de massa m_1.

Em dois casos a solução do modelo é trivial:

i) $g_2 = 0$ (Modelo de Schroer massivo[17]). Neste caso

$$\psi(x) = e^{ig_1\varphi_1(x)}\psi_0(x)$$

sendo ψ_0 um campo de Dirac livre de massa M.

ii) M = 0. Neste caso a corrente axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ é também conservada e ϕ_1 e ϕ_2 são campos livres de massas m_1 e m_2. A solução para o campo ψ é dada então por

$$\psi = e^{i g_1 \varphi_1 + i g_2 \gamma^5 \varphi_2} \psi_f \tag{III.3}$$

com ψ_f um campo livre de massa zero.

$g_1 = 0$ em (III.3) corresponde ao modelo de Rothe e Stamatescu[19].

O modelo (III.1), com $m_1 = m_2 = 0$, pode também ser relacionado com o modelo de Thirring massivo descrito pela equação

$$(i\not{\partial} - M)\psi = g(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\gamma_\mu\psi \tag{III.4}$$

da seguinte maneira: observe que de (III.2b) e (III.2c) resulta que

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -\frac{1}{g_1}\partial^\mu\varphi_1 - \frac{1}{g_2}\tilde{\partial}^\mu\varphi_2 \tag{III.5}$$

onde usamos $\gamma^\mu\gamma^5 = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$, $\tilde{\partial}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu$, $\tilde{\partial}^2 = -\partial^2$.

Por outro lado, comparando (III.2a) com (III.4) obtemos

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -g_1\partial^\mu\varphi_1 + g_2\tilde{\partial}^\mu\varphi_2 \tag{III.6}$$

Vemos que a identificação dos modelos será possível se

$$g_1^2 = -g_2^2 = g \tag{III.7}$$

e assim, dependendo do sinal de g, ou g_1 ou g_2 será imaginário puro.

Nossas considerações, bastantes formais até este ponto, tiveram a finalidade de ressaltar a interligação entre vários modelos estudados na literatura.

No caso quantizado os objetos de interesse imediato são as funções de Green que passamos a estudar. Escrevendo (III.1) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \tag{III.8}$$

com

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - m_i^2 \varphi_i \varphi_i\right) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not{\partial}}\psi - M\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L}_{int} = g_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\varphi_1 + g_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\partial_\mu\varphi_2 \qquad \text{(III.9)}$$

as funções de Green são definidas por

$$G^{(2N,L,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_1,\ldots,y_N;z_1,\ldots,z_L;w_1,\ldots,w_M) =$$

$$= \langle T\prod_{i=1}^{N}\psi(x_i)\prod_{j=1}^{N}\bar{\psi}(y_j)\prod_{k=1}^{M}\varphi_1(w_k)\prod_{\ell=1}^{L}\varphi_2(z_\ell)\rangle = \text{Parte finita}$$

$$\text{de } \langle 0|T\prod\psi^0(x_i)\prod\bar{\psi}^0(y_j)\prod\varphi_1^0(w_k)\prod\varphi_2^0(z_\ell)\exp i\int d^2x\,\mathcal{L}^0_{int}(x)|0\rangle_{(c)} \qquad \text{(III.10)}$$

onde $\varphi^0_{1,2}$ e ψ^0 são campos livres especificados por $\mathcal{L}_0$.

O esquema de subtrações que será empregado na definição da parte finita é uma versão suave do esquema de BPHZ usado na primeira parte deste tése. Uma das vantagens do esquema a ser apresentado é que nêle contratermos quadrilineares em ψ, correspondentes a interação de Thirring, não são induzidos. Uma outra vantagem é que a discussão dos limites nos quais algumas das massas tendem a zero resulta, a nosso ver, mais transparente que no caso do emprego do formalismo de BPHZ.

No espaço dos momentos a amplitude de Feynman não subtraida, correspondente a um gráfico G, contribuindo para (III.10), tem a forma

$$J_G(p,m,M,\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\int d^2k\, I_G(p,k,m,M) \qquad \text{(III.11)}$$

onde

$$d^2k = \prod_{i=1}^{\ell} d^2k_i$$

$p = \{p_1,\ldots,p_r\}$ = base para os momentos externos

$k = \{k_1,\ldots,k_\ell\}$ = base para os momentos internos.

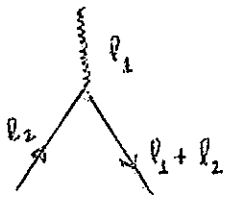
I_G é obtido do gráfico G usando a correspondência

propagador do férmion: $\xrightarrow[\ell]{}$ $\longleftrightarrow$ $i\,\dfrac{\not{\ell} + M}{\ell^2 - M^2 + i\varepsilon(\vec{\ell}^{\,2} + M^2)}$

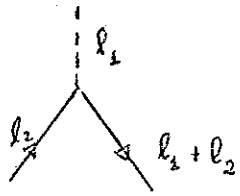
propagador de φ_1 $\underset{\ell}{- - - - -}$ $\dfrac{i}{\ell^2 - m_1^2 + i\varepsilon(\vec{\ell}^{\,2} + m_1^2)}$

propagador de φ_2 $\underset{\ell}{\sim\sim\sim}$ $\dfrac{i}{\ell^2 - m_2^2 + i\varepsilon(\vec{\ell}^{\,2} + m_2^2)}$

vértices



$\longleftrightarrow$ $-g_2\,\not{\ell}_1\gamma^5$



$\longleftrightarrow$ $-g_1\,\not{\ell}_1$

Nós observamos que se $m_1 = m_2 = 0$ e $g_1^2 = -g_2^2 = g$ então devido a identidade

$$\ell_1^\mu \ell_1^\nu - \tilde{\ell}_1^\mu \tilde{\ell}_1^\nu = \ell_1^2 g^{\mu\nu}$$

as regras de Feynman acima (para as funções de Green somente de férmions) tornam-se idênticas às do modelo de Thirring massivo. Isto justifica nossa afirmação que esta identificação de parâmetros reproduz o modelo de Thirring.

O grau de divergência superficial associado com um subgráfico próprio γ é dado por

$$d(\gamma) = 2 - \frac{1}{2} N_\gamma \qquad (III.12)$$

onde N_γ = nº de linhas de férmions externos de γ .

Em $d(\gamma)$ os fatores de momento associados com os vértices de γ contribuiram com $+i$, para cada vértice. Entretanto, como fatores de momento, correspondentes a vértices nos quais uma linha escalar externa está ligada, não dependem das variáveis de integração, nós podemos definir um grau de divergência superficial efetivo por

$$\bar{d}(\gamma) = 2 - \frac{1}{2} N_\gamma - B_\gamma \qquad (III.13)$$

onde B_γ = nº de linhas escalares externas de γ . O subgráfico γ será superficialmente divergente se $\bar{d}(\gamma) \geq 0$.

Nós agora descreveremos o processo de subtração a ser adotado: se G é um gráfico próprio, I_G deve ser substituido por

$$R_G = S_G \sum_{U \in \mathcal{F}_G} \prod_{\gamma \in U} (-\tau_\gamma^{d(\gamma)} S_\gamma)\, I_G(U) \qquad (III.14)$$

onde $\mathcal{F}_G$ é o conjunto de todas florestas de G.

$\tau_\gamma^{d(\gamma)}$ é um operador de Taylor generalizado satisfazendo

$$\tau^{d(\gamma)} p^\gamma f(p^\gamma) = p^\gamma \tau^{d(\gamma)-1} f(p^\gamma)$$

Desta propriedade, vemos que é necessário definir a ação de $\tau^{d(\gamma)}$ somente sobre o integrando $\bar{I}_\gamma$ obtido de I_γ omitindo os fatores de momento associados aos vértices nos quais existe pelo menos uma linha escalar externa. Temos portanto os seguintes casos:

$$\text{i)} \quad \tau_\gamma^0 \bar{I}_\gamma(p^\gamma, M^\gamma) = \bar{I}_\gamma(0, \bar{M}) \qquad (III.15)$$

para os gráficos divergentes ($\bar{d}(\gamma) = 0$), mostradas na fig.4

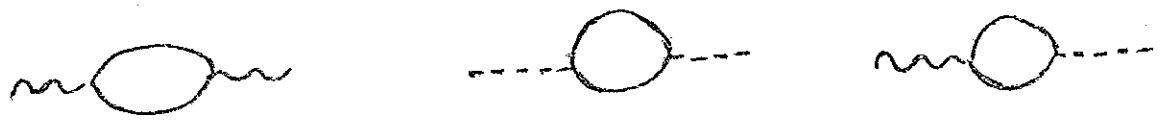


Fig. 4

ii) Para os demais gráficos logaritmicamente divergentes

$$\tau^{0}_{\gamma}\,\bar{I}_{\gamma}(p^{\gamma}, m_1^{\gamma}, m_2^{\gamma}, M^{\gamma}) = \bar{I}_{\gamma}(0, \mu, \mu, 0) \qquad \text{(III.15a)}$$

Em (III.15) p^{γ}, $m^{\gamma}_{1,2}$, M^{γ} são respectivamente os momentos externos e as massas das linhas escalares e fermiônicas do gráfico γ.

iii) Para gráficos linearmente divergentes ($\bar{d}(\gamma) = 1$)

$$\tau^{1}_{\gamma}\,\bar{I}_{\gamma}(p^{\gamma}, m_1^{\gamma}, m_2^{\gamma}, M^{\gamma}) = \bar{I}_{\gamma}(0, m_1^{\gamma}, m_2^{\gamma}, 0) +$$

$$+ p^{\gamma}\left(\frac{\partial \bar{I}_{\gamma}(p^{\gamma}, \mu, \mu, 0)}{\partial p^{\gamma}}\bigg|_{p^{\gamma}=0}\right) + M^{\gamma}\left(\frac{\partial \bar{I}_{\gamma}(0, \mu, \mu, M^{\gamma})}{\partial M^{\gamma}}\bigg|_{M^{\gamma}=0}\right) \qquad \text{(III.16)}$$

ou seja, as massas m_1^{γ} e m_2^{γ} somente são afetadas pela ação de $\tau^{d(\gamma)}$ nos últimos termos dessa operação, em que ambas são colocadas em μ.

S_{γ} é o operador de substituição o qual escreve as variáveis de $\lambda \in \mathcal{U}$ em termos das de $\gamma \in \mathcal{U}$ se $\gamma \supset \lambda$; o operador de substituição S_G, além disso, coloca todas as massas $\bar{\mu}$ iguais a M.

Note que o esquema de subtrações (III.14-16) não cria divergências infravermelhas. Isto é assim porque, sendo os acoplamentos derivativos, é possível, em geral, colocar M=0 nas subtrações. Por outro lado, nos gráficos da figura 4, onde este procedimento seria problemático, a massa M é efetivamente dura (isto é, ela não é modificada pelo operador de subtração).

O esquema de subtrações acima é bastante semelhante aos empregados na ref. 28 (para a Eletrodinâmica massiva em quatro dimensões) e na ref. 25 (para o modelo de Rothe e Stamatescu massivo). Diferentemente da ref. 25, nossos operadores de sub-

tração (III.15-16) colocam $m_1 = m_2 = \mu$, nas últimas subtrações.*

Como consequência do nosso esquema de subtração obtemos imediatamente as seguintes condições de normalização

$$\bar{\Gamma}^{(2,0,0)}\Big|_{\substack{p=0\\M=0}} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial M}\bar{\Gamma}^{(2,0,0)}\Big|_{\substack{p=0\\M=0\\m_1^2=m_2^2=\mu^2}} = -i$$

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bar{\Gamma}^{(2,0,0)}\Big|_{\substack{p=0\\M=0\\m_1^2=m_2^2=\mu^2}} = i\gamma_\mu \qquad \bar{\Gamma}^{(4,0,0)}\Big|_{\substack{p=0\\M=0\\m_1^2=m_2^2=\mu^2}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bar{\Gamma}^{(2,1,0)}(q,-q-p;p)\Big|_{\substack{p=q=0\\M=0\\m_1^2=m_2^2=\mu^2}} = -g_2\gamma_\mu\gamma_5$$

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bar{\Gamma}^{(2,0,1)}(q,-q-p;p)\Big|_{\substack{p=q=0\\M=0\\m_1^2=m_2^2=\mu^2}} = -g_1\gamma_\mu \tag{III.17}$$

onde $\bar{\Gamma}^{(2N,L,M)}$ representa a contribuição para a função de vértice correspondente, resultante de gráficos que não contêm nenhum dos gráficos da fig.4 como subgráficos. M, m_1 e m_2 não são massas físicas; entretanto a massa física do férmion tende a zero no limite $M \to 0$.

Funções de Green envolvendo produtos normais $N_\delta[\theta]$, $\delta \leq 2$, onde δ = grau do operador θ + nº de parâmetros de massa M em θ, são definidos de forma análoga ao capítulo II, mas usando-se (III.14-16).

---

* Uma prova rigorosa da convergência ultravioleta e infravermelha pode ser obtida de modo análogo aquelas das referências citadas.

Identidades de Ward e equações de movimento

As correntes vetor ($N_1 \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) e vetor axial ($N_1 \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$) satisfazem identidades de Ward, as quais podem ser deduzidas da maneira usual. Nós temos

$$\left(X = \prod_{i=1}^{N} \psi(x_i) \prod_{j=1}^{N} \bar{\psi}(y_j) \prod_{k=1}^{M} \varphi_1(w_k) \prod_{\ell=1}^{L} \varphi_2(z_\ell) \right)$$

$$\partial^\mu_x \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi](x) X \rangle = i \langle T \{ N_2[\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not\partial} - M)\psi](x) -$$

$$- N_2[\bar{\psi}(i\not\partial - M)\psi](x) \} X \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(\delta(x-y_i) - \delta(x-x_i) \right) \langle T X \rangle \tag{III.18}$$

$$\partial^\mu_x \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi](x) X \rangle = i \langle T \{ N_2[\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not\partial} - M)\gamma^5\psi](x) +$$

$$+ N_2[\bar{\psi}\gamma^5(i\not\partial - M)\psi](x) + 2 N_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi](x) \} X \rangle =$$

$$= 2i \langle T N_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi](x) X \rangle - \sum_{i=1}^{N} \left(\delta(x-x_i)\gamma^5_{x_i} + \delta(x-y_i)\gamma^{5T}_{y_i} \right) \langle T X \rangle \tag{III.19}$$

Notando que a única diferença entre $N_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi]$ e $M N_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi]$ provem da subtração para o gráfico da fig.5, podemos escrever

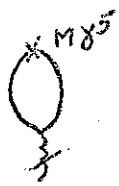


Fig.5

$$2i\, N_2[M\bar{\psi}\gamma^5\psi] = 2iM N_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi] + a\,\partial^2\varphi_2 ,$$

$$a = -\frac{g_2}{\pi} \tag{III.20}$$

Usando (III.20) em (III.19) obtemos

$$\partial^\mu_x \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi](x) X \rangle = 2iM \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi](x) X \rangle +$$

$$+ a \langle T \partial^2\varphi_2 X \rangle - \sum_{i=1}^{N} \left[\delta(x-x_i)\gamma^5_{x_i} + \delta(x-y_i)\gamma^{5T}_{y_i} \right] \langle T X \rangle \tag{III.21}$$

Consideremos, agora, as equações de movimento para os campos básicos. Nós temos*

$$(\partial_x^2 + m_1^2) \langle T\varphi_1(x)\, X \rangle = -i \sum_{i=1}^{M} \delta(x - w_i) \langle T X_{\hat{w}_i} \rangle -$$

$$- g_1 \partial^\mu \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma_\mu \psi](x)\, X \rangle = \qquad (III.22)$$

$$= -i \sum_{i=1}^{M} \delta(x - w_i) \langle T X_{\hat{w}_i} \rangle - g_1 \sum_{i=1}^{N} (\delta(x - y_i) - \delta(x - x_i)) \langle T X \rangle$$

Para ϕ_2 obtemos

$$(\partial_x^2 + m_2^2) \langle T\varphi_2(x)\, X \rangle = -i \sum_{i=1}^{L} \delta(x - z_i) \langle T X_{\hat{z}_i} \rangle -$$

$$- g_2 \partial_x^\mu \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \psi](x)\, X \rangle$$

Portanto, usando (III.21) resulta

$$(\partial_x^2 + m'^2) \langle T\varphi_2(x)\, X \rangle = \frac{-2iMg_2}{1 + ag_2} \langle T N_1[\bar{\psi}\gamma^5\psi](x)\, X \rangle -$$

$$- \frac{i}{1 + ag_2} \sum_{i=1}^{L} \delta(x - z_i) \langle T X_{\hat{z}_i} \rangle + \frac{g_2}{1 + ag_2} \sum_{i=1}^{N} (\delta(x - x_i)\gamma^5_{x_i} + \delta(x - y_i)\gamma^5_{y_i}) \langle T X \rangle$$

onde $$m'^2 = \frac{m_2^2}{1 + ag_2} \qquad (III.23)$$

Vemos que ϕ_1 é um campo livre de massa m_1^2 e que, no limite $M \to 0$, ϕ_2 também é um campo livre mas com massa $m'^2 = \frac{m_2^2}{1 + ag_2}$. O único efeito da anomalia (o segundo termo em (III.21)) é uma renormalização de massa e de função de onda do campo ϕ_2.

A equação de movimento para ψ, por outro lado, resulta

---

* Nas fórmulas seguintes, $X_{\hat{a}}$ significa X com o campo de argumento a omitido.

$$(i\not{\partial}_{x_1} - M) \langle T X \rangle = - \langle T [g_1 N_{3/2} (\gamma^\mu \psi \partial_\mu \varphi_1)(x_1) +$$

$$+ g_2 N_{3/2} (\gamma^\mu \gamma^5 \psi \partial_\mu \varphi_2)(x_1)] X_{\hat{x}_1} \rangle + i \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+N} \delta(x_1 - y_i) \langle T X_{\hat{x}_1, \hat{y}_i} \rangle$$

(III.24)

Como observado anteriormente, uma consequência do nosso esquema é que ele preserva certos cancelamentos de divergências que formalmente ocorrem entre gráficos não subtraidos contribuindo para a função de quatro pontos do férmion. Este fato pode ser mostrado da seguinte maneira:

A soma dos integrandos subtraidos da função de vértice de quatro pontos em ordem n (em g_1 e g_2) pode ser escrita como

$$R_n^{(4)} = \sum_i (1 - \Sigma^0_{G_i}) \bar{R}_{G_i} \qquad \text{(III.25)}$$

onde $\bar{R}_{G_i}$ é definido usando a fórmula da floresta (III.14) mas sem fazer a subtração associada com o gráfico G_i.

A estrutura geral de G_i é mostrada na fig. 6

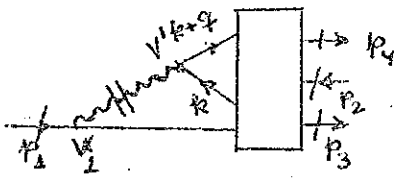


Fig.6

onde a linha ~~~ representa uma contribuição genérica para os propagadores escalares. Como o vértice V' contém um fator de momento $\not{q}$, escrevemos

$\not{q} = \not{k} + \not{q} - M - (\not{k} - M)$ no caso de V' ser o acoplamento escalar

ou

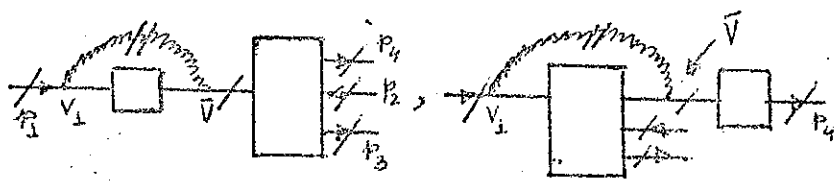
$\not{q}\gamma^5 = -(\not{k} - M)\gamma^5 - \gamma^5(\not{k} + \not{q} - M) + 2M\gamma^5$,

no caso de V' ser o acoplamento pseudo-escalar.

Os fatores $\not{K}-M$ ou $\not{K}+\not{q}-M$ podem ser usados para amputar uma das linhas de férmions em V'. Procedendo o cancelamento dos gráficos que tornam-se topologicamente equivalente após o corte das linhas, vemos que (III.25) pode ser reescrita como

$$R_n^{(4)} = \sum_i \left(1 - \tau^0_{\bar{G}_i}\right) \bar{R}_{\bar{G}_i} \qquad \text{(III.26)}$$

onde $\bar{G}_i$ ou é igual a G_i com o fator $\not{q}\gamma^5$ em V' substituido por $2M\gamma^5$ (nos casos em que V' corresponde ao acoplamento pseudo escalar) ou é um dos gráficos com a estrutura mostrada na fig.7.



Gráficos com a mesma estrutura mas com $\bar{V}$ situado ou na linha de momento P_3 ou na de momento P_2.

Fig.7. Nesses gráficos $\bar{V}$ não tem fator de momento ou massa.

Como indicado, neste último caso existe, em forma fatorizada, a contribuição de um gráfico que se anula para $P = M = 0$ (e $m_1^2 = m_2^2 = \mu^2$, no caso do primeiro gráfico na fig. 7)). Lembrando que $\tau^0_{\bar{G}_i}$ é um operador que coloca $P_{G_i} = M_{G_i} = 0$ (e $m^2_{1G_i} = m^2_{2G_i} = \mu^2$) vemos que

$$R_n^{(4)} = \sum \bar{R}_{\bar{G}_i} \qquad \text{(III.27)}$$

Portanto o esquema de subtrações preserva os cancelamentos que ocorrem a nível dos integrandos não subtraidos. Como o efeito das subtrações conectadas com os gráficos G_i foi totalmente eliminado estas subtrações são efetivamente redundantes e não induzem contratermos quadrilineares na Lagrangiana.

Limites de massa zero

O esquema de subtração (III.14-16) permite considerar de maneira sistemática vários limites de massa zero. Consideremos algumas possibilidades.

1. Massas dos propagadores escalares $m_1, m_2 \to 0$ com

$M \neq 0$. O limite existe no setor de férmions, isto é, para as funções de Green $G^{(2N,0,0)}$*. Isto é uma consequência do fato que na última subtração as massas m_1^2 e m_2^2 são colocadas iguais a μ^2. Por outro lado, devido ao acoplamento derivativo, o fato que m_1 e m_2 são ambas iguais a zero não traz problemas nos termos do integrando não subtraido e no da primeira subtração para a função de dois pontos.

Se $g_1^2 = -g_2^2 = g$ então devido a identidade

$$q^\mu q^\nu - \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu = q^2 g^{\mu\nu} \qquad \text{(III.28)}$$

os integrandos não subtraidos tornam-se idênticos aos do modelo de Thirring massivo. Neste caso os operadores de subtração são em torno de $P^\gamma = M^\gamma = 0$ (com exceção do gráfico

onde a massa M^γ é dura), sendo que na última subtração o acoplamento $\gamma^\mu \otimes \gamma_\mu$ é substituido por

$$\gamma^\mu \otimes \gamma_\mu \; \frac{q^2}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon(\tilde{q}^2 + \mu^2)}$$

2. $M \to 0$ com m_1 e m_2 diferentes de zero. Este limite corresponde ao modelo de Rothe e Stamatescu. Devido a fato que as massas das linhas fermiônicas nos gráficos da fig.4 são duras, o limite requer um certo cuidado. Isto é feito como segue.

i) Notamos inicialmente que, devido a conservação da corrente vetorial, as contribuições dos dois últimos gráficos na fig. 4 são iguais a zero. Consideremos então o primeiro gráfico dessa figura, o qual, daqui em diante, será chamado de γ^0 **. Da aplicação da identidade de Ward da corrente axial à um dos vértices, V_0, de γ^0 resultam dois termos. Um desses é o termo da anomalia e outro corresponde a γ^0 com o fator de momento $\not{q}\gamma^5$ em V_0 substituido por $2M_{\gamma^0}\gamma^5$.

---

* Fora desse setor o limite não existe devido a singularidade não integrável do propagador escalar livre de massa zero.

** A partir deste ponto a discussão é inteiramente semelhante aquela feita na ref. 25.

ii) Tomamos o limite $M_{\gamma^0} \to 0$. Neste limite o termo contendo $2M_{\gamma^0}\gamma^5$ anula-se e sobrevive unicamente o termo da anomalia (lembre que $a = -g_2/\pi$). Como pode ser verificado, o mesmo resultado é obtido se γ^0 é um subgráfico de um gráfico maior.

iii) A contribuição de γ^0 é ressomada obtendo-se que o propagador livre de ϕ_2, $\Delta_F(x,m_2^2)$, é substituido por

$$\frac{1}{1-g_2^2/\pi}\,\Delta_F\left(x,\ \frac{m_2^2}{1-g_2^2/\pi}\right) \qquad (III.29)$$

É claro que as funções de vértice construídas desta maneira satisfazem as condições de normalização (III.17).

Tendo, desta forma, eliminado os gráficos da fig. 4 torna-se aparente que, para momentos não excepcionais, o limite $M \to 0$ pode ser tomado diretamente nos integrandos das amplitudes de Feynman que contribuem para as funções de Green (supondo - se que a ordem dos limites $\varepsilon \to 0$ e $M \to 0$ possa ser trocada). Desta forma obtemos as regras de Feynman da teoria com o férmion de massa zero:

propagador do férmion $\dfrac{i\not{\ell}}{\ell^2 + i\varepsilon\vec{\ell}^{\,2}}$

propagador de φ_1 $\dfrac{i}{\ell^2 - m_1^2 + i\varepsilon(\vec{\ell}_1^{\,2} + m_1^2)}$,

propagador de φ_2 $\dfrac{i\,(1-\bar{g}_2^2/\pi)^{-1}}{\ell^2 - m'^2 + i\varepsilon(\vec{\ell}^{\,2} + m'^2)}$, $m'^2 = \dfrac{m_2^2}{1-\bar{g}_2^2/\pi}$

vértices: $-g_1\not{\ell}$ (acoplamento escalar)

$-g_2\not{\ell}\gamma^5$ (acoplamento pseudo escalar)

(III.30)

Como discutido acima, os gráficos da fig. 4 devem ser agora omitidos. Os acoplamentos perturbativos são g_1 e g_2 (com $\bar{g}_2$ tomado como variável independente). No final colocamos $\bar{g}_2 = g_2$.

A série perturbativa pode ser explicitamente somada, como mostraremos a seguir, para o caso da função de dois pontos. Por simplicidade de notação escreveremos $G^{(2)} = G^{(2,0,0)}$.

A equação de movimento para a função de dois pontos é então

$$i\not{\partial} G^{(2)}(x,y) = i\not{\partial} \langle T\,\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\rangle = -g_1 \langle T N_{3/2}[\gamma^\mu \psi\, \partial_\mu \varphi_1](x)\,\bar{\psi}(y)\rangle -$$

$$- g_2 \langle T N_{3/2}[\gamma^\mu \gamma^5 \psi\, \partial_\mu \varphi_2](x)\,\bar{\psi}(y)\rangle \quad + i\,\delta(x-y) \qquad \text{(III.31)}$$

As contribuições para os dois primeiros termos no lado direito de (III.31) tem a estrutura mostrada na figura 8

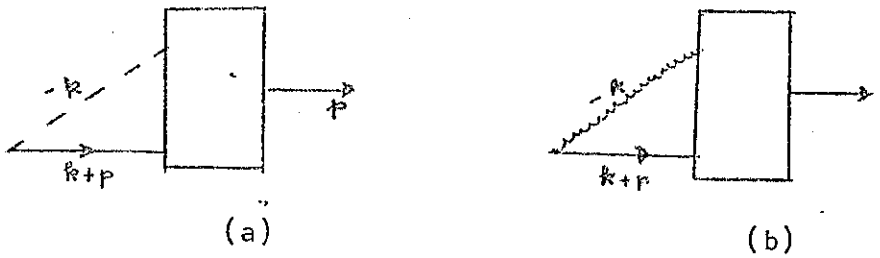


Fig. 8

No caso de gráfico do tipo (a) da fig. 8, usamos a identidade de Ward da corrente vetorial na forma simbólica indicada na fig. 9

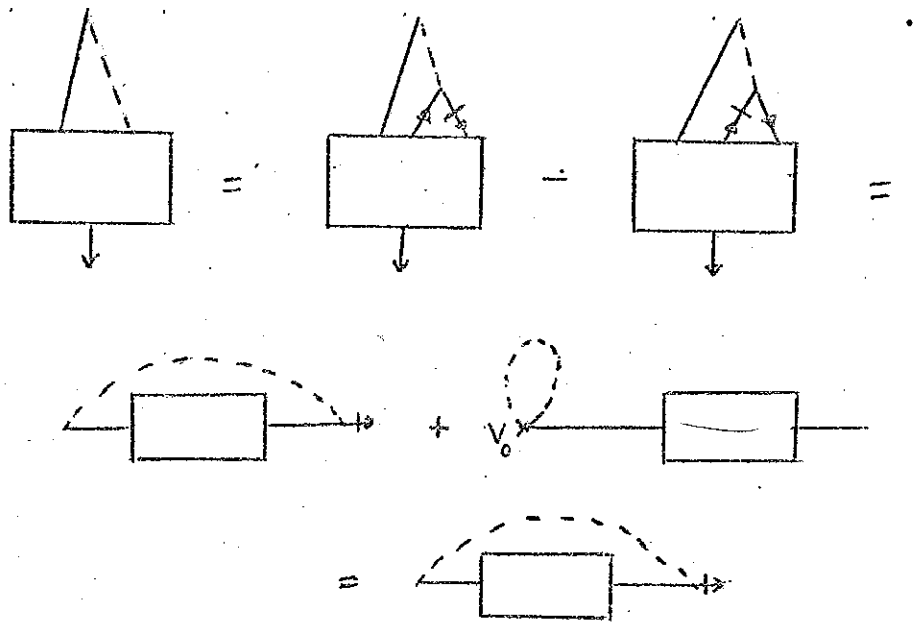


Fig. 9

Observe que o último gráfico na segunda linha da fig. 9 não contribui, por covariança (o vértice V_0 possui um fator de momento).

Os gráficos do tipo (b) da fig. 8 podem ser tratados de modo semelhante.

Colecionando esses resultados, obtemos

$$\not{\partial} G^{(2)}(x,y) = N\left[\left(g_1^2 \not{\partial}\Delta_F(x-y, m_1^2) + g_2^2 \not{\partial}\Delta'_F(x-y, m'^2)\right) G^{(2)}(x,y)\right] + \delta(x-y) \qquad (III.32)$$

onde $\Delta'_F(x-y, m'^2)$ é a transformada de Fourier inversa do propagador de ϕ_2 (dado em (III.30)). O símbolo N em (III.32) significa a aplicação do esquema de subtração (III.14). A equação (III.32) pode ser resolvida por iteração.

Em ordem zero $G^{(2)}(x,y) = S_F(x-y)$ onde $S_F(x-y)$ é a função de dois pontos livre.

Em ordem 2n em g_1 e g_2, $G^{(2)}(x,y)$ é dada por

$$G_n^{(2)}(x,y) = \frac{1}{n!}\left[F(x-y)\right]^n S_F(x-y) \qquad (III.33)$$

onde

$$F(x-y) = g_1^2\left[\Delta_F(x-y, m_1^2) - \bar{\Delta}(0, m_1^2)\right] + g_2^2\left[\Delta'_F(x-y, m'^2) - \bar{\Delta}'(0, m'^2)\right]$$

$$\bar{\Delta}(0, m_1^2) = \frac{1}{4\pi}\lg\frac{\mu^2}{m_1^2} \qquad (III.34)$$

$$\bar{\Delta}'(0, m'^2) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{1-\bar{g}_2^2/\pi}\lg\frac{\mu^2}{m'^2}$$

A prova de (III.33-34) é como segue. Seja (III.33) válida para um dado $n \neq 0$. Então, para n+1 temos (usando (III.32))

$$\not{\partial} G^{(2)}_{n+1}(x,y) = N\left\{ \frac{1}{n!} (\not{\partial} F(x-y)) \left[F(x-y)\right]^n S_F(x-y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} N\left\{ \not{\partial}\left[(F(x-y))^{n+1} S_F(x-y)\right] - \frac{1}{(n+1)!} N\left\{[F(0)]^{n+1}\right\} \delta(x-y)\right.$$

(III.35)

Note agora que o último termo em (III.35) é igual a zero. Isto é assim porque F(0) independe de m_1^2 e m_2^2 e portanto a aplicação do esquema de subtração reduz $[F(0)]^{n+1}$ ao valor zero.

Notando também que $N[\not{\partial} f(x-y)] = \not{\partial} f(x-y)$ (pois as subtrações são feitas em torno de $p^\gamma=0$), obtemos finalmente

$$\not{\partial} G^{(2)}_{n+1}(x,y) = \not{\partial}\left[\frac{(F(x-y))^{n+1}}{(n+1)!} S_F(x-y)\right]$$

e portanto (III.33) é válida para n+1.

De (III.33) vemos que

$$G^{(2)}(x,y) = \exp[F(x-y)]\, S_F(x-y) \qquad \text{(III.36)}$$

O procedimento acima pode ser estendido para funções de Green com número maior de pontos. De um modo geral essas funções de Green mostram que a solução para o campo $\psi(x)$ pode ser escrita como

$$\psi(x) = Z_1(m_1^2,\mu^2)\, Z_2(m'^2,\mu^2) :\, e^{ig_1\varphi_1(x) + ig_2\gamma_5\varphi_2(x)} :\, \psi_f(x)$$

$$Z_1 = \left(\frac{m_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{g_1^2}{8\pi}}$$

$$Z_2 = \left(\frac{m'^2}{\mu^2}\right)^{\frac{g_2^2/8\pi}{1 - g_2^2/4\pi}} \qquad \text{(III.37)}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos livres de massas m_1^2 e m'^2, respectivamente; ϕ_1 é canônico mas ϕ_2 tem a normalização especificada por (III.30). ψ_f é um campo de Dirac livre de massa zero.

A presença dos fatores Z_1 e Z_2 em (III.37) mostra que

o limite m_1^2 , $m_2^2 \to 0$, no setor de férmions, é suave. Neste limite a função de Green (III.36) torna-se

$$G^{(2)}(x) = \exp\left[\left(g_1^2 + \frac{g_2^2}{1 - g_2^2/\pi}\right) D_F(x,\mu^2)\right] S_F(x)$$

$$D_F(x,\mu^2) = -\frac{1}{4\pi} \lg\left(-\frac{\mu^2 e^{2\gamma}}{4} x^2 + i0\right) \tag{III.38}$$

Para $g_1^2 = -g_2^2 = g$ (e $m_1^2 = m_2^2 = 0$) obtemos as funções de Green do modelo de Thirring. A constante de acoplamento g está relacionada com a usada por Johnson através de

$$g_{\text{Johnson}} = \frac{g}{1 + g/2\pi} . \tag{III.39}$$

2. O modelo de Federbush

Como um outro exemplo onde a geração de contratermos, induzidos pelo esquema de subtrações, é importante consideremos o modelo de Federbush, descrito pela Lagrangiana formal

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_1 \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} \psi_1 - M_1 \bar{\psi}_1 \psi_1 + \frac{i}{2} \bar{\psi}_2 \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} \psi_2 - M_2 \bar{\psi}_2 \psi_2 +$$

$$+ g\, \varepsilon_{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)_1 (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi)_2 , \tag{III.40}$$

$$(\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi)_i = \bar{\psi}_i \gamma^\alpha \psi_i \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

onde ψ_1 e ψ_2 são campos de Dirac. Os gráficos de Feynman próprios associados com (III.40) tem um grau de divergência superficial

$$\delta(\gamma) = 2 - \frac{N_\gamma}{2}$$

$$N_\gamma = \text{nº de linhas externas de} \quad . \tag{III.41}$$

Vemos novamente que gráficos com 4 linhas externas são logaritmicamente divergentes e em princípio poderiam gerar vértices (contratermos) diferentes dos já presentes em (III.40). Para vermos esta questão com um pouco mais de detalhe, consideremos os gráficos contribuintes para as diversas funções de vértice, até

2a. ordem em g. Temos:

a) Gráficos contribuindo para $\langle T\, \psi_{1\alpha_1}(x_1)\, \psi_{2\alpha_2}(x_2)\, \bar{\psi}_{1\beta_1}(y_1)\, \bar{\psi}_{2\beta_2}(y_2) \rangle^{Prop}$,

onde Prop significa próprio. Os diagramas de 2a. ordem estão mostrados na fig.10. Observe que, embora separadamente divergentes,

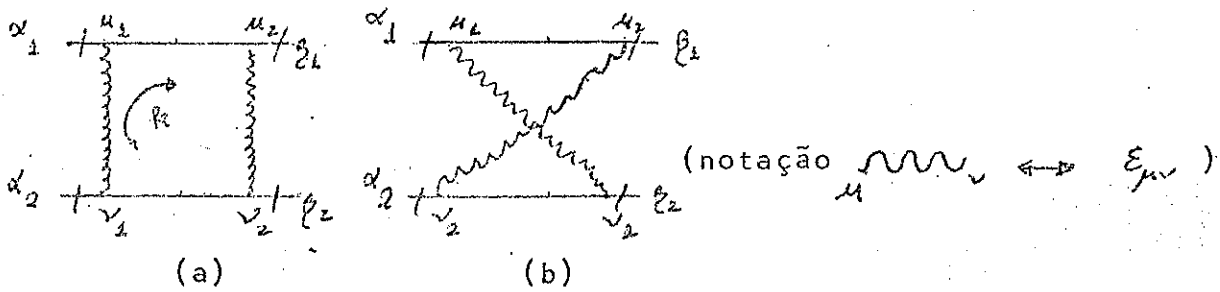


Fig. 10

a soma dos gráficos (a) e (b) é finita. Isto é uma consequência imediata da propriedade $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu$ das matrizes bidimensionais de Dirac. Isto significa que contratermos não são necessários.

Entretanto, se o esquema de subtrações subtrair cada gráfico individualmente, pode havera indução de um contratermo finito. Nós exemplificamos isto no caso do esquema de BPHZ duro (i.e., subtrações em $p^\gamma=0$ com as massas M_1 e M_2 fixas). Neste caso a soma dos termos da subtração dos gráficos (a) e (b) é proporcional a

$$\delta_{\alpha_1\beta_1}\, \delta_{\alpha_2\beta_2}\, M_1 M_2 \int d^2k\, \frac{1}{k^2 - M_1^2}\, \frac{1}{k^2 - M_2^2}$$

$$\propto\ \delta_{\alpha_1\beta_1}\, \delta_{\alpha_2\beta_2}\, \frac{M_1 M_2}{M_1^2 - M_2^2}\, \lg \frac{M_1}{M_2} \qquad (III.42)$$

e assim um contratermo proporcional a $(\bar{\psi}_1 \psi_1)(\bar{\psi}_2 \psi_2)$ seria induzido.

Deste exemplo, vemos também que não haveria a indução do contratermo se o esquema empregado fosse o da seção precedente,

i.e., não somente p^γ mas também as massas M_1^γ e M_2^γ são colocadas iguais a zero (e $\gamma^\mu \not{Q} \gamma_\mu \gamma_5$ substituido por $\gamma^\mu \not{Q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{k^2}{k^2-\mu^2}$).

b) Gráficos contribuindo para $\langle T \psi_{1\alpha_1}(x_1)\, \psi_{1\alpha_2}(x_2)\, \bar{\psi}_{1\alpha_3}(y_1)\, \bar{\psi}_{1\alpha_4}(y_2) \rangle^{Prop}$

Estes são mostrados na fig.11. Se integração simétrica é empregada

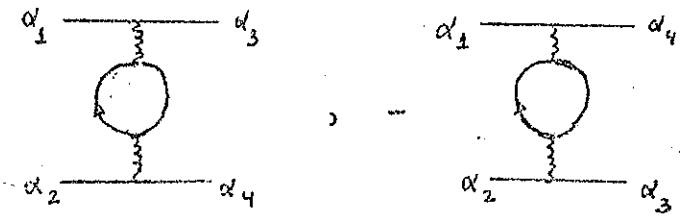


Fig.11

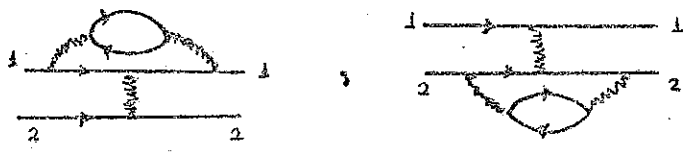
o termo de subtração resulta proporcional a

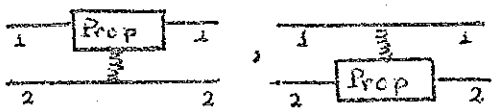
$$\gamma^\mu \not{Q} \gamma_\mu M_2^2 \int d^3k \frac{1}{(k^2-\mu^2)^2} \neq 0 \qquad (III.43)$$

quer no esquema de BPHZ duro quer no esquema (III.14) (lembre que em (III.14), seção precedente, a massa M_2^γ é dura para os gráficos do tipo considerado).

Acontece que (III.43) é necessária para a conservação da corrente* . É assim uma questão de escolha adicionar o contratermo (III.43) em (III.40) ou pensar que ele foi absorvido na definição da corrente $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_2$.

Nós observamos também que os gráficos



ou, mais geralmente, 

(onde Prop significa próprio inclusive quanto a cortes da linha ondulada) são divergentes. Esses gráficos induzem contratermos do tipo

$$\varepsilon_{\mu\nu} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_1 (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)_2$$

---

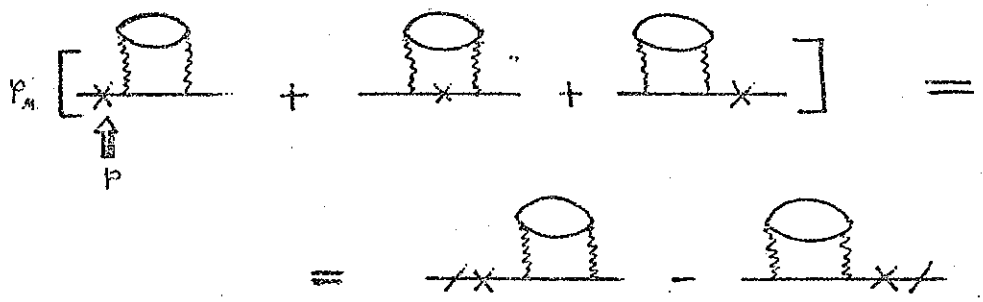
* Em outras palavras, se uma regularização mantendo a conservação da corrente é empregada o termo de subtração torna-se igual a zero.

mas a arbitrariedade por eles introduzida é fixada pela conservação da corrente. Podemos vêr isto da seguinte maneira. A corrente $j_{\perp} = N_{\perp}(\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\Psi)_{\perp}$ deve satisfazer a identidade de Ward

$$\partial_{\mu} \langle T N_{\perp}(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)_{\perp}(x)\, \Psi_{\perp}(x')\, \bar{\Psi}_{\perp}(y') \rangle = \left(\delta(x-y') - \delta(x-x')\right) \times$$

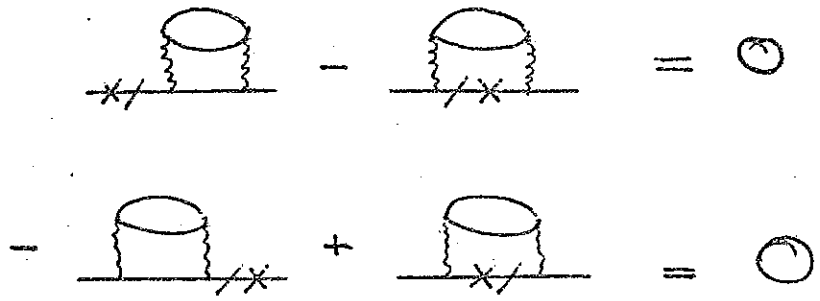
$$\times \langle T\, \Psi_{\perp}(x')\, \bar{\Psi}_{\perp}(y') \rangle \tag{III.44}$$

No caso associado com o gráfico (a), esta identidade corresponde a



(III.45)

Aplicando a equação de movimento ao vértice da corrente nos gráficos no lado esquerdo de (III.45) vemos que a igualdade resultará se



ou seja se as subtrações para a função de dois pontos forem relacionadas com a do vértice da corrente (com duas linhas de férmions externas).

As observações acima nos levam a definir a seguinte Lagrangiana efetiva para o modelo de Federbush

$$\mathcal{L} = N_2 \Big[\frac{i}{2} (\bar{\psi}_1 \overleftrightarrow{\not\partial} \psi_1) + \frac{i}{2} (\bar{\psi}_2 \overleftrightarrow{\not\partial} \psi_2) - M_1 (\bar{\psi}_1 \psi_1) - M_2 (\bar{\psi}_2 \psi_2) +$$

$$+ g\, \varepsilon_{\mu\nu} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_1 (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)_2 \Big] + a_1 N_1 (\bar{\psi}_1\psi_1) + a_2 N_1 (\bar{\psi}_2\psi_2) =$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \,,$$

$$\mathcal{L}_{int} = g\, \varepsilon_{\mu\nu} N_2 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_1 (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)_2] + a_1 N_1 (\bar{\psi}_1\psi_1) + a_2 N_1 (\bar{\psi}_2\psi_2) \qquad (III.46)$$

Os contratermos finitos a_1 e a_2 foram adicionados a fim de fixar as massas físicas dos campos ψ_1 e ψ_2, respectivamente.

Com os graus dos produtos normais especificados em (III.46) a função $\delta(\gamma)$ torna-se

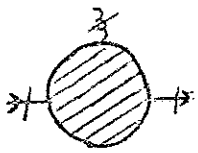
$$\delta(\gamma) = 2 - \frac{N_\gamma}{2} - B_\gamma \qquad (III.47)$$

onde B_γ = nº de vértices do tipo a_1 e a_2 em γ.

Os gráficos próprios a serem subtraidos são:

1) gráficos das auto energias dos férmions, $\delta(\gamma) = 1$

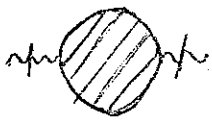
2) função de vértice das correntes com duas linhas de férmions externas i.e. subgráficos do tipo



com $\delta(\gamma) = 0$

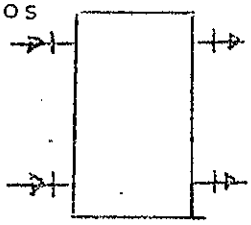
3) funções próprias de duas correntes i.e.

ou, mais geralmente,



(a) (b)

4) funções próprias (inclusive com relação as linhas onduladas) de 4 pontos



A fim de manter o cancelamento acima referidos o esquema de subtrações emprega operadores de Taylor generalizados com as seguintes propriedades:

a) $\tau^{d(\gamma)}$ é o operador de Taylor de ordem $d(\gamma)$ no momento externo p^γ de γ e em M^γ em torno de $p^\gamma = 0$ e $M^\gamma = \bar{\mu}$ se é o gráfico do caso (3a) acima (o operador S_G substitui $\bar{\mu}$ por M_1 ou por M_2, conforme o tipo de correntes em 3a).

b) Para os demais gráficos $\tau^{d(\gamma)}$ é um operador de Taylor em p^γ e M_1^γ, M_2^γ em torno de $p^\gamma = 0$, $M_1^\gamma = M_2^\gamma = 0$ sendo que na última subtração de $\tau^{d(\gamma)}$ o acoplamento $\gamma^\mu \not{Q} \gamma_\mu \gamma^5$ é substituido por*

$$\gamma^\mu \not{Q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{q^2}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon(\bar{q}^2 + \mu^2)}$$

Da mesma forma como fizemos no caso do modelo com acoplamento derivativo podemos provar que as subtrações associadas com a função de 4 pontos (caso 4 acima) são redundantes.

Para verificarmos isto escrevemos a contribuição de ordem n como

$$R_n^{(4)} = \sum_i (1 - \tau^0_{G_i}) \bar{R}_{G_i}$$

onde, como no caso de (III.26), $\bar{R}_{G_i}$ é definido pela fórmula da floresta mas sem fazer a subtração associada com o gráfico G_i. Notamos que G_i tem a estrutura mostrada na fig. 12.

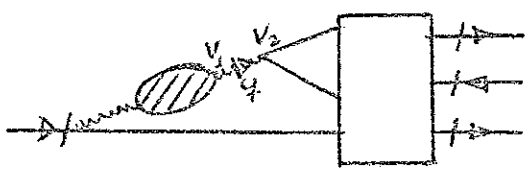


Fig. 12

* q é o momento através da linha ondulada .

Em seguida usamos a identidade

$$\frac{q^\mu q^\nu - \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu}{q^2 + i\varepsilon \tilde{q}^2} \gamma_\mu \not{\tilde{q}} \gamma_\nu \gamma_5 = \gamma^\mu \not{\tilde{q}} \gamma_\mu \gamma_5 + O(\varepsilon)$$

para a linha indicada, ligando V_1 a V_2. Aplicando em V_2 a equação de movimento, da maneira como fizemos na seção anterior deste capítulo, obtemos uma soma de gráficos onde $\not{\tilde{q}}$ em V_2 é substituido por $2M\gamma^5$ ou aparece a contribuição em forma fatorizada e um gráfico que se anula para $P_{G_i} = M_{G_i} = 0$ e $m^2_{1_{G_i}} = m^2_{2_{G_i}} = \mu^2$. Em ambos os casos a aplicação do último operador de subtração dará zero.

Concluimos que esses gráficos não geram contratermos e portanto os únicos contratermos gerados estão associados ou com as subtrações da função de dois pontos dos férmions ou com a definição das correntes $j_{1\mu}$ e $j_{2\mu}$.

As identidades de Ward para as correntes axiais tem uma forma bastante simples. Em particular para a corrente j^μ_{15} temos

$$\left(\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{N} \psi_1(x_i) \prod_{j=1}^{L} \psi_2(x'_j) \prod_{k=1}^{N} \bar{\psi}_1(y_k) \prod_{\ell=1}^{L} \bar{\psi}_2(y'_\ell)\right)$$

$$\partial_\mu \langle T N_1 [\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)_1 (x) \mathcal{X} \rangle = 2i (M_1 - a_1) \langle T N_1 (\bar{\psi} \gamma^5 \psi)_1 (x) \mathcal{X} \rangle +$$

$$+ a \partial_\mu \langle T N_1 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)_2 (x) \mathcal{X} \rangle - \sum_{i=1}^{N} \left(\delta(x - x_i) \gamma^5_{x_i} + \delta(x - y_i) \gamma^{5T}_{y_i} \right) \langle T \mathcal{X} \rangle$$

$$= 2i (M_1 - a_1) \langle T N_1 (\bar{\psi} \gamma^5 \psi)_1 (x) \mathcal{X} \rangle + a \sum_{i=1}^{L} \left(\delta(x - y'_i) - \delta(x - x'_i) \right) \langle T \mathcal{X} \rangle$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \left(\delta(x - x_i) \gamma^5_{x_i} + \delta(x - y_i) \gamma^{5T}_{y_i} \right) \langle T \mathcal{X} \rangle$$

(III.48)

onde $a = - g/\pi$.

Note a forma particularmente simples (proporcional a divergência da corrente vetorial do campo ψ_2) do termo da anomalia. Se ao invés do esquema proposto tivessemos empregado o de BPHZ, obteríamos uma quebra dura da conservação das correntes axiais.

Capítulo IV

Perturbação na massa no modelo com acoplamento derivativo

1. O modelo não perturbado

Como vimos no capítulo anterior, as equações de movimento para o modelo com acoplamento derivativo, com M=0

$$i\not{\partial}\psi = -g_1\gamma^\mu\partial_\mu\varphi_1^0\psi - g_2\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\varphi_2^0\psi$$

$$(\partial^2 + m_1^2)\varphi_1^0 = -g_1\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) \qquad \text{(IV.1)}$$

$$(\partial^2 + m_2^2)\varphi_2^0 = -g_2\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)$$

mostram que ϕ_1^0 e ϕ_2^0 são campos livres. Por uma escolha adequada do produto normal associado com $(\bar\psi\gamma^\mu\psi)$, ϕ_1 e ϕ_2 podem ser tomados como campos canônicos de massa m_1 e m_2.* O campo ψ, satisfazendo a primeira das equações (IV.1) pode ser escrito como

$$\psi = :e^{ig_1\varphi_1^0 + ig_2\gamma^5\varphi_2^0}: \psi_f \qquad \text{(IV.2)}$$

onde ψ_f é um campo de Dirac livre de massa zero.

Esses resultados sugerem que uma possível abordagem para o estudo do modelo com M≠0 consiste em considerar o termo de massa, $M\bar\psi\psi$, como uma perturbação em torno do modelo (IV.1). É claro que dificuldades (divergências infravermelhas) são esperadas devido ao fato de ψ_f ser um campo de massa zero. No caso presente este problema pode ser contornado através de uma soma parcial da série perturbativa.

De (IV.2) vemos que

$$\bar\psi(x+\varepsilon)\psi(x) = F(\varepsilon) :\exp i[g_1(\varphi_1^0(x) - \varphi_1^0(x+\varepsilon)) + g_2\gamma^5(\varphi_2^0(x) + \varphi_2^0(x+\varepsilon))]:$$

$$\times\{:\bar\psi_f(x+\varepsilon)\psi_f(x): + \langle\bar\psi_f(x+\varepsilon)\psi_f(x)\rangle\} \qquad \text{(IV.3)}$$

---

* Isto corresponde a definir corrente de modo a absorver o termo da anomalia.

e assim o termo de mass M $N[\bar{\psi}\psi]$ pode ser convenientemente definido por

$$M N[\bar{\psi}\psi](x) = M \lim_{\epsilon \to 0} [F(\epsilon)]^{-1} \bar{\psi}(x+\epsilon)\psi(x) =$$

$$= M : e^{2ig_2\gamma^5\varphi_2^0(x)} : : \bar{\psi}_f \psi_f : (x) \qquad (IV.4)$$

As divergências infravermelhas podem ser eliminadas escrevendo

$$M N[\bar{\psi}\psi] = M (: e^{2ig_2\gamma^5\varphi_2^0} : - 1) : \bar{\psi}_f \psi_f : + M : \bar{\psi}_f \psi_f : \qquad (IV.5)$$

e transferindo o termo $M:\bar{\psi}_f\psi_f:$ para a Lagrangiana não perturbada. Como resultado dessa operação, obtemos que o campo ψ não perturbado torna-se

$$\psi' = : e^{ig_1\varphi_1^0 + ig_2\gamma^5\varphi_2^0} : \psi_0 \qquad (IV.6)$$

com ψ_0 um campo de Dirac livre de massa M.

Nós fazemos as seguintes observações:

i) Como a interação efetiva $\mathcal{L}_{int} = M(:e^{2ig_2\gamma^5\varphi_2^0}: - 1):\bar{\psi}_0\psi_0:$ não depende de ϕ_1, este último campo continuará livre, seu único efeito sendo manifestado através da dependência (trivial) do campo não perturbado (IV.6)* Em virtude desse fato, restringiremos a análise deste capítulo a funções de Green envolvendo somente os campos ψ e ϕ_2. Essas funções de Green são definidas por

$$G^{(2N,L)}(x_1,\ldots,x_N;y_1,\ldots y_N;z_1,\ldots z_L) = \langle T \prod_{i=1}^{N} \psi(x_i) \prod_{j=1}^{N} \bar{\psi}(y_j) \prod_{k=1}^{L} \varphi_2(z_k) \rangle =$$

$$= \frac{\langle T \prod_{i=1}^{N} \psi'(x_i) \prod_{j=1}^{N} \bar{\psi}'(y_j) \prod_{k=1}^{L} \varphi_2^0(z_k) \exp\{i \int d^2x\, \mathcal{L}_{int}(\varphi_2^0, \psi^0)\} \rangle^0}{\langle T \exp i \int d^2x\, \mathcal{L}_{int}(\varphi_2^0, \psi_0) \rangle^0} \qquad (IV.7)$$

com ψ' dado por (IV.6).

---

* Por essa razão a discussão deste capítulo é inteiramente análoga a feita na ref. 29.

ii) A Lagrangiana não perturbada

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{m_1^2}{2}\varphi_1^2 - \frac{m_2^2}{2}\varphi_2^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi -$$

$$- M e^{-2ig_2\gamma^5\varphi_2}\bar{\psi}\psi + g_1(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\varphi_1 + g_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\partial_\mu\varphi_2 \qquad (IV.8)$$

é, se $m_2=0$, formalmente invariante pela transformação

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi \quad , \qquad \varphi \longrightarrow \varphi + \frac{\alpha}{g_2} \qquad (IV.9)$$

Como ψ_0 é um campo massivo seríamos levados a supor que a simetria (IV.9) é espontaneamente quebrada.[34] Isto não ocorre. A corrente de Noether (IV.9) associada com a transformação quiral (IV.9) é

$$j_\mu = \frac{\alpha}{g_2}\partial_\mu\varphi_2 \qquad (IV.10)$$

Assim ψ_0 carrega carga quiral zero e pode desenvolver uma massa. Por outro lado, devido a multiplicação por $e^{ig_2\gamma^5\varphi_2}$, o campo $\psi' = \exp i[g_1\varphi_1 + g_2\gamma^5\varphi_2]\,\psi_0$ tem carga quiral e não desenvolve uma massa (sendo $m_2=0$, a função de dois pontos $\Delta_F(p)$ de ψ' tem um corte começando no valor M da massa de ψ_0).

2. Comportamento ultravioleta da série perturbativa

A expressão (IV.7) para as funções de Green pode ser convertida numa expansão em gráficos de Feynman usando-se

$$e^{i\lambda\gamma^5\varphi} = \frac{e^{i\lambda\varphi} + e^{-i\lambda\varphi}}{2} + \gamma^5\,\frac{e^{i\lambda\varphi} - e^{-i\lambda\varphi}}{2} \qquad (IV.11)$$

e o teorema de Wick para exponenciais de campos livres

$$\langle T\prod_i :e^{i\lambda_i\varphi^0(x_i)}: \rangle = \exp\Big[-\sum_{k<l}\lambda_k\lambda_l\,\Delta(x_k - x_l)\Big] \qquad (IV.12)$$

com $\Delta(x_k - x_l) = \langle T\,\varphi^0(x_k)\,\varphi^0(x_l)\rangle$

Em um gráfico de Feynman G, além das linhas escalares externas e das linhas de férmions existem, devido a (IV.11) e (IV.12) linhas exponenciais de oito tipos correspondentes a

$$e^{\pm g_1 \Delta(x_k - x_\ell, m_1^2)}, \quad e^{\pm g_2 \Delta(x_k - x_\ell, m_2^2)}, \quad e^{\pm 2g_2 \Delta(x_k - x_\ell, m_2^2)}$$

e

$$e^{\pm 4g_2 \Delta(x_k - x_\ell, m_2^2)}$$

Linhas exponenciais do tipo $e^{\pm g_1 \Delta(x_k - x_p)}$ ligam somente vértices externos de G.

No restante deste capítulo vamos analisar o comportamento ultravioleta das funções de Green (IV.7), na chamada região Euclidiana. Esta restrição é feita para simplificar a discussão uma vez que podemos então aplicar o teorema de Weinberg[35], obtendo o comportamento "assintótico por contagem de potências".

Para obter as amplitudes de Feynman na região Euclidiana nós fazemos as substituições

$$d^2x \longrightarrow -i\, d^2x$$

$$\Delta(x, m^2) \longrightarrow \Delta(x, m^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + m^2} = \frac{1}{2\pi} K_0(m\rho) \qquad \text{(IV.13)}$$

$$S(x, M) \longrightarrow S(x, M) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\not{k} + M}{k^2 + M^2} e^{-ikx}$$

com

$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}, \quad \rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = -2\delta_{ij}$$

Nós observamos que a transformada de Fourier de $e^{\pm n g^2 \Delta(x)}$ tem a forma

$$F_\pm^{(n)} = \delta(k) + G_\pm^{(n)}(k) \qquad \text{(IV.14)}$$

onde, para $k \longrightarrow \infty$ $\quad G_\pm^{(n)} \sim (k^2)^{-1 \pm \frac{n g^2}{4\pi}}$

Os subgráficos de G podem ser classificados em generalizados e não generalizados. Um subgráfico γ é chamado de generalizado se qualquer linha de G, ligando qualquer par de vértices de γ, pertence a γ. No caso contrário o subgráfico é chamado não generalizado.

Consideremos o caso de gráficos generalizados. Se q_1, q_2, r_1, s_1, r_2 e s_2 são os números de vértices de γ com campos

exponenciados $e^{ig_1\phi_1}$, $e^{-ig_1\phi_1}$, $e^{ig_2\phi_2}$, $e^{-ig_2\phi_2}$, $e^{2ig_2\phi_2}$, $e^{-2ig_2\phi_2}$, respectivamente, usando (IV.12,14) obtemos que o grau ultravioleta de divergência superficial de γ é dado por

$$\delta(\gamma) = 2m - n_F - 2n_B - \alpha A^2 - \beta B^2 + \alpha V_2 + \\ + (\beta + \tfrac{\alpha}{4}) V_1 \qquad (IV.15)$$

onde $\alpha = \frac{g_2^2}{\pi}$, $\beta = \frac{g_1^2}{4\pi}$, $A = r_2 - s_2 + \frac{r_1 - s_1}{2}$

$B = q_1 - q_2$, $V_i = r_i + s_i$ (observe que $V_1 = r_1 + s_1 = q_1 + q_2$),

n_F = nº de linhas de férmions em γ

n_B = nº de linhas exponenciais em γ

O número de circuitos independentes de γ é

$$m = n_F + n_B - V + 1 \qquad (IV.16)$$

onde V é o número total de vértices de γ, isto é

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \qquad (IV.17)$$

V_0 sendo o número de vértices sem campos exponenciados (vértices do tipo $\bar{\psi}_0\psi_0$) .

Usando as fórmulas acima e

$$2n_F + N_F = 2V - V_1 .$$

onde N_F = nº de linhas de férmions externas de γ, obtemos que

$$\delta(\gamma) = 2 - \deg V(\gamma) - \sum_{a=0}^{2} (2 - \delta_a) V_a \qquad (IV.18)$$

onde $\deg V(\gamma) = \frac{N_F}{2} + \alpha A^2 + \beta B^2$ é o grau ultravioleta do vértice $V(\gamma)$ obtido pela contração de γ a um ponto.

O grau δ_a do vértice tipo a é dado por

δ_0 = 1 para vértices sem campos exponenciais

$\delta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \beta$ para vértices com campos exponenciados

$\delta_2 = 1 + \alpha$ para vértices com campos exponenciados

Para $\delta_2 > 2$ a teoria torna-se não renormalizável no sentido de existirem diagramas com grau de divergência arbitrariamente elevados. Se $\delta_2 = 2$ o propagador exponenciado $\exp[4g_2^2 \Delta(x)]$ desenvolve a curtas distâncias uma singularidade não integrável.

Seja $\delta_2 < 2$ (i.e $0 \leq \alpha < 1$) . De (IV.18) vemos que gráficos com $N_F = A^2 = B^2 = 0$ e $V_1 = 2$ tem

$$\delta(\gamma) \leq 2 - 2(2 - \delta_1) = -2 + 2\delta_1$$

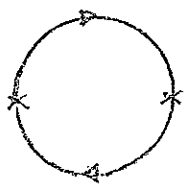
e $\delta(\gamma)$ será negativo se $\delta_1 < 1$ (ou seja $\frac{\alpha}{4} + \beta < \frac{1}{2}$).

Restringindo-nos então a região com $\delta_1 < 1$ e $\delta_2 < 2$, a fórmula (IV.18) permite fazer uma discussão sistemática das possíveis singularidades de gráficos generalizados. Os elementos essenciais dessa discussão são os seguintes.

1) $N_F \geq 4 \Rightarrow \delta(\gamma) < 0$

2) $N_F = 1$ ou 3. Como nestes casos necessariamente $V_1 \neq 0$ é facilmente visto que $\delta(\gamma) < 0$ (no caso $N_F = 1$ observe que como V_1 é ímpar $A^2 \geq \frac{1}{4}$, $B^2 \geq 1$)

3) $N_F = 2$ ou 0. Se $V_1 \geq 2$ obtemos que $\delta(\gamma) < 0$. Por outro laso de $V_0 \geq 2$ então novamente resulta $\delta(\gamma) < 0$ a não ser para o gráfico



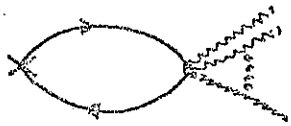
cujas contribuições são, entretanto, canceladas, devido ao denominador da fórmula (IV.7). As possibilidades restantes tem portanto $V_1 = 0$, $N_F = 2$ ou 0 e $V_0 < 2$. Examinemos cada caso:

4) $N_F = 2$. Se $V_0 \geq 1$ então $\delta(\gamma) < 0$. Se $V_0 = 0$ então

$$\delta(\gamma) \leq -1 + 2\alpha - \alpha A^2$$

e $\delta(\gamma) < 0$ a menos que $A^2 = 0$. Neste último caso n_F é ímpar e então, por covariança, o gráfico resultará finito se uma regularização conveniente é empregada.

5) $N_F = 0$, $V_0 = V_2 = 1$. Este caso corresponde ao gráfico (linhas onduladas representam propagadores exponenciados)



o qual é logaritmicamente divergente. Considerando as contribuições do denominador de (IV.7) vemos que um contratermo proporcional a

$$:\cos 2g_2\varphi_2: \; - 1$$

é necessário para a remoção dessa divergência.

6a) $N_F = 0$, $V_0 = 0$ e V_2 ímpar ($V_2 = 3,5\ldots$). Como $A^2 \geq 1$ então $\delta(\gamma) \leq -1 + 2\alpha$. Note entretanto que divergências não aparecem, pois como n_F é ímpar e as linhas de férmions formam circuitos fechados, a operação de tomar o traço diminui $\delta(\gamma)$ por uma unidade.

6b) $N_F = 0$, $V_0 = 0$ e V_2 par ($V_2 = 2,4\ldots$). Divergências podem ocorrer somente se $A^2 = 0$ pois

$$\delta(\gamma) \leq -\alpha A^2 + 2\alpha$$

Seja $A^2=0$. Se não houver linhas externas associadas com o propagador livre de ϕ_2, então o vértice reduzido $V(\gamma)$ não terá nenhuma linha (pois $N_F = A^2 = 0$ — veja exemplo da fig. 13).

A divergência será portanto parcialmente removida combinando gráficos desse tipo com os correspondentes gráficos do denominador de (IV.7). Após efetuarmos essa combinação de gráficos e, se $\alpha \geq \frac{1}{2}$, persiste ainda uma divergência logaritmica a qual, por covariança, pode ser eliminada pelo uso de uma regularização conveniente.

(a) (b)

Fig.13 - O gráfico b tem divergência 2α. O sinal + (ou -) nos vértices indicam o sinal correspondente do campo exponenciado. Reduzindo-se em (a) o subgráfico b a um ponto vemos que a linha ligando 1 a 3 (ou 1 a 4) cancela aquela ligando 2 a 3 (respec. 2 a 4).

Se houver linhas externas associadas com o propagagor de ϕ_2, então combinando os gráficos obtidos pela permutação dessas linhas obtemos um cancelamento da parte mais divergente (veja exemplo da fig. 14)

Fig. 14 - Os gráficos acima tem sinais diferentes. A parte mais divergente é cancelada.

A divergência logaritmica restante (se, $\alpha \geq \frac{1}{2}$) pode ser eliminada por uma regularização conveniente. Isto finaliza a discussão para gráficos generalizados.

No que concerne a gráficos não generalizados notemos que se uma regularização é empregada (exemplo: Pauli-Villars nas linhas de férmions e redução adequada dos valores de α e β) então, semelhantemente ao que ocorre no formalismo de BPH [36], as divergências associadas com gráficos deste tipo não aparecerão.

Observe também que todas divergências de volume ainda existentes são canceladas entre o numerador e o denominador de (IV.7), devido ao termo $\delta(k)$ em (IV.14).

A conclusão da discussão acima é que todas as divergências da teoria regularizada (i.e. divergências que persis-

tem após a remoção da regularização, o que deve é feito somente no final) podem ser eliminadas pela adição de um contratermo $c(:\cos 2g_2\varphi_2: - 1)$. A arbitrariedade introduzida pela parte finita de c pode ser eliminada fixando a massa do campo ϕ_2.

Na ref. 30 uma discussão foi feita para o comportamento ultravioleta da perturbação na massa no modelo de Thirring. Como mostrado nessa ref. existem dificuldades (divergências infravermelhas) adicionais devido ao fato que ϕ_1 e ϕ_2 são neste caso campos de massa zero.

Finalizando esta descrição gostaríamos de acrescentar que equações de movimento e identidades de Ward para as correntes vetor e vetor axial podem ser deduzidas de um modo relativamente simples. Em particular, como esperado, a identidade de Ward para a corrente axial revela a quebra explícita da invariância γ^5.

Referências

1. T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. 14, 351 (1955).
2. A.L. Fetter e J.D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, Mc Graw-Hill Book Company (1971); A. A. Abrikosov, L.P. Gor'kov e I.Ye. Dzyaloshinskii, Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics, Pergamon Press (1965).
3. E.S. Fradkin, Nucl.Phys. 12, 465 (1959); I.A. Akhiezer e S. V. Peletminskii, Soviet Phys JETP 11, 1316 (1960).
4. D.A. Kirzhnits e A.D. Linde, Phys. Lett. 42B, 471 (1972); D. A. Kirzhnits, JETP Letters 15, 529 (1972).
5. S. Weinberg, Phys. Rev. D9, 3357 (1974).
6. L. Dolan e R. Jackiw, Phys. Rev. D9, 3320 (1974).
7. D.A.Kirzhnits e A.D.Linde, Ann. Phys. 101, 195 (1976); I.V. Krive, A.D.Linde e E.M. Chudnovskii, Sov.Phys. JETP 44, 435 (1976).
8. R.F.Dashen, Shang-Keng Ma e R. Rajaraman, Phys. Rev. D11, 1499 (1975); B.J. Harrington e A. Yildiz, Phys. Rev. D11, 779 (1975); J. Iliopoulos e N. Papanicolau, Nucl. Phys. B111, 209 (1976); Askok Das e Michio Kaku, Phys. Rev. D8, 4540 (1978).
9. J. Schwinger, Phys. Rev. 128, 2425 (1962); J.H. Lowenstein e J.A. Swieca, Ann. Phys. 68, 172 (1971).
10. B.J. Harrington e A. Yildiz, Phys. Rev. Lett. 33, 324 (1974); E.M. Chudnovskii e I.V. Krive, preprint ITP-76-131E, Kiev (1976).
11. M.B.Kislinger e P.D. Morley, Phys.Rev. D13, 2771 (1976).
12. R.E. Norton e J.M. Cornwall, Ann.Phys. 91, 106 (1975).
13. W. Zimmermann, Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, ed. por S.Deser, M. Grisaru e H. Pendleton, vol I, pag. 397, (1970).
14. J.H. Lowenstein, Tech. Report nº 73-068, University of Maryland (1972).
15. Y.M. Lam, Phys. Rev. D6, 2154 (1972); J.H. Lowenstein e B. Schroer, Phys. Rev. D10, 2513 (1974); A. Rouet, Commun. Math. Phys 48, 89 (1976); T.E. Clark e J.H. Lowenstein, Nucl.Phys. B113, 109 (1976); J.H. Lowenstein e P.K.Mitter, Ann. Phys. 105, 138 (1977).
16. M.Gomes e R. Köberle, Renormalization in finite temperature field theory, IFUSP preprint P-129, (1977).

17. B.Schroer, Fortschr. der Physik 11, 1 (1963).
18. A.S. Wightman, Cargese Lectures in Theor. Phys., 1964, ed por M. Levy, Gordon e Breach, N.Y. (1966).
19. K.D. Rothe e O. Stamatescu, Ann. Phys. 95, 202 (1975).
20. W.Thirring, Ann. Phys. 3, 91 (1958); K. Johnson, Nuovo Cimento 20, 773 (1961); B. Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, N.Y., Gordon e Breach, p. 141 (1968).
21. P.Federbush, Phys. Rev. 121, 1247 (1961).
22. M.L. Tapper, Nuovo Cimento 25A, 165 (1975).
23. B. Schröer, T.T. Truong e P. Weisz, Ann. Phys. 102, 156 (1976).
24. P. Hhalen, Nucl. Phys. B116, 491 (1976).
25. M. El Afioni, M. Gomes e R. Köberle, Phys. Rev. D19, 1144 (1979). Veja também a ref. 26.
26. M.El Afioni, Estudo perturbativo de um modelo bidimensional com acoplamento corrente axial-gradiente de um campo pseudo-escalar, Tese de Doutoramento, Instituto de Física da USP, 1978.
27. J.W. Lowenstein, em "Renormalization Theory", ed. por A.S. Whightman e G. Velo, D. Reidel Pub. Co., 1976.
28. E. Abdalla, Renormalização em eletrodinâmica quântica massiva, Tese de Doutoramento, Instituto de Física da USP, 1977; E.Abdalla, M.Gomes e R.Köberle, Phys. Rev. D18, 3634 (1978).
29. M.El Afioni, M. Gomes e R. Köberle, Phys. Rev. D19, 1791 (1979). Veja também a ref. 26.
30. A.J. da Silva, Perturbação na massa no modelo de Thirring, Tese de Doutoramento, Instituto de Física da USP, 1979.
31. S.Coleman, Phys. Rev. D11, 2088 (1975); J.A.Swieca, aulas na Escola Latino-Americana de Física, 1976; B. Schröer e T. Truong, Phys. Rev. D15, 1684 (1977).
32. W. Zimmermann, Commun. Math. Phys. 15, 208 (1969).
33. C. Bernard, Phys. Rev. D9, 3312 (1974); B.A. Freedman e L.D. McLerran, Phys. Rev. D16, 1147 e 1169 (1977); V. Baluni, Phys. Rev. D17, 2092 (1978); P.D. Morley, Phys. Rev. D17, 598 (1978).
34. E.Witten, Nucl. Phys. B145, 110 (1978); A.J. da Silva, M. Gomes e R. Köberle, IFUSP preprint P/164 (1979), a ser publicado em Phys. Rev. D.
35. W. Weinberg, Phys. Rev. 118, 838 (1960).
36. N.N. Bogoliubov e D.W. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, Interscience Publ, N.Y., 1959.