

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

DIFUSÃO EM MAGNETOPLASMAS
NA PRESENÇA DE TURBULÊNCIA
ELETROSTÁTICA: EFEITOS DA
DINÂMICA PARALELA.

SBI-IFUSP



305M810T3249

Nelson Fiedler-Ferrara

Tese de Livre-Docência submetida
ao Instituto de Física da Universi-
dade de São Paulo.



São Paulo
1999

Para Mara Tosin

*anima mia,
compagna di percorsi
e di vita*

Meus agradecimentos a Jacques Misguich, que me introduziu às idéias e técnicas da teoria renormalizada de turbulência.

Meu reconhecimento e homenagem aos meus pais — Nelson e Eleonor — responsáveis maiores pelas flores que agora desabroçam.

*Digitação: Izabel Terue Yokomizo, a quem agradeço
a gentileza e eficiência.*

RESUMO

Neste trabalho consideramos os efeitos do movimento paralelo na difusão de centros-guia em um campo magnético intenso, uniforme e constante, na presença de turbulência eletrostática homogênea, estacionária e isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético. Obtemos um sistema de equações não-lineares acopladas representando o acoplamento entre as difusões paralela e perpendicular no espaço. Fornece-se também uma equação para o campo elétrico Lagrangiano paralelo médio, deduzido na aproximação *quasi*-linear renormalizada. Deduz-se, também, uma expressão explícita como função da velocidade paralela da partícula carregada, e valores numéricos para a aproximação *quasi*-linear utilizando um espectro modelo baseado em resultados experimentais em Tokamak.

ABSTRACT

In this work we consider the effects of the parallel motion on the diffusion of guiding centres in a constant, uniform and strong magnetic field, in the presence of an electrostatic turbulence which is homogeneous, stationary and isotropic in the plane perpendicular to the magnetic field. We obtain a system of coupled non-linear equations representing the coupling between parallel and perpendicular diffusion in space, which includes an equation for the average Lagrangian parallel electric field, deduced in the renormalized *quasi*-linear approximation. By using a model spectrum based on Tokamak experimental data, we deduce an explicit expression, and numerical values for the *quasi*-linear approximation of the asymptotic parallel average Lagrangian electric field, as a function of the parallel velocity of the charged particle.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. DIFUSÃO EM TRÊS DIMENSÕES	4
2.1. Definições preliminares	4
2.2. Coeficiente de difusão	9
2.3. Autocorrelação de velocidades Lagrangianas	13
3. CAMPO ELÉTRICO LAGRANGIANO MÉDIO	21
3.1. Aproximação <i>quasi</i> -linear renormalizada	22
a) Campo elétrico Lagrangiano perpendicular médio	25
b) Campo elétrico Lagrangiano paralelo médio	26
3.2. Equação de evolução	27
3.3. Aproximação <i>quasi</i> -linear	28
4. ESPECTRO ANALÍTICO TRIDIMENSIONAL PARA TURBULÊNCIA ELETROSTÁTICA	29
4.1. Resultados experimentais	29
4.2. Espectro modelo	32
4.3. Ajustando com o espectro em k_{\perp} do TFR	37
4.4. A amplitude do espectro	40
4.5. Resumo	42
5. CAMPO ELÉTRICO LAGRANGIANO ASSINTÓTICO PARALELO MÉDIO	45
5.1. Resultado para espectro de ondas que se propagam ($\sigma = 0$)	45
5.2. Resultado para espectro simétrico ($\sigma = 1$)	49
5.3. Valores numéricos	50
6. CONCLUSÕES	55

APÊNDICES

A. Espectro de correlação de um-ponto do campo elétrico como um tensor isotrópico	59
B. Integração sobre os vetores de onda perpendiculares	64
C. Integração sobre as freqüências	66

FIGURAS

Fig. 1 — Campo magnético externo.....	5
Fig. 2 — Espectro em k_{\perp} para o tokamak TFR.	31
Fig. 3 — Representação esquemática do espectro tridimensional $S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ para um valor dado de k_{\perp} , como função da freqüência e do vetor de onda paralelo.	33
Fig. 4 — Idem anterior, para um valor positivo de $k_{\parallel} > 0$, como função da freqüência e do módulo $k_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp} $ do vetor de onda perpendicular.	35
Fig. 5 — Ajuste Gaussiano do espectro bidimensional $S_{\mathbf{k}_{\perp}}^{(2)}(\tau = 0) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$	39
Fig. 6 — Ajuste Lorentziano do mesmo espectro da Fig. 5.	41
Fig. 7 — Valor assintótico do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio na aproximação <i>quasi</i> -linear. Resultados para um elétron na presença de um espectro com ondas que se propagam na direção paralela e com velocidade inicial paralela $v_{\parallel} > 0$ (a) e $v_{\parallel} < 0$ (b).	51
Fig. 8 — Idem Fig. 7 para um espectro de ondas que se propagam na direção paralela e nos dois sentidos, e com velocidade inicial paralela $v_{\parallel} > 0$	53
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

1. INTRODUÇÃO

A ocorrência de perdas anômalas em energia devido ao transporte de partículas e energia através de configurações magnéticas fechadas é um dos problemas mais sérios enfrentados para o desenvolvimento da fusão termonuclear controlada. De fato, tais perdas são muito mais intensas do que as previstas pela teoria neoclássica de transporte colisional em geometria toroidal, como se sabe há muito tempo (ARTSIMOVICH, 1972; FURTH, 1975).

O transporte anômalo é geralmente atribuído à microturbulência do plasma em escalas espaciais pequenas comparadas ao raio do plasma.

Ao estudar a difusão turbulenta de partículas carregadas, a abordagem mais simples consiste em considerar partículas carregadas teste que são “passivas” no sentido de que são sujeitas às flutuações de campo elétrico ou magnético prescritos, mas não contribuem para a carga espacial local (veja, por exemplo, PÉCSELI e TRULSEN, 1989).

A difusão de partículas carregadas na presença de um espectro dado de turbulência eletrostática, incluindo ou não um campo magnético externo, foi bastante tratada na literatura utilizando diferentes aproximações e formulações do problema. Uma classe de abordagens (DUPREE, 1966, 1967, 1972; WEINSTOCK, 1969; MISGUICH e BALESCU, 1975; MISGUICH *et al.*, 1987; SALAT, 1988; PETTINI *et al.*, 1988), sobre a qual se apoia este trabalho, utiliza uma aproximação “*quasi*-linear renormalizada” para descrever os acoplamentos de modos não lineares. Uma tal aproximação é o análogo da aproximação DIA (“Direct Interaction Approximation”) introduzida por KRAICHNAN, 1967 para turbulência em fluidos; ela não leva em conta características

claramente importantes da turbulência, como por exemplo o caráter não-Gaussiano das trajetórias turbulentas. Tais teorias estatísticas, evidentemente, são válidas além de um limiar com desenvolvimento suficiente das não linearidades e do caos (destruição de eventuais barreiras de Kolmogorov-Arnold-Moser).

Embora muitos resultados importantes tenham sido obtidos, diversos aspectos do problema não são ainda bem compreendidos. Um desses aspectos é ligado ao processo de acoplamento da difusão nas direções paralela e perpendicular a um campo magnético externo. Esse é o tópico central que será discutido neste trabalho.

MISGUICH *et al.*, 1987 consideraram a difusão absoluta e relativa de partículas carregadas em um magnetoplasma com um campo eletrostático turbulento. Os autores não incluíram a dinâmica paralela; a análise é restrita ao plano perpendicular ao campo magnético, onde as flutuações de campo elétrico são admitidas isotrópicas. São obtidos resultados explícitos para a difusão não linear de partículas-teste, representadas pelos seus centro-guias, em um espectro em energia turbulento em k_{\perp}^{-1} e k_{\perp}^{-3} , que corresponde a medidas no tokamak TFR. Como esperado, é obtido para turbulência congelada (limite de frequências muito baixas) um escalonamento de Bohm para o coeficiente de difusão absoluta. O importante problema da difusão relativa de partículas carregadas é também considerado; a solução obtida claramente exhibe o efeito “clump”, *i.e.*, o abrandamento inicial do movimento relativo, seguido de uma expansão exponencial rápida da nuvem de partículas até o estágio final no qual as partículas ficam não correlacionadas, e a difusão Browniana é alcançada assintoticamente. As simulações numéricas (PETTINI *et al.*, 1988) confirmam essas conclusões.

Neste trabalho consideramos os efeitos do movimento paralelo na difusão de centros-

guia de partículas carregadas em um campo magnético constante, uniforme e intenso, na presença de turbulência eletrostática, que é admitida homogênea, estacionária e isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético.

Este texto se apresenta organizado da seguinte forma: na seção 2.1 introduzimos a notação; na seção 2.2 deduzimos uma expressão para um coeficiente de difusão global calculado para tempo finito em termos da autocorrelação de velocidades Lagrangianas flutuantes; na seção 2.3 calculamos essa autocorrelação, que é vista ser um tensor diagonal, utilizando a hipótese de Corssin, a expansão em cumulantes até segunda ordem, e a isotropia no plano perpendicular. Obtemos duas equações não lineares acopladas representando a autocorrelação de velocidades Lagrangianas flutuantes. Em particular, observamos que o movimento médio paralelo participa nessas equações acopladas através do campo elétrico paralelo Lagrangiano médio. Esse campo médio é calculado na seção 3 usando uma aproximação *quasi*-linear renormalizada. De maneira a proceder aos cálculos explícitos, introduzimos na seção 4 um espectro modelo analítico para turbulência eletrostática baseado em dados experimentais dos tokamaks TFR e TEXT. Esse modelo é utilizado na seção 5 para calcular o campo elétrico paralelo assintótico médio na aproximação *quasi*-linear, que é também estimado numericamente. As conclusões são apresentadas na seção 6.

2. DIFUSÃO EM TRÊS DIMENSÕES

2.1. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Consideramos a difusão de partículas carregadas em um campo magnético intenso, constante e uniforme

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}} \quad (2.1)$$

na presença de um campo eletrostático turbulento tridimensional (dependente do espaço e do tempo) associado com o potencial escalar Φ dado por

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}(t), t] = \mathbf{E}_\perp[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{E}_\parallel[\mathbf{x}(t), t] = -\nabla\Phi(\mathbf{x}(t), t) \quad , \quad (2.2)$$

onde os índices inferiores \parallel e \perp designam as direções paralela e perpendicular ao campo magnético, respectivamente (Fig. 1).

Uma vez que o campo magnético é considerado intenso (*i.e.*, as frequências de Larmor são admitidas ser muito maiores que as frequências da turbulência), a aproximação de deriva pode ser utilizada. A velocidade do centro-guia correspondente à partícula carregada imersa nos campos (2.1) e (2.2) é dada por

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_\parallel(0) + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}_\perp[\mathbf{x}(t), t] \times \mathbf{B}] + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \mathbf{E}_\parallel[\mathbf{x}(t'), t'] \quad (2.3)$$

e a posição associada do centro-guia é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') = \mathbf{x}(0) + \mathbf{v}_\parallel(0)t \\ + \frac{c}{B^2} \int_0^t dt' [\mathbf{E}_\perp[\mathbf{x}(t'), t'] \times \mathbf{B}] + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{E}_\parallel[\mathbf{x}(t''), t''] \quad . \quad (2.4) \end{aligned}$$

Essas são as equações básicas do movimento que consideraremos neste trabalho para deduzir as propriedades estatísticas de difusão.

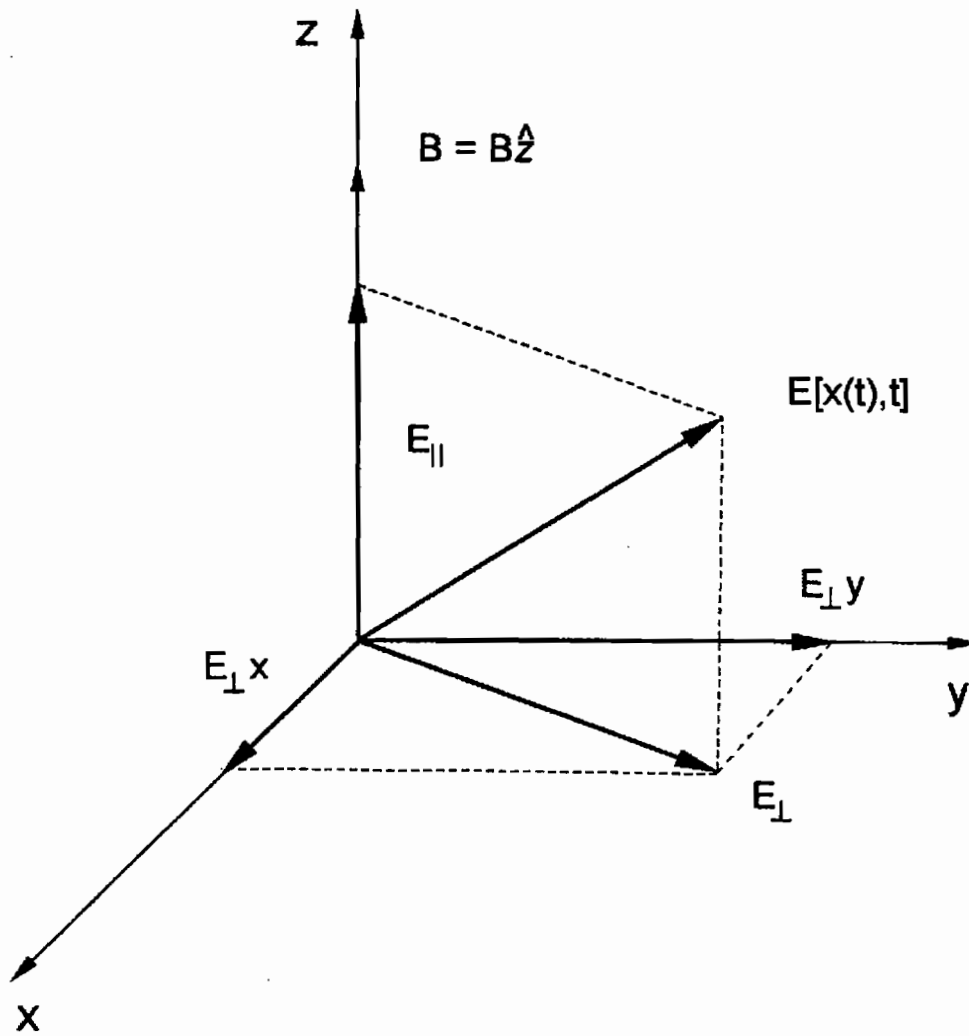


Fig. 1 — O campo magnético externo \mathbf{B} , constante e uniforme, define uma direção privilegiada no plasma. O campo elétrico Lagrangiano $\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t)$, medido no tempo t sobre a trajetória turbulenta $\mathbf{x}(t)$, envolve componentes paralela e perpendicular ao campo magnético, e pode também ser decomposto em uma parte média e uma parte flutuante.

O campo elétrico é uma quantidade flutuante com propriedades estatísticas conhecidas, feita a média sobre um *ensemble* de realizações. Estudamos aqui as propriedades de difusão de uma dada partícula com posição e velocidade iniciais¹

$$\mathbf{x}(0) = \langle \mathbf{x}(0) \rangle , \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{v}(0) = \langle \mathbf{v}(0) \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_{\parallel}(0) \rangle . \quad (2.4b)$$

Dividindo o campo elétrico Lagrangiano (2.2) em duas partes

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}(t), t] = \langle \mathbf{E}[\mathbf{x}(t), t] \rangle + \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{x}(t), t] , \quad (2.5)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa a parte média (tomada sobre um *ensemble* de realizações do campo turbulento) e o til designa a parte flutuante², definimos o espectro Euleriano de flutuações de campo elétrico como a correlação espaço-temporal entre dois valores do campo elétrico em dois pontos fixos, representado pelo tensor de ordem dois

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) \equiv \langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \rangle . \quad (2.6)$$

Uma vez que nos restringimos à turbulência homogênea e estacionária, isso significa que $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau)$ é uma quantidade independente de t e de x , e que o campo eletrostático Euleriano médio se anula:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 . \quad (2.7)$$

A transformada de Fourier-Laplace de (2.6) é definida por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) = \int_C d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \mathbf{S}_{\mathbf{k},\omega} , \quad (2.8)$$

¹Observe-se que $\langle \mathbf{v}_{\perp}(0) \rangle = 0$, consistentemente com as equações (2.3) e (2.18).

² $\langle A \rangle$ representa a parte média de uma quantidade A , e \tilde{A} a sua parte flutuante.

onde o contorno de Laplace C é uma linha horizontal (paralela ao eixo real) no plano complexo ω , e deve passar acima de todas as singularidades de $\mathbf{S}_{\mathbf{k},\omega}$. Restringimo-nos a densidades espectrais em número de onda e frequência, $\mathbf{S}_{\mathbf{k},\omega}$, que sejam funções analíticas no plano ω de tal maneira que o contorno de integração C possa ser tomado ao longo do eixo real ω . Com essa escolha de caminho de integração, daqui para a frente, a frequência ω é tomada real.

A transformada de Fourier de (2.6) para turbulência homogênea é

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\tau) &= \frac{1}{8\pi^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \mathbf{S}_{\mathbf{k},\omega} \\ &= \frac{8\pi^3}{\Omega} \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}(t - \tau) \rangle = \frac{8\pi^3}{\Omega} \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^*(t - \tau) \rangle , \end{aligned} \quad (2.9)$$

dada em termos da transformada de Fourier do campo elétrico

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{8\pi^3} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

e de

$$\mathbf{S}_{\mathbf{k},\omega} = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\tau) . \quad (2.11)$$

Em (2.9), o volume Ω do sistema comparece porque usamos uma transformada de Fourier contínua e fazemos uma média espacial usando a condição de homogeneidade.

Para turbulência eletrostática, o tensor espectro é um diádico

$$\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\tau) = \mathbf{k} \mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) , \quad (2.12)$$

onde $I_{\mathbf{k}}(\tau)$ representa, para turbulência homogênea, a autocorrelação do potencial flutuante

$$I_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{8\pi^3}{\Omega} \langle \Phi_{\mathbf{k}}(t) \Phi_{-\mathbf{k}}(t - \tau) \rangle , \quad (2.13)$$

onde

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{8\pi^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.13a)$$

é a transformada de Fourier do potencial.

Admitimos também que o potencial é isotrópico no plano perpendicular ao campo magnético externo, de acordo com observações experimentais³ (TFR Group, 1977; TFR Group e TRUC, 1984). Com essa hipótese, e para turbulência eletrostática, mostramos em um trabalho anterior (FIEDLER-FERRARA *et al.*, 1990 e Apêndice A) que a correlação de um-ponto para o campo elétrico $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ reduz-se a um tensor diagonal

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) = \int d\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) = \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} \frac{k_{\perp}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{\perp}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} I_{\mathbf{k}}(\tau) , \quad (2.14)$$

onde $I_{\mathbf{k}}(\tau)$ é dado por (2.13) e $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$.

O espectro de correlação de dois pontos de campo elétrico

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\tau) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) \quad (2.15)$$

não é, em geral, um tensor diagonal; de fato, ele tem seis elementos independentes, *i.e.*,

³Com relação à validade da descrição isotrópica perpendicularmente, deve-se notar, entretanto, que alguns experimentos usando sondas (RITZ *et al.*, 1984, 1987; ZWEBEN e GOULD, 1985; WEISEN *et al.*, 1988) mostram que, próximo da beirada do plasma, o comprimento de correlação poloidal parece ser mais longo que o comprimento de correlação radial por um fator 1,5 a 2. Nessa região de plasma frio, a simplificação acima que segue da isotropia perpendicular não vale, e o espectro completo deve ser levado em conta na descrição teórica do processo de transporte. Nesses casos, o formalismo isotrópico é válido na região principal de confinamento de plasmas em tokamaks.

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) = \left\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \right\rangle = \begin{pmatrix} S^{xx}(\mathbf{r}, \tau) & S^\Lambda(\mathbf{r}, \tau) & S^{x\parallel}(\mathbf{r}, \tau) \\ S^\Lambda(\mathbf{r}, \tau) & S^{yy}(\mathbf{r}, \tau) & S^{y\parallel}(\mathbf{r}, \tau) \\ S^{x\parallel}(\mathbf{r}, \tau) & S^{y\parallel}(\mathbf{r}, \tau) & S^{\parallel\parallel}(\mathbf{r}, \tau) \end{pmatrix} . \quad (2.15a)$$

Em particular,

$$\left\langle \tilde{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{x}, t) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \right\rangle = S^{xx}(\mathbf{r}, \tau) + S^{yy}(\mathbf{r}, \tau) = 2S_\perp(\mathbf{r}, \tau) \quad (2.16)$$

e

$$\left\langle \tilde{\mathbf{E}}_\parallel(\mathbf{x}, t) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\parallel(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \right\rangle = S^{\parallel\parallel}(\mathbf{r}, \tau) . \quad (2.17)$$

Usando a propriedade exata do anular do campo elétrico Lagrangiano médio para todos os tempos,

$$\langle \mathbf{E}_\perp[\mathbf{x}(t), t] \rangle = 0 , \quad (2.18)$$

(veja seção 3.1, eq. (3.16)), reescrevemos (2.5) como

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}(t), t] = \langle \mathbf{E}_\parallel[\mathbf{x}(t), t] \rangle + \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{x}(t), t] . \quad (2.19)$$

2.2. COEFICIENTE DE DIFUSÃO

De acordo com (2.4), o deslocamento durante o tempo t de um centro-guia inicialmente na posição $\mathbf{x}(0)$ é

$$\delta\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') . \quad (2.20)$$

A equação de difusão para o deslocamento médio quadrático (tensorial) pode então ser derivada como segue:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i(t) \delta \mathbf{x}_j(t) = [1 + P(ij)] \delta \mathbf{x}_i(t) \frac{d \delta \mathbf{x}_j(t)}{dt} = [1 + P(ij)] \int_0^t dt' \mathbf{v}_i(t) \mathbf{v}_j(t') \quad , \quad (2.21)$$

onde o operador de permutação $P(ij)$ age sobre os índices tensoriais. Fazendo a média em ambos os lados, obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \mathbf{x}_i(t) \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle = [1 + P(ij)] \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}_i(t) \mathbf{v}_j(t - \tau) \rangle \quad . \quad (2.22)$$

Usando as decomposições

$$\delta \mathbf{x}(t) = \langle \delta \mathbf{x}(t) \rangle + \widetilde{\delta \mathbf{x}}(t) \quad , \quad (2.23)$$

$$\mathbf{v}(t) = \langle \mathbf{v}(t) \rangle + \widetilde{\mathbf{v}}(t) \quad , \quad (2.24)$$

dividimos (2.22) em duas partes por meio de⁴

$$\langle \delta \mathbf{x}_i(t) \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle = \langle \widetilde{\delta \mathbf{x}}_i(t) \widetilde{\delta \mathbf{x}}_j(t) \rangle + \langle \delta \mathbf{x}_i(t) \rangle \langle \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle \quad (2.25)$$

e obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle \widetilde{\delta \mathbf{x}}_i(t) \widetilde{\delta \mathbf{x}}_j(t) \rangle = [1 + P(ij)] \int_0^t d\tau \langle \widetilde{\mathbf{v}}_i(t) \widetilde{\mathbf{v}}_j(t - \tau) \rangle \quad , \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \mathbf{x}_i(t) \rangle \langle \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle = [1 + P(ij)] \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}_i(t) \rangle \langle \mathbf{v}_j(t - \tau) \rangle \quad , \quad (2.27)$$

com

$$\widetilde{\mathbf{v}}(t) = \frac{c}{B^2} \widetilde{\mathbf{E}}_{\perp}[\mathbf{x}(t), t] \times \mathbf{B} + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \widetilde{\mathbf{E}}_{\parallel}[\mathbf{x}(t'), t'] \quad (2.28)$$

⁴Aqui usamos o fato que $\langle \widetilde{\mathbf{A}} \rangle = 0$.

e, usando (2.18)

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_{\parallel}(t) \rangle = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t'), t'] \rangle . \quad (2.29)$$

Definimos o tensor de difusão calculado para tempos finitos (*“running” diffusion tensor*) $\mathbf{D}(t)$ através de (2.26), i.e.

$$\mathbf{D}_{ij}(t) = \frac{d}{dt} \langle \widetilde{\delta \mathbf{x}_i}(t) \widetilde{\delta \mathbf{x}_j}(t) \rangle = [1 + P(ij)] \int_0^t d\tau \widetilde{\mathbf{C}}_{ij}(t, t - \tau) , \quad (2.30)$$

onde

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{ij}(t, t - \tau) = \langle \widetilde{\mathbf{v}}_i(t) \widetilde{\mathbf{v}}_j(t - \tau) \rangle \quad (2.31)$$

é a autocorrelação tensorial da velocidade Lagrangiana flutuante. Usando (2.30) na derivada em relação ao tempo de (2.25) e integrando no tempo, obtemos

$$\langle \delta \mathbf{x}_i(t) \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle = \langle \delta \mathbf{x}_i(t) \rangle \langle \delta \mathbf{x}_j(t) \rangle + \int_0^t dt' \mathbf{D}_{ij}(t') , \quad (2.32)$$

onde $\langle \delta \mathbf{x}(t) \rangle$ representa o deslocamento médio devido ao campo elétrico paralelo médio e à velocidade inicial, e onde o último termo no lado direito dá conta do movimento difusivo devido ao campo flutuante.

O coeficiente de difusão é usualmente definido, nos casos simples em que a autocorrelação da velocidade em (2.30) tende a zero depois de um tempo característico da ordem do tempo de correlação (Lagrangiano), como o valor de patamar da integral dessa autocorrelação. Para turbulência isotrópica no plano (x, y) perpendicular ao campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ com $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{z}}$, o tensor $\widetilde{\mathbf{C}}(t, t - \tau)$ é diagonal (veja próxima seção) e o fator $[1 + P(ij)]$ reduz-se a um fator 2. Nesse caso podemos definir, a partir de (2.30), um coeficiente de difusão global escalar calculado para tempo finito (*“running” diffusion coefficient*)

$$D(t) = \mathbf{D}(t) : \mathbf{1} = 2 \int_0^t d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(t - \tau) \rangle = 2D_{\perp}(t) + D_{\parallel}(t) \quad (2.33)$$

em termos de dois coeficientes de difusão calculados para tempo finito: um na direção paralela

$$D_{\parallel}(t) = \mathbf{D}(t) : \mathbf{b} \mathbf{b} = 2 \int_0^t d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}(t - \tau) \rangle , \quad (2.33a)$$

e outro na direção perpendicular

$$2D_{\perp}(t) = \mathbf{D}(t) : [\mathbf{1} - \mathbf{b} \mathbf{b}] = 2 \int_0^t d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t - \tau) \rangle , \quad (2.33b)$$

respectivamente, *i. e.*,

$$\mathbf{D}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} D_{\perp}(t) & 0 & 0 \\ 0 & D_{\perp}(t) & 0 \\ 0 & 0 & D_{\parallel}(t) \end{pmatrix} , \quad (2.33c)$$

onde

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} . \quad (2.33d)$$

A existência de coeficientes de difusão assintóticos (no limite para t tendendo ao infinito) depende, obviamente, do decrescimento do integrando de Green-Kubo na eq. (2.33) para tempos longos: a função de autocorrelação da velocidade Lagrangiana flutuante deve ir a zero suficientemente rápido de tal forma que o coeficiente de difusão calculado para tempo finito atinja um valor de patamar. Nesse caso, os dois coeficientes de difusão são obtidos na forma⁵

⁵Para o problema em duas dimensões, perpendicular ao campo magnético, recupera-se a definição $D = 2D_{\perp} = 2 \int_0^{\infty} d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t - \tau) \rangle$, como dado na eq. (5) em (MISGUICH *et al.*, 1987).

$$D_{\parallel} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{\parallel}(t) = 2 \int_0^{\infty} d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}(t - \tau) \rangle , \quad (2.33c)$$

$$D_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{\perp}(t) = \int_0^{\infty} d\tau \langle \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}(t - \tau) \rangle . \quad (2.33d)$$

2.3. AUTOCORRELAÇÃO DE VELOCIDADES LAGRANGIANAS

Calculamos agora a autocorrelação tensorial da velocidade Lagrangiana

$$\mathbf{C}(t, t - \tau) = \langle \mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t - \tau) \rangle = \tilde{\mathbf{C}}(t, t - \tau) + \langle \mathbf{v}(t) \rangle \langle \mathbf{v}(t - \tau) \rangle \quad (2.34)$$

usando uma aproximação *quasi*-linear renormalizada. Estaremos especialmente interessados na autocorrelação de velocidades flutuantes

$$\tilde{\mathbf{C}}(t, t - \tau) = \langle \tilde{\mathbf{v}}(t) \tilde{\mathbf{v}}(t - \tau) \rangle , \quad (2.34a)$$

uma vez que o coeficiente de difusão global escalar calculado para tempo finito (eq. (2.33)) depende dessa quantidade.

Procedemos da seguinte maneira:

(a) Na expressão (2.3) para a velocidade do centro-guia, introduzimos a transformada de Fourier do campo elétrico

$$\mathbf{E}_{\perp}[\mathbf{x}(t), t] = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) , \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t), t] = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) , \quad (2.35b)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é a posição do centro-guia, dada por (2.4). Como consequência de (2.7), $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$ é uma quantidade puramente flutuante, com média nula: $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0$. Obtemos

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{c}{B^2} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} [\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \times \mathbf{B}] + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t')} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t') , \quad (2.36)$$

que é uma equação de Langevin não-linear para $\mathbf{x}(t)$.

(b) Separamos essa velocidade em uma parte média e uma parte flutuante, tanto para a componente paralela como para a componente perpendicular ao campo magnético. Introduzimos aqui o operador de média P , o qual procede à média de *ensemble* em tudo que está à sua direita, *i.e.*,

$$Pf = \tilde{f} = \langle f \rangle .$$

O projetor complementar

$$Q \equiv 1 - P$$

toma a parte flutuante de tudo que se encontra à sua direita⁶

$$Qf = \tilde{f} = f - \bar{f} .$$

A parte média da velocidade (2.36) é

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}(t) \rangle &= \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{c}{B^2} \int d\mathbf{k} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \rangle \times \mathbf{B} + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t')} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t') \rangle \\ &= \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{c}{B^2} \langle \mathbf{E}_{\perp}[\mathbf{x}(t), t] \rangle \times \mathbf{B} + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t'), t'] \rangle . \end{aligned} \quad (2.36a)$$

Retornaremos ao cálculo preciso do campo elétrico Lagrangiano médio $\langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t), t] \rangle$ na Seção 3. A parte flutuante da velocidade (2.36) envolve

⁶Para a parte flutuante de um produto tem-se o resultado usual $Qfg = fg - \langle fg \rangle = \tilde{f}\tilde{g} + \bar{f}\tilde{g} + \tilde{f}\bar{g} - \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle \equiv \tilde{f}\tilde{g} + \bar{f}\tilde{g} + Q\tilde{f}\tilde{g}$. Por exemplo, com $g \equiv \tilde{E}$ tem-se $Qf\tilde{E} = \bar{f}\tilde{E} + Q\tilde{f}\tilde{E} = \bar{f}\tilde{E} + \tilde{f}\tilde{E}$.

$$\tilde{\mathbf{v}}^\perp(t) = -\frac{c}{B} \mathbf{b} \times \int d\mathbf{k} Q e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\perp(t) , \quad (2.36b)$$

e

$$\tilde{\mathbf{v}}^\parallel(t) = \frac{q}{m} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} Q e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t')} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\parallel(t') , \quad (2.36c)$$

onde o projetor Q toma a parte flutuante do que se encontra à sua direita.

(c) Substituímos agora o resultado (2.36) em (2.34) para obter uma expressão para $\mathbf{C}(t, t - \tau)$. De maneira a levar em conta a homogeneidade da turbulência, fazemos a média da autocorrelação com relação à posição inicial $\mathbf{x}(0)$ sobre todo o espaço Ω .

Obtemos⁷

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{8\pi^3} \mathbf{C}(t, t - \tau) = & \\ & -\frac{c^2}{B^2} \int d\mathbf{k} \langle [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\perp(t)] [\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^\perp(t - \tau) \times \mathbf{b}] e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}(t, t - \tau)} \rangle \\ & + \frac{cq}{Bm} \int_0^{t-\tau} dt' \int d\mathbf{k} \langle [\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\perp(t) \times \mathbf{b}] \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^\parallel(t') e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}(t, t')} \rangle \\ & + \frac{cq}{Bm} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\parallel(t') [\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^\perp(t - \tau) \times \mathbf{b}] e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}(t', t - \tau)} \rangle \\ & + \frac{q^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^{t-\tau} dt'' \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\parallel(t') \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^\parallel(t'') e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}(t', t'')} \rangle + \mathbf{v}_\parallel(0) \mathbf{v}_\parallel(0) , \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde o deslocamento entre dois tempos t_1 e t_2 é indicado por

$$\Delta\mathbf{x}(t_1, t_2) \equiv \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2) . \quad (2.38)$$

⁷Para turbulência homogênea, quantidades médias não dependem da posição inicial do centro-guia. Em $\mathbf{C}(t, t - \tau)$, depois de feita a média espacial usando a condição de homogeneidade, os termos que contém $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\perp$ ou $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\parallel$ apenas uma vez (como, por exemplo, $\frac{c}{B^2} \mathbf{v}_\parallel(0) \int d\mathbf{k} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\parallel(t) \rangle$) anulam-se. Com efeito, a média introduz um fator $8\pi^3/\Omega \delta\mathbf{k}$ na integral, cujo integrando conterá $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}=0}^\perp(t) \rangle = 0$ ou $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}=0}^\parallel(t) \rangle = 0$, conforme (2.7) e (2.10).

(d) O resultado exato (2.37) é ainda equivalente à equação de Langevin não-linear (2.36), *i.e.*, a uma hierarquia infinita para os *momenta*. De maneira a obter uma aproximação que seja tratável, separamos a média em (2.37) em $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \rangle$ e a média da exponencial⁸. Nessa última média usamos a expansão em cumulantes até segunda ordem, desprezando cumulantes de ordem superior⁹ *i.e.*,

$$\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}(t_1,t_2)} \rangle \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\mathbf{x}(t_1,t_2)\rangle} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t_1,t_2)\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t_1,t_2)\rangle\cdot\mathbf{k}} , \quad (2.39)$$

onde $\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$ é a parte flutuante do deslocamento (2.38). Depois de proceder a esses dois passos, obtemos, a partir de (2.37),

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{8\pi^3} \tilde{\mathbf{C}}(t, t - \tau) = & \\ & - \frac{c^2}{B^2} \int d\mathbf{k} \mathbf{b} \times \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^{\perp}(t - \tau) \rangle \times \mathbf{b} e^{i\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\mathbf{x}(t, t-\tau)\rangle} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t-\tau)\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t-\tau)\rangle\cdot\mathbf{k}} \\ & - \frac{cq}{Bm} \int_0^{t-\tau} dt' \int d\mathbf{k} \mathbf{b} \times \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^{\parallel}(t') \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\mathbf{x}(t, t')\rangle} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t')\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t')\rangle\cdot\mathbf{k}} \\ & + \frac{cq}{Bm} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t') \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^{\perp}(t - \tau) \rangle \times \mathbf{b} e^{i\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\mathbf{x}(t', t-\tau)\rangle} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t', t-\tau)\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t', t-\tau)\rangle\cdot\mathbf{k}} \\ & + \frac{q^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^{t-\tau} dt'' \int d\mathbf{k} \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t') \tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^{\parallel}(t'') \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\mathbf{x}(t, t'')\rangle} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\langle\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t'')\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t, t'')\rangle\cdot\mathbf{k}} , \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde utilizou-se (2.34), (3.16) e, por definição de média, $\langle \tilde{A} \rangle = 0$ para qualquer quantidade A . Nessa expressão, o movimento médio incluído no primeiro cumulante é dado por (consistentemente com (2.38) e (2.3))

⁸Essa aproximação do tipo Gaussiano foi também utilizada no problema em duas dimensões por MISGUICH *et al.* (1987). Em turbulência atmosférica essa aproximação é conhecida como a hipótese de CORSSIN (1959).

⁹Isso é equivalente à bem conhecida aproximação de Dupree-Weinstock (DUPREE, 1966; WEINSTOCK, 1969; MISGUICH/BALESCU, 1975, 1982), que corresponde a truncar a hierarquia infinita.

$$\langle \Delta \mathbf{x}(t_1, t_2) \rangle = \int_{t_2}^{t_1} dt' \langle \mathbf{v}(t') \rangle , \quad (2.41)$$

com (utilizando (2.36) e (2.18))

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_{\parallel}(t) \rangle = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{q}{m} \int_0^t dt' \langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t'), t'] \rangle , \quad (2.42)$$

e o segundo cumulante, que inclui o movimento difusivo, é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \langle \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t_1, t_2) \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t_1, t_2) \rangle \cdot \mathbf{k} &= \\ &= \mathbf{k} \cdot \left\langle \int_{t-t_1}^{t-t_2} d\theta \tilde{\mathbf{v}}(t-\theta) \int_{t-t_1}^{t-t_2} d\theta' \tilde{\mathbf{v}}(t-\theta') \right\rangle \cdot \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{k} \cdot \int_{t-t_1}^{t-t_2} d\tau' \int_0^{t-t_2-\tau'} d\theta \langle \tilde{\mathbf{v}}(t-\tau') \tilde{\mathbf{v}}(t-\tau'-\theta) \rangle \cdot \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{k} \cdot \int_{t-t_1}^{t-t_2} d\tau' \int_0^{t-t_2-\tau'} d\theta \tilde{\mathbf{C}}(t-\tau', t-\tau'-\theta) \cdot \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\langle v_{\parallel}(t) \rangle$ é dada por (2.42), e utilizou-se (3.16).

Agora identificamos em (2.40) o espectro em vetor de onda (2.9) das flutuações.

Usando (2.44) e a expressão diática (2.12) em (2.40) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}(t, t-\tau) &= + \frac{c^2}{B^2} \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} k_y^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times I_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t, t-\tau) \rangle} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \langle \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t, t-\tau) \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t, t-\tau) \rangle \cdot \mathbf{k}} \\ &\quad + \frac{cq}{Bm} \int_0^{t-\tau} dt' \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_y k_{\parallel} \\ 0 & 0 & -k_x k_{\parallel} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times I_{\mathbf{k}}(t-t') e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t, t') \rangle} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \langle \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t, t') \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t, t') \rangle \cdot \mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{cq}{Bm} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_y k_{\parallel} & -k_x k_{\parallel} & 0 \end{pmatrix} \\
& \quad \times I_{\mathbf{k}}(t' - (t - \tau)) e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t', t - \tau) \rangle} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \langle \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t', t - \tau) \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t', t - \tau) \rangle \cdot \mathbf{k}} \\
& + \frac{q^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^{t-\tau} dt'' \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \\
& \quad \times I_{\mathbf{k}}(t' - t'') e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t', t'') \rangle} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \langle \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t', t'') \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t', t'') \rangle \cdot \mathbf{k}} . \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Essa autocorrelação de velocidades Lagrangianas tem, em geral, componentes não nulas fora da diagonal. Podemos, entretanto, usar a isotropia do problema no plano perpendicular ao campo magnético para simplificar esse resultado colocando-o em uma forma diagonal. Sabemos, obviamente, que o espectro de correlação a dois-pontos das flutuações do campo elétrico (eq. (2.15)) não é diagonal, mas a isotropia das flutuações (a um-ponto) permite-nos considerar que o movimento médio $\langle \Delta \mathbf{x}(t, t'') \rangle$ bem como o movimento difusivo $\langle \Delta \mathbf{x}(t', t'') \Delta \mathbf{x}(t', t'') \rangle$ são isotrópicos perpendicularmente a \mathbf{B} . Conseqüentemente, a parte real dos expoentes em (2.44) não depende do ângulo polar φ do vetor $\mathbf{k} \equiv \{k_{\perp} \cos \varphi, k_{\perp} \sin \varphi, k_{\parallel}\}$.

Como a função $I_{\mathbf{k}}(\tau)$ é também isotrópica (veja FIEDLER-FERRARA *et al.*, 1990), *i.e.*

$$\begin{cases} \text{Re } I_{\mathbf{k}}(\tau) = \text{par em } k_{\perp}, k_{\parallel}, \mathbf{k} \text{ e em } \tau, \\ \text{Im } I_{\mathbf{k}}(\tau) = \text{par em } k_{\perp}, \text{ ímpar em } k_{\parallel}, \mathbf{k} \text{ e em } \tau, \end{cases} \quad (2.45)$$

ela também não depende desse ângulo φ , e podemos provar que os elementos não diagonais em (2.44) anulam-se após integração sobre o ângulo polar φ : $\int d\mathbf{k} k_x k_y I(k_{\perp}^2) = 0$.

Além disso, encontramos também que $\tilde{C}_{xx} = \tilde{C}_{yy}$, uma vez que $\int d\mathbf{k} k_x^2 I(k_\perp^2) = \int d\mathbf{k} k_y^2 I(k_\perp^2)$. Obtemos, finalmente, para a autocorrelação das velocidades flutuantes Lagrangianas o tensor diagonal

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}(t, t-\tau) &= \tilde{C}^\perp(t, t-\tau) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}^\parallel(t, t-\tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \tilde{C}^\perp(\mathbf{1} - \mathbf{bb}) + \tilde{C}^\parallel \mathbf{bb} \quad , \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\perp(t, t-\tau) &= \frac{c^2}{2B^2} \int d\mathbf{k} k_\perp^2 I_{\mathbf{k}}(\tau) \cos[\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t, t-\tau) \rangle] \\ &\times e^{-\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau-\tau'} d\theta [k_\perp^2 \tilde{C}^\perp(t-\tau', t-\tau'-\theta) + k_\parallel^2 \tilde{C}^\parallel(t-\tau', t-\tau'-\theta)]} \quad , \end{aligned} \quad (2.47a)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\parallel(t, t-\tau) &= \left[\frac{q}{m} \right]^2 \int_0^t dt' \int_0^{t-\tau} dt'' \int d\mathbf{k} k_\parallel^2 I_{\mathbf{k}}(t'-t'') \cos[\mathbf{k} \cdot \langle \Delta \mathbf{x}(t', t'') \rangle] \\ &\times e^{-\int_{t-t'}^{t-t''} d\tau' \int_0^{t-t''-\tau'} d\theta [k_\perp^2 \tilde{C}^\perp(t-\tau', t-\tau'-\theta) + k_\parallel^2 \tilde{C}^\parallel(t-\tau', t-\tau'-\theta)]} \quad . \end{aligned} \quad (2.47b)$$

Nessas expressões, o movimento médio paralelo¹⁰ comparece em $\langle \Delta \mathbf{x}(t, t-\tau) \rangle$ (veja Eqs. (2.41) e (2.42)).

Em conexão com (2.33), podemos definir a partir de (2.46) uma autocorrelação escalar de velocidades flutuantes Lagrangianas

$$\tilde{C}(t, t-\tau) = \langle \tilde{\mathbf{v}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(t-\tau) \rangle = \tilde{C}(t, t-\tau) : \mathbf{1} = 2\tilde{C}^\perp(t, t-\tau) + \tilde{C}^\parallel(t, t-\tau). \quad (2.48)$$

¹⁰O movimento médio perpendicular se anula porque $\langle \mathbf{E}_\perp[\mathbf{x}(t), t] \rangle = 0$ (veja Seção 3.1).

Em um trabalho anterior, já citado na Introdução, MISGUICH *et al.* (1987) derivaram, para difusão absoluta na ausência de flutuações elétricas paralelas, uma versão bidimensional das Eqs. (2.46)–(2.47), restringindo o movimento de centro-guia ao plano perpendicular ao campo magnético constante. Nesse caso $\tilde{C}_{\parallel}(t, t - \tau) = 0$ e, como conseqüência de (2.18), $\langle \Delta \mathbf{x}(t, t - \tau) \rangle = 0$, resultando em uma equação diferencial de segunda ordem não-linear simples para o deslocamento quadrático médio, descrevendo a transição contínua do regime de difusão *quasi*-linear para um regime de difusão de Bohm.

As equações não-lineares acopladas aqui obtidas (Eqs. (2.47)) são bastante mais complicadas do que a versão bidimensional prévia; elas incluem a dinâmica paralela, *i.e.*, os efeitos do movimento paralelo médio que segue do fato de que existe um campo elétrico paralelo Lagrangiano médio não-nulo. Nesse sentido, o sistema de equações não é completo: uma equação para $\langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t), t] \rangle$ é necessária. Isso é apresentado na próxima seção.

3. CAMPO ELÉTRICO LAGRANGIANO MÉDIO

Mesmo quando o plasma turbulento não inclui um campo elétrico sistemático, *i.e.*, quando o campo elétrico em um dado ponto \mathbf{x} anula-se quando feita a média sobre um *ensemble* de realizações ($\langle \mathbf{E}[\mathbf{x}, t] \rangle = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0$), mostraremos que o campo elétrico Lagrangiano (*i.e.*, em um ponto movendo-se no tempo ao longo da trajetória exata da partícula) não se anula em média. Calculamos aqui

$$\langle \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t), t] \rangle = \int d\mathbf{k} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \rangle . \quad (3.1)$$

Introduzimos a seguinte notação para a aceleração paralela média do centro-guia:

$$\mathbf{a}^{\parallel}(t) \equiv \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\parallel}[\mathbf{x}(t), t] , \quad (3.2a)$$

e para a velocidade perpendicular associada:

$$\mathbf{v}^{\perp}(t) \equiv \frac{c}{B^2} \mathbf{E}_{\perp}[\mathbf{x}(t), t] \times \mathbf{B} . \quad (3.2b)$$

Ambas as quantidades Lagrangianas são representadas pelas variáveis

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{a}^{\parallel}(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}^{\perp}(t) , \quad (3.2c)$$

e a dependência relativamente à trajetória é escrita em transformada de Fourier como

$$\langle \mathbf{h}(t) \rangle = \int d\mathbf{k} \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \rangle . \quad (3.3)$$

Essa quantidade envolve todas as correlações entre o campo flutuante $\tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}$ e a trajetória turbulenta $\mathbf{x}(t)$. Uma expressão explícita só pode ser obtida de forma aproximada.

3.1. APROXIMAÇÃO QUASI-LINEAR RENORMALIZADA

Essa aproximação já foi utilizada para calcular a média da exponencial (2.39) como uma aproximação em segundo cumulante (ver nota de rodapé 9). Aqui, em (3.3), devemos calcular a correlação entre um campo e a exponencial de uma trajetória. Ao invés de simplesmente linearizar a exponencial, propomos aqui usar também uma aproximação renormalizada para calcular essa quantidade no plasma turbulento. Coerentemente com VAN KAMPEN (1981) a seguinte expansão pode ser usada:

$$\langle e^A B \rangle = \langle e^A \rangle \left\{ \langle B \rangle + \langle\langle AB \rangle\rangle + \frac{1}{2!} \langle\langle A^2 B \rangle\rangle + \frac{1}{3!} \langle\langle A^3 B \rangle\rangle + \dots \right\}, \quad (3.4)$$

onde o duplo colchete representa a correlação das flutuações:

$$\langle\langle \alpha \beta \rangle\rangle = \langle \alpha \beta \rangle - \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle \equiv \langle \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \rangle. \quad (3.4a)$$

Até segunda ordem, e usando o fato de que $\langle \mathbf{h}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0$ (campo Euleriano médio nulo: veja (2.7)), e a expansão em cumulantes até segunda ordem (2.39), podemos escrever a média em (3.3) como

$$\begin{aligned} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)} \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \rangle &= \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)} \rangle \left\{ \langle i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \rangle + \dots \right\} \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x}(t) \rangle} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \langle \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}(t) \rangle \cdot \mathbf{k}} \left\{ \langle i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \rangle + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aqui, a posição do centro-guia $\mathbf{x}(t)$ dada por (2.4) foi decomposta, como usual, em suas partes média e flutuante:

$$\mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.6)$$

com

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}(0) + \mathbf{v}_{\parallel}(0) t + \int_0^t dt' \left\{ (t-t') \langle a^{\parallel}(t') \rangle + \langle \mathbf{v}^{\perp}(t') \rangle \right\}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \int_0^t dt' \left\{ (t-t') \tilde{\mathbf{a}}^{\parallel}(t') + \tilde{\mathbf{v}}^{\perp}(t') \right\} . \quad (3.8)$$

O primeiro fator em $\langle \mathbf{x} \rangle$ em (3.5) leva em conta o movimento médio, e o segundo, em $\langle \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \rangle$, o acoplamento com a difusão espacial.

De maneira a obter uma primeira aproximação para o campo elétrico Lagrangiano médio, desprezamos neste trabalho o acoplamento com o processo difusivo. Deixamos para um trabalho futuro o estudo do sistema acoplado completo.

Fazemos portanto a aproximação de desprezar $\langle \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \rangle$ em (3.5), e substituímos em (3.3) para obter

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{h}(t) \rangle &= i \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x}(t) \rangle} \int_0^t dt' \left\{ (t-t') \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}^{\parallel}(t') \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{\perp}(t') \tilde{\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}(t) \right\rangle \right\} + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora substituímos \mathbf{h} em (3.9) por \mathbf{a}^{\parallel} ou \mathbf{v}^{\perp} , de acordo com (3.2a). Depois de introduzir a transformada de Fourier dessas quantidades no lado direito de (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= i \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x}(t) \rangle} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}' \left\{ (t-t') \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}'}^{\parallel}(t') e^{i\mathbf{k}' \cdot \langle \mathbf{x}(t') \rangle} \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{\perp}(t') e^{i\mathbf{k}' \cdot \langle \mathbf{x}(t') \rangle} \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \right\rangle \right\} + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{\perp}(t) \rangle &= i \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x}(t) \rangle} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}' \left\{ (t-t') \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}'}^{\parallel}(t') e^{i\mathbf{k}' \cdot \langle \mathbf{x}(t') \rangle} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}'}^{\perp}(t') e^{i\mathbf{k}' \cdot \langle \mathbf{x}(t') \rangle} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \right\rangle \right\} + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Neste ponto, é útil levar em conta a homogeneidade da turbulência considerada: valores médios não podem depender da posição inicial $\mathbf{x}(0)$ do centro-guia (veja equações (3.7) e (3.8)). Então integramos sobre $\mathbf{x}(0)$ e realizamos uma média sobre o sistema completo de volume Ω . Usamos $\frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{x}(0) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}(0)} = \frac{8\pi^3}{\Omega} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ para obter

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= i \frac{8\pi^3}{\Omega} \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' e^{i\mathbf{k}\cdot[\langle\delta\mathbf{x}(t)\rangle - \langle\delta\mathbf{x}(t')\rangle]} \left\{ (t-t') \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^{\parallel}(t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t')} \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{k}'}^{\perp}(t') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t')} \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \right\rangle \right\} + \mathcal{O}\left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{\perp}(t) \rangle &= i \frac{8\pi^3}{\Omega} \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' e^{i\mathbf{k}\cdot[\langle\delta\mathbf{x}(t)\rangle - \langle\delta\mathbf{x}(t')\rangle]} \left\{ (t-t') \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^{\parallel}(t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t')} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{k}}^{\perp}(t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t')} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t) \right\rangle \right\} + \mathcal{O}\left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde usamos a definição (2.20) para $\delta\mathbf{x}(t)$. A exponencial de $-i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t') = -i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{x}}(t')$ dentro dos colchetes em (3.12) e (3.13) é associada com difusão: esses colchetes devem ser ainda expandidos usando as aproximações de CORSSIN e de segundo cumulante na forma

$$\langle a e^{\tilde{\mathbf{x}}} b \rangle \simeq \langle ab \rangle \langle e^{\tilde{\mathbf{x}}} \rangle \simeq \langle ab \rangle e^{-1/2\langle\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}\rangle} .$$

Uma vez que o acoplamento com o movimento difusivo (último fator) não foi levado em conta nesta Seção, nós tomamos, consistentemente, a aproximação de menor ordem

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{x}}(t')} \simeq 1 \quad (3.14)$$

em (3.12) e (3.13). O fator $e^{i\mathbf{k}\cdot[\langle\delta\mathbf{x}(t)\rangle - \langle\delta\mathbf{x}(t')\rangle]} = e^{i\mathbf{k}\cdot[\langle\mathbf{x}(t)\rangle - \langle\mathbf{x}(t')\rangle]}$ em (3.12) e (3.13) está associado com o movimento médio da partícula.

a) Campo elétrico Lagrangiano perpendicular médio

Para turbulência eletrostática (2.2) fornece

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(t) = -ik\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(t) . \quad (3.14a)$$

Então, utilizando a definição (3.2), encontramos que

$$\mathbf{k}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{-\mathbf{k}}^{\perp}(t) = \frac{c}{B^2} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \left(\tilde{\mathbf{E}}_{-\mathbf{k}}^{\perp}(t) \times \mathbf{B} \right) = \frac{ic}{B^2} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \left(\mathbf{k}_{\perp} \tilde{\Phi}_{-\mathbf{k}}(t) \times \mathbf{B} \right) = 0 \quad (3.15)$$

anula-se exatamente. Usando (3.15) em (3.13) vemos que o segundo termo no lado direito anula-se. Como antes (Seção 2.2), admitimos que o movimento médio $\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x} \rangle$ não depende do ângulo polar φ do vetor \mathbf{k} no plano perpendicular, onde as flutuações são isotrópicas. Como conseqüência, depois de integrar sobre φ , o primeiro termo no lado direito de (3.13) também se anula¹¹, e

$$\langle \mathbf{v}^{\perp}(t) \rangle = 0 \quad \implies \quad \langle \mathbf{E}_{\perp}[\mathbf{x}(t), t] \rangle = 0 . \quad (3.16)$$

Um argumento similar pode ser aplicado a termos de ordem superior em \tilde{E} . A conclusão é que o campo elétrico perpendicular Lagrangiano médio anula-se exatamente para turbulência eletrostática. Esse resultado é devido à isotropia no plano perpendicular ao campo magnético constante, em concordância com o resultado obtido por MISGUICH *et al.* (1987). Esse resultado exato simplesmente expressa o fato intuitivo de que para turbulência isotrópica perpendicular a \mathbf{B} não existe nenhuma direção privilegiada na qual um campo elétrico perpendicular médio possa aparecer ao longo da trajetória turbulenta. O mesmo não é *a priori* verdadeiro na direção paralela.

¹¹No caso geral no qual o acoplamento com a difusão é considerado, o mesmo resultado também vale, uma vez admitido que a difusão tem a mesma simetria.

b) Campo elétrico Lagrangiano paralelo médio

Usando (3.14) e (3.15) em (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= i \frac{8\pi^3}{\Omega} \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' (t-t') e^{i\mathbf{k} \cdot [\langle \delta \mathbf{x}(t) \rangle - \langle \delta \mathbf{x}(t') \rangle]} \\ &\times \left\langle \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{-\mathbf{k}}^{\parallel}(t') \tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^{\parallel}(t) \right\rangle + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando (2.20), (3.1), (3.7) e (3.8) em (3.17), após alguma álgebra, nós reescrevemos essa última equação como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= \frac{\partial^2 \chi(t)}{\partial t^2} = i \left(\frac{q}{m} \right)^2 \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' (t-t') k_{\parallel} k_{\parallel}^2 I_{\mathbf{k}}(t-t') e^{i(t-t') \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0)} \\ &\times e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\chi(t) - \chi(t')]} + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) , \end{aligned} \quad (3.18)$$

i.e., como uma equação diferencial de segunda ordem para o deslocamento paralelo turbulento médio descrito por

$$\chi(t) \equiv \langle \mathbf{x}_{\parallel}(t) \rangle - \{ \mathbf{x}_{\parallel}(0) + \mathbf{v}_{\parallel}(0) t \} = \int_0^t dt' (t-t') \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t') \rangle \quad (3.19)$$

em termos da autocorrelação $I_{\mathbf{k}}$ do potencial flutuante definido em (2.13). Usando a transformada de Laplace

$$I_{\mathbf{k}}(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} I_{\mathbf{k},\omega} \quad (3.20)$$

podemos reescrever (3.18) como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= \frac{\partial^2 \chi(t)}{\partial t^2} = i \left(\frac{q}{m} \right)^2 \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' (t-t') k_{\parallel} k_{\parallel}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\mathbf{k},\omega} e^{i(t-t') [\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} \\ &\times e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\chi(t) - \chi(t')]} + \mathcal{O} \left(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2} \right) . \end{aligned} \quad (3.21a)$$

Deve ser observado que, ao deduzirmos o resultado (3.18) ou (3.21) para a aceleração Lagrangiana paralela média, nós utilizamos uma aproximação *quasi*-linear renormalizada onde termos $\mathcal{O}(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2})$ provenientes do segundo cumulante (exponencial dos termos difusivos $\exp[-1/2 \mathbf{k} \cdot \langle \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \rangle]$) não foram incluídos, o que significa que o acoplamento com a difusão espacial não foi considerado, mas contribuições não-lineares do movimento médio, como $\exp[i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{x} \rangle]$, foram plenamente consideradas.

Observamos também uma forma alternativa desse resultado:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}(t)}{\partial t^2} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int d\mathbf{k} \int_0^t dt' k_{\parallel}^2 e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\boldsymbol{\chi}(t) - \boldsymbol{\chi}(t')]} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\mathbf{k},\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}(0)} e^{i(t-t')[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]}. \end{aligned} \quad (3.21b)$$

3.2. EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO

A derivada temporal de (3.21) é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int \mathbf{k} k_{\parallel}^2 \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\mathbf{k},\omega} \\ &\quad \times \left\{ e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\boldsymbol{\chi}(t) - \boldsymbol{\chi}(t')]} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}(0)} \left(-\frac{\partial}{\partial t'}\right) e^{i(t-t')[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}(0)} e^{i(t-t')[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\boldsymbol{\chi}(t) - \boldsymbol{\chi}(t')]} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O primeiro termo do lado direito pode ser integrado por partes em t' resultando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle &= \frac{\partial^3 \chi(t)}{\partial t^3} = \\
&= \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int d\mathbf{k} k_{\parallel}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\mathbf{k},\omega} \left\{ e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \chi(t)} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\parallel}(0)} e^{it[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} \right] \right. \\
&\quad \left. + i\mathbf{k}_{\parallel} \int_0^t dt' \left[\frac{\partial \chi(t)}{\partial t} - \frac{\partial \chi(t')}{\partial t'} \right] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot [\chi(t) - \chi(t')]} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\parallel}(0)} e^{i(t-t')[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} \right] \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.23a}$$

que é a equação de evolução para o campo elétrico Lagrangiano paralelo médio. Por (3.21b) sabemos que o seu valor inicial é zero:

$$\langle \mathbf{a}^{\parallel}(t=0) \rangle = 0 . \tag{3.23b}$$

3.3. APROXIMAÇÃO QUASI-LINEAR

A aproximação de ordem mais baixa para (3.21–3.23) é a aproximação *quasi*-linear, que consiste em desprezar os deslocamentos turbulentos nos propagadores (aqui, nas exponenciais), *i.e.*, tomar $\chi(t) = 0$ no lado direito de (3.21). Resulta

$$\langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle_{QL} = i \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int d\mathbf{k} k_{\parallel} k_{\parallel}^2 \int_0^t dt' (t-t') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\mathbf{k},\omega} e^{i(t-t')[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} . \tag{3.24}$$

Para a equação de evolução temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{a}^{\parallel}(t) \rangle_{QL} = i \left(\frac{q}{m}\right)^2 t \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} k_{\parallel} k_{\parallel}^2 I_{\mathbf{k},\omega} e^{it[\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}(0) - \omega]} . \tag{3.25}$$

4. ESPECTRO ANALÍTICO TRIDIMENSIONAL PARA TURBULÊNCIA ELETROSTÁTICA

Nesta secção apresentamos resumidamente os passos principais que nos conduzem a uma expressão analítica tratável para o espectro de flutuações de campo elétrico, o qual está em concordância com medidas feitas em plasmas de tokamaks¹².

4.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Descrevemos aqui, brevemente, os resultados experimentais que usamos para construir um espectro modelo analítico para turbulência eletrostática tridimensional (homogênea, estacionária e localmente isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético). Tal espectro modelo será utilizado nos cálculos explícitos dos resultados obtidos nas seções precedentes.

Iniciamos apresentando os resultados do tokamak TEXT (RITZ *et al.*, 1988), obtidos usando técnicas de correlação cruzada (BEALL *et al.*, 1982) com um par de sondas de Langmuir fixas, toroidalmente e poloidalmente separadas, colocadas na beirada do plasma. O experimento mostra a existência de um valor não nulo para o vetor de onda paralelo “médio” ($\langle\langle \dots \rangle\rangle$ = média espectral) da ordem de

$$\langle\langle k_{\parallel} \rangle\rangle \simeq \frac{3 \rightarrow 10}{qR}, \quad (4.1)$$

onde q é o fator de segurança e R é o raio maior. Essas medidas também indicam uma velocidade de fase paralela constante

¹²Uma versão estendida pode ser encontrada em FIEDLER-FERRARA *et al.*, 1990.

$$\frac{\omega}{k_{\parallel}} \equiv v_{\alpha} \simeq v_{th.e.} , \quad (4.2)$$

que é vista ser da ordem de $v_{th.e.}$, a velocidade térmica de elétrons. É também conhecida (WOOTTON *et al.*, 1989) que a semi-largura da parte em k_{\parallel} do espectro é

$$\Delta k_{\parallel} \simeq \langle\langle k_{\parallel} \rangle\rangle . \quad (4.3)$$

Por outro lado, no experimento no tokamak TFR, utilizando espalhamento laser CO₂ (TFR Group e TRUC, 1984; ANDREOLETTI *et al.*, 1989; OLIVAN, 1989), foram medidos espectros para flutuações de densidade para números de onda $k_x \approx k_{\perp}$ entre 3 e 39 cm⁻¹.¹³

O espectro em k_{\perp} para o TFR, integrado sobre frequências e vetores de onda paralelos¹⁴, mostra um máximo de amplitude para

$$k_{\perp}^{\max} = k_{\perp 0}^* \approx 5 \text{ cm}^{-1} , \quad (4.4)$$

com comportamento decrescente para valores maiores e menores de k_{\perp} (Fig. 2). Para $k_{\perp} < k_{\perp}^{\max}$ a precisão das medidas é pobre ($\approx k_{\perp}^{\max}$), mas para $k_{\perp} > k_{\perp}^{\max}$, observa-se um decaimento monotônico com duas leis de potência: uma, $k_{\perp}^{-2,2 \pm 0,5}$, e a outra $k_{\perp}^{-4,5}$. A primeira lei de potência é bem determinada, mas a segunda deve ser corrigida devido à finitude do volume de espalhamento (OLIVAIN, 1989): o valor verdadeiro do expoente é ligeiramente menor em valor absoluto.

Um outro resultado, obtido a partir de medidas de microturbulência, é a “pseudo” relação de dispersão correspondente ao máximo do espectro de frequências, que mostra

¹³Observe-se que $k_{\perp} \equiv |\mathbf{k}_{\perp}|$ representa o módulo do vetor de onda perpendicular.

¹⁴De fato, o raio do feixe laser introduz uma largura em $k_{\parallel} \approx 1,5 \text{ cm}^{-1}$, que é muito maior do que o valor $\Delta k_{\parallel} \approx 4,3 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ calculado para o TFR ($q = 1,5$, $R = 98 \text{ cm}$, usando as equações (4.1) e (4.3)): nesse sentido, o espectro medido é integrado sobre k_{\parallel} .

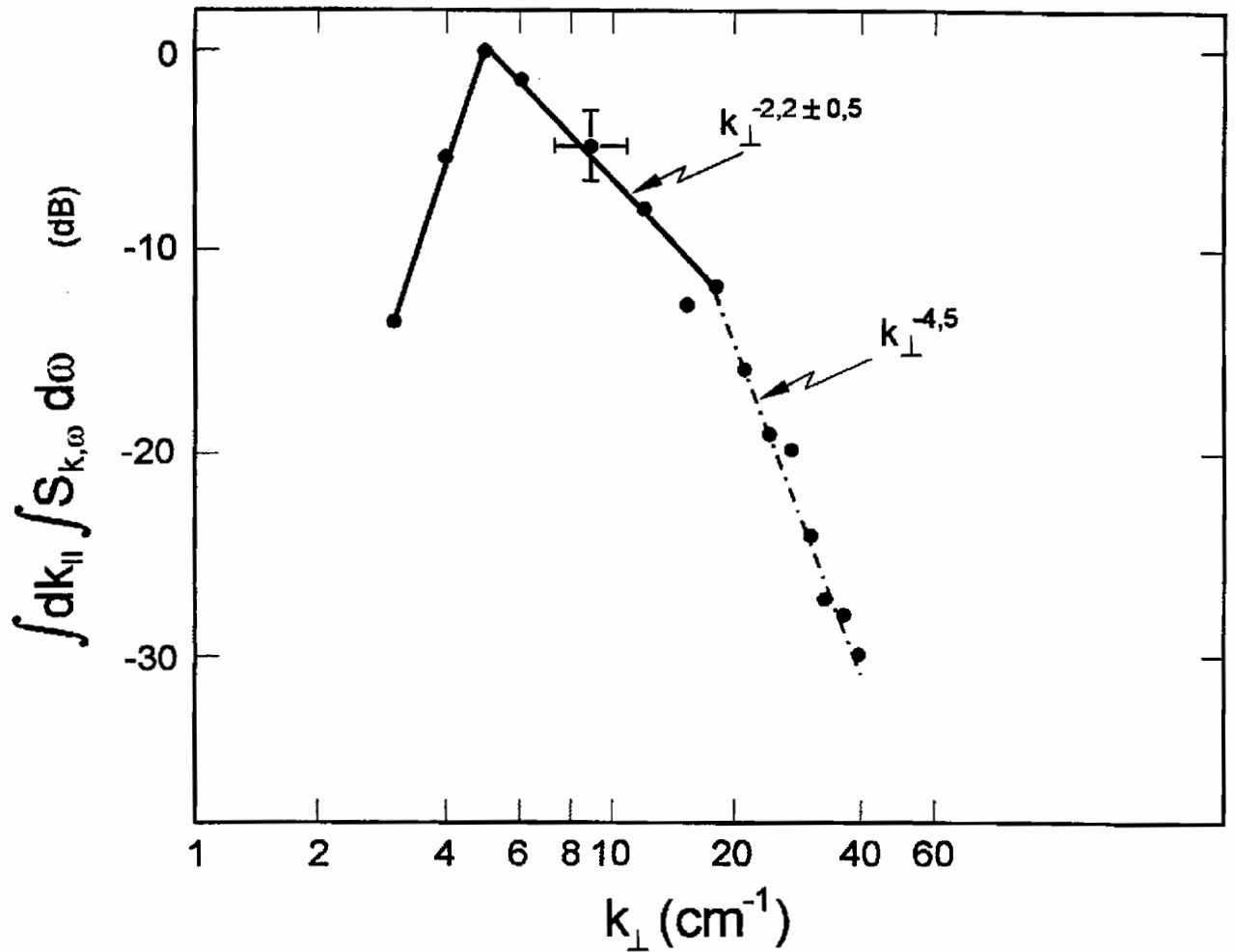


Fig. 2 — Espectro em k_{\perp} , normalizado, para o TFR. Ele é integrado sobre as frequências e sobre os vetores de onda paralelos. A amplitude apresenta um máximo em torno de $k_{\perp} = k_{\perp 0}^* = 5 \text{ cm}^{-1}$, e dois domínios em lei de potência: um com $k_{\perp}^{-2,2}$, e o outro com $k_{\perp}^{-4,5}$ (gráfico reproduzido de ANDREOLETTI *et al.*, 1989, correspondendo a densidades espectrais de energia $\varepsilon_{k_{\perp}}$ com domínios em $k_{\perp}^{-1,2}$ e $k_{\perp}^{-3,5}$).

uma velocidade de fase perpendicular constante

$$\frac{\omega}{k_{\perp}} = v_D \approx 2,3 \cdot 10^5 \text{ cm.s.}^{-1} . \quad (4.5)$$

Como mencionado antes, na Seção 2, resultados experimentais (TFR Group, 1977, e TFR Group e TRUC, 1984) confirmam a existência de um espectro de flutuações *quasi-isotrópico* no plano perpendicular ao campo magnético constante. Essas observações justificam a isotropia admitida no presente trabalho.

4.2. ESPECTRO MODELO

Um espectro modelo analítico tridimensional para turbulência eletrostática, isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético, pode ser construído a partir dos elementos apresentados nas Seções 2 e 4.1. Isotropia significa que as propriedades (2.15) e (2.44) devem ser satisfeitas pelo nosso espectro modelo. As equações (4.1) e (4.3) permitem-nos determinar a meia-largura da parte em k_{\parallel} do espectro. O ajuste apropriado do espectro experimental em k_{\perp} do TFR (Fig. 2) permite-nos modelar a parte em k_{\perp} do espectro analítico.

Outras informações necessárias relativas ao máximo das partes em ω e k_{\parallel} do espectro podem ser retiradas das equações (4.2) e (4.3). De fato, uma interpretação simples dessas “pseudo” relações de dispersão, em termos de perfis Gaussianos, pode ser proposta.

Na Fig. 3 o espectro tridimensional $S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ é representado esquematicamente para um valor fixo de k_{\perp} . De acordo com (4.2), para uma dada frequência ω , a amplitude máxima para o espectro é para $k_{\parallel} = \omega/v_{\alpha}$, e a meia-largura associada é

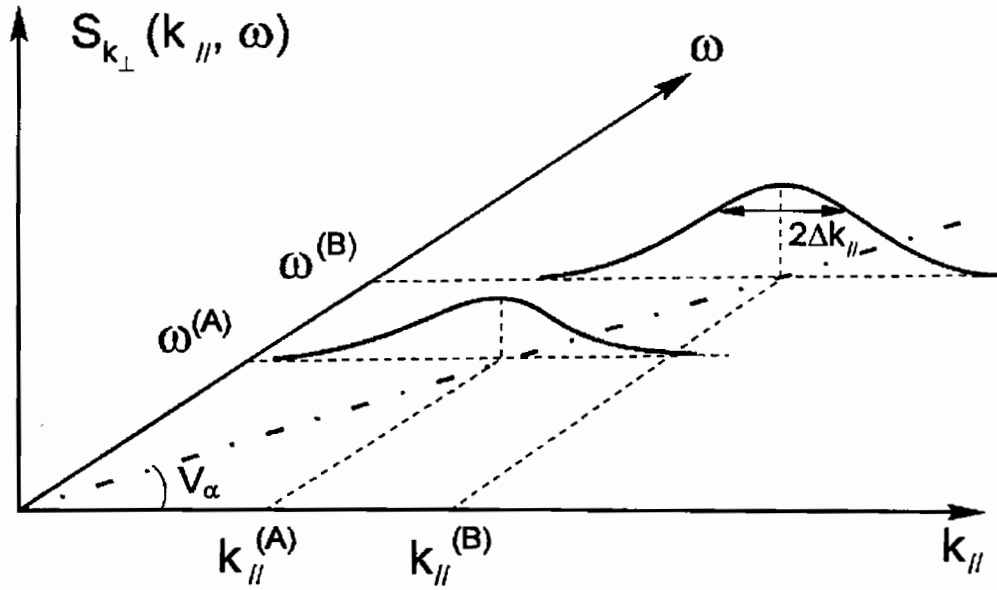


Fig. 3 — Representação esquemática do espectro tridimensional $S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ para um valor dado de k_{\perp} , como função da frequência e do vetor de onda paralelo. De acordo com a equação (4.2), para um valor dado $\omega^{(n)}$ da frequência, a amplitude máxima do espectro como função do vetor de onda paralelo é observada em $k_{\parallel}^{(n)} = \omega^{(n)}/v_{\alpha}$. A semi-largura típica (eq. (4.3)) é $\Delta k_{\parallel} \approx \langle\langle k_{\parallel} \rangle\rangle$.

$\Delta k_{\parallel} \approx \langle\langle k_{\parallel} \rangle\rangle$. Tal construção, entretanto, envolve uma velocidade de fase positiva v_{α} na direção paralela ao campo magnético, e então descreve um espectro que é construído por ondas propagando-se na direção paralela; um espectro simétrico pode também ser considerado adicionando-se uma contribuição similar com velocidade de fase paralela oposta $-v_{\alpha}$ como feito abaixo na eq. (4.9). Na Fig. 4 o espectro é representado para um valor fixo de $k_{\parallel} > 0$; a partir da eq. (4.10) deduzimos que, para um dado k_{\perp} , a amplitude máxima do espectro é obtida para $\omega = v_D k_{\perp}$ e a meia-largura é $\Delta\omega = \mathcal{O}(\omega)$.

Aqui procedemos a uma primeira aproximação em nosso espectro modelo. Consideramos uma meia-largura em ω constante dada por

$$\Delta\omega \approx \omega_0 = k_{\perp 0}^* v_D, \quad (4.6)$$

com $k_{\perp 0}$ dado por (4.4).

Consistentemente com (4.1) e (4.3), tomamos para a meia-largura em k_{\parallel}

$$\Delta k_{\parallel} \approx \frac{2\pi}{qR}. \quad (4.7)$$

Com todos esses elementos em mente, escolhemos nossa densidade espectral em vetor de onda e frequência

$$S_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{k} k I_{\mathbf{k},\omega} \quad (4.8)$$

com

$$I_{\mathbf{k},\omega} = A I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp}) \left\{ e^{-\frac{(\omega - k_{\perp} v_D s_{\parallel})^2}{2\Delta\omega^2}} e^{-\frac{(k_{\parallel} - \frac{\omega}{v_{\alpha}})^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} + \sigma e^{-\frac{(\omega + k_{\perp} v_D s_{\parallel})^2}{2\Delta\omega^2}} e^{-\frac{(k_{\parallel} + \frac{\omega}{v_{\alpha}})^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \right\}. \quad (4.9)$$

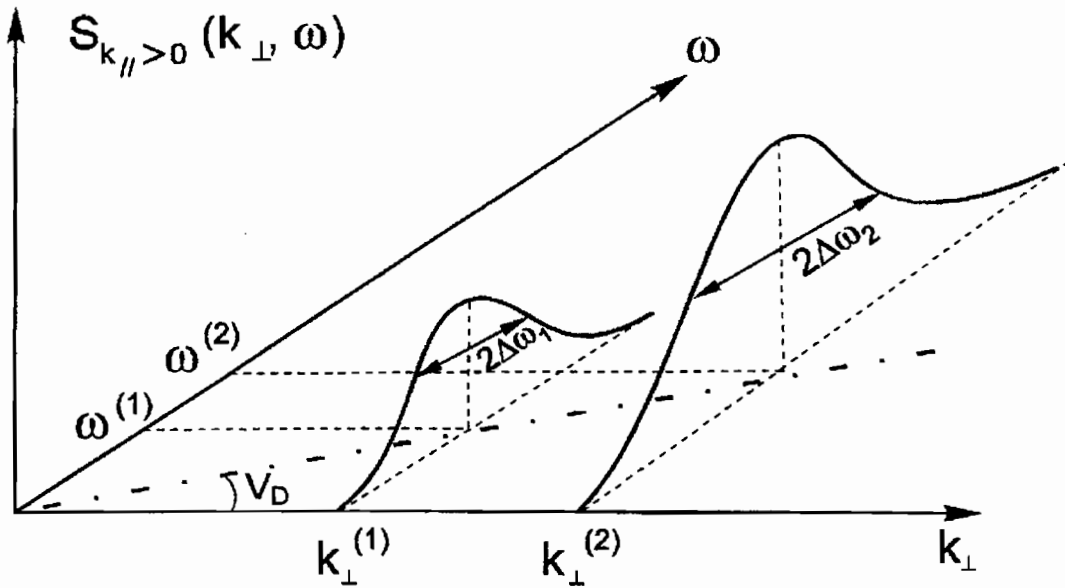


Fig. 4 — Representação esquemática do espectro tridimensional $S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ para um valor dado de $k_{\parallel} > 0$ como função da frequência e do módulo $k_{\perp} \equiv |\mathbf{k}_{\perp}|$ do vetor de onda perpendicular. De acordo com (4.5), para um valor dado $k_{\perp}^{(n)}$, a amplitude máxima do espectro como função da frequência é observada em $\omega^{(n)} = v_D k_{\perp}^{(n)}$. A semi-largura é $\Delta\omega_n = \mathcal{O}(\omega^{(n)})$.

Nessa última equação, A é um fator de amplitude (relacionado ao campo turbulento perpendicular quadrático médio, veja Seção 4.4); a parte em k_{\perp} do espectro $I_{k_{\perp}}(\mathbf{k}_{\perp 0}, \Delta \mathbf{k}_{\perp})$ será obtida mais à frente ajustando-se adequadamente o nosso espectro analítico, integrado sobre ω e k_{\parallel} , ao espectro em vetor de onda do TFR ($k_{\perp 0}$ e Δk_{\perp} são parâmetros a serem ajustados, veja Seção 4.3); $\Delta \omega$ é dado por (4.6), Δk_{\parallel} por (4.7), e o sinal de k_{\parallel}

$$s_{\parallel} \equiv \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} = \text{sign } k_{\parallel} \quad (4.10)$$

é introduzido de maneira a levar em conta a propriedade de simetria $I_{\mathbf{k}, \omega} = I_{-\mathbf{k}, \omega}$. Enfatizamos o fato que em (4.9) $k_{\perp} = |\mathbf{k}_{\perp}| > 0$ e k_{\parallel} varia de $-\infty$ a $+\infty$.

O segundo termo entre chaves em (4.9) corresponde a valores opostos das velocidades de fase $v_D s_{\parallel}$ e v_{α} : para um valor $\sigma = 0$ do parâmetro controlando esse termo, o espectro (4.9) representa ondas progressivas na direção paralela (v_D e $v_{\alpha} > 0$), enquanto que um valor $\sigma = 1$ fornece um espectro feito de ondas simétricas, portanto, um espectro simétrico na direção paralela.

Entre os vários parâmetros em (4.9), temos o seguinte ordenamento:

$$\frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \mathcal{O}(1) \ll \left(\frac{k_{\perp 0}^*}{\Delta k_{\parallel}} \right)^2 \ll \left(\frac{v_{\alpha}}{v_D} \right)^2. \quad (4.11)$$

De acordo com (2.9), a transformada inversa de Laplace de (4.8) fornece o espectro em vetor de onda dependente de τ $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\tau)$ (eq. (2.12)), com

$$I_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a_c}} I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp}) e^{-\frac{\tau^2}{a_c}} e^{-\frac{1}{a_c \Delta \omega^2 \Delta k_{\parallel}^2} (k_{\parallel} - k_{\perp} \frac{v_D}{v_{\alpha}} s_{\parallel})^2} \\ \times \left(e^{i \frac{2\tau b(k_{\perp}, k_{\parallel})}{a_c}} + \sigma e^{i \frac{2\tau b(k_{\perp}, k_{\parallel})}{a_c}} \right), \quad (4.12)$$

onde

$$a_c \equiv 2 \frac{\Delta k_{\parallel}^2 + \frac{\Delta \omega^2}{v_{\alpha}^2}}{\Delta \omega^2 \Delta k_{\parallel}^2}, \quad (4.13)$$

$$b(k_{\perp}, k_{\parallel}) \equiv -2 \left(\frac{k_{\perp} v_D s_{\parallel}}{2 \Delta \omega^2} + \frac{k_{\parallel}}{2 \Delta k_{\parallel}^2 v_{\alpha}} \right).$$

Em (4.12) observamos que o primeiro termo ($\sigma = 0$) fornece um valor complexo de $I_{\mathbf{k}}(\tau)$, correspondendo a ondas progressivas na direção paralela, enquanto que $\sigma = 1$ fornece um valor real de $I_{\mathbf{k}}(\tau)$, correspondendo a um espectro simétrico feito de ondas estacionárias. Enfatizamos que esse segundo termo origina-se de valores opostos da velocidade de fase; somente valores positivos devem ser considerados para v_D e v_{α} .

A partir da função de autocorrelação do potencial flutuante (equações (2.13) e (4.12)) vemos que o tempo característico de autocorrelação é dado por

$$\tau_c \simeq \sqrt{a_c} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta \omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \omega}{v_{\alpha} \Delta k_{\parallel}} \right)^2}. \quad (4.14)$$

como função da largura em frequência $\Delta \omega$ e da largura em k_{\parallel} .

4.3. AJUSTANDO COM O ESPECTRO EM k_{\perp} do TFR

Referimo-nos ao nosso trabalho anterior (FIEDLER-FERRARA *et al.*, 1990) para detalhes adicionais. Aqui resumimos nossas conclusões com relação ao ajuste com o aspecto em k_{\perp} do TFR dado por

$$S_{k_{\perp}}^{(2)} \simeq \begin{cases} k_{\perp}^{-2,2 \pm 0,5} & , \quad 5 \text{ cm}^{-1} \leq k_{\perp} < 20 \text{ cm}^{-1} \\ k_{\perp}^{-4,5} & , \quad k_{\perp} \geq 20 \text{ cm}^{-1} \end{cases} \quad (4.15)$$

(Fig. 2) para obter $I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp})$ em (4.9) e (4.12).

O ajuste em lei de potência k_{\perp}^{-n} para (4.15), usado em particular por MISGUICH *et al.* (1987), está de acordo com dados experimentais mas introduz ao longo dos cálculos analíticos funções exponenciais, que introduzem alguma complexidade matemática na descrição das não-linearidades. Isso pode ser evitado utilizando-se um outro ajuste adequado.

Um ajuste Gaussiano, normalizado à unidade no máximo, é genericamente representado por

$$Y_G \equiv k_{\perp}^2 I_{k_{\perp}}^G = \frac{k_{\perp}^{2p}}{x_M^{2p}} e^{p \left[1 - \left(\frac{k_{\perp}}{x_M} \right)^2 \right]} . \quad (4.16)$$

Com os seguintes valores para os parâmetros:

$$p = 2,5 \quad , \quad x_M = 6 \text{ cm}^{-1} \quad , \quad (4.17)$$

a equação (4.16) fornece uma aproximação Gaussiana aproximada para os dados do TFR (Fig. 5), a qual é, entretanto, suficiente para uma descrição simples levando em conta a ordem de magnitude correta dos principais parâmetros físicos. Tal espectro Gaussiano é particularmente adequado para cálculos analíticos com os apresentados neste trabalho. Então, nós modelamos a parte em k_{\perp} de $I_{\mathbf{k},\omega}$ (eq. (4.9)) com

$$I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp}) = g k_{\perp}^3 e^{-h k_{\perp}^2} \quad (k_{\perp} \text{ em } \text{cm}^{-1}) \quad , \quad (4.18)$$

obtido substituindo (4.17) em (4.16), com as constantes

$$g = \left(\frac{e}{x_M^2} \right)^p = \frac{e^{5/2}}{6^5} \text{ cm}^5 \quad , \quad (4.19)$$

$$h = \frac{p}{x_M^2} = \frac{5}{72} \text{ cm}^2 \quad . \quad (4.20)$$

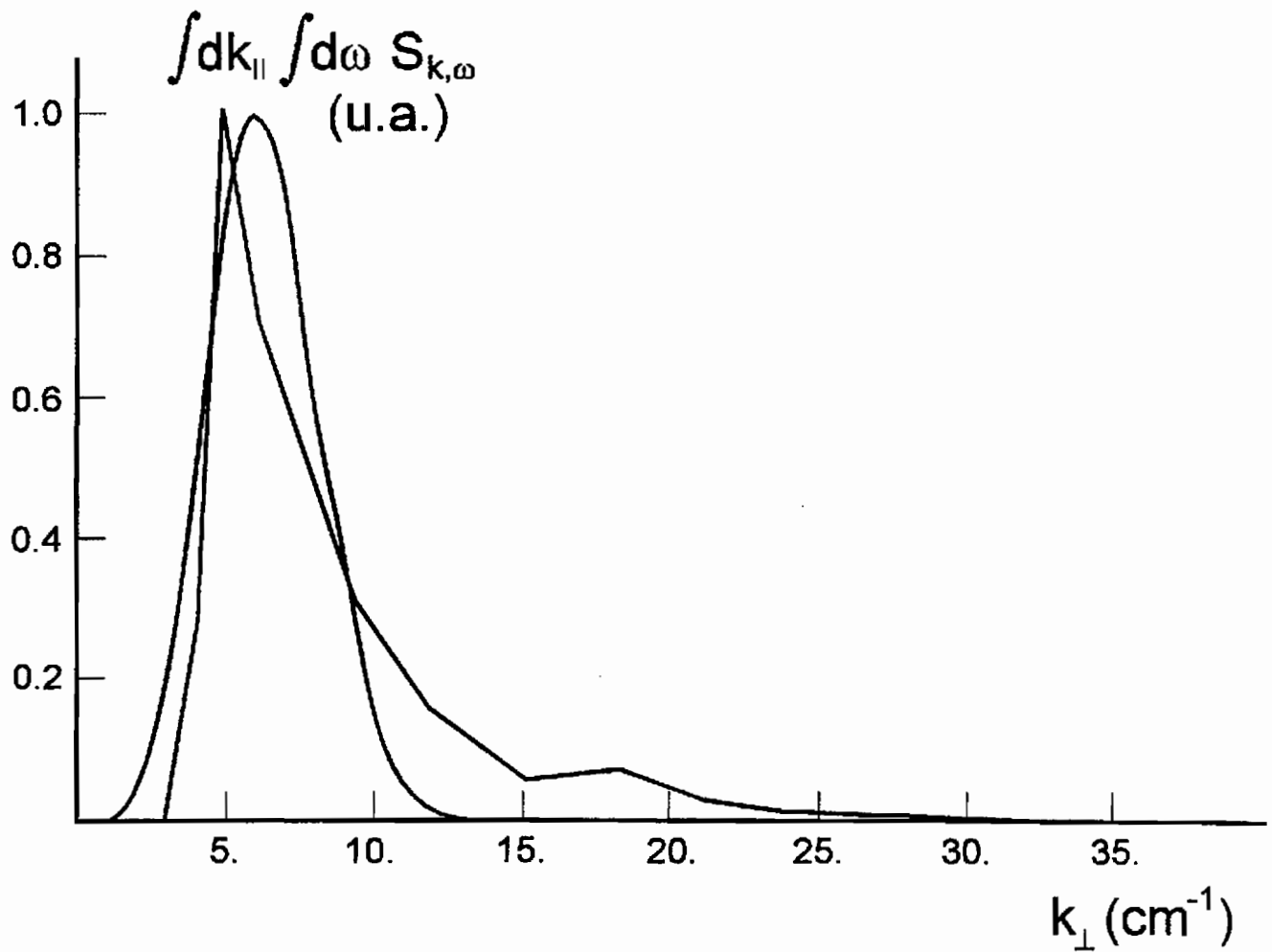


Fig. 5 — Ajuste Gaussiano do espectro bidimensional (integrado sobre frequências e k_{\parallel}) $S_{k_{\perp}}^{(2)}(\tau = 0) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} S_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ com parâmetros $p = 2,5$, $x_M = 6 \text{ cm}^{-1}$, e $x_0 = 0$ (eq. (4.16)). Para comparação, o espectro medido no tokamak TFR (TFR Group e TRUC, 1984) é também representado (linha quebrada).

Um ajuste Lorentziano, genericamente representado pela família de curvas

$$Y_L \equiv k_{\perp}^2 I_{k_{\perp}}^L = \left(\frac{k_{\perp}^q}{x_M^q} \right) \left(2 \frac{n}{n+q} \frac{\frac{k_{\perp}}{x_M - x_0}}{\left(\frac{k_{\perp} - x_0}{x_M - x_0} \right) + \left(\frac{d}{x_M - x_0} \right)} \right)^n, \quad (4.21)$$

foi também considerado. Ele mostra, para os valores seguintes dos parâmetros

$$q = 2, \quad x_M = 5,5 \text{ cm}^{-1}, \quad x_0 = 3 \text{ cm}^{-1}, \quad n = 4 \implies d \approx 3,48 \text{ cm}^{-1}, \quad (4.22)$$

um acordo excelente com a parte de pequenos comprimentos de onda do espectro do TFR (onde ele apresenta um comportamento em $k_{\perp}^{-2,2}$): veja Fig. 6. Entretanto, deve ser enfatizado que curvas Lorentzianas apresentam-se menos tratáveis analiticamente, no contexto deste trabalho, se comparadas com as Gaussianas. Isso justifica a nossa escolha do ajuste Gaussiano (4.18).

4.4. A AMPLITUDE DO ESPECTRO

Devemos agora obter uma expressão para a amplitude A em (4.9) como função do campo elétrico perpendicular quadrático médio. Seu valor é dado, de acordo com (2.16), por

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = 2 S_{\perp}(\mathbf{r} = 0, \tau = 0), \quad (4.23)$$

onde $S_{\perp}(\mathbf{r} = 0, \tau = 0)$ é a componente xx ou yy do espectro Euleriano de flutuações de campo elétrico calculado com intervalos espacial e temporal nulos (eq. (2.14)). Para maiores detalhes veja FIEDLER-FERRARA *et al.*, 1990, Seção 4.4.

Usando (2.14) e (2.16), pode ser imediatamente visto que

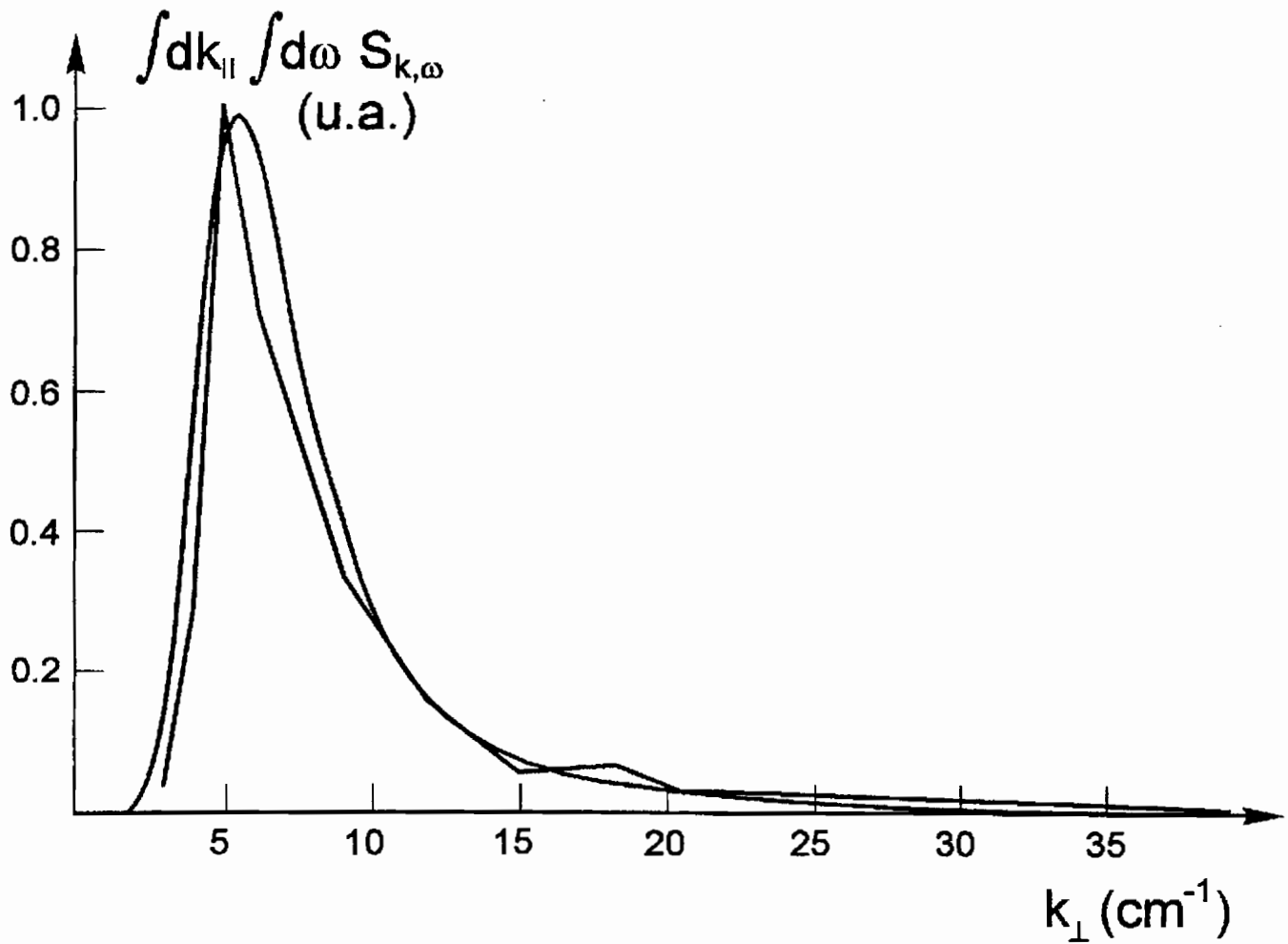


Fig. 6 — Ajuste Lorentziano da mesma função representada na Fig. 3, com parâmetros $q = 2$, $x_M = 5,5 \text{ cm}^{-1}$, $x_0 = 3 \text{ cm}^{-1}$, $n = 4$ (eq. (4.21)).

$$S_{\perp}(\mathbf{r} = 0, r = 0) = \pi \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} I_{\mathbf{k}}(\tau = 0) . \quad (4.24)$$

Agora substituímos em (4.24) a expressão (4.12) para $I_{\mathbf{k}}(\tau = 0)$ com $I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp})$ dado pelo ajuste Gaussiano (4.18). As integrações em k_{\parallel} e k_{\perp} são feitas usando o ordenamento (4.11), e, em ordem mais baixa de aproximação, o valor obtido para $S_{\perp}(\mathbf{r} = 0, \tau = 0)$ é usado em (4.23) para fornecer o resultado

$$A \simeq \frac{F}{(1 + \sigma) \Delta \omega \Delta k_{\parallel}} \left\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^2(\mathbf{x}, t) \right\rangle , \quad (4.25)$$

em termos do campo elétrico perpendicular quadrático médio flutuante $\left\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^2(\mathbf{x}, t) \right\rangle$ e da constante

$$F = \frac{e^{-p}}{\pi^{3/2} x_M^2} \sqrt{p} \frac{(2p)^{\frac{2(p-1)+3}{2}}}{(2(p-1)+2)!!} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 , \quad (4.26)$$

onde $n!! \equiv n(n-2)(n-4)\dots$.

4.5. RESUMO

Nesta seção utilizamos dados experimentais dos tokamaks TEXT e TFR para construir um espectro modelo tridimensional analítico para turbulência eletrostática, isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético constante, dado, em unidades Gaussianas por

$$\mathbf{S}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{k} \mathbf{k} I_{\mathbf{k}, \omega} ,$$

onde

$$I_{\mathbf{k},\omega} = A I_{k_{\perp}}(k_{\perp 0}, \Delta k_{\perp}) \left\{ e^{-\frac{(\omega - k_{\perp} v_D s_{\parallel})^2}{2 \Delta \omega^2}} e^{-\frac{(k_{\parallel} - \frac{\omega}{v_{\alpha}})^2}{2 \Delta k_{\parallel}^2}} + \sigma e^{-\frac{(\omega + k_{\perp} v_D s_{\parallel})^2}{2 \Delta \omega^2}} e^{-\frac{(k_{\parallel} + \frac{\omega}{v_{\alpha}})^2}{2 \Delta k_{\parallel}^2}} \right\},$$

com $\sigma = 0$ representando ondas progressivas na direção paralela, ou $\sigma = 1$ representando ondas estacionárias, e

$$\Delta \omega \approx \omega_0 = k_{\perp 0}^* v_D$$

$$\Delta k_{\parallel} \approx \langle\langle k_{\parallel} \rangle\rangle \approx \frac{2\pi}{qR}$$

$$s_{\parallel} \equiv \frac{k_{\parallel}}{|\mathbf{k}_{\parallel}|} = \text{sign } \mathbf{k}_{\parallel}$$

$$I_{k_{\perp}} = \frac{k_{\perp}^3}{6^5} e^{\frac{5}{2} - \frac{5}{72} k_{\perp}^2}, \quad k_{\perp} \text{ in cm}^{-1},$$

e

$$A \simeq \frac{F}{(1 + \sigma) \Delta \omega \Delta k_{\parallel}} \langle \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^2(\mathbf{x}, t) \rangle,$$

com

$$F = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2.$$

Listamos, a seguir, valores típicos para os parâmetros físicos principais do tokamak TFR (na região principal de confinamento), mais exatamente aqueles que aparecem em nosso resultado (4.9):

$$k_{\perp 0}^* = 5,0 \text{ cm}^{-1} ,$$

$$v_D = 2,3 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} ,$$

$$\Delta\omega \simeq 1,2\omega_0 = 1,38 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} ,$$

$$q = \frac{3}{2} ,$$

$$R = 98 \text{ cm} ,$$

(4.27)

$$\Delta k_{\parallel} \simeq \frac{2\pi}{qR} = 4,27 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} ,$$

$$T_e = 1,25 \cdot 10^3 \text{ eV} ,$$

$$v_a \simeq v_{th.e.} = 1,48 \cdot 10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} ,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^2 \rangle} &= 0,2 \text{ Stat Volt. cm}^{-1} \\ &= 6 \cdot 10^3 \text{ Volt. m}^{-1} . \end{aligned}$$

5. CAMPO ELÉTRICO LAGRANGIANO ASSINTÓTICO PARALELO MÉDIO

Nesta seção deduzimos uma expressão analítica explícita para o valor assintótico no tempo do campo elétrico *quasi*-linear Lagrangiano paralelo médio $\langle \mathbf{E}_{\parallel} \rangle_{QL}$ sentido por uma partícula ao longo de seu movimento turbulento.

5.1. RESULTADO PARA ESPECTRO DE ONDAS QUE SE PROPAGAM

$$(\sigma = 0)$$

A partir do resultado (3.24) para $\langle \mathbf{a}_{\parallel}(t) \rangle = \frac{q}{m} \langle E_{\parallel}(t) \rangle \mathbf{b}$, e utilizando as expressões (4.9) e (4.18) para a intensidade espectral $I_{\mathbf{k},\omega}$, com $\sigma = 0$, nós obtemos no regime assintótico ($t \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=0}^{t \rightarrow \infty} &= \langle \mathbf{E}_{\parallel} \rangle_{QL}^{t \rightarrow \infty} \cdot \mathbf{b} = ig \frac{q}{m} A_{\sigma=0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 e^{-\frac{(k_{\parallel}-d\omega)^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \\ &\times \int_0^{t \rightarrow \infty} d\theta \theta e^{-i\theta(\omega - k_{\parallel} - v_{\parallel})} \mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) \quad , \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $v_{\parallel} = v_{\parallel}(0)$, o inverso da velocidade de fase (4.2) é

$$d \equiv \frac{1}{v_{\alpha}} \quad , \quad (5.2)$$

e a integral em k_{\perp} é definida por

$$\mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) \equiv \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^4 e^{-\frac{(\omega - k_{\perp} v_D s_{\parallel})^2}{2\Delta\omega^2}} e^{-h k_{\perp}^2} \quad (5.3a)$$

$$= 3 e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} \beta^{-5/2} \left[\frac{\gamma}{24\sqrt{\beta}} \left(\frac{\gamma^2}{2\beta} + 5 \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[\frac{\gamma^2}{\beta} \left(\frac{\gamma^2}{12\beta} + 1 \right) + 1 \right] \right] \\ \times \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}} \right) \right\} e^{\frac{\gamma^2}{4\beta}} \quad (5.3b)$$

Essa integração está detalhada no Apêndice B. Introduzimos o parâmetro

$$\beta \equiv h + \frac{v_D^2}{2\Delta\omega^2} > 0 \quad , \quad (5.4)$$

e a variável

$$\gamma \equiv \gamma(\omega v_D s_{\parallel}) = \frac{\omega v_D s_{\parallel}}{\Delta\omega^2} \quad . \quad (5.5)$$

Considerando a bem conhecida relação

$$\int_0^{\infty} d\theta \theta e^{i\theta(x-i\epsilon)} = i \frac{d}{dx} \left\{ \pi \delta(x) - i \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \quad , \quad (5.6)$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac e \mathcal{P} é o valor principal, obtemos a partir de (5.1):

$$\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=0}^{t \rightarrow \infty} = -g \frac{q}{m} A_{\sigma=0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 e^{-\frac{(k_{\parallel} - d\omega)^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \\ \times \left\{ \pi \delta'(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) - i \mathcal{P}' \left(\frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) \right\} \mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) \quad , \quad (5.7)$$

onde a linha indica derivada com relação a $(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})$. Levando em conta as paridades em k_{\parallel} e ω , observa-se que o termo contendo o valor principal se anula exatamente, resultando em

$$\begin{aligned}
\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=0}^{t \rightarrow \infty} &= -\pi g \frac{q}{m} A_{\sigma=0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 \\
&\times e^{-\frac{(k_{\parallel} - d\omega)^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \delta'(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) . \quad (5.8)
\end{aligned}$$

A integração em k_{\parallel} é feita por partes, resultando em

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 e^{-\frac{(k_{\parallel} - d\omega)^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \delta'(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) \\
&= \frac{1}{v_{\parallel} |v_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^2 e^{-\frac{(k_{\parallel} - d\omega)^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} \mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel}) \left[3 - \frac{k_{\parallel} [k_{\parallel} - d\omega]}{\Delta k_{\parallel}^2} \right] \delta\left(k_{\parallel} - \frac{\omega}{v_{\parallel}}\right) \\
&= \frac{s_{\parallel}}{v_{\parallel}^4} \omega^2 \mathbb{F}(\omega v_D s_{\omega} s_{v_{\parallel}}) \left[3 - \frac{\omega^2}{v_{\parallel} \Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_{\alpha}} \right) \right] e^{-\omega^2 \frac{(1/v_{\parallel} - 1/v_{\alpha})^2}{2\Delta k_{\parallel}^2}} . \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Na primeira igualdade de (5.9) observamos que aparece o valor absoluto da velocidade paralela inicial porque

$$\delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) = \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) = \frac{1}{|v_{\parallel}|} \delta\left(k_{\parallel} - \frac{\omega}{v_{\parallel}}\right) . \quad (5.10)$$

Na segunda igualdade de (5.9) $\mathbb{F}(\omega v_D s_{\omega} s_{v_{\parallel}})$ é obtido de $\mathbb{F}(\omega v_D s_{\parallel})$ dado em (5.3) fazendo a substituição $s_{\parallel} \rightarrow s_{\omega} s_{v_{\parallel}} \equiv \text{sign}(\omega) \cdot \text{sign}(v_{\parallel})$ (sign = sinal). Finalmente nós substituímos (5.9) em (5.8) e usamos o fato que $\mathbb{F}(\omega v_D s_{\omega} s_{v_{\parallel}})$ é par em ω para escrever

$$\begin{aligned}
\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=0}^{t \rightarrow \infty} &= -2\pi g \frac{q}{m} A_{\sigma=0} \frac{s_{v_{\parallel}}}{v_{\parallel}^4} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \mathbb{F}(\gamma') \\
&\times \left[3 - \frac{\omega^2}{v_{\parallel} \Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_{\alpha}} \right) \right] e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta k_{\parallel}^2} (1/v_{\parallel} - 1/v_{\alpha})^2} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

com

$$\gamma' \equiv \frac{\omega v_D s_{v\parallel}}{\Delta\omega^2} ,$$

que pode também ser escrito

$$\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=0}^{t \rightarrow \infty} = -2\pi g \frac{q}{m} A_{\sigma=0} \frac{s_{v\parallel}}{v_{\parallel}^4} \mathbb{H}(v_D, v_{\alpha}, v_{\parallel}) \quad (5.12)$$

com

$$\mathbb{H}(v_D, v_{\alpha}, v_{\parallel}) \equiv \int_0^{\infty} d\omega \mathbb{F}\left(\gamma' = \frac{\omega v_D s_{v\parallel}}{\Delta\omega^2}\right) \omega^2 [3 - B\omega^2] e^{-C\omega^2} \quad (5.13)$$

em termos de (use (5.3))

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\gamma') = & 3\beta^{-5/2} e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} \left\{ \frac{E\omega}{12} (5 + 2E^2\omega^2) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{E^2\omega^2} \left[\frac{4}{3} E^4\omega^4 + 4E^2\omega^2 + 1 \right] \{1 + \operatorname{erf}(E\omega)\} \right\} . \quad (5.14) \end{aligned}$$

Em (5.13) e (5.14) as quantidades B , C e E são definidas por

$$B = \frac{1}{v_{\parallel} \Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_{\alpha}} \right) , \quad (5.15)$$

$$C = \frac{1}{2\Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_{\alpha}} \right)^2 , \quad (5.16)$$

$$E = \frac{\gamma'}{2\omega\sqrt{\beta}} = \frac{v_D s_{v\parallel}}{\Delta\omega^2\sqrt{\beta}} . \quad (5.17)$$

A quantidade \mathbb{H} é calculada explicitamente no Apêndice C em termos de b e b_0 definidos por

$$b \equiv -1 + b_0 = -1 + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_{\alpha}} \right)^2 \right] \left[1 + 2h \frac{\Delta\omega^2}{v_D^2} \right] . \quad (5.18)$$

O resultado explícito para $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2$ é dado por (C.8) e (C.22), e o campo elétrico para $\sigma = 0$ é dado por (5.12).

5.2. RESULTADO PARA ESPECTRO SIMÉTRICO ($\sigma = 1$)

Para o espectro completo com $\sigma = 1$, a contribuição do segundo termo de (4.9) é obtida a partir da contribuição do primeiro termo fazendo a substituição

$$\{v_D, v_{\alpha}\} \longrightarrow \{-v_D, -v_{\alpha}\} , \quad (5.19)$$

fornecendo

$$\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=1}^{t \rightarrow \infty} = -2\pi g \frac{q}{m} A \frac{s_{v_{\parallel}}}{v_{\parallel}^4} \left[\mathbb{H}(v_D, v_{\alpha}, v_{\parallel}) + \mathbb{H}(-v_D, -v_{\alpha}, v_{\parallel}) \right] . \quad (5.20)$$

É fácil ver que a substituição (5.19) realmente não muda os parâmetros C , B , E e portanto b_0 e b , na expressão para \mathbb{H} , uma vez que também se mude o sinal da velocidade paralela, *i.e.*, s_{\parallel} . Isso significa que

$$\mathbb{H}\{-v_D, -v_{\alpha}, v_{\parallel}\} = \mathbb{H}\{v_D, v_{\alpha}, -v_{\parallel}\} . \quad (5.21)$$

Isso também implica, a partir de (5.20), que o campo elétrico paralelo Lagrangiano é uma função ímpar da velocidade inicial paralela no caso de um espectro simétrico ($\sigma = 1$). Resulta

$$\langle E_{\parallel} \rangle_{QL, \sigma=1}^{t \rightarrow \infty} = -2\pi g \frac{q}{m} A \frac{s_{v_{\parallel}}}{v_{\parallel}^4} \left[\mathbb{H}(v_D, v_{\alpha}, v_{\parallel}) + \mathbb{H}(v_D, v_{\alpha}, -v_{\parallel}) \right] , \quad (5.22)$$

que é outra maneira de escrever (5.20).

5.3. VALORES NUMÉRICOS

Estimamos numericamente os valores assintóticos do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio calculado na aproximação *quasi*-linear $\langle E_{\parallel} \rangle_{QL}^{t \rightarrow \infty}$ (daqui para a frente denominado $\langle E_{\parallel} \rangle$) utilizando as equações (5.12) e (5.22), respectivamente para os casos de espectro modelo analítico para turbulência eletrostática (veja seção 4.5) constituído por ondas que se propagam na direção paralela ao campo magnético ($\sigma = 0$), e um espectro simétrico na direção paralela ($\sigma = 1$) constituído por ondas estacionárias. Usamos os parâmetros físicos do tokamak TFR, conforme indicado em (4.27). Consideramos unicamente o caso de um elétron.

Os resultados para $\sigma = 0$ estão mostrados na Fig. 7, e para $\sigma = 1$ na Fig. 8. Em ambos os casos foi graficado $\langle E_{\parallel} \rangle$ como função de $\log_{10} |\mathbf{v}_{\parallel}| / v_{\alpha}$, $v_{\alpha} = v_{th.e.} > 0$. Duas situações foram tratadas: velocidade paralela inicial $v_{\parallel} > 0$ no sentido do campo magnético externo ($\mathbf{v}_{\parallel} = |\mathbf{v}_{\parallel}| \hat{\mathbf{z}}$), e $v_{\parallel} < 0$ no sentido oposto ($\mathbf{v}_{\parallel} = -|\mathbf{v}_{\parallel}| \hat{\mathbf{z}}$). Para melhor interpretação dessas figuras enfatize-se que, para elétrons, $\langle E_{\parallel} \rangle > 0$ significa freamento para $v_{\parallel} > 0$ e aceleração no sentido da velocidade para $v_{\parallel} < 0$; enquanto que $\langle E_{\parallel} \rangle < 0$ significa aceleração no sentido da velocidade para $v_{\parallel} > 0$, e freamento para $v_{\parallel} < 0$.

Para $\sigma = 0$ e $v_{\parallel} > 0$ (Fig. 7a) os resultados mostram uma aceleração no sentido da velocidade para elétrons com velocidades menores do que $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 4,0 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, com um máximo pronunciado (mínimo de $\langle E_{\parallel} \rangle$) para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 1,4 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde o valor absoluto do campo elétrico associado é $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 1,9 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$, e freamento para velocidades maiores, com um máximo para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 5,6 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 0,35 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$ ($\sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$ é o valor quadrático médio do campo elétrico

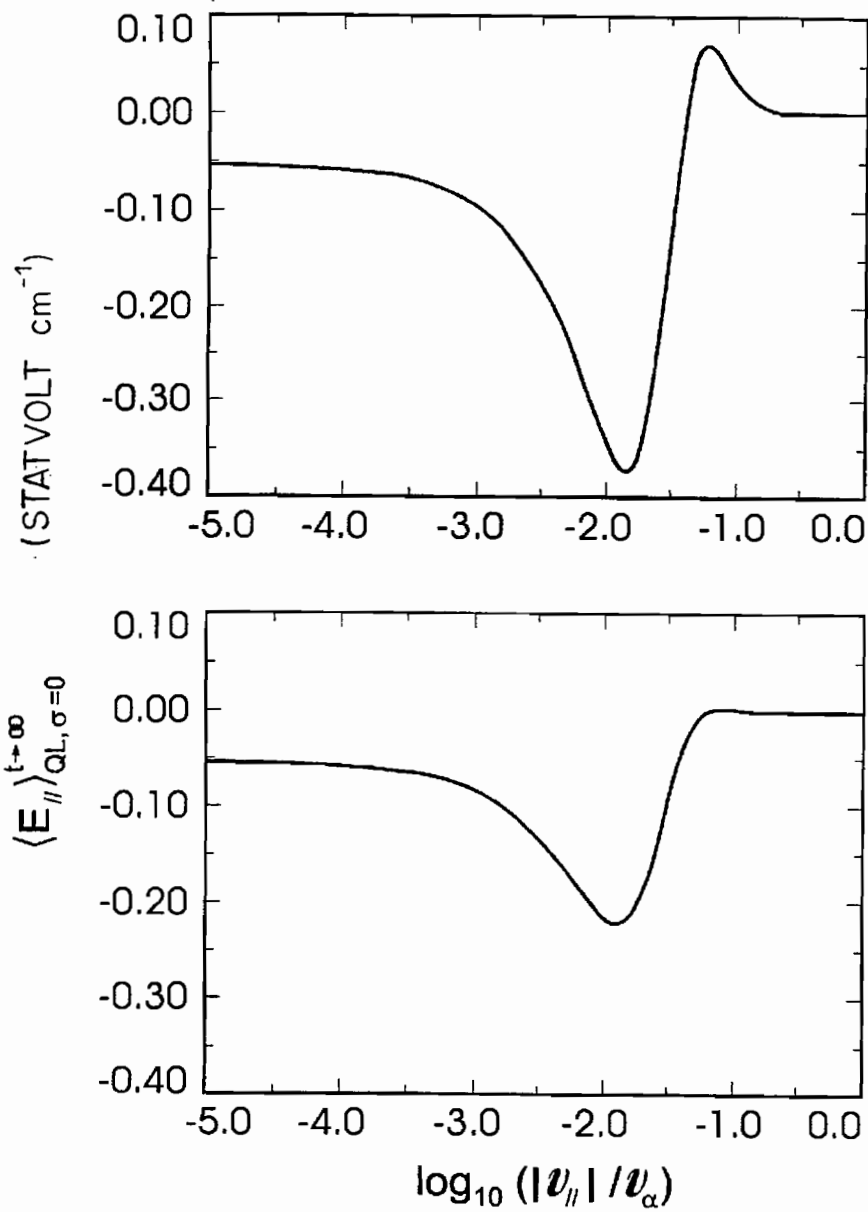


Fig. 7 — Valor assintótico ($t \rightarrow \infty$) do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio $\langle E_{\parallel} \rangle_{QL}$ calculado na aproximação *quasi-linear* (5.12) como função de $\log_{10} (|v_{\parallel}|/v_{\alpha})$, onde $v_{\alpha} = 1,48 \cdot 10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ é a velocidade térmica de elétrons. Foram usados parâmetros do tokamak TFR (eq. (4.27)). Aqui são apresentados resultados para um elétron na presença do espectro (4.9) com $\sigma = 0$ (ondas propagando-se na direção paralela) e velocidades paralelas iniciais $v_{\parallel} > 0$ (a) e $v_{\parallel} < 0$ (b).

turbulento perpendicular do tokamak TFR). Para velocidades paralelas iniciais, maiores ($\simeq v_{th.e.}$) $\langle E_{\parallel} \rangle$ tende assintoticamente e monotonicamente a zero. Para velocidades baixas $\langle E_{\parallel} \rangle$ tende a um valor não nulo $0.055 \text{ StatVolt}\cdot\text{cm}^{-1} \simeq 0,28 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$.

Para $\sigma = 0$ e $v_{\parallel} < 0$ (Fig. 7b) os resultados são diversos. Agora elétrons experimentam freamento para velocidades menores que $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 6,5 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, com um máximo (mínimo de $\langle E_{\parallel} \rangle$) para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 1,3 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 1,1 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$, e uma bastante pequena aceleração no sentido da velocidade para velocidades maiores, com um máximo para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 7,9 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 0,022 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$. O comportamento assintótico para velocidades grandes e baixas é análogo ao caso $\sigma = 0$ e $v_{\parallel} > 0$.

O comportamento invertido, relativamente a aceleração positiva ou freamento, obtido quando se muda a orientação da velocidade inicial paralela, bem como o valor não nulo de $\langle E_{\parallel} \rangle$ obtido para baixas velocidades, é consistente com o fato de que o espectro para $\sigma = 0$ é construído por ondas que se propagam num sentido definido.

Para $\sigma = 1$ graficamos apenas o caso $v_{\parallel} > 0$ (Fig. 8). Os resultados para $v_{\parallel} < 0$ são obtidos trivialmente desse último; em verdade, a expressão (5.22) para $\langle E_{\parallel} \rangle_{\sigma=1}$ é ímpar em v_{\parallel} , então basta proceder à mudança de sinal de $\langle E_{\parallel} \rangle$, que corresponde a refletir o gráfico através do eixo das abcissas. Para $v_{\parallel} > 0$, elétrons sofrem uma aceleração no sentido da velocidade para velocidades menores do que $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 3,2 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, com um máximo (mínimo de $\langle E_{\parallel} \rangle$) para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 1,5 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 0,40 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$, e freamento para velocidades maiores, com um máximo para $|\mathbf{v}_{\parallel}| \simeq 5,2 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, onde $|\langle E_{\parallel} \rangle| \simeq 0,20 \sqrt{\langle \tilde{E}_{\perp}^2 \rangle}$. Tanto para velocidades muito baixas, como para velocidades grandes ($\simeq v_{th.e.}$) $\langle E_{\parallel} \rangle$ tende assintoticamente a zero.

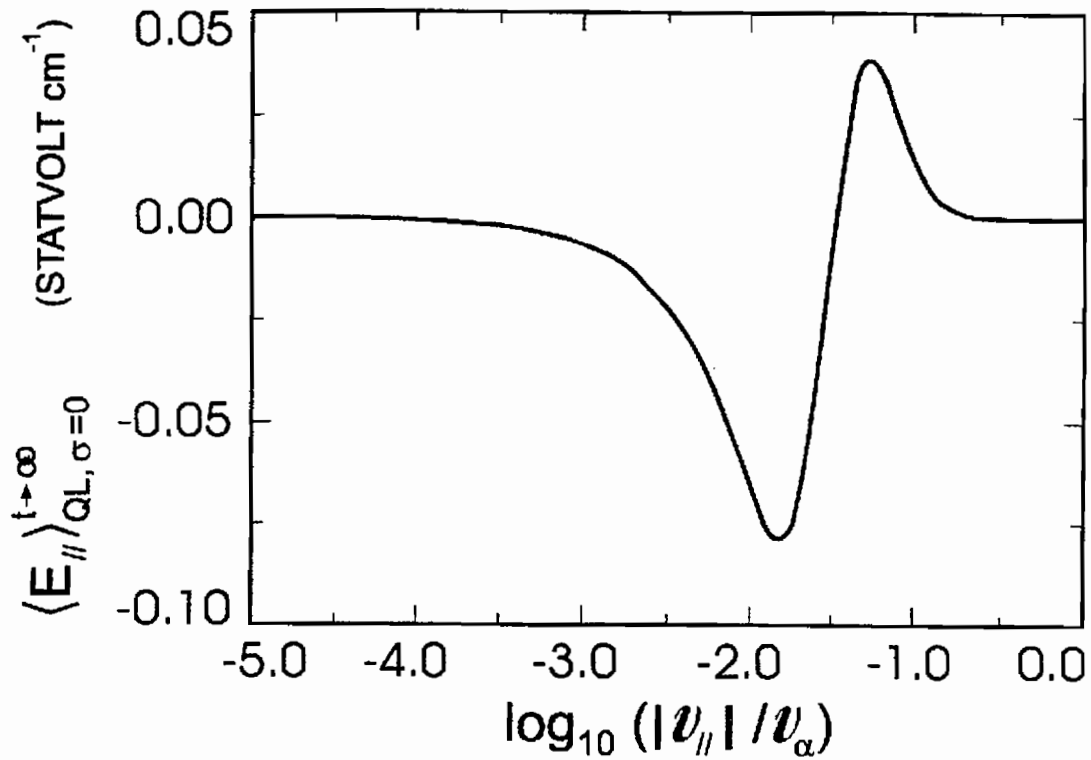


Fig. 8 — Valor assintótico ($t \rightarrow \infty$) do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio $\langle E_{\parallel} \rangle_{QL}$ calculado na aproximação *quasi*-linear (5.22) como função de $\log_{10} (|v_{\parallel}| / v_{\alpha})$. Foram usados parâmetros do TFR (eq. (4.27)). Aqui são apresentados resultados para um elétron na presença do espectro (4.9) com $\sigma = 1$ (ondas simétricas na direção paralela) e velocidade inicial $v_{\parallel} > 0$. Uma vez que a eq. (5.22) é ímpar em v_{\parallel} , o resultado para $v_{\parallel} < 0$ é imediato a partir deste gráfico.

Como dissemos antes, $\langle E_{\parallel} \rangle$ é uma função ímpar de v_{\parallel} para $\sigma = 1$. Mas, de acordo com a discussão apresentada no início dessa seção, mudar o sinal de $\langle E_{\parallel} \rangle$ quando se vai do caso $v_{\parallel} > 0$ para o caso $v_{\parallel} < 0$ significa o mesmo efeito sobre os elétrons (freamento ou aceleração no sentido da velocidade). Assim, a situação para $v_{\parallel} < 0$ é absolutamente análoga àquela para $v_{\parallel} > 0$: elétrons com velocidades menores que $|v_{\parallel}| \simeq 3,2 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, sofrem aceleração no sentido da velocidade, e para velocidades maiores sofrem freamento. Isso é consistente com o fato de que o espectro para $\sigma = 1$ é constituído por ondas estacionárias com velocidades de fase em ambas as direções. De fato, para $v_{\parallel} = 0$ encontramos $\langle E_{\parallel} \rangle_{\sigma=1} = 0$, o que é consistente com essa qualidade do espectro turbulento.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho tratamos o problema da difusão do centro-guia de uma partícula carregada em um campo magnético intenso, uniforme e constante, na presença de turbulência eletrostática homogênea, estacionária e isotrópica no plano perpendicular ao campo magnético. A carga-teste é “passiva” no sentido que não modifica a carga espacial local.

A diferença com relação a abordagens anteriores consistiu na inclusão da dinâmica na direção paralela ao campo magnético.

Os principais resultados são os seguintes:

- (a) Os processos de difusão nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético estão acoplados, e esse acoplamento é descrito pelo sistema de equações não lineares (2.47a) e (2.47b), obtido utilizando a hipótese (do tipo Gaussiana) de Corssin, e uma expansão em cumulantes até termos de segunda ordem;
- (b) O sistema de equações (2.47a) e (2.47b) não é completo no sentido que existe um campo elétrico Lagrangiano médio na direção paralela ao campo magnético (esse campo na direção perpendicular é exatamente nulo). Trata-se do campo sentido pelo centro-guia ao longo de seu movimento turbulento, que contribue para a difusão através do deslocamento médio dado por (2.41) e (2.42). O campo paralelo médio foi calculado (eq. (3.21a)) na aproximação *quasi*-linear renormalizada, que consiste em não levar em conta o acoplamento com o processo difusivo. Nessa aproximação, termos $\mathcal{O}(\tilde{E}^4 e^{\tilde{E}^2})$, onde \tilde{E} é o campo elétrico turbulento, não são levados em conta;

- (c) De maneira a estimar esses efeitos, propomos um espectro modelo analítico para turbulência eletrostática em três dimensões (seção 4.5) baseado em resultados experimentais dos tokamaks TFR e TEXT. Tal espectro modelo apresenta as propriedades incluídas no modelo teórico proposto para difusão (homogeneidade, estacionaridade e isotropia local no plano perpendicular ao campo magnético), satisfaz as condições básicas de simetria e paridade, e é tratável para utilização em cálculos analíticos de processos de transporte. Duas versões foram construídas: uma com um espectro de ondas propagando-se na direção do campo magnético, e uma segunda que representa um espectro simétrico na direção paralela constituído por ondas estacionárias;
- (d) O espectro modelo foi utilizado para a obtenção de uma expressão analítica para o valor assintótico no tempo do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio, tanto no caso do espectro de ondas que se propagam (eq. (5.12)), como para o espectro simétrico (eq. (5.20));
- (e) Utilizando-se os parâmetros físicos do tokamak TFR (eq. (4.27)), foram feitos cálculos numéricos do valor do campo elétrico Lagrangiano paralelo médio assintótico no tempo na aproximação *quasi-linear*. Para o espectro simétrico, os resultados mostram aceleração na direção da velocidade inicial para elétrons com velocidades menores que $\simeq 3,2 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$ ($v_{th.e.}$ é a velocidade térmica de elétrons), e freamento para elétrons com velocidades maiores; o campo elétrico médio é nulo tanto para baixas velocidades como para altas velocidades, consequência da simetria do espectro. Para espectro de ondas que se propagam no sentido do campo magnético, e para velocidades iniciais no mesmo sentido, os elétrons

sofrem aceleração na direção da velocidade para velocidades iniciais menores que $\simeq 1,4 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, e freamento para maiores velocidades. Para velocidades iniciais no sentido contrário a situação se inverte, havendo freamento para elétrons com velocidades menores que $\simeq 6,5 \cdot 10^{-2} v_{th.e.}$, e uma bastante pequena aceleração para elétrons com velocidades iniciais maiores. Em ambos os casos há um campo elétrico médio não nulo para velocidades baixas.

Os resultados obtidos na aproximação *quasi*-linear podem sugerir que um cálculo explícito do campo elétrico paralelo médio na aproximação *quasi*-linear renormalizada, que inclui a influência da difusão nesse campo médio, descreveria para os casos de espectro simétrico, e espectro não simétrico com velocidade inicial paralela no sentido das ondas que se propagam, uma competição entre o processo de difusão paralela e uma tendência à concentração de velocidades paralelas de elétrons em torno do valor para o qual o campo elétrico paralelo médio se anula. Para espectro não simétrico e velocidade paralela no sentido contrário ao de propagação de ondas, ao contrário, não é possível se inferir, sem a execução dos respectivos cálculos, em que resultaria a influência da difusão, uma vez que o resultado *quasi*-linear mostra uma pequena aceleração na direção da velocidade inicial dos elétrons com velocidades ligeiramente maiores que aquela para a qual o campo médio se anula, e não é possível prever-se como os efeitos da difusão atuariam.

Ainda explorando os resultados obtidos neste trabalho, a sua continuidade natural é o cálculo explícito, usando o espectro modelo proposto, dos resultados não assintóticos no tempo para o campo elétrico paralelo médio na aproximação *quasi*-linear renormalizada (eq. (3.21a)), bem como do acoplamento nas direções paralela e perpendicu-

lar (eqs. (2.47a) e (2.47b)). Esses cálculos devem fornecer resultados mais realistas. De posse desses resultados, é pertinente questionar-se a respeito da identificação dos possíveis mecanismos físicos que explicariam os freamentos e acelerações obtidos no nosso caso, bem como possíveis conseqüências físicas. Esses pontos serão objeto de um futuro trabalho.

APÊNDICE A

ESPECTRO DE CORRELAÇÃO DE UM-PONTO DO CAMPO ELÉTRICO COMO UM TENSOR ISOTRÓPICO

Aqui buscamos as condições que devem ser aplicadas aos elementos do tensor de espectro de correlação de um-ponto do campo elétrico $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ definido em (2.6), de maneira a levar em conta a isotropia no plano perpendicular ao campo magnético.¹⁵

Em um sistema cartesiano de coordenadas, onde o eixo z está alinhado com \mathbf{b} (Fig. 1), sendo a direção do campo magnético constante, a correlação temporal do campo elétrico é dado num dado ponto \mathbf{x} pelo tensor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) \equiv \langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle = \begin{pmatrix} S^{xx} & S^{xy} & S^{x\parallel} \\ S^{yx} & S^{yy} & S^{y\parallel} \\ S^{\parallel x} & S^{\parallel y} & S^{\parallel\parallel} \end{pmatrix} = \int dk I_{\mathbf{k}}(\tau) \mathbf{k} \mathbf{k} , \quad (\text{A.1})$$

onde, por simplicidade, omitimos o argumento $(\mathbf{r} = 0, \tau)$ nos elementos do tensor, e usamos o índice superior \parallel para a direção z . Seguindo DE GROOT e MAZUR (1984) ou BALESCU (1988), impomos que esse tensor permaneça invariante sob qualquer rotação em torno do eixo z . Isso garante a isotropia do tensor no plano xy .

Em termos da matriz de rotações infinitesimais em torno do eixo z

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

¹⁵Deve ser enfatizado que a condição de isotropia aplica-se somente a quantidades locais como $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$, mas não a quantidades que dependem de um vetor espacial independente como \mathbf{r} no espectro de correlação completo de dois-pontos do campo elétrico $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau)$. Esse último depende de dois vetores \mathbf{r} e \mathbf{b} , e não pode ser isotrópico no plano perpendicular a \mathbf{b} para qualquer direção genérica do vetor \mathbf{r} (veja FIEDLER-FERRARA *et al.* (1990)).

expressamos a invariança de $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ pela condição

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) \cdot \mathbf{R}(-\alpha) , \quad (\text{A.3})$$

que implica

$$\begin{cases} S^{xx} = S^{yy} \equiv S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) \\ S^{xy} = -S^{yx} \equiv S^\Lambda(\mathbf{r} = 0, \tau) \\ S^{x||} = S^{y||} = S^{||x} = S^{||y}(\mathbf{r} = 0, \tau) = 0 \\ S^{|||} \equiv S^{||}(\mathbf{r} = 0, \tau) . \end{cases} . \quad (\text{A.4})$$

Isso permite-nos escrever o espectro isotrópico de um-ponto de flutuações de campo elétrico como

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) = \begin{pmatrix} S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) & S^\Lambda(\mathbf{r} = 0, \tau) & 0 \\ -S^\Lambda(\mathbf{r} = 0, \tau) & S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) & 0 \\ 0 & 0 & S^{||}(\mathbf{r} = 0, \tau) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.5})$$

De maneira a reescrever a equação (3.8) em uma forma mais conveniente, definimos (BALESCU, 1988) uma base ortogonal de vetores unitários $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$, onde \mathbf{b} está na direção do campo magnético, \mathbf{e}_1 é fixado arbitrariamente e

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_1 . \quad (\text{A.6})$$

Agora definimos a seguinte combinação de diádicos:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{b} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{T}_5 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{b} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{b} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

constituindo uma base de nove matrizes, as quais permitem representar qualquer matriz 3×3 como uma superposição linear de matrizes da base. Podemos, portanto, escrever (A.5) como

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) = S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{T}_4 + S^\Lambda(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{A}_3 + S^\parallel(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{T}_0. \quad (\text{A.16})$$

Projetando $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ nas matrizes da base \mathbf{T}_4 , \mathbf{A}_3 e \mathbf{T}_0 (todas as demais projeções são nulas) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{T}_4 &= S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{T}_4 : \mathbf{T}_4 = 2S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) , \\
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{A}_3 &= S^\wedge(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{A}_3 : \mathbf{A}_3 = -2S^\wedge(\mathbf{r} = 0, \tau) , \\
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{T}_0 &= S^\parallel(\mathbf{r} = 0, \tau) \mathbf{T}_0 : \mathbf{T}_0 = 2S^\parallel(\mathbf{r} = 0, \tau) ,
\end{aligned} \tag{A.17}$$

e, de acordo com (2.12) e (2.8)

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{T}_4 &= \int d\mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) \mathbf{k} \mathbf{k} : \mathbf{T}_4 = \int d\mathbf{k} k_\perp^2 I_{\mathbf{k}}(\tau) , \\
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{A}_3 &= \int d\mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) \mathbf{k} \mathbf{k} : \mathbf{A}_3 = 0 , \\
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) : \mathbf{T}_0 &= \int d\mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) \mathbf{k} \mathbf{k} : \mathbf{T}_0 = \int d\mathbf{k} k_\parallel^2 I_{\mathbf{k}}(\tau) .
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Então, obtemos os elementos de $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ (veja eq. (A.5)) na forma

$$S^\perp(\mathbf{r} = 0, \tau) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} k_\perp^2 I_{\mathbf{k}}(\tau) , \tag{A.19}$$

$$S^\parallel(\mathbf{r} = 0, \tau) = \int d\mathbf{k} k_\parallel^2 I_{\mathbf{k}}(\tau) , \tag{A.20}$$

$$S^\wedge(\mathbf{r} = 0, \tau) = 0 . \tag{A.21}$$

Essa última condição pode ser facilmente compreendida a partir do fato que a isotropia de $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ implica que $I_{\mathbf{k}}(\tau)$ não depende da posição angular do vetor \mathbf{k}_\perp : então temos $\int d\mathbf{k} k_x k_y I_{\mathbf{k}}(\tau) \sim \int_0^\infty dk_\perp k_\perp^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi = 0$. Finalmente $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau) &= \int d\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} I_{\mathbf{k}}(\tau) = \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} \frac{k_{\perp}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{\perp}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} I_{\mathbf{k}}(\tau) \\
&= \begin{pmatrix} S^{\perp}(\mathbf{r} = 0, \tau) & 0 & 0 \\ 0 & S^{\perp}(\mathbf{r} = 0, \tau) & 0 \\ 0 & 0 & S^{\parallel}(\mathbf{r} = 0, \tau) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Concluimos então que, com a simetria considerada, as únicas componentes não nulas de $\mathbf{S}(\mathbf{r} = 0, \tau)$ estão na diagonal do tensor diádico (2.12).

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO SOBRE OS VETORES DE ONDA PERPENDICULARES

Apresentamos aqui o cálculo explícito da integral em k_{\perp} na expressão (5.3a). Primeiramente, os expoentes podem ser ordenados de acordo com as potências de k_{\perp} :

$$\mathbb{F} = e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^4 e^{\gamma k_{\perp} - \beta k_{\perp}^2}, \quad (\text{B.1})$$

onde β e γ estão definidos em (5.4) e (5.5). Usando a fórmula (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1980)

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 + \gamma x} = (2\beta)^{-\nu/2} \Gamma(\nu) e^{\gamma^2/8\beta} D_{-\nu} \left(\frac{-\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right), \quad (\text{B.2})$$

com $\Gamma(5) = 4!$, a integral \mathbb{F} pode ser escrita em termos da função parabólica cilíndrica D_{-5} , isto é,

$$\mathbb{F} = e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} (2\beta)^{-5/2} \Gamma(5) e^{Z^2/4} D_{-5}(Z), \quad (\text{B.3})$$

com a variável

$$Z \equiv -\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}. \quad (\text{B.4})$$

Da fórmula de recorrência (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1980)

$$D_{p-1}(Z) = \frac{Z}{p} D_p(Z) - \frac{1}{p} D_{p+1}(Z) \quad (\text{B.5})$$

obtemos a expressão explícita de $D_{-5}(Z)$

$$4! D_{-5}(Z) = (3 + Z^2) D_{-1}(Z) - Z(5 + Z^2) D_{-2}(Z) \quad (\text{B.6})$$

em termos das funções elementares (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1980)

$$D_{-1}(Z) = e^{Z^2/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right), \quad (\text{B.7})$$

$$D_{-2}(Z) = e^{Z^2/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-Z^2/2} - Z \operatorname{erfc}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) \right\}, \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2} \quad (\text{B.9})$$

é o complemento da função erro

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as expressões (B.7) e (B.8) no resultado (B.6), obtemos

$$4! D_{-5}(Z) = -Z(5 + Z^2) e^{-\frac{Z^2}{4}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{+\frac{Z^2}{4}} (Z^4 + 6Z^2 + 3) \operatorname{erfc}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right), \quad (\text{B.11})$$

e de (B.3) e (B.4) obtemos (5.3b).

APÊNDICE C

INTEGRAÇÃO SOBRE AS FREQUÊNCIAS

Fazemos aqui a integração sobre as frequências em (5.13). Podemos escrever

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 \quad ,$$

onde

$$\mathbb{H}_1(v_D, v_\alpha, v_{\parallel}) = 3\beta^{-5/2} \int_0^\infty d\omega e^{-C\omega^2} [3 - B\omega^2] e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} \frac{E\omega^3}{12} [5 + 2E^2\omega^2] \quad , \quad (\text{C.1})$$

que por sua vez envolve a exponencial de (use (5.16))

$$a_0 \equiv C + \frac{1}{2\Delta\omega^2} = \frac{1}{2\Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2\Delta\omega^2} \quad , \quad (\text{C.2a})$$

e também

$$b_0 \equiv \frac{a_0}{E^2} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta k_{\parallel}^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}} - \frac{1}{v_\alpha} \right)^2 \right] \left[1 + 2h \frac{\Delta\omega^2}{v_D^2} \right] \quad , \quad (\text{C.2b})$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2(v_D, v_\alpha, v_{\parallel}) &= 3\beta^{-5/2} \int_0^\infty d\omega e^{-C\omega^2} \omega^2 [3 - B\omega^2] e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}} e^{E^2\omega^2} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[\frac{4}{3} E^4 \omega^4 + 4E^2\omega^2 + 1 \right] \{1 + \text{erf}(E\omega)\} \quad , \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

que envolve a exponencial de (use (5.17))

$$a \equiv C + \frac{1}{2\Delta\omega^2} - E^2 \quad . \quad (\text{C.4})$$

A integral (C.1) pode ser escrita como

$$\mathbb{H}_1 = \beta^{-5/2} \frac{E}{4} [15 I_3(a_0) + (6E^2 - 5B) I_5(a_0) - 2BE^2 I_7(a_0)] , \quad (\text{C.5})$$

em termos das integrais elementares $I_{2n+1}(a_0)$ definidas por

$$I_{2n+1}(a_0) \equiv \int_0^\infty d\omega e^{-a_0 \omega^2} \omega^{2n+1} = \frac{n!}{2 a_0^{n+1}} , \quad (\text{C.6})$$

i.e., explicitamente

$$I_3(a_0) = \frac{1}{2 a_0^2} , \quad (\text{C.6a})$$

$$I_5(a_0) = \frac{1}{a_0^3} , \quad (\text{C.6b})$$

$$I_7(a_0) = \frac{3}{a_0^4} , \quad (\text{C.6c})$$

com a propriedade

$$I_{2n+1}\left(b_0 \equiv \frac{a_0}{E^2}\right) = E^{2n+2} I_{2n+1}(a_0) . \quad (\text{C.7})$$

Obtemos então

$$\mathbb{H}_1 = \frac{\beta^{-5/2}}{4} \frac{1}{E^3} \left[15 I_3(b_0) + \left(6 - 5 \frac{B}{E^2} \right) I_5(b_0) - 2 \frac{B}{E^2} I_7(b_0) \right] , \quad (\text{C.8})$$

que é ímpar em E , então ímpar na velocidade paralela.

A integral (C.3) pode também ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2 &= \beta^{-5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \\ &\times \left[3 W_2(a, E) + (12 E^2 - B) W_4(a, E) + 4 E^2 (E^2 - B) W_6(a, E) - \frac{4}{3} B E^4 W_8(a, E) \right] , \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

em termos das integrais $W_{2n}(a, E)$ definidas por

$$W_{2n}(a, E) \equiv I_{2n}(a) + U_{2n}(a, E) , \quad (\text{C.10})$$

envolvendo as integrais elementares

$$I_{2n}(a) \equiv \int_0^\infty d\omega e^{-a\omega^2} \omega^{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{\partial}{\partial a} I_{2(n-1)}(a) , \quad (\text{C.11})$$

i.e.,

$$I_2(a) = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad (\text{C.11a})$$

$$I_4(a) = \frac{3}{2^3 a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad (\text{C.11b})$$

$$I_6(a) = \frac{5!!}{2^4 a^3} \sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad (\text{C.11c})$$

$$I_8(a) = \frac{7!!}{2^5 a^4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad (\text{C.11d})$$

com a propriedade

$$I_{2n}\left(\frac{a}{E^2}\right) = |E|^{2n+1} I_{2n}(a) , \quad (\text{C.11e})$$

e as seguintes integrais da função erro:

$$U_{2n}(a, E) = \int_0^\infty d\omega e^{-a\omega^2} \omega^{2n} \operatorname{erf}(E\omega) . \quad (\text{C.12a})$$

Uma vez que a quantidade E tem o sinal de v_{\parallel} , é importante descrever (C.10) com o seu sinal, na forma

$$U_{2n}(a, E) = \operatorname{sign}(E) \int_0^\infty d\omega \omega^{2n} e^{-a\omega^2} \operatorname{erf}(|E|\omega) = \frac{\operatorname{sign}(E)}{|E|^{2n+1}} V_{2n} \left(b \equiv \frac{a}{E^2} \right) , \quad (\text{C.12b})$$

onde definimos as integrais elementares da função erro

$$V_{2n}(b) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{2n} e^{-bx^2} \operatorname{erf}(x) \quad (\text{C.13})$$

em termos do parâmetro

$$b \equiv \frac{a}{E^2} = -1 + b_0 \quad (\text{C.14})$$

dado explicitamente em (5.18).

As integrais (C.13) podem ser calculadas a partir do conhecimento das integrais básicas (GRADSHTEYN e RYZHIK, 1980)

$$V_2(b) = I_2(b) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [b^{-3/2} z(b) - b^{-1} (1+b)^{-1}] , \quad (\text{C.15})$$

onde

$$z(b) \equiv \operatorname{arctg} \sqrt{b} , \quad (\text{C.16})$$

e por derivação encontramos

$$V_{2n+2}(b) = -\frac{\partial}{\partial b} V_{2n}(b) , \quad (\text{C.17})$$

i.e., de (C.15)

$$\begin{aligned} V_4(b) &= -\frac{\partial}{\partial b} V_2(b) \\ &= I_4(b) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{3}{2} b^{-5/2} z(b) - \frac{3}{2} b^{-2} (1+b)^{-1} - b^{-1} (1+b)^{-2} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

e também

Substituindo essas expressões em (C.9), e usando $1 + b \equiv b_0$ (de (C.14)), obtemos finalmente a quantidade \mathbb{H}_2 na forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_2 = & \frac{3\beta^{-5/2}\sqrt{\pi}}{8|E|^3} \left\{ 3 \left[(1 + s_E) I_2(b) - \frac{s_E}{2\sqrt{\pi}} \{b^{-3/2} z(b) - b^{-1} b_0^{-1}\} \right] \right. \\
& + \left(12 - \frac{B}{E^2} \right) \left[(1 + s_E) I_4(b) - \frac{s_E}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{3}{2} b^{-5/2} z(b) - \frac{3}{2} b^{-2} b_0^{-1} - b^{-1} b_0^{-2} \right\} \right] \\
& + 4 \left(1 - \frac{B}{E^2} \right) \left[(1 + s_E) I_6(b) - \frac{s_E}{2\sqrt{\pi}} \right. \\
& \times \left. \left\{ -\frac{5!!}{2^2} b^{-7/2} z(b) - \frac{5!!}{2^2} b^{-3} b_0^{-1} - \frac{5}{2} b^{-2} b_0^{-2} - 2b^{-1} b_0^{-3} \right\} \right] \\
& - \frac{4}{3} \frac{B}{E^2} \left[(1 + s_E) I_8(b) - \frac{s_E}{2\sqrt{\pi}} \right. \\
& \times \left. \left. \left\{ -\frac{7!!}{2^3} b^{-9/2} z(b) - \frac{7!!}{2^3} b^{-4} b_0^{-1} - \frac{7!!}{32^2} b^{-3} b_0^{-2} - 7b^{-2} b_0^{-3} - 6b^{-1} b_0^{-4} \right\} \right] \right\} , \\
& \hspace{20em} (C.22)
\end{aligned}$$

onde b e b_0 estão definidos em (5.18), B em (5.15), e E em (5.17).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDREOLETTI J., LAVIRON C., OLIVAIN J., PECQUET A.L., GERVAIS F., GRESILLON D., HENNEQUIN P., QUEMENEUR A. e TRUC A. (1989) EURATOM-CEA-FC Report 1365, Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache (France).
- ARTSIMOVICH L.A. (1972) *Nuclear Fusion* **12**, 215.
- BEALL J.M., KIM Y.C. e POWERS J. (1982) *J. Appl. Phys.* **53**(6), 3933.
- CORSSIN S. (1959) in "Atmospheric Diffusion and Air Pollution", eds. F.N. Frenkiel e P.A. Sheppard, Academic Press, New York, p. 161.
- DUPREE T.H. (1966) *Phys. Fluids* **9**, 1773.
- DUPREE T.H. (1967) *Phys. Fluids* **14**, 1492.
- DUPREE T.H. (1972) *Phys. Fluids* **15**, 334.
- FIEDLER-FERRARI N., MISGUICH J.H. e BALESCU R. (1990) EURATOM-CEA-FC Report 1388, Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache (France).
- FURTH H.P. (1975) *Nuclear Fusion* **15**, 487.
- GRADSHTEYN I.S. e RYZHIK I.M. (1980) "Table o Integrals, Series, and Products", Academic Press, New York.
- MISGUICH J.H. e BALESCU R. (1975) *J. Plasma Phys.* **13**, 385.
- MISGUICH J.H. e BALESCU R. (1982) *J. Plasma Phys.* **24**, 289.
- MISGUICH J.H., BALESCU R., PÉCSELI H.L., MIKKELSEN T., LARSEN S.E. e QIU XIAOMING (1987) *Plasma Phys. & Contr. Fusion* **29**, 825.
- OLIVAIN J. (1989) "Electrostatic Turbulence Observed in Tokamaks, followed by personal Comments" p. 49, in Proc. Cadarache Workshop on Electrostatic Turbulence, EURATOM-CEA-FC Report 1381, Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache (France).

- PÉCSELI H.L. e TRULSEN J. (1989) *Phys. Fluids* **B1**(8), 1616.
- PETTINI M., VULPIANI A., MISGUICH J.H., DE LEENER M., ORBAN J. e
BALESCU R. (1988) *Phys. Rev.* **A38**, 344.
- RITZ Ch.P., BENGTON R.D., LEVINSON S.J. e POWERS E.J. (1984) *Phys.*
Fluids **27**, 2956.
- RITZ Ch.P., BROWER D.L., RHODES T.L., BENGTON R.D., LEVINSON S.J. *et*
al. (1987) *Nuclear Fusion* **27**, 1125.
- RITZ Ch.P., POWERS E.J., RHODES T.L., BENGTON R.D., GENTLE K.W. *et*
al. (1988) *Rev. Sci. Instrum.* **59**(8), 1739.
- SALAT A. (1988) *Phys. Fluids* **31**, 1499.
- TFR GROUP (1977) in Proc. 3rd Int. Congress on Waves and Instabilities, Palaiseau,
PMI Report 816, 82.
- TFR GROUP e TRUC A. (1984) *Plasma Phys. & Contr. Fusion* **26**, 1045.
- VAN KAMPEN N.G. (1981) "*Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-
Holland, p. 392.
- WEINSTOCK J. (1969) *Phys. Fluids* **12**, 1045.
- WEISEN H., HOLLENSTEIN Ch. e BEHN R. (1988) *Plasma Phys. & Contr.*
Fusion **30**(3), 293.
- WOOTTON A.J. (1989) The University of Texas, Austin, Report FRCR 340.
- ZWEBEN S.J. e GOULD R.W. (1985) *Nuclear Fusion* **25**, 171.