

N.T. 657

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

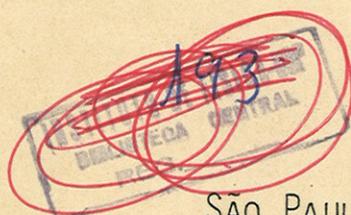
B.I.F. - IISF

RESTAURAÇÃO DE SIMETRIA
EM TEORIA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA

GIL DA COSTA MARQUES

LIVRE
DOCÊNCIA

TESE DE LIVRE-DOCÊNCIA
APRESENTADA AO INSTITU
TO DE FÍSICA DA UNIVER
SIDADE DE SÃO PAULO



SÃO PAULO
1983

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: T 657

SBI-IFUSP



305M810T0657



À Silvana, Juliana, Mário, Alberto e André

AGRADECIMENTOS

Ao Ivan Ventura, por ter sido o companheiro e colaborador mais constante ao longo dos últimos 15 anos. Devo a êle parte da minha formação e algumas das poucas idéias da minha produção científica.

Aos amigos Adilson José da Silva, Carlos Aragão de Carvalho Filho, Humberto França, Ariovaldo Camargo, Ronald Shellard, Adriano Natale, Carlos Escobar, Clovis Ferraz Wey, Oscar Éboli, Dionízio Bazeia e Orfeu Bertolami por terem partilhado comigo do subproduto mais palpável da investigação científica bem como do processo que nos leva a êle.

Aos membros do Departamento de Física Matemática pelas discussões e apoio.

À Janete Vaz pela datilografia da Tese.

À FAPESP e ao CNPq.

RESTAURAÇÃO DE SIMETRIA EM TEORIA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA.

I - INTRODUÇÃO.....	1
II - TEORIA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA.....	5
A Função de Partição e a Ação Efetiva.....	5
O Potencial Efetivo.....	10
Expansão em Loops.....	11
O Método Semi-clássico.....	13
O Método Perturbativo.....	16
III - O POTENCIAL EFETIVO À TEMPERATURA FINITA.....	18
Restauração de Simetria.....	21
IV - DECAIMENTO DO FALSO VÁCUO NUM MODELO SIMPLES.....	31
O Vácuo Metaestável e o Modelo.....	31
Temperatura Zero.....	33
Temperatura Finita.....	41
V - SÓLITONS E TRANSIÇÃO DE FASE.....	46
Renormalização da Energia Livre Associada à Parede.....	53
VI - APLICAÇÕES A COSMOLOGIA.....	57
Física de Partículas Elementares e Cosmologia.....	57
Transições de Fase Cosmológicas.....	61
VII - CONCLUSÕES.....	69
Apêndice.....	72
Notas de Rodapé.....	76
Referências.....	77
Figuras.....	82

I - INTRODUÇÃO

Quando se baixa a temperatura de alguns materiais , (por exemplo o titanato de Bário - $BaTi_3O_3$ ⁽¹⁾) sua estrutura cristalina pode ser alterada como resultado do deslocamento dos átomos da posição de equilíbrio, ocasionando assim uma mudança de simetria da rede. Dessa forma, a rede exibirá uma determinada simetria para temperaturas acima de uma temperatura - dita crítica (T_c) - e exibirá outra simetria para temperaturas abaixo da temperatura crítica. O sistema possui duas fases de simetria. É de se esperar, portanto, que quando a temperatura do sistema for baixada até valores inferiores a T_c o sistema experimente (ou exiba) uma transição de fase.

A teoria das interações fracas de Glashow- Weinberg-Salam⁽²⁾ é uma teoria de gauge não abeliana, baseada no grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$. Para reproduzir a fenomenologia de baixas energias das interações fracas (Teoria V-A) se faz necessária, no entanto, a quebra espontânea dessa simetria.

Teorias Unificadas das interações fracas, eletromagnéticas e fortes também utilizam o mecanismo de quebra espontânea de simetria⁽³⁾. Seja G o grupo de simetria da Teoria Grand Unificada. Para reproduzir a fenomenologia de "baixas energias" da teoria das interações fortes, fracas e eletromagnéticas baseada no grupo de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, podemos prever uma sucessão de quebras de simetria seguindo o esquema

$$G \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \equiv SU(3) \times U(1)$$

iii

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

onde G_n é um subgrupo de G e G_{n-1} é um subgrupo de G_n ⁽⁴⁾

Como já vimos no exemplo simples do primeiro parágrafo, uma simetria quebrada a temperaturas baixas pode ter essa simetria restaurada (ou por outra, pode exibir uma simetria diferente) a temperaturas mais elevadas. Esperamos, assim, que o sistema descrito por uma teoria cuja simetria é quebrada espontaneamente deva exibir duas fases: Uma fase na qual a simetria é quebrada e o parâmetro de ordem é diferente de zero

$$\langle \psi \rangle = a(\tau) \quad (\tau < \tau_c)$$

e outra fase na qual a simetria é restaurada. Nessa fase, o parâmetro de ordem assume o valor zero. Isto é

$$\langle \psi \rangle = 0 \quad (\tau \geq \tau_c)$$

No caso das teorias de Gauge já discutidas, o parâmetro de ordem é o valor esperado no vácuo de um dos campos de Higgs.

Sendo M_W a escala na qual ocorre a quebra da simetria à temperatura zero, espera-se que a temperatura crítica seja da ordem de M_W .

Admitindo o sistema a temperaturas muito altas e o resfriando, devemos esperar então que o mesmo exiba uma transição de fase. Se a imagem proposta pelo modelo cosmológico padrão estiver correta, o candidato mais natural para esse sistema seria, nada mais, nada menos, que o universo. O próprio universo teria, assim, experimentado transições de fa

se ditas transições de fase cosmológicas. Tais transições de fase teriam, como discutido a seguir, implicações para o universo hoje.

Nesse trabalho procuraremos abordar, através de um método quantitativo - essencialmente o método semiclássico - o problema da restauração de simetria em Teoria de Campos à Temperatura finita e a transição de fase que tem lugar quando isso ocorre. Por uma questão de simplicidade estudaremos aqui apenas a restauração de uma simetria discreta.

A intenção primeira do nosso trabalho é de colocar em termos bem claros uma nova proposta para o mecanismo pelo qual o sistema restaura a simetria. Nessa proposta, configurações de campo topologicamente não triviais vêm a ter um papel essencial.

Para servir de introdução à Teoria de Campos à temperatura finita, fizemos uma breve resenha desse tópico no capítulo II. Os tópicos ali apresentados foram selecionados de forma a fornecerem subsídios para as seções subsequentes e sempre voltados para a questão da quebra e restauração de simetria em Teoria de Campos.

No capítulo III discutiremos o comportamento do potencial efetivo à Temperatura Finita. A análise indica claramente que a restauração de simetria deve acontecer a altas temperaturas. Alguns aspectos importantes a respeito do potencial efetivo e para os quais se faz vista grossa na literatura (numa hipótese otimista) são apresentados ali.

O comportamento do potencial efetivo a altas temperaturas leva à imagem do decaimento do falso vácuo. O modelo apresentado no capítulo IV ilustra a maneira de calcular es

sa taxa em dois importantes limites (altas e baixas temperaturas). Apesar de ser um modelo não realístico, cremos que ele é importante porque permite entender alguns aspectos da taxa de decaimento e da física adjacente.

No capítulo V mostramos que configurações de campo topologicamente não triviais, como solitons, têm um papel relevante a altas temperaturas. De fato, é possível prever que quando surgem no sistema elas levam à restauração da simetria. Os cálculos dentro da aproximação semi-clássica mostram que, à uma temperatura crítica T_c , o surgimento de uma parede é altamente favorecido.

Dentro da imagem de um universo extremamente quente em tempos primordiais, as transições de fase esperadas em Teoria de Campos teriam implicações cosmológicas. Fazemos um rápido apanhado dessas implicações no capítulo VI onde mostramos também que a nossa proposta parece, dentro desse contexto, estar mais em acordo com os dados observacionais.

Completamos o trabalho com uma seção de conclusões no capítulo VII.

II - TEORIA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA

(II-1) - A Função de Partição e a Ação Efetiva

As propriedades termodinâmicas de um sistema podem ser inferidas, dentro do Ensemble canônico, a partir da função de partição $Z(T)$ definida por

$$Z(\tau) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \quad (2.1)$$

onde $\beta = \frac{1}{T}$ (i) e \hat{H} é o operador Hamiltoniano descrevendo o sistema.

O formalismo devido a Feynmann⁽⁵⁾ pode ser utilizado dentro desse contexto para escrevermos a função de partição como uma integral sôbre caminhos. Consideremos, a título de exemplificação, o caso de um sistema de partículas não interagindo entre si, mas sujeita a um potencial $V(x)$ (unidimensional por simplicidade). Nessas circunstâncias, a função de partição relevante se escreve

$$Z(\tau) = N \int_{x(\beta) = x(0)} \mathcal{D}[x(t)] e^{-\int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right]} \quad (2.2)$$

Onde N em (2.2) é um fator de normalização.

Vê-se facilmente que (2.2) é a versão euclidiana da função de Green de dois pontos $G(x_2=x_1, t, x_1, 0)$ da Mecânica Quântica. As condições de contorno periódicas de (2.2) decorrem do traço em (2.1).

A extensão, para o caso em que as partículas intera

gem entre si envolvendo assim um número maior de Graus de Liberdade, pode ser encontrada, por exemplo, na ref. (6).

A extensão para o caso de um número infinito de Graus de Liberdade (Teoria de Campos) pode ser encontrada na ref. (7). Para um modelo envolvendo apenas um campo escalar, podemos escrever a função de partição como uma soma sobre configurações de campo. Isto é

$$Z(\tau) = N \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S_E[\varphi, \partial\varphi]} \quad (2.3)$$

onde N é um fator de Normalização e S_E é a ação euclideana

$$S_E[\varphi, \partial\varphi] \equiv \int dx_4 \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right] \quad (2.4)$$

e a integral em (2.3) deve ser realizada sobre configurações de campo satisfazendo às condições de contorno periódicas

$$\varphi(\beta, x) = \varphi(0, x) \quad (2.5)$$

Se efetuarmos a substituição $\xi = \beta^{-1} x_4$ então, a partir de (2.4) e (2.5) podemos escrever (2.3) sob a forma

$$Z(\tau) = N \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\beta \int_0^1 d\xi \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right\}} \quad (2.6)$$

$\varphi(1, x) = \varphi(0, x)$

Pode-se ver, a partir de (2.6), que para temperatu-

ras muito altas as configurações de campos relevantes são aquelas que não dependem de ξ , ou seja, as configurações relevantes nesse limite são as "estáticas"⁽⁸⁾.

Além da função de partição (2.1) é de interesse também a determinação de valores esperados de observáveis no Ensemble. O valor esperado do observável \hat{O} é dada, no ensemble canônico, por

$$\langle O \rangle \equiv \frac{\text{Tr } \hat{O} e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}} \quad (2.7)$$

Assim, por exemplo, o valor esperado da energia

$$\langle H \rangle = \frac{\text{Tr } \hat{H} e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}} = - \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z) \quad (2.8)$$

Em estreita analogia com a teoria de campos usual, podemos introduzir funções de Green térmicas de N pontos

$$G_N^\beta(x_1, \tau_1, \dots, x_N, \tau_N) \equiv \langle \varphi(x_1, \tau_1) \varphi(x_2, \tau_2) \dots \varphi(x_N, \tau_N) \rangle \quad (2.9)$$

onde as médias de Gibbs em (2.9) são definidas em (2.7).

Ainda em completa analogia com o método já conhecido da Teoria de Campos com a métrica de Minkowski, podemos introduzir um funcional gerador de funções de correlação térmicas que designaremos por $Z^\beta(J)$. Sua definição é^(9,13)

$$Z^\beta[J] = \frac{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} e^{i \int d^4x \varphi(x) \bar{J}(x)}}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}} \quad (2.10)$$

As funções de correlação térmicas de N pontos defi-

nidas em (2.9) são obtidas a partir de $Z^{\beta}(J)$ através de derivadas funcionais, ou seja:

$$G_{x_n}(x_1, \tau_1, \dots, x_n, \tau_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z^{\beta}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.11)$$

É possível também introduzir o funcional gerador das funções de Green conexas designado aqui por $F^{\beta}(J)$. A definição de $F^{\beta}(J)$ é (13)

$$F^{\beta}[J] = -i \ln Z^{\beta}[J] \quad (2.12)$$

Finalmente podemos introduzir o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula (designadas aqui por $\Gamma_n^{\beta}(x_1, \dots, x_n)$) (13). Denominaremos ação efetiva tal gerador e o representaremos por $\Gamma^{\beta}[\bar{\psi}]$. Dessa definição segue que

$$\Gamma^{\beta}[\bar{\psi}] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \Gamma_n^{\beta}(x_1, \dots, x_n) \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \quad (2.13)$$

A maneira de introduzir a ação efetiva a rigor seria defini-la a partir de uma transformação de Legendre de $F^{\beta}(J)$ com respeito à variável $\bar{\psi}$; ou seja

$$\Gamma^{\beta}[\bar{\psi}] = F^{\beta}[J] - \int dx \bar{\psi}(x) J(x) \quad (2.14)$$

Derivando (2.14) com respeito a J obtem-se que

$$\bar{\psi}(x) = \langle \psi(x) \rangle_J = \frac{\delta F^{\beta}[J]}{\delta J(x)} \quad (2.15)$$

Se derivarmos funcionalmente (2.14) com respeito a $\bar{\psi}(x)$ obtemos

$$\bar{J}(x) = - \frac{\delta \Gamma^P[\bar{\psi}]}{\delta \bar{\psi}(x)} \quad (2.16)$$

A equação (2.15) é interessante porque ela permite estabelecer um critério para quebra espontânea de simetria.⁽¹⁰⁾ Se uma simetria é espontaneamente quebrada, então, no limite de campos externos tendendo a zero, o valor esperado no vácuo do campo $\bar{\psi}$ tende a um valor diferente de zero, ou seja:

$$\bar{\psi}(x, \bar{J}) \equiv \frac{\delta F[\bar{J}]}{\delta \bar{J}(x)} \underset{\bar{J} \rightarrow 0}{\sim} v \neq 0 \quad (2.17)$$

Em termos de $\Gamma^P[\bar{\psi}]$, a condição para simetria quebrada é que $\Gamma^P[\bar{\psi}]$ tenha um extremo para a configuração de campo $\bar{\psi} = v$, isto é:

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} \right|_{\bar{\psi} = v \neq 0} = 0 \quad (2.18)$$

Se a simetria não for espontaneamente quebrada, então

$$\bar{\psi}(x, \bar{J}) \underset{\bar{J} \rightarrow 0}{\sim} 0 \quad (2.19)$$

A conclusão é que, para uma teoria cuja simetria é quebrada espontaneamente a $T = 0$, o critério para que haja restauração de simetria, à temperatura finita, é que a ação efetiva (de acordo com (2.19)) tenha um mínimo para a configuração $\bar{\psi} = 0$.

(II-2) - O Potencial Efetivo

Como vimos na seção precedente, a questão da restauração de simetria exige, basicamente, o conhecimento da ação efetiva definida em (2.13). Procuraremos mostrar nessa seção como, dentro de certas aproximações, podemos ter alguma informação sobre a ação efetiva.

Sejam $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ as funções irreduzíveis de uma partícula, no espaço dos momentos. Fazendo uma expansão de Taylor nas proximidades da configuração $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ podemos escrever

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n p_\mu^j \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_\mu^j}(0, \dots, 0) + \dots \quad (2.20)$$

Levando a expansão (2.20) em (2.13) obteremos a seguinte expansão para a ação efetiva⁽¹¹⁾

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x \left[-V(\varphi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 Z(\varphi) + \dots \right] \quad (2.21)$$

onde \dots , em (2.21) representa os demais termos da expansão de Taylor (2.20) não contidas nos dois primeiros.

$V(\varphi)$ em (2.21) é conhecido como o potencial efetivo e sua expressão é portanto

$$V(\varphi) = \sum_n \frac{1}{n!} \varphi^n \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) \quad (2.22)$$

Outra maneira de obter o potencial efetivo seria defini-lo como a ação efetiva para uma configuração de campo constante dividida pelo volume do sistema⁽¹³⁾.

(II-3) - Expansão em loops

Um dos métodos aproximados mais úteis no estudo da restauração de simetria a temperatura finita é a expansão em loops. Isto decorre do fato do potencial efetivo ser determinado exatamente, até um loop, quando expandimos as funções de Green em número de loops. Vamos ilustrar o procedimento para a teoria $\lambda\psi^4$ à temperatura zero.

Seja

$$\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) = \frac{1}{2} \int \sum_i (\partial_i \psi)^2 + \frac{m^2}{2} \psi^2 + \frac{\lambda}{4!} \psi^4 \quad (2.23)$$

Em zero loop os únicos gráficos relevantes são



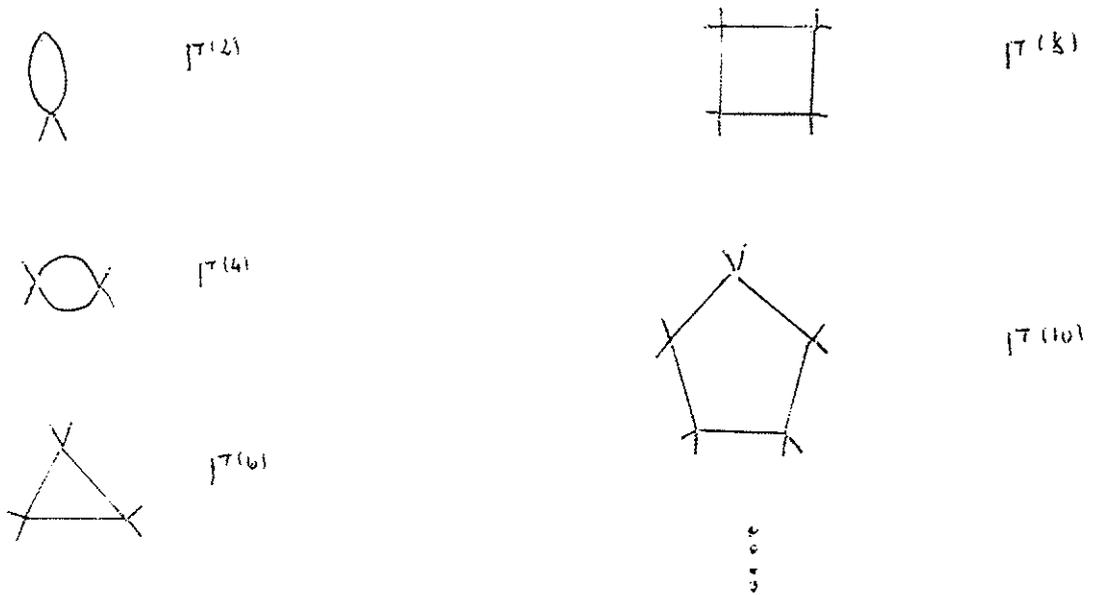
E portanto em zero loop, obtemos

$$\Gamma[\bar{\psi}] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \int \sum_i (\partial_i \bar{\psi})^2 + \frac{m^2}{2} \bar{\psi}^2 + \frac{\lambda}{4!} \bar{\psi}^4 \right] \quad (2.24)$$

O potencial efetivo é pois, em zero loop

$$\Upsilon^0(\psi) = \frac{m^2}{2} \psi^2 + \frac{\lambda}{4!} \psi^4 \quad (2.25)$$

Em um loop temos os seguintes gráficos



Levando-se em conta as regras de Feynman bem como fatores de análise combinatória, tendo em vista o número de maneiras distintas para distribuímos os ϕ_j 's, o resultado para o potencial efetivo em 1 loop $\bar{e}^{(10,11)}$

$$\Gamma^{(1)}(\psi) = - \sum_n \frac{1}{2n} \left(-\frac{\lambda\psi^2}{2} \right)^n \int d\omega \frac{1}{(q^2+m^2)^n} \quad (2.26)$$

O potencial efetivo se escreve então, até um loop

$$\bar{V}(\psi) = \frac{m^2\psi^2}{2} + \frac{\lambda\psi^4}{4!} + \frac{1}{2} \int d\omega \ln \left(1 + \frac{\lambda\psi^2/2}{q^2+m^2} \right) \quad (2.27)$$

A menos de uma constante aditiva, (contribuição da energia de ponto zero do vácuo) podemos escrever (2.27) sob a forma

$$\bar{V}(\psi) = \frac{m^2\psi^2}{2} + \frac{\lambda\psi^4}{4!} + \frac{1}{2} \int d\omega \ln \left(q^2+m^2 + \frac{\lambda\psi^2}{2} \right) \quad (2.28)$$

Tendo em vista que os dois primeiros termos da \bar{e}

rie (2.25) divergem, o potencial efetivo deve ainda ser renormalizado. Isso será feito quando investigarmos o potencial efetivo à temperatura finita.

(II-4) - O método semi-clássico

O método semi-clássico se baseia no fato de que, no limite $\hbar \rightarrow 0$, as configurações de campos mais relevantes são aquelas que minimizam a ação euclideana. Ou seja, são as configurações de campo que satisfazem as equações de movimento (ii)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \psi_c(\tau, \mathbf{x}) = V'[\psi_c(\tau, \mathbf{x})] \quad (2.29)$$

Dentre as soluções de (2.29), pode-se mostrar que aquelas que são relevantes para $T \rightarrow 0$ são aquelas que exibem uma simetria $O(4)$ (12) (ou seja, soluções dependentes apenas da variável $\rho \equiv \sqrt{\mathbf{x}^2 + \tau^2}$). Isso decorre do fato de que estas têm menor ação.

No limite de altas temperaturas, por outro lado, como se pode ver de (2.6), as soluções importantes são aquelas independentes da variável τ . Desse argumento decorre que, para altas temperaturas, estaremos interessados em soluções da equação:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi_c(\mathbf{x}) = V'(\psi_c(\mathbf{x})) \quad (2.30)$$

Note-se que as soluções de (2.30) satisfazem trivialmente às condições de contorno periódicas (2.5).

Assim, em ordem zero da aproximação semi-clássica, podemos escrever a função de partição associada a uma configuração de campo clássica como:

$$\bar{Z}^0(\tau) = e^{-\frac{E}{T}} \quad (2.31)$$

onde E é a energia associada à configuração clássica solução de (2.30).

Até primeira ordem da expansão em potencia de \hbar podemos escrever formalmente

$$\bar{Z}^{(1)}(\tau) = e^{-\frac{1}{T} (E' - TS(\tau))} \quad (2.32)$$

onde $E' = E +$ correções quânticas e $S(T)$ será denominada de entropia associada à configuração clássica levando em conta as flutuações em torno da mesma.

Do ponto de vista de integração funcional a maneira de se determinar $Z^{(1)}$ é a seguinte: seja $\eta(x, \epsilon)$ uma configuração de campo tal que

$$\psi(x, \epsilon) = \psi_c(x, \epsilon) + \eta(x, \epsilon) \quad (2.33)$$

Substituindo-se (2.33) em (2.3) e expandindo-se até 2ª ordem nas flutuações poderemos escrever

$$\bar{Z}^{(1)}(\tau) = e^{-\frac{E}{T}} \int_{\eta(a,x)=\eta(b,x)} \int \mathcal{D}\eta \, e^{-\int_0^B dt \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \eta \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2!} V''(\psi_c) \right) \eta \right\}} \quad (2.34)$$

Donde $Z^{(1)}$ poderá ser escrita formalmente como

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(\tau) &= e^{-\frac{E}{T}} \frac{1}{\|\det \hat{O}\|} = e^{-\frac{E}{T}} e^{-\frac{1}{2} \ln \det \hat{O}} \\ &= e^{-\frac{E}{T} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{O}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde \hat{O} é o operador

$$\hat{O} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V''(\varphi_c) \quad (2.36)$$

A energia livre associada à configuração de campo clássica será, assim, formalmente dada por

$$F(\tau) = \frac{E}{T} + \frac{T}{2} \text{Tr} \ln \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V''(\varphi_c) \right) \quad (2.37)$$

Dentre as configurações de campo clássicas, a mais trivial é a configuração de campo associada ao vácuo da teoria $\psi = \text{cte}$. Para uma teoria sem quebra espontânea o vácuo é descrito por $\psi = 0$. No setor do vácuo podemos então escrever

$$F^{\text{vacuo}} = \frac{TV}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\left(\frac{2m\bar{u}}{\beta} \right)^2 + k^2 + m^2 \right] \quad (2.38)$$

Efetuada agora a soma em n , utilizando a identidade^(13,iii)

$$\sum_n \ln \left\{ \left(\frac{2m\bar{u}}{\beta} \right)^2 + p^2 + m^2 \right\} = \beta \epsilon(p) + 2 \ln \left(1 - e^{-\beta \epsilon(p)} \right) \quad (2.39)$$

onde $\epsilon(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, obtemos o seguinte resultado para a energia livre por unidade de volume no setor do vácuo

$$\frac{F_{\text{vac}}}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon(k)}{2} + T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon(k)}) \quad (2.40)$$

Note-se que em (2.40) nós nos deparamos com o primeiro problema de divergências na teoria de campos a temperatura finita. A maneira de eliminá-la nesse caso é bem conhecida: o termo divergente é exatamente o termo de energia de ponto zero do vácuo. Subtraindo-o teremos

$$\frac{F_{\text{vac}}}{V} = T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon(k)}) \quad (2.41)$$

Esse resultado é aquele, usual, de um gás de Bose ideal.

(II-5) - O Método Perturbativo

Para o cálculo de funções de correlação de n pontos podemos recorrer ao método perturbativo como opção de aproximação.

Pode-se inferir um método baseado em diagramas de Feynman, bem como as regras de Feynman para a teoria de campos a temperatura finita. As diferenças, no que diz respeito à teoria de campos usual, não são grandes.

Uma primeira consequência das condições de contorno periódicas nas regras de Feynman é que, na decomposição de Fourier do campo livre, ao invés de uma integral de Fourier, teremos uma série, onde os valores possíveis ω_n são dados por

$$\omega_n = 2n\pi T = \frac{2n\pi}{\beta} \quad (2.42)$$

As regras de Feynman para a teoria de campos a temperatura finita podem, assim, ser obtidas diretamente das regras de Feynman usuais⁽¹⁴⁾, com as seguintes substituições

$$\begin{aligned} k_0 &\rightarrow i\omega_n \\ \int dk_0 &\rightarrow \frac{2\pi i}{\beta} \sum_n \\ (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+\dots) &\rightarrow (2\pi)^3 \frac{\beta}{i} \delta_{\omega_{n_1}+\omega_{n_2}+\dots} \delta^3(k_1+k_2+\dots) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Com fatores i vindo da rotação para o espaço Euclidiano.

III - O POTENCIAL EFETIVO À TEMPERATURA FINITA ⁽¹⁵⁾

Para determinarmos o potencial efetivo à temperatura finita utilizaremos um método alternativo àquele esboçado no capítulo (II). Ilustraremos o método determinando o potencial efetivo para a teoria $\lambda\phi^4$ cuja Lagrangeana é dada por (2.23). De acordo com (2.37) e (2.38) a energia livre associada a uma configuração de campo ϕ independente das variáveis X, χ_4 seria dada, formalmente, por

$$F(\varphi, T) = V \left[\frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right] + \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + k^2 + m^2 + \frac{\lambda \varphi^2}{2} \right] \quad (3.1)$$

Definimos o potencial efetivo como sendo a diferença entre as energias livres (3.1) e aquela do setor do vácuo dada por (2.40). Ou seja:

$$V(\varphi, T) \equiv \frac{\bar{F}(\varphi, T) - \bar{F}(\varphi=0, T)}{V} \quad (3.2)$$

De (3.1), (2.40) e (3.2) segue que

$$V(\varphi, T) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{\lambda/2 \varphi^2}{\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + k^2 + m^2 \right]} \right) \quad (3.3)$$

Obviamente o potencial efetivo (3.3) é mal definido pois exhibe problemas de divergências ultravioletas. Para que ele seja bem definido devemos adicionar parcelas envolvendo contratermos. Até um loop adicionamos os termos

$$V(\varphi, T) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\delta m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\delta \lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{\lambda/2 \varphi^2}{\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + k^2 + m^2 \right]} \right) \quad (3.4)$$

Os contratermos δm^2 e $\delta \lambda$ são determinados a partir das condições de renormalização impostas à temperatura zero (uma vez que o fato de estarmos trabalhando com a teoria à temperatura finita não introduz divergências adicionais à teoria de perturbações):

$$\left. \frac{d^2 V}{dy^2} \right|_{y=0, \bar{T}=0} \equiv \tilde{\Gamma}^{(2)}(0,0) = m^2 \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{d^4 V}{dy^4} \right|_{y=0, \bar{T}=0} \equiv \tilde{\Gamma}^{(4)}(0,0) = \lambda \quad (3.6)$$

onde m e λ são a massa e constante de acoplamento renormalizadas. As condições (3.5) e (3.6) implicam

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} + \delta m^2 + m^2 = m^2 \quad (3.7)$$

$$\lambda - \frac{3\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} + \delta \lambda = 0 \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8) segue que os contratermos são da
dos por

$$\delta \lambda = \frac{3\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 + m^2)^2} \quad (3.9)$$

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 + m^2)} \quad (3.10)$$

Assim, o potencial efetivo renormalizado se escreve

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(\varphi, T) = & \frac{m^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4!} + \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{\lambda/2 \varphi^2}{[k^2 + m^2 + (\frac{2m\pi}{\beta})^2]} \right) \\
 & - \frac{\lambda \varphi^2}{2} \int \frac{d^4 k}{k^2 + m^2} + \frac{\lambda^2 \varphi^4}{16} \int \frac{d^4 k}{(k^2 + m^2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Não é difícil ver a partir de (3.11) que $\tilde{V}(\varphi, T)$ é uma expressão fechada para a soma de todos os gráficos irreduzíveis de uma partícula (Renormalizados) tomados a momento zero quando expandidos até um loop. Isto é

$$\tilde{V}(\varphi, T) = \sum_n \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0, T) \varphi^n \tag{3.12}$$

É fácil ver ainda que, definindo a massa da partícula à temperatura finita por:

$$m^2(T) \equiv \frac{\partial^2 \tilde{V}(\varphi, T)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=0} \tag{3.13}$$

Então esse observável adquirirá uma dependência com a temperatura. Até um loop obtem-se

$$m^2(T) = m^2 + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega(k)} \left[\frac{e^{-\omega(k)/T}}{1 - e^{-\omega(k)/T}} \right] \tag{3.14}$$

Ao passo que definindo a constante de acoplamento da maneira usual

$$\lambda \equiv \tilde{\Gamma}^{(4)}(0, \dots, 0, T) \quad (3.15)$$

obtem-se uma constante de acoplamento dependente de temperatura. Até um loop o resultado é

$$\lambda(T) = \lambda + 3\lambda^2 \left(-m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[e^{\frac{\omega(k)T}{\hbar}} - 1 \right]} \right] \right) \quad (3.16)$$

Restauração de simetria

Com o intuito de verificarmos que um sistema cuja simetria é quebrada à temperatura zero pode ter sua simetria restaurada a altas temperaturas, analisaremos o comportamento do potencial efetivo à temperaturas finita.

Analisaremos o caso de uma teoria cuja simetria discreta ($\phi \rightarrow -\phi$) é quebrada espontaneamente. O modelo simples é aquele cujo potencial é dado por

$$V(\psi) = -\frac{\mu^2}{2} \psi^2 + \frac{\lambda}{4} \psi^4 \quad (3.17)$$

Note-se que apesar da teoria (3.17) exibir invariância sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ seu estado fundamental é descrito por uma das configurações de campo

$$\psi_v = \pm a \quad (3.18)$$

onde

$$a = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.19)$$

o qual obviamente não é invariante por tal transformação. A teoria (3.17) exhibe então uma quebra espontânea de simetria.

Se definirmos

$$\varphi_0(x) \equiv \psi(x) - a, \quad (3.20)$$

em termos de $\phi_0(x)$ podemos escrever

$$V(\varphi_0) = \frac{2\mu^2}{\lambda} \varphi_0^2 + \lambda a \varphi_0^3 + \frac{\lambda}{4} \varphi_0^4 \quad (3.21)$$

Vemos então que a Lagrangeana (3.17), escrita em termos do campo ϕ_0 , não exhibe a invariância sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ e que o campo físico ϕ_0 descreve partículas de massa⁽¹⁶⁾

$$m^2 = 2\mu^2 \quad (3.22)$$

Mostraremos que a simetria $\phi \rightarrow (-\phi)$ será restaurada a altas temperaturas. Para isso procuraremos estudar o comportamento do potencial efetivo a altas temperaturas.

Seguiremos formalmente os passos indicados anteriormente, obtendo a energia livre associada a uma configuração de campo constante ϕ . O resultado formal é:

$$F(\varphi, T) = V \left[-\frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] + \frac{V}{2\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^2 + k^2 - \mu^2 + 3\lambda \varphi^2 \right] \quad (3.23)$$

Lembrando que

$$\mu^2 = \lambda a^2 = \lambda \varphi_v^2 \quad (3.24)$$

a diferença entre (3.24) e a energia livre para a configuração $\phi = \phi_v$, dividida pelo volume, é dada por

$$V(\varphi, T) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_v^2) + \frac{1}{2\beta} \int_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{3\lambda(\varphi^2 - \varphi_v^2)}{\left[\left(\frac{2m\mu}{\beta}\right)^2 + k^2 + 2\mu^2\right]} \right) \quad (3.25)$$

O potencial efetivo renormalizado pode ser determinado acrescentando-se parcelas contendo contratermos. Até um loop bastam dois contratermos, C_2 e C_3 , a saber

$$V(\varphi, T) = -\frac{\mu^2}{2} (\varphi^2 - \varphi_v^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi^4 - \varphi_v^4) - \frac{C_2}{2} (\varphi^2 - \varphi_v^2) + \frac{C_3}{4} (\varphi^4 - \varphi_v^4) + \frac{1}{2\beta} \int_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{3\lambda(\varphi^2 - \varphi_v^2)}{\left[\left(\frac{2m\mu}{\beta}\right)^2 + k^2 + 2\mu^2\right]} \right) \quad (3.26)$$

Para determinarmos os contratermos C_2 e C_3 impomos as condições de renormalização à temperatura zero

$$\left. \frac{dV(\varphi, T=0)}{d\varphi} \right|_{\varphi = \varphi_v = a} = 0 \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{d^2V(\varphi, T=0)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \varphi_v = a} = 2\mu^2 \quad (3.28)$$

A primeira condição assegura que o potencial, a despeito das correções radiativas, terá o seu mínimo mantido, à

temperatura zero, no vácuo $\phi=a$.

A segunda condição estabelece que a massa física é $2\mu^2$.

A partir das condições (3.28) e (3.27) obtemos

$$C_3 = \frac{g\lambda^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \quad (3.29)$$

e

$$C_2 = \frac{3\lambda}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + 2\mu^2} + \frac{g\lambda\mu^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \quad (3.30)$$

A expressão final para o potencial efetivo renormalizado é portanto

$$\begin{aligned} V(\varphi, \tau) = & \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_v^2)^2 + \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{3\lambda (\varphi^2 - \varphi_v^2)}{k^2 + 2\mu^2 + \left(\frac{2m\tau}{\beta}\right)^2} \right) \\ & (\varphi^2 - \varphi_v^2) \frac{3\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2\mu^2} + (\varphi^2 - \varphi_v^2)^2 \frac{g\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando agora a identidade (2.39) encontramos de pois de somarmos sobre n

$$\begin{aligned}
 V(\varphi, T) = & \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \varphi_v^2)^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{k^2 + 2\mu^2 + 3\lambda(\varphi^2 - \varphi_v^2)} - \sqrt{k^2 + 2\mu^2} \right] \\
 & + (\varphi^2 - \varphi_v^2) \frac{3\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2\mu^2} + (\varphi^2 - \varphi_v^2)^2 \frac{9\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \\
 & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{k^2 + 2\mu^2 + 3\lambda(\varphi^2 - \varphi_v^2)}} \right) - \ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{k^2 + 2\mu^2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

A partir de (3.32) pode-se concluir que o potencial efetivo é mal definido, para qualquer temperatura, para valores de ϕ tais que

$$\varphi^2 < \frac{m^2}{3\lambda} \tag{3.33}$$

Isso ocorre porque para ϕ^2 nas condições (3.33) o potencial não é real, desenvolvendo uma parte imaginária.

Note-se também que, para qualquer temperatura

$$V(\varphi_v, T) = 0 \tag{3.34}$$

Para determinarmos o comportamento do potencial efetivo com a temperatura, escrevemos as derivadas primeira e segunda de V com respeito a ϕ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{d\varphi} = & \lambda \varphi (\varphi^2 - \varphi_v^2) + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{3\lambda \varphi}{[k^2 + 2\mu^2 + (\frac{2m\varphi}{\beta})^2 + 3\lambda(\varphi^2 - \varphi_v^2)]} \\
 & + 3\lambda \varphi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2\mu^2} + 18\lambda^2 \varphi (\varphi^2 - \varphi_v^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma}{dy^2} = & 3\lambda \psi^2 - \lambda \psi_v^2 + \frac{1}{\beta} \frac{\bar{\gamma}}{n} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{3\lambda}{[k^2 + 2\mu^2 + (\frac{2n\pi}{\beta})^2 + 3\lambda(\psi^2 - \psi_v^2)]} \\ & - \frac{1}{\beta} \frac{\bar{\gamma}}{n} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2(3\lambda)^2 \psi^2}{[k^2 + 2\mu^2 + (\frac{2n\pi}{\beta})^2 + 3\lambda(\psi^2 - \psi_v^2)]^2} \\ & + 3\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)} + (54\lambda^2 \psi^2 - 36\lambda^2 \psi_v^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Os máximos ou mínimos do potencial ocorrerão para os valores ϕ tais que $\left. \frac{d\gamma}{dy} \right|_{y=y_m} = 0$. Um dos extremos ocorre para a configuração $\phi = 0$ e os outros ocorrerão para configurações ϕ satisfazendo

$$\begin{aligned} \lambda (\psi_m^2 - \psi_v^2) + \frac{1}{\beta} \frac{\bar{\gamma}}{n} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{3\lambda}{[k^2 + 2\mu^2 + (\frac{2n\pi}{\beta})^2 + 3\lambda(\psi_m^2 - \psi_v^2)]} \\ - 3\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)} + 18\lambda^2 (\psi_m^2 - \psi_v^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Numa expansão a altas temperaturas os mínimos serão dados por

$$\lambda (\psi_m^2 - \psi_v^2) + \frac{\lambda T^2}{4} = 0 \quad (3.38)$$

Donde

$$\psi_m^2(T) = \frac{\mu^2}{\lambda} - \frac{T^2}{4} \quad (3.39)$$

Esquecendo, no momento, o fato de que o potencial efetivo não é de confiança para $\phi \approx 0$ poderíamos nos perguntar a que temperatura $\phi_m(T) = 0$. Daí tiraríamos o valor de uma temperatura crítica $T_c^{(1)}$ definida por

$$\psi_m^2(T_c^{(1)}) = 0 \quad (3.40)$$

De (3.40) e (3.39) segue que

$$T_c^{(1)} = \frac{2\mu}{\sqrt{3}\lambda} \quad (3.41)$$

Convém lembrar, no entanto, que poderemos acreditar no potencial efetivo sô para valores de ϕ^2 tais que $\psi^2 \geq \psi^2/3$. Quando (3.39) coincidir com $\psi^2/3$ obteremos outra temperatura crítica definida por

$$\psi_m^2(T_c) = \frac{m^2}{3\lambda} \quad (3.42)$$

A temperatura crítica definida em (3.42) é pois

$$T_c^2 = \frac{8m^2}{3\lambda} \quad (3.43)$$

Estamos agora em condições de esboçar o comportamento do potencial efetivo em função da temperatura. Obtem-se o comportamento da figura (1). Surpreendentemente esse gráfico é radicalmente diferente daquele proposto por Linde⁽¹⁵⁾. Tendo em vista que êsse é um ponto a respeito do qual a diferença é muito importante, como veremos a seguir, é essencial entender onde a diferença reside.

Olhando para a expressão (3.3) seríamos tentados a escrever o potencial efetivo sob a forma

$$V(\varphi, T) = -\frac{\mu^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{3\lambda \varphi^2}{\left(\frac{2n\pi}{\beta}\right)^2 + k^2 - \mu^2} \right) \quad (3.44)$$

Expressão (3.44) é exatamente aquela utilizada por Linde⁽¹⁵⁾. Ocorre que ela não faz sentido simplesmente porque a definição (3.2) não se aplica a esse caso uma vez que $\phi = 0$ não é o vácuo da teoria. Uma consequência desse fato é que o potencial efetivo (3.44) não é real. Basta tomarmos $\varphi = \varphi_v$ em (3.44) e notaremos que o potencial efetivo tem uma parte imaginária.

Esses problemas de parte imaginária acabam se propagando levando alguns a resultados absolutamente incompreensíveis como é o caso daquele da ref.(17); onde se pretende mostrar que a constante de acoplamento dependente da temperatura exibe uma parte imaginária. No nosso caso esses problemas de parte imaginária simplesmente desaparecem. De fato, até um loop, o comportamento da massa física e da constante de acoplamento será

$$m^2(T) \equiv \left. \frac{\delta^2 V(\varphi, T)}{\delta \varphi^2} \right|_{\varphi = \varphi_v} = 2\mu^2 + \frac{3\lambda}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[\left(\frac{2n\pi}{\beta}\right)^2 + k^2 + 2\mu^2\right]} - \lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2\mu^2} - 18\mu^2 \lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^2} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
 G\lambda(T) \equiv \left. \frac{d^4 \Gamma(\psi, T)}{d\psi^4} \right|_{\psi=\psi_v} &= 6\lambda - 54\lambda^2 \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[\left(\frac{2m\bar{u}}{\beta} \right)^2 + k^2 + 2\mu^2 \right]^2} + 108\lambda^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2 + 2\mu^2)^2} \\
 &+ \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{(36)^2 \lambda^2 \mu^2}{\left[\left(\frac{2m\bar{u}}{\beta} \right)^2 + p^2 + 2\mu^2 \right]^3} \\
 &- 3(36)^3 \mu^4 \lambda^2 \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[\left(\frac{2m\bar{u}}{\beta} \right)^2 + p^2 + 2\mu^2 \right]^4}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Para altas temperaturas, obtemos, de (3.45) e (3.46)

$$\begin{aligned}
 m^2(T) &\cong 2\mu^2 + \lambda T^2 \\
 \lambda(T) &\cong \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[\pi \frac{T}{\sqrt{2}\mu^2} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}\mu^2}{T} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Donde $\lambda(T)$ é puramente real, em contradição com o trabalho da ref. (17). Vemos assim que a construção (3.45), por ser ingenua, leva a inferências erradas sobre observáveis físicos.

Poderíamos mostrar, finalmente, como fizemos na referência (18) que o potencial efetivo (3.32) é, de fato, aquele que gera todas as funções irreduzíveis (renormalizadas) da teoria (3.21). Isto é

$$\left. \frac{d^n V}{d\psi^n} \right|_{\psi=\psi_v} = \tilde{\Gamma}_{an}^{(n)}(0, \dots, 0, T) \tag{3.48}$$

Onde $\tilde{\Gamma}_{an}^{(n)}(0, \dots, 0, T)$ são as funções irreduzíveis de uma partícula da teoria cujo potencial é dado em (3.21).

A interpretação da figura (1) é a seguinte. Para $T > 0$ o sistema preferirá uma situação na qual $\langle \psi \rangle = \langle \psi(T) \rangle$, com

$$\langle \psi(T) \rangle < \psi_v \tag{3.49}$$

portanto para $T > 0$ a energia livre de tal configuração é menor do que aquela do vácuo a $T = 0$.

Extrapolando esse comportamento a $T = \infty$ obteríamos, formalmente, que, para $T = T_c^{(1)} = \frac{24}{11\lambda}$

$$\langle \psi(T_c^{(1)}) \rangle = 0 \quad (3.50)$$

e portanto que para temperaturas acima dessa a simetria se ria restaurada. Essa é exatamente a proposta sugerida pelo esquema do potencial efetivo⁽¹⁵⁾. Dentro desse contexto a temperatura $T_c^{(1)}$ (3.41) seria a temperatura crítica.

No entanto como apontado aqui e na referência (18) a descrição do potencial efetivo deixa de ser boa para tempe raturas menores do que $T_c^{(1)}$.

IV - DECAIMENTO DO VÁCUO FALSO NUM MODELO SIMPLES

4.1 - O Vácuo Metaestável e o Modelo

De acordo com Linde⁽¹⁵⁾, o comportamento do potencial efetivo com a temperatura para uma teoria de gauge (não faz diferença, nesse caso, ser abeliana ou não abeliana) é aquele representado pela figura (2). Novamente a análise dessa figura indica que para temperaturas muito altas o sistema exibe uma restauração de simetria pois sendo σ a configuração de campo associada ao vácuo temos

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 & \text{para} & \quad T \geq T_c \\ \sigma &= \sigma(T) & \text{para} & \quad T < T_c \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde σ é o valor esperado do campo de Higgs no vácuo. O comportamento desse parâmetro de ordem com a temperatura é mostrado na figura (3).

A temperatura crítica como se vê da fig. (2) é aquela na qual

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}(\psi_m, T_c)}{\partial \psi} &= 0 \\ \mathcal{V}(\psi_m, T_c) &= \mathcal{V}(\psi=0, T_c) \end{aligned} \tag{4.2}$$

A imagem adotada para interpretar as figuras (2) e (3) é que para altas temperaturas, o sistema estaria no vácuo descrito pela configuração de campo $\psi_v = 0$. Para $T < T_c$ o vácuo no entanto está associado a outra configuração de campo ($\psi_v = \sigma(T)$). Logo para $T < T_c$ o vácuo $\psi_v = 0$, no qual o sistema se encontra, é metaestável e passará a decair para o vácuo verdadeiro a uma certa taxa.

Numa tentativa de reproduzir as principais características do decaimento do falso vácuo, procuraremos investigar o modelo descrito pelo potencial⁽¹⁹⁾

$$V(\psi, T) = \frac{M^2 \psi^2}{2} + B(T) \psi^2 \ln \psi^2 / C^2 + \frac{\lambda \psi^4}{4!} \quad (4.3)$$

onde M , λ e C são parâmetros constantes que caracterizam o modelo e B é função da temperatura.

Suponhamos que $B(T) < 0$ para $T > T_c$. Nestas circunstâncias, o potencial tem a forma apresentada na figura (4-a). Para $T < T_c$ supondo $B(T) > 0$ teremos o potencial descrito pela figura (4-b). Para $T = T_c$ admitiremos $B(T_c) = 0$ e portanto, à temperatura crítica, o estado fundamental é descrito pela configuração $\psi = 0$. Vemos, assim, que para $T < T_c$ o vácuo $\psi = 0$ é metaestável.

De forma a calcularmos a taxa de decaimento do vácuo metaestável, recorreremos a duas aproximações. Primeiramente admitiremos que para $T < T_c$ a dependência com a temperatura seja muito fraca e por isso tomamos $B = B_0$. Essa hipótese simplifica os cálculos e é feita também no caso de modelos realísticos. Para $B = B_0$ o potencial (4.3) tem a mesma forma do potencial efetivo de modelos bidimensionais⁽²⁰⁾. Finalmente, tendo em vista que na aproximação de W.K.B. o decaimento do falso vácuo é controlado pela barreira do potencial próximo à origem ($\psi = 0$), nós desprezaremos o termo $\lambda \psi^4$ em (4.3) ao calcularmos a taxa de decaimento. Uma aproximação semelhante foi feita por Witten na ref. (21). No caso citado, a taxa obtida efetuando essa aproximação deu resultados em bom acordo com os resultados numéricos exatos

(sem recorrer à aproximação)⁽²²⁾.

Feitas essas aproximações obtemos um potencial que é aquele dado pelo modelo de Bialynicki-Birula-Micielsky⁽²³⁾

$$V(\psi) = \frac{m^2}{2} \psi^2 \left(1 - \ln \frac{\psi^2}{c^2} \right) \quad (4.4)$$

onde os novos parâmetros m e c podem ser facilmente expressos em termos de M^2 e c'^2 do potencial (4.3).

A altura do potencial (H) é definida como o valor do potencial no ponto de máximo $\phi_M = c$. Obtemos assim para H

$$H \equiv V(\psi_M) = \frac{m^2 c^2}{2} \quad (4.5)$$

ao passo que a largura do potencial definida por

$$L = \psi_0 \quad (4.6)$$

onde ψ_0 é tal que $V(\psi_0) = 0$, é dada por

$$L = \psi_0 = c \sqrt{e} \cong c \sqrt{2.7} \quad (4.7)$$

Temperatura Zero

Procuraremos soluções da equação de movimento

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi(c, x) + m^2 \psi \ln \left(\frac{\psi^2}{c^2} \right) = 0 \quad (4.8)$$

À temperatura zero, as soluções relevantes (por terem menor ação⁽¹²⁾) são aquelas soluções que tenham simetria $O(4)$. Ou seja, procuraremos soluções que sejam função da variável

$$\rho = \sqrt{c^2 + x^2} \quad (4.9)$$

Em termos dessa variável a equação (4.8) se escreve⁽²⁴⁾

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + m^2 y \ln(y^2/c^2) = 0 \quad (4.10)$$

De forma a termos soluções com ação finita, procuramos soluções de (4.10) satisfazendo à condição assintótica

$$\psi(\rho = \infty) = 0 \quad (4.11)$$

Impomos ainda a condição :

$$\left. \frac{dy}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad (4.12)$$

Se imaginarmos ϕ como uma variável de posição (x) e ρ como o tempo (t), então a equação (4.10) pode ser vista como aquela descrevendo o movimento de uma partícula (em uma dimensão) sob a ação do potencial $V(x) = -\frac{m^2}{2} x^2 (1 - \ln x^2/c^2)$ e sujeita também à ação de uma força dissipativa $-\frac{\lambda}{x} \frac{dx}{dt}$. As condições (4.11) e (4.12) indicam então que a partícula é abandonada no "instante" $t=0$ e que num tempo infinito atingirá a origem. O ponto de saída da partícula será designado ϕ_s . Devido ao efeito da força dissipativa, esperamos em geral

que $\phi_s > \phi_0$.

A solução para a equação (4.10) é

$$\psi_s(\rho) = C \exp\left(-\frac{m^2 \rho^2}{2} + 2\right) \quad (4.13)$$

A ação euclidiana associada à solução (4.13) é

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2\pi^2}{2} \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_c}{d\rho} \right)^2 + V(\psi_c) \right\} \\ &= \frac{(e\sqrt{\pi})^4}{2} \frac{C^2}{m^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

O ponto de saída da partícula, dentro da analogia feita, será

$$\psi_c(\omega) = C e^2 \quad (4.15)$$

O valor da densidade de energia no ponto de saída é dado por

$$V(\psi_c(\omega)) = -\frac{3e^4}{2} m^2 C^2 \quad (4.16)$$

Admitindo que o vácuo verdadeiro não esteja muito longe de $\phi_c(0)$ então a diferença de densidades de energia entre o vácuo verdadeiro e o falso será aproximadamente

$$\Delta E = \frac{3e^4}{2} m^2 C^2 \quad (4.17)$$

Nessas circunstâncias $\frac{\Delta E}{H} = 3e^4$. Consequentemente não estaremos calculando as taxas de decaimento para a situação descrita por Coleman⁽²⁴⁾ como aproximação de parede fina (Nesse caso devemos ter $\frac{\Delta E}{H} \ll 1$). Surpreendentemente, no

entanto, as taxas de decaimento terão expressões semelhantes, em termos do raio da bolha e da diferença de densidade de energia entre o vácuo verdadeiro e falso.

As correções à Função de Partição devido às flutuações em torno das soluções clássicas podem ser calculadas seguindo o exposto no capítulo (II). A expressão (2.34) no caso de temperatura zero é

$$Z''' = N e^{-S_c} \int \mathcal{D}\eta e^{-\int d^4x \eta \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \partial_i^2 + \frac{V''(\varphi_c)}{2} \right\} \eta} \quad (4.18)$$

De forma a calcularmos explicitamente (como será feito a seguir) a integral gaussiana (4.18), basta que escolhamos um conjunto completo de autofunções ortonormalizadas $\eta_n(x_i, x)$ do operador $(-\sum \partial_i^2 + V''(\varphi_c))$. Definindo ϵ_n como um desses autovalores

$$\left(-\sum_{i=1}^4 \partial_i^2 + V''(\varphi_c) \right) \eta_n(x_i, x) = \epsilon_n \eta_n(x_i, x) \quad (4.19)$$

e fazendo então a expansão

$$\eta(x) = \sum_n a_n \eta_n(x) \quad (4.20)$$

a medida da integral funcional (4.18) se torna então

$$\mathcal{D}\eta = \prod_n da_n \quad (4.21)$$

A substituição de (4.21) e (4.20) em (4.18) leva-nos a seguinte expressão para a função de partição

$$\begin{aligned} \bar{Z}^{(11)} &= N \left(\prod_n \int da_n e^{-\frac{\epsilon_n a_n^2}{2}} \right) e^{-S_c} \\ &= N e^{-S_c} \left(\prod_n \left(\frac{2\pi}{\epsilon_n} \right)^{1/2} \right) \\ &= N e^{-S_c} e^{\frac{1}{2} \sum_n (\ln 2\pi - \ln \epsilon_n)} \end{aligned} \tag{4.22}$$

A expressão (4.22) deve ser encarada como uma expressão formal tendo em vista os seguintes problemas:

Modos de Frequência Zero: A expressão (4.22) se torna sem sentido se houver modos de frequência ($\epsilon_n = 0$). Existem argumentos gerais garantindo a existência de tais modos. No caso em questão, devemos esperar a existência de quatro modos de frequência zero, associados à invariância por translação das soluções da equação de movimento (4.8). Isso nos leva a prever, por outro lado, que as autofunções associadas ao modo de frequência serão dadas por $\eta_i^{(v)}(x) = \partial_i \varphi(x)$. Esses comentários levam-nos a encarar a expressão (4.22) como válida para $\epsilon_n \neq 0$ e fazem-nos tratar os modos de frequência zero de uma maneira diferenciada. A maneira de tratar os modos de frequência zero pode ser encontrada no excelente artigo de revisão de S. Coleman⁽²⁴⁾. Ao levarmos em conta esses modos, eles acarretam apenas um fator multiplicativo de $(S_{cl})^{1/2}$ para cada modo de frequência zero vezes o volume quadrimensional.

Obtemos então, tratando os modos de frequência zero apropria-
damente

$$Z^{(1)} = N e^{-S_0} L_{x_4} L_x L_y L_z S_0^2 \sum_n' e^{1/2 \sum_n \ln \left(\frac{2\pi}{\epsilon_n} \right)} \quad (4.23)$$

onde a soma \sum' significa omitir os modos de frequência ze-
ro. Vemos assim que o tratamento dos modos de frequência ze-
ro leva-nos tão somente a um fator multiplicativo para a
função de partição.

Divergências

O produto dos autovalores na expressão (4.22) le-
va-nos a um resultado divergente. Isso indicaria que a ener-
gia livre, por exemplo, calculada a temperatura finita não
faria sentido. Já vimos um exemplo disso no capítulo (II).
Naquele caso bastou extrair a energia de ponto zero do
vácuo para obtermos um resultado finito. Como veremos no ca-
pítulo (V) em geral isso não é suficiente em Teoria de Cam-
pos. Para Teorias renormalizáveis no entanto, a maneira de re-
mover essas divergências é aquela, usual, de adicionarmos
contratermos calculados via teoria de perturbações, à tempera-
tura zero. Uma outra alternativa para obtermos resultados fi-
nitos (provavelmente equivalente àquela usual) consiste em
utilizar a prescrição da função zeta generalizada⁽²⁵⁾. Definindo
a função zeta generalizada (com os autovalores definidos em
(4.19)) como

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{(\epsilon_n)^s} \quad (4.24)$$

Então, o resultado (4.22) pode ser reescrito formalmente como

$$\bar{Z}^{(1)} = N L_x L_y L_z L_{x_4} S_c^2 e^{-S_c} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)_{s=0} + \frac{1}{2} \ln 2\pi \zeta(0)} \quad (4.25)$$

No apêndice da referência (19) exemplificamos o método com o problema específico aqui tratado.

Modos de Frequência Negativa

Desde que os modos de frequência zero são dados por $\partial_i \phi_c$ e como essa função terá um nó para $(\partial_i \phi_c) = 0$ (este nó acontece para $\rho=0$ no nosso exemplo), segue que esses autovalores não correspondem ao menor autovalor (pois esse não deve possuir nós). Assim esperamos pelo menos um autovalor negativo. A maneira de tratar tal caso é explicado na ref. (26). Obviamente a existência de um autovalor negativo invalida o cálculo da integral (4.22) para um tal autovalor. Já podemos antever que a existência de um autovalor negativo está apenas apontando para o fato de que, o sistema é metaestável⁽²⁷⁾. O resultado é que uma vez tratado esse modo negativo a integral funcional adquire uma parte imaginária dada por

$$\text{Im } \bar{Z}^{(1)} = N L_x L_y L_z L_{x_4} S_c^2 e^{-S_c} (d\Gamma(\epsilon_i))^{1/2} e^{\frac{1}{2} \ln 2\pi \zeta'(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)_{s=0}} \quad (4.26)$$

onde $\zeta'(s)$ em (4.26) é a função zeta generalizada (4.24) omitindo agora, além dos autovalores zero, o autovalor negativo.

Até o momento só obtivemos resposta para a função de partição associada a um "bounce". Deveríamos, para obter a resposta correta, somar sobre todas as configurações con -

tendo um número arbitrário de "bounces". A resposta, que pode ser facilmente obtida, é aquela na qual os "bounces" não se superpõem e estão bem afastados uns dos outros (aproximação de gás diluído). Nessa aproximação a função de partição semi-clássica se escreve⁽²⁸⁾

$$\bar{Z} \sim \exp \frac{Z^{(1)}}{Z_{vac}} \quad (4.27)$$

Assim, na aproximação de gás diluído, a energia livre adquire uma parte imaginária. A interpretação física desse resultado é de que o sistema é metaestável e o inverso da largura daria a taxa de decaimento⁽²⁴⁾. Assim a taxa de decaimento por unidade de tempo e de volume será

$$\Gamma = N^{iii} \left[\det'' \left(- \sum \partial_i^2 + V''(\varphi_c) \right) \right]^{-1/2} S_c^2 e^{-S_c} |\epsilon_1|^{-1/2} \mathcal{N}^{1/2} \quad (4.28)$$

onde o índice "indica a omissão dos modos zero e negativo.

Vejamos todos esses elementos no caso do modelo de finido por (4.4).

No caso em apreço a derivada segunda do potencial $V''(\varphi_c)$ é dada por (vide 4.4 e 4.13)

$$V''(\varphi_c) = m^2 [m^2 \rho^2 - 6] \quad (4.29)$$

Donde a equação de autovalores (4.19) se reduz à equação de autovalores em 4 dimensões:

$$\left(- \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^4 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - 6m^2 \right) \psi_{\text{rel}}(x) = 2m^2 \epsilon_{\text{rel}} \psi_{\text{rel}}(x) \quad (4.30)$$

Os autovalores $\epsilon_{\{l\}}$ dependem de 4 números inteiros l_1, l_2, l_3, l_4 e são dados por

$$\epsilon_{l_1, l_2, l_3, l_4} = \left(\sum_{i=1}^4 l_i - 1 \right) \tag{4.31}$$

De (4.31) segue que existe um autovalor negativo ϵ_{0000} e 4 modos de frequência zero ϵ_{1000} , ϵ_{0100} , ϵ_{0010} , ϵ_{0001} . Podemos agora calcular a taxa de decaimento à temperatura zero. Obtemos de (4.28)

$$\Gamma = A(s_c)^2 e^{-s_c} \tag{4.32}$$

onde A é, a menos de fatores de normalização, dado por

$$A = \exp \frac{1}{2} \left. \frac{d\zeta^i(s)}{ds} \right|_{s=0} \tag{4.33}$$

e os detalhes da função zeta generalizada são dados no apêndice da referência(19).

4.2 - Temperatura Finita ⁽²⁹⁾

Examinaremos agora o comportamento da taxa de decaimento à temperatura finita. Deveremos procurar soluções das equações de movimento(4.8) que sejam periódicas em τ com período β . Procuraremos soluções que exibam simetria 0(3). Isto é conseguido através do ansatz

$$\psi(x_4, r) = c f(x_4) e^{-\frac{m^2 r^2}{2}} \tag{4.34}$$

com $r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2$

Substituindo (4.34) em (4.8) obtemos a seguinte equação para f

$$\frac{d^2 f}{dx_4^2} = m^2 f (3 - \ln f^2) \quad (4.35)$$

O problema assim se reduz àquele da mecânica clássica de uma partícula de massa unitária se movendo sob a ação do potencial

$$U(f) = -\frac{m^2 f^2}{2} (4 - \ln f^2) \quad (4.36)$$

onde f representa a posição da partícula.

Com a solução (4.34) a ação é dada por

$$S_C(\tau) = \pi^{3/2} \frac{c^2}{m^3} \int_0^\beta dx_4 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx_4} \right)^2 - U(f) \right] \quad (4.37)$$

As soluções de (4.35) são caracterizadas por um número E , que é uma "constante de movimento": ela é, no análogo mecânico, a energia da partícula clássica

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx_4} \right)^2 + U(f) \quad (4.38)$$

Estaremos particularmente interessados nos valores de E no intervalo

$$-\frac{m^2 e^3}{2} \leq E \leq 0 \quad (4.39)$$

O limite superior corresponde à solução relevante no caso de temperatura zero enquanto $E = -\frac{m^2 e^3}{2}$ corresponde à solução relevante no limite de temperatura infinita.

A expressão para o período em função de energia é

$$\beta(E) = 2 \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{[2(E-U)]^{1/2}} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{[m^2 f^2 (1 - \frac{1}{4} \ln f^2) + E/2]^{1/2}} \quad (4.40)$$

Onde f_1 e f_2 são os pontos de retorno da partícula. Ou seja, são as raízes positivas de

$$U(f) = E \quad (4.41)$$

No limite de altas temperaturas o decaimento será controlado pelas soluções estáticas. Na analogia mecânica já mencionada ela corresponde à solução da partícula parada no fundo do poço do potencial. A solução estática de (4.35) é

$$f(x_4) = e^{3/2} \quad (4.42)$$

Consequentemente a solução (4.34) tem a forma

$$\psi(x) = c e^{3/2} e^{-m^2 r^2 / 2} \quad (4.43)$$

A ação clássica será dada, para a solução (4.34), por

$$S_c = \frac{S^{(3)}}{T} = \left(\frac{\pi^{3/2}}{2} e^3 \frac{c^2}{m} \right) \frac{1}{T} \quad (4.44)$$

Assim, a taxa de decaimento para altas temperaturas poderá ser calculada explicitamente dentro do esquema semiclássico porquanto, nesse caso também, podemos resolver a

equação de autovalores da forma (4.30). O resultado, para altas temperaturas, se encontra na ref. (19). Gostaríamos de ressaltar apenas o fato de que esse cálculo é essencialmente o cálculo da taxa de decaimento por flutuação térmica. Podemos inclusive expressar a taxa de decaimento, a grosso modo, em termos de diferenças de densidade de energia entre as duas regiões e o raio de bolha⁽²⁴⁾.

Em poucas palavras, se admitirmos que o verdadeiro vácuo não está longe da configuração $\psi(x=0)$ ou seja

$$\psi_- \cong \psi(x=0) = C \exp^{3/2} \quad (4.45)$$

então, seguindo Coleman⁽²⁴⁾, a bolha será definida como aquela região na qual vive o vácuo verdadeiro, ou seja

$$\psi(x) \cong \psi(x=0) \quad (4.46)$$

O raio da bolha é o valor máximo de r para o qual ainda vale a aproximação (4.46).

No nosso exemplo definiremos o raio da bolha como o valor de R tal que

$$\psi(R) = \frac{1}{\sqrt{e}} \psi_- \cong \frac{\psi(x=0)}{\sqrt{e}} \quad (4.47)$$

Donde o raio da bolha será dado, aproximadamente por

$$R = \frac{1}{m} \quad (4.48)$$

Sendo a diferença das densidades de energias dos dois vácuos dada por

$$\Delta E \cong V(\psi=0) - V(\psi_{(0)}) = m^2 c^2 e^3 \quad (4.49)$$

Em termos dessas quantidades (4.48) e (4.49) a taxa de decaimento será escrita como

$$\Gamma \sim e^{-\frac{\epsilon R^3 \pi^{3/4}}{T}} \quad (4.50)$$

que é um comportamento esperado para formação de bolhas de raio R da outra fase devido a efeito de flutuação térmica⁽¹⁾.

Finalmente, podemos expressar o termo exponencial (que a rigor controla a taxa de decaimento), em termos da largura e altura do potencial definidos em (4.5) e (4.6). Obtemos

$$\Gamma \sim e^{-\left(\pi e^2\right)^{3/2} \frac{L^3}{H^{1/2}} \frac{1}{T}} \quad (4.51)$$

Vemos de (4.51) que a taxa de decaimento não obedece à regra simples da mecânica quântica (lei das áreas). O que é surpreendente, por outro lado, é que o comportamento (4.51) não é universal, isto é, ele é dependente do modelo⁽³⁰⁾.

V - SOLITONS E TRANSIÇÃO DE FASE (19,31)

Vimos no capítulo II que o comportamento do potencial efetivo indica claramente que o sistema deverá, a altas temperaturas, restaurar a simetria discreta $\phi \rightarrow -\phi$. A rigor, no entanto, a descrição do potencial efetivo deixa de ser boa para temperaturas acima de T_c dada pela eq. (3.43). A nossa interpretação para esse fato é a de que acima dessa temperatura uma descrição em termos de configuração de campo médio $\phi = \text{cte}$ deixa de ser boa e portanto se tornam relevantes configurações de campo dependentes da posição.

Como mostrado na seção II-1, por outro lado, no limite de altas temperaturas, as configurações de campo relevantes são aquelas que não dependem de τ . Dentro do contexto semi-clássico isso acarreta procurarmos soluções das equações de movimento associada ao modelo (3.17) da forma

$$\nabla^2 \psi = -\mu^2 \psi + \lambda \psi^3 \quad (5.1)$$

A equação (5.1) tem uma solução não trivial do tipo soliton

$$\psi_s(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \quad (5.2)$$

Vemos que o kink (5.2) é uma solução com uma densidade de energia diferente da do vácuo apenas numa região de espessura $d \sim \mu^{-1}$ localizada no plano $x=0$. Outro fato interessante é que a solução do tipo kink (5.2) separa o espaço em duas regiões exibindo vacuos diferentes (+a) e (-a). Podemos

assim interpretar a solução (5.2) como descrevendo uma parede de Bloch⁽³¹⁾. Ocorre que como a energia (=ação clássica) dessa solução diverge (linearmente com a área no limite $A \rightarrow \infty$), ou seja

$$S_{sol} = A \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \psi^2 + \frac{\lambda}{4} \psi^4 \right] = A \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} + S_{vac} \quad (5.3)$$

teríamos o ímpeto de abandonar tais configurações de campo, porquanto não haveria chance de uma parede surgir espontaneamente no sistema. Esse argumento é verdadeiro para temperaturas baixas. Esse não é o caso porém se a temperatura for suficientemente alta. Isso é o que sugere o argumento de Peierls^(7,33). Ou seja, a altas temperaturas, o termo de entropia pode sobrepujar o termo de energia fazendo com que a energia livre associada a uma parede se torne negativa. Isso implica, então, que a formação de paredes é favorecida e conseqüentemente, paredes podem brotar espontaneamente no sistema.

Mostraremos a seguir que para altas temperaturas a energia livre do setor do sóliton é menor do que aquela do setor do vácuo (19,31). Para determinarmos tal diferença necessitamos calcular a relação

$$Z_{1s} = \frac{\text{Função de partição a } J=0 \text{ no setor de 1 soliton}}{\text{Função de partição a } J=0 \text{ no setor do vácuo}}$$

$$Z_{0s} = \text{Função de partição a } J=0 \text{ no setor do vácuo}$$

Dentro do contexto de aproximação semi-clássica (mantendo apenas os termos quadráticos nas flutuações) podemos escrever usando (2.34)

$$\left. \frac{Z_{1s}}{Z_{0s}} \right|_{1loop} = \frac{e^{-\int_0^{\beta} dt \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_s}{dt} \right)^2 - \mu^2 \psi_{sol}^2 + \frac{\lambda}{4} \psi_s^4 \right]}}{e^{-\int_0^{\beta} dt \int d^3x \left[-\mu^2 \psi_v^2 + \frac{\lambda}{4} \psi_v^4 \right]}} \cdot \frac{\det^{-1/2} [-\partial^2 - \mu^2 + 3\lambda \psi_s^2]}{\det^{-1/2} [-\partial^2 - \mu^2 + 3\lambda \psi_v^2]} \quad (5.4)$$

Utilizando (2.35) e (5.3) a expressão (5.4) é equivalente a

$$\left. \frac{Z_{1s}}{Z_{0s}} \right|_{1loop} = e^{-\beta A \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda} \right)^{3/2}} e^{-1/2 \left\{ \text{Tr} \ln [\text{Sol}] - \text{Tr} \ln [\text{Vac}] \right\}} \quad (5.5)$$

onde

$$\text{Tr} \ln [\text{Sol}] = \text{Tr} \ln [-\partial^2 - \mu^2 + 3\lambda \psi_{sol}^2] = \text{Tr} \ln [-\partial^2 + 2\mu^2 + 3\lambda (\psi_s^2 - \psi_v^2)]$$

$$\text{Tr} \ln [\text{Vac}] = \text{Tr} \ln [-\partial^2 + 2\mu^2] \quad (5.6)$$

Tendo em vista a definição da energia livre ($F = -\beta^{-1} \ln z$), podemos escrever de (5.5)

$$\tilde{F}_{1s} - \tilde{F}_{0s} = A \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda} \right)^{3/2} + \frac{1}{2\beta} \text{Tr} [\ln [\text{Sol}] - \ln [\text{Vac}]] \quad (5.7)$$

Lembrando a relação entre energia livre e entropia podemos então, olhando para (5.7), escrever

$$\Delta F = \Delta E - T \Delta S \quad (5.8)$$

onde as diferenças dizem respeito àquelas grandezas calculadas no setor do soliton e do vácuo. De (5.7) e (5.8) segue que

$$\Delta S = -\frac{1}{2} [\text{Tr} \ln [\text{Sol}] - \text{Tr} \ln [\text{Vac}]] \quad (5.9)$$

Como veremos a seguir, ΔS diverge, no limite termodinâmico, com a área. Como ΔE , como vemos de (5.7), também o faz definiremos a energia livre associada a uma parede como

$$f_{\text{parede}}(T) \equiv \frac{\Delta F}{A} = \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} - T \Delta\beta \quad (5.10)$$

onde

$$\Delta\beta = -\frac{1}{2A} \left[\text{Tr} \ln[\text{Sol}] - \text{Tr} \ln[\text{Vac}] \right] \quad (5.11)$$

Assim, para mostrarmos que uma parede pode surgir espontaneamente no sistema, basta mostrarmos que

$$f_{\text{parede}} < 0 \text{ para } T > T_c. \quad (5.12)$$

A temperatura crítica é aquela para qual

$$f_{\text{parede}}(T_c) = 0 \quad (5.13)$$

Procuraremos agora determinar $f_{\text{parede}}(T)$ exatamente até um loop. Designando por λ_j^S e λ_j^V os autovalores

$$(-\nabla^2 - \mu^2 + 3\lambda \psi_{\text{sol}}^2) \psi_j^{(S)} = (\lambda_j^S)^2 \psi_j^{(S)} \quad (5.14)$$

$$(-\nabla^2 - \mu^2 + 3\lambda \psi_V^2) \psi_j^{(V)} = (\lambda_j^V)^2 \psi_j^{(V)} \quad (5.15)$$

Então podemos escrever Δs sob a forma

$$\Delta\beta = \frac{1}{2A} \sum_n \sum_j \left\{ \ln \left(\left(\frac{2m\bar{n}}{B} \right)^2 + (\lambda_j^V)^2 \right) - \ln \left(\left(\frac{2m\bar{n}}{B} \right)^2 + (\lambda_j^S)^2 \right) \right\} \quad (5.16)$$

Utilizando agora a identidade (2.39), obtemos para

$$T_{\Delta S} = \sum_{j,j'} (\lambda_j^v - \lambda_j^s) \frac{1}{2A} + \frac{T}{A} \sum_{j,j'} \ln(1 - e^{-\lambda_j^v \beta}) - \frac{T}{A} \sum_{j,j'} \ln(1 - e^{-\lambda_j^s \beta}) \quad (5.17)$$

Para determinarmos λ_j^v e λ_j^s procuraremos soluções de (5.14) e (5.15) sob a forma

$$\psi_j(x, y, z) = e^{ik_x y} e^{ik_y z} \psi_{jL}(x) \quad (5.18)$$

Donde, substituindo (5.18) em (5.14) e (5.15), obtemos

$$(\lambda_j^s)^2 = k_T^2 + (\lambda_{jL}^s)^2 \quad (5.19)$$

$$(\lambda_j^v)^2 = k_T^2 + (\lambda_{jL}^v)^2$$

onde

$$k_T^2 = k_x^2 + k_y^2$$

e $(\lambda_{jL}^s)^2$ e $(\lambda_{jL}^v)^2$ são os autovalores das equações (5.20)

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + 2\mu^2 + 3\mu^2 \left(\frac{\tan^2 \mu x}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right\} \psi_{jL}^s(x) = \lambda_{jL}^s{}^2 \psi_{jL}^s(x) \quad (5.21)$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + 2\mu^2 \right\} \psi_{jL}^v(x) = \lambda_{jL}^v{}^2 \psi_{jL}^v(x) \quad (5.22)$$

Os autovalores das equações (5.21) e (5.22) são bem conhecidos⁽³²⁾. O resultado para o setor do vácuo é o usual

$$(\lambda^v)^2 = k^2 + 2\mu^2 \equiv k_T^2 + p^2 + 2\mu^2 \quad (5.23)$$

ao passo que para o setor do sôliton, devido aos dois estados ligados de (5.21), temos os seguintes autovalores associados a ele



$$(\lambda_0^s)^2 = k_T^2 \tag{5.24}$$

$$(\lambda_{\perp}^s)^2 = k_T^2 + \frac{3\mu^2}{2}$$

enquanto que para o contínuo teremos os autovalores

$$(\lambda_{\text{cont}}^s)^2 = k^2 + 2\mu^2 = k_{\perp}^2 + \frac{\mu^2}{2} q^2 + 2\mu^2 = k_T^2 + k_{\perp}^2 + 2\mu^2 \tag{5.25}$$

Deixando os detalhes para o apêndice (1) podemos então escrever finalmente

$$\begin{aligned} -\Delta\beta = & \frac{\beta}{2} \int \frac{d^2 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \sqrt{k_T^2} + \sqrt{k_T^2 + \frac{3}{2}\mu^2} - \frac{6\sqrt{2}}{2\pi} \mu \right\} \\ & + \int \frac{d^4 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \ln(1 - e^{-\beta\sqrt{k_T^2}}) + \ln(1 - e^{-\beta\sqrt{k_T^2 + \frac{3}{2}\mu^2}}) \right\} \tag{5.26} \\ & - \frac{\beta}{2} \int \frac{d^3 k_{\perp}}{(2\pi)^3} g(k_{\perp}) \left\{ \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\mu^2} + \frac{2}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\mu^2}}) \right\} \end{aligned}$$

onde $g(k_{\perp})$ é dada por

$$g(k_{\perp}) = 2\sqrt{2}\mu^2 \left[\frac{1}{k_{\perp}^2 + 2\mu^2} + \frac{1}{2k_{\perp}^2 + \mu^2} \right] \tag{5.27}$$

Com o intuito de investigar a questão da renormalização vamos escrever explicitamente a parte da energia livre da parede que não depende de T em (5.26), a qual designaremos por $f_p(0)$. A expressão para $f_p(0)$ pode ser arranjada de uma forma muito conveniente para o estudo da renormalização. Tal forma é

$$\begin{aligned}
 f_{\text{parede}}(0) &= \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} + \int \frac{d^2k_T}{(2\pi)^2} \frac{|k_T|}{2} + \int \frac{d^2k_T}{(2\pi)^2} \frac{(k_T^2 + 3/2\mu^2)^{1/2}}{2} - \int \frac{d^2k_T}{(2\pi)^3} 3\sqrt{2}\mu^2 \\
 &- \sqrt{2}\mu^2 \int \frac{d^2k_T}{(2\pi)^2} k_T^2 \int \frac{dk_L}{(2\pi)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k_L^2 + 2\mu^2}} \left[\frac{1}{k_L^2 + 2\mu^2} + \frac{1}{2k_L^2 + \mu^2} \right] + \frac{3/4\mu^2}{(k_L^2 + 2\mu^2)(k_L^2 + \mu^2/2)} \right\} \\
 &- \sqrt{2}\mu^2 \frac{3}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{1/2}} - \sqrt{2}\mu^2 \frac{3}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2}} \tag{5.28} \\
 &- \sqrt{2}\mu^2 \left(\frac{3\mu^2}{2} \right)^2 \int \frac{d^2k_T}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_L}{(2\pi)} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2} (k_L^2 + \mu^2/2)}
 \end{aligned}$$

Note-se que a expressão contém divergências que, à primeira vista, vão desde divergências cúbicas (as duas primeiras integrais) até divergências logarítmicas. No entanto cancelamentos miraculosos acontecem entre as quatro primeiras integrais. O resultado dessas integrais mais a última de (5.28) leva-nos à seguinte expressão para $f_{\text{parede}}(0)$.

$$\begin{aligned}
 f_{\text{parede}}(0) &= \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} - \left(\frac{9}{\sqrt{2}\pi} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\mu^3}{48\sqrt{2}\pi} \\
 &- \sqrt{2}\mu^2 \frac{3}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{1/2}} - \sqrt{2}\mu^2 \frac{3}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2}} \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

A expressão (5.29) ainda é divergente. Veremos agora como renormalizá-la.

Renormalização da Energia Livre associada à Parede

Queremos lembrar primeiramente que a expressão para a energia livre (5.29) não incorpora a contribuição, também divergente, associado aos contratermos. Adicionando-se essa contribuição obteremos a seguinte expressão para a densidade de energia livre da parede renormalizada

$$f_{\text{parede}}^r(0) \equiv - \int dx C_2 \frac{1}{2} [\psi_s^2 - \psi_v^2] + \int dx \frac{C_3}{4} [\psi_s^4 - \psi_v^4] + f_{\text{parede}}(0) \quad (5.30)$$

Onde $f_{\text{parede}}^{(0)}$ é aquela dada em (5.29) e lembrando que

$$\int dx (\psi_s^2 - \psi_v^2) \frac{1}{2} = - \sqrt{2} \frac{\mu}{\lambda} \quad (5.31)$$

$$\int dx (\psi_s^4 - \psi_v^4) = - \frac{8}{3} \sqrt{2} \frac{\mu^3}{\lambda^2}$$

e que depois de integrarmos (3.30) e (3.29) sôbre d^3k_v as expressões para C_2 e C_3 são

$$C_2 = \frac{3\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2\mu^2}} + \frac{9\mu^2\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2}} \quad (5.32)$$

$$C_3 = \frac{9\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2}} \quad (5.33)$$

então a partir de (5.31), (5.32) e (5.33) obtemos para (5.30)

$$f_{\text{parede}}^{\text{T}}(0) = \mu \sqrt{2} \frac{3}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2\mu^2}} + \mu^3 \sqrt{2} \frac{3}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + 2\mu^2)^{3/2}} + f_{\text{parede}}(0). \quad (5.34)$$

A expressão (5.34) mostra assim que os contratermos obtidos em teoria de perturbações são suficientes para a obtenção de um resultado finito para a energia livre por unidade de área da parede. A partir de (5.34), (5.26) e (5.10) obtemos

$$f_{\text{parede}}^{\text{T}}(T) = \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} - \left(\frac{9}{\pi} + 11\sqrt{3} \right) \frac{\mu^3}{96\pi} + T \int \frac{d^2 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \ln \left(1 - e^{-\frac{1}{T} \sqrt{k_T^2}} \right) + \ln \left(1 - e^{-\frac{1}{T} \sqrt{k_T^2 + 2\mu^2}} \right) \right\} - 2\sqrt{2} T \mu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{k_L^2 + 2\mu^2} + \frac{1}{2k_L^2 + \mu^2} \right] \ln \left(1 - e^{-\frac{1}{T} \sqrt{k_L^2 + 2\mu^2}} \right) \quad (5.35)$$

Introduzindo as variáveis $S = k_T^2$ $t = k_T^2 + \frac{3}{2} \mu^2$, e $v = k_T^2 + k_L^2 + 2\mu^2$ e integrando (5.31) parcialmente em k_L obtemos a seguinte expressão para $f_{\text{parede}}^{\text{T}}(T)$ (31)

$$\begin{aligned}
 f_{\text{parede}}(T) &= \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} - \left(\frac{9}{\pi} + \sqrt{3}\right) \frac{\mu^3}{96\pi} \\
 &+ \frac{T}{4\pi} \int_0^\infty ds \ln(1 - e^{-\beta \mu s}) - \frac{T}{4\pi} \int_{2\mu^2}^\infty dr \frac{2}{\pi} \arctan\left[2\left(\frac{r}{2\mu^2} - 1\right)^{1/2}\right] \ln(1 - e^{-\beta \mu r}) \\
 &+ \frac{T}{4\pi} \int_{\mu^2/2}^\infty dt \ln(1 - e^{-\beta \mu t}) - \frac{T}{4\pi} \int_{2\mu^2}^\infty dr \arctan\left[\left(\frac{r}{2\mu^2} - 1\right)^{1/2}\right] \ln(1 - e^{-\beta \mu r})
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

No limite de altas temperaturas ($T \gg \mu$) o resultado para $f_{\text{parede}}(T)$, que pode ser inferido a partir de (5.36), é

$$f_{\text{parede}}(T) \sim \frac{(2\mu^2)^{3/2}}{3\lambda} - \left(\frac{9}{\pi} + \sqrt{3}\right) \frac{\mu^3}{96\pi} - \frac{\mu}{2\sqrt{2}} T^2 \tag{5.37}$$

No limite de $\lambda \ll 1$ (limite esse para o qual a aproximação semi-clássica aqui feita é de confiança) a temperatura crítica definida em (5.13) é

$$T_c^2 = \frac{8\mu^2}{3\lambda} \tag{5.38}$$

A partir de (5.37) podemos então concluir que acima da temperatura crítica (5.38) uma parede poderá surgir espontaneamente no sistema.

Nesse ponto pode-se argumentar que uma vez que uma parede é favorecida, então, numa aproximação de gás diluído de paredes, a produção de um número catastrófico de paredes deveria ocorrer. No entanto, como argumentado por Ventura⁽¹³⁾; se levarmos em conta a interação entre as paredes o processo se estabiliza e, com esse processo de estabilização, poderia

mos inferir uma distância média entre as paredes⁽³⁴⁾. O quadro que segue é que para $T > T_c$ obteríamos o sistema coalhado de paredes de acordo com o sugerido na figura (5). Dessa figura, e da análise anterior segue que

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int d^3x \psi(x) = 0 \quad (5.39)$$

e portanto a restauração de simetria ocorrerá como decorrência da existência de um condensado de paredes.

Até o momento pudemos apenas concluir que, através de um condensado de paredes, a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ deverá ser restaurada. Pouco foi dito sobre a transição de fase. Este é um programa que está em pleno desenvolvimento pelos autores da ref. (18). Naquele trabalho pudemos mostrar que de fato uma transição de fase está ocorrendo para $T \sim T_c$. Pudemos mostrar que o calor específico diverge para $T \sim T_c$ e um cálculo do expoente crítico do mesmo foi feito.

Finalmente gostaríamos de acrescentar que a exten - são desses resultados para uma teoria de gauge abeliana foi implementada na ref. (35). A extensão para outras teorias não abelianas de gauge está em andamento.

VI - APLICAÇÕES À COSMOLOGIA ⁽³⁶⁾

6-1 - Física de Partículas Elementares e Cosmologia

O dado observacional de que o Universo está em ex pan são leva-nos prontamente a imaginar uma situação na qual o Universo seria pequeno e extremamente quente. Nessas cir cun stâncias podemos visualizar uma fase do Universo na qual este era constituído de uma sopa cósmica cujos elementos e ra m os constituintes últimos da matéria, ou seja, as partícu las elementares ⁽³⁷⁾. Dessa imagem decorre a crença generalizada de que dados observacionais do Universo poderiam ser explica dos à luz de processos ocorrendo ao nível de partículas ele menta res.

A primeira consequência para a cosmologia da imagem exposta acima segue do seguinte fato: na medida em que o Uni verso se expande, vários tipos de reação sairiam fora das condições de equilíbrio deixando como consequência alguns re sí d u o s designados Fosseis do Universo Primordial. O conheci men to da abundância desses fosseis poderiam levar a vínculos sobre a dinâmica das partículas elementares e vice-versa. Dentre os fosseis relevantes para a física de partículas ele menta res gostaríamos de destacar os seguintes:

Fótons

De acordo com a imagem exposta no primeiro parágrafo, sendo os fótons um dos contribuintes estáveis da sopa cós mica, é de se esperar que o Universo esteja hoje imerso num "banho de fótons". Dentro desse contexto nada mais natural a radiação de fundo já observada ⁽³⁸⁾.

Neutrinos

O fato do Universo estar num banho de neutrinos é apenas uma consequência da extensão do raciocínio anterior (feito para os fótons), para os neutrinos.

Na fase na qual estes estariam em equilíbrio com os demais constituintes da matéria os neutrinos seriam tão abundantes quanto esses. Sendo n_ν (n_e, n_γ) a densidade dos neutrinos (eletrons, fótons) temos que para $T > 10^{10} \text{K}$

$$n_\gamma = n_\nu = n_e$$

Para uma temperatura T_x os neutrinos desacoplarão e se transformarão no "background" de neutrinos no qual o nosso Universo estaria imerso. A relação entre as temperaturas dos neutrinos (T_ν) e fótons (T_γ) depois que os neutrinos se desacoplam é⁽³⁹⁾

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \tag{6.1}$$

Da expressão(6.1) segue que a temperatura dos neutrinos hoje seria aproximadamente $1,9 \text{K}$.

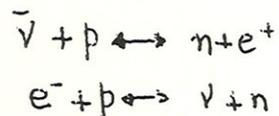
A detecção dos neutrinos fósseis é um grande desafio. Propostas para a implementação da detecção dos neutrinos de fundo são encontrados na ref. (40).

Abundâncias Nucleares⁽⁴¹⁾

À temperatura da ordem de 10^{10}K prótons e neutrons livres faziam parte dos elementos da sopa cósmica. À medida que o Universo se resfriou e se expandiu, os prótons e neutrons se combinavam formando os núcleos. Praticamente todos

os neutrons disponíveis se combinaram com prótons formando núcleos através de cadeias tais como $n + p \rightarrow H^2 + \gamma$, $H^2 + H^2 \rightarrow H^3 + p$, $H^3 + d \rightarrow H_e^4 + p$. Núcleos mais pesados não foram produzidos em quantidades suficientes devido a inexistência de núcleos estáveis com cinco nucleons. Esta imagem explicaria porque a maior parte dos núcleos no Universo hoje (99%) são H e He^4 . Outros elementos leves também sido deixados no Universo, mas em abundâncias relativamente pequenas⁽⁴²⁾.

A aplicação mais notável de física de partículas elementares dentro desse contexto diz respeito à abundância relativa de He^4/H ⁽⁴¹⁾. De acordo com o exposto acima o parâmetro importante nessa questão é a abundância relativa de prótons e neutrons à temperatura $T \sim 10^{10} k$ quando eles começam a se combinar formando outros núcleos. Para temperaturas acima desse valor, interações fracas tais como



mantinham um equilíbrio "químico" entre p e n. Nessas circunstâncias as abundâncias relativas entre p e n podem ser calculadas utilizando noções de mecânica estatística. A razão entre as abundâncias é dada essencialmente pelo fator estatístico de Boltzmann:

$$\frac{n}{p} \sim e^{-\frac{\Delta}{T}}$$

onde $\Delta = m_n - m_p$. Para temperaturas menores do que uma crítica ($\approx 10^{10} k$) a densidade de energia dos neutrinos e elétrons de torna muito pequena e o equilíbrio

não poderá mais ser mantido e essa relação N/P estará congelada. A partir da taxa de decaimento $\lambda_1(n \rightarrow p)$ e $\lambda_2(p \rightarrow n)$ obtidas da teoria das interações fracas e a partir das taxas de transição envolvendo núcleos em equilíbrio térmico obtém-se uma abundância de He relativa à de H dada por $\eta_{He} \equiv \frac{H_{He}}{H} \approx 0,25$ valor esse que parece estar em bom acordo com os dados observacionais^(36,41).
Excesso de Barions⁽⁴³⁾

Existem duas atitudes que se pode adotar face a esse problema: Ou se imagina o Universo assimétrico desde o início ou o Universo se iniciou num estágio simétrico com respeito a barions e antibarions e num estágio subsequente, devido a algum mecanismo dinâmico, o excesso de barions se estabeleceu. A última atitude é aquela adotada pelos físicos de partículas elementares.

Dentro do contexto da física de partículas os ingredientes dinâmicos básicos para o estabelecimento do excesso seriam interações que violariam CP e conservação de número bariônico. Adiciona-se a esses ingredientes um elemento que coloque o sistema fora do equilíbrio e teremos a possibilidade de estabelecermos um excesso⁽⁴⁴⁾.

Teorias Grand Unificadas exibem processos que violam conservação de número bariônico. Violação de CP pode também ser incorporada ao modelo. O elemento "fora de equilíbrio" fica por conta da expansão do Universo.

O ferramental utilizado para uma análise quantitativa da questão do excesso de barions são as equações de transporte de Boltzmann onde escrevemos equações acopladas para as funções de distribuição envolvendo as diversas espécies

de partículas. Além dos termos usuais comparece também um termo associado à expansão. A partir das expressões para as amplitudes de colisões obtidas da Teoria Grand Unificada obtem-se, de fato, valores próximos daqueles observados experimentalmente⁽⁴⁴⁾.

6.2 - Transições de Fase Cosmológicas

Tendo em vista que um sistema, como visto nos capítulos anteriores a esse, cuja simetria é quebrada espontaneamente a $T=0$ terá essa simetria restaurada a altas temperaturas o sistema deverá exibir uma transição de fase quando o mesmo evolui de uma situação de altas temperaturas até baixas temperaturas. Se o sistema for o próprio Universo falaremos de uma transição de fase do cosmos ou seja uma transição de fase cosmológica.

Dentro do esquema até hoje aceito, baseado no comportamento do potencial efetivo, o sistema deverá evoluir para a nova fase através de um processo de formação de bolhas de fase a temperaturas baixas. Essas regiões se tornam mais numerosas e de maior tamanho à medida em que a temperatura for baixando.

Sendo $\Gamma(t)$ a taxa de decaimento do vácuo falso por unidade de volume, então a densidade de bolhas (levando em conta a expansão do Universo) seria dada por^(45,iv)

$$n(t) = R^{-3}(t) \int_0^t dt_1 R^3(t_1) \Gamma(t_1) p(t_1) \quad (6.2)$$

e a fração do espaço na nova fase é

$$p(t) = \exp\left[-\frac{4\pi}{3} \int_0^t dt_1 R^3(t_1) \Gamma(t_1) \left[\int_{t_1}^t dt_2 \frac{1}{R(t_2)} \right]^3\right] \quad (6.3)$$

A uma temperatura T^* uma fração apreciável do Universo já estará na nova fase e essa seria a temperatura na qual a transição de fase teria se encerrado. Se

$$\frac{T_c}{T^*} \ll 1 \quad (6.4)$$

diz-se que houve um supercooling porquanto o sistema experimentou um grande resfriamento para enfim atingir a outra fase.

Dentro do esquema alternativo proposto nas referências (31) e (34), para $T > T_c$ o sistema deve estar coalhado de paredes de acordo com a figura (5) e conseqüentemente o sistema exibe uma estrutura de domínios nos quais residem um dos vácuos (no nosso caso $\pm a$). Nessas circunstâncias esperamos restauração da simetria, pois

$$\langle \psi \rangle = 0$$

Vejamos agora quais são as conseqüências, do ponto de vista da cosmologia, dessas transições de fase apresentando uma análise sucinta de como cada uma das imagens da transição de fase propostas levariam, nesses contextos, a resultados diferentes.

6.3 - Formação de defeitos⁽⁴⁵⁾

Durante a transição de fase existe a formação de defeitos. Para Teorias Grand Unificadas os tipos possíveis de defeitos são previstos com base em argumentos de topologia. Pode-se prever para Teorias Grand Unificadas a formação das seguintes estruturas durante a transição de fase:

Paredes - Dentro da visão do potencial efetivo uma

parede seria a intersecção de dois domínios nos quais residem vácuos diferentes (vácuos com diferentes orientações do campo de Higgs). Mais geralmente, poderíamos (como foi discutido anteriormente) dizer que as paredes são regiões do espaço (caracterizado por uma certa densidade de energia por unidade de superfície) delimitando regiões com vácuos diferentes.

A formação de paredes abaixo da temperatura crítica representa um problema (e esse é o ponto de vista do potencial efetivo). Isto porque sendo elas formadas a temperaturas baixas e não existindo um mecanismo para eliminá-las deveríamos tê-las em profusão no Universo hoje. Não existem evidências para a existência de tais estruturas no nosso Universo. Para paredes planas do tipo discutido anteriormente a existência das mesmas está praticamente fora de cogitação tendo em vista que para uma Teoria Grand Unificada uma parede do tamanho do horizonte teria uma massa 10^{50} vezes a massa do Universo⁽⁴⁷⁾. Esse aparente paradoxo tem sido usado inclusive para descartar algumas Teorias Grand Unificadas.

A visão alternativa discutida anteriormente resolve esse aparente paradoxo. As paredes (planas) só surgem no sistema a altas temperaturas. O Universo hoje (para $T=0$) não deve exibir tais estruturas, sendo portanto consistente com os dados observacionais.

Strings - Os strings são configurações de campos topologicamente não triviais tais que a densidade de energia se torna zero fora de uma região constituída por um cilindro (corda) infinito⁽⁴⁸⁾.

Tais estruturas devem ser formadas também durante uma transição de fase de teoria de campos⁽⁴⁶⁾. Seriam constituídos pela junção de tres domínios e se formariam somente para temperaturas abaixo da temperatura crítica. Novamente se coloca a questão da compatibilidade com os dados observáveis pois não existem evidências para a existência que tais estruturas no Universo hoje. Dessa forma isso representa um problema para o esquema padrão.

Novamente a visão alternativa resolveria mais este problema. Uma extensão das considerações anteriores para o caso de Strings nos levaria a concluir que essas só surgem espontaneamente no sistema a altas temperaturas.

Monopolos Magnéticos⁽⁴⁹⁾ - Existem soluções de Teoria de Gauge Não Abelianas (cuja simetria é quebrada espontaneamente) que podem ser interpretadas como descrevendo monopolos magnéticos. Dentro desse contexto os monopolos seriam objetos extensos pois essas soluções descrevem objetos localizados numa certa região finita do espaço. A massa dos monopolos, obtida integrando sobre todo o espaço o tensor de energia e momento associado às soluções clássicas, é finita e é dada, a grosso modo, pelo produto de uma constante de acoplamento pelo valor esperado do campo de Higgs no vácuo⁽⁴⁹⁾. Com base nesse fato pode-se prever que a massa dos monopolos magnéticos de Teorias Grand Unificadas seja da ordem de 10^{15} GeV sendo portanto muito pesados.

Espera-se que durante uma transição de fase esses objetos também sejam produzidos. De acordo com Kibble⁽⁴⁶⁾, os monopolos se formariam nas junções de quatro domínios. Isto

permitiria então determinar a sua abundância quando da ocasião de transição de fase. A grosso modo sua densidade seria dada essencialmente pela densidade de bolhas dada em (6.2).

As primeiras estimativas no esquema do potencial efetivo levaram a números absurdos do ponto de vista de cosmologia⁽⁵⁰⁾. As primeiras estimativas levaram a densidades de monopolos que excederiam em 10^{20} vezes a densidade de matéria do Universo.

Dentro da filosofia do potencial efetivo esse problema no entanto seria contornado, de acordo com propostas recentes, se o Universo experimentar um violento super resfriamento. Para resolvermos o problema da densidade de monopolo deve-se ter⁽⁵¹⁾

$$\frac{T^*}{T_c} \sim 10^{-23}$$

Dentro do esquema alternativo aqui apresentado, esse problema, de densidades de monopolos, ainda não foi abordado.

Constante Cosmológica⁽⁵²⁾

A constante cosmológica seria, dentro do contexto da teoria de campos⁽⁵³⁾, a densidade de energia do estado fundamental, ou seja do vácuo (essa interpretação foi dada, pela primeira vez, por Zeldovich)⁽⁵³⁾. O valor dessa densidade de energia não é conhecida experimentalmente. Sabe-se apenas que hoje ele é muito pequena. Podemos no entanto determinar

um limite superior para a mesma equiparando-a à densidade de energia de sistemas ligados gravitacionalmente (sistemas esses com densidades pequenas). Os sistemas com menores densidades de energia são os aglomerados de galáxias cuja densidade é da ordem de 10^{-29} g/cm^3 . Temos então

$$\Lambda < \rho_{cluster} \sim 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \quad (6.5)$$

Surpreendentemente a questão da constante cosmológica guarda uma relação com o problema da transição de fase. Isso porque os estados fundamentais das duas fases podem ser radicalmente diferentes. Dentro do contexto da visão da transição de fase via potencial efetivo isso é precisamente o que ocorre. A partir da figura (2) pode-se notar que o vácuo $\phi=0$ e $\phi=a$ exibem densidades de energia diferentes. De acordo com Linde⁽⁵⁴⁾

$$\begin{aligned} \Lambda_{sim}(T=\infty) &= V(\psi=0) \\ \Lambda_{assim}(T=0) &= V(\psi=a) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Os cálculos explícitos, mostram que para o modelo de Weinberg-Salam tomando para Λ_{assim} o valor dado em (6.5) obtem-se⁽⁵⁴⁾

$$\frac{\Lambda_{sim}}{\Lambda_{assim}} \sim 10^{46} \quad (6.7)$$

Novamente se coloca um problema aqui. Porque a constante cosmológica seria tão pequena hoje?

Dentro do contexto da restauração de simetria via produção de defeitos podemos praticamente resolver esse problema. Nesse contexto a densidade de energia do vácuo na outra fase em excesso aquela da fase de temperatura zero é da

da apenas pela densidade de energia das paredes. Essa por outro lado tenderá a zero naturalmente pelos argumentos de termodinâmica já apresentados⁽³⁴⁾.

Formação de Galáxias

Apesar da homogeneidade em larga escala do Universo, este exhibe na realidade uma estrutura granular. Isso decorre da existência de grandes aglomerados de matéria ($\sim 10^{68}$ protons) formando galaxias ($M_{\text{gal}} \sim 10^{13} M_{\odot}$). A questão interessante nesse contexto seria como um Universo homogêneo poderia dar lugar à formação de tais estruturas. Deveríamos ter assim em alguma fase do Universo flutuações de densidade suficientemente fortes para agir como germens em torno dos quais a matéria se aglutinaria. De acordo com Zeldovich⁽⁵⁵⁾ o contraste de densidade exigida quando uma perturbação entra no horizonte é

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_H \approx 10^{-4} \tag{6.8}$$

Amplitudes muito menores do que (6.8) não são efetivas na produção de galaxias, enquanto que se forem muito maiores do que (6.8) estarão em conflito com a isotropia observada da radiação de fundo.

Como vimos anteriormente, durante uma transição de fase temos a formação de estruturas que, basicamente, se constituem em regiões nas quais a densidade de matéria é muito grande. Isso é exatamente o que se requer para a formação de galáxias pois o processo de formação de aglomerados de matéria exige a presença de inhomogeneidades.

Dentro do contexto de transição de fase essas inomogeneidades, como já vimos, surgem naturalmente. As propostas até aqui se basearam em inomogeneidades devido a Strings⁽⁵⁶⁾. A hipótese de que paredes seriam responsáveis pela formação de aglomerados de matéria também já foi levantada⁽⁵⁷⁾. No entanto resultados convincentes ainda não haviam sido produzidos. Dentro desse contexto gostaríamos de destacar que recentes estimativas nossas levam a números extremamente promissores⁽⁵⁸⁾.

VII - CONCLUSÕES

Ao longo desse trabalho apresentamos dois esquemas que têm a pretensão de descrever a restauração de simetria em teoria de campo à temperatura finita, bem como descrever a transição de fase que o sistema deve exibir quando essa restauração ocorre.

O primeiro esquema, inspirado no comportamento do potencial efetivo à temperatura finita, é baseado numa série de artigos nos quais é sugerido um quadro para o que estaria acontecendo durante a transição de fase. Nessa imagem, a transição de fase obedeceria à seguinte sequência de eventos:

Vácuo Metaestável^(15,59)

Formação de bolhas da outra fase^(51,59)

Formação de defeitos⁽⁴⁶⁾

O quadro apresentado acima levou a pelo menos uma idéia revolucionária dentro do contexto das Teorias Modernas da Cosmologia: O Universo inflacionário⁽⁶⁰⁾

Não obstante alguns sucessos desse esquema, ele exibe alguns problemas, do ponto de cosmologia tais como: constante cosmológica^(52,53), Formação de defeitos^(46,47) e supercooling ^(45,51).

Nesse trabalho e naquele da referência⁽¹⁸⁾ procuramos mostrar que o potencial efetivo não tem sentido para valores de ψ próximos da origem. Note-se que essa região é extremamente relevante nas considerações sobre decaimento do Falso Vácuo. Os nossos resultados parecem ser corroborados por trabalhos bastante recentes na literatura⁽⁶¹⁾.

Assim, além de problemas no Front Cosmológico o método do potencial efetivo parece estar com problemas também de consistência interna. A temperatura acima da qual a sua descrição não é válida é da mesma ordem da temperatura na qual se espera a quebra da simetria. Essa observação leva a invalidar muito do que se fez até aqui sobre transições de fase cosmológicas.

O potencial efetivo por outro lado, dentro do domínio de temperaturas no qual êle faz sentido, indica claramente que a restauração de simetria de fato irá ocorrer para altas temperaturas. A limitação da descrição do potencial efetivo é interpretada por nós como indicativo da limitação de uma descrição de restauração de simetria analisando apenas configurações independentes de posição. Nesse sentido o potencial efetivo aponta para a necessidade de se levar em conta configurações de campo dependentes das variáveis ζ e χ .

Como vimos no capítulo II, as configurações de campo estáticas são aquelas relevantes no limite de altas temperaturas. No limite clássico as configurações importantes são aquelas obedecendo às equações de Euler-Lagrange (soluções clássicas). Teorias de Gauge não Abelianas exibem soluções clássicas de tais equações possuindo propriedades fisicamente bastante interessantes. Tais soluções são do tipo paredes, strings e monopolos. A existência de tais soluções envolve apenas argumentos de topologia.

Em analogia com a imagem de Kosterlitz-Thouless da transição de fase⁽³³⁾, foi proposto aqui e nas referências (18, 31, 35) um esquema alternativo para o estudo da restauração de simetria. Propomos que a restauração de simetria tem lugar como consequência do surgimento de defeitos que desor-

denam o sistema (tendo em vista o trabalho de Fröhlich, Morchio e Strocchi⁽⁶²⁾) tal proposta não é de todo tão arrojada).

Nesse trabalho calculamos, levando em conta efeitos de renormalização, a temperatura na qual uma parede poderá surgir no sistema para o modelo $\mathcal{N}y^4$. Como visto no capítulo V tal temperatura coincide com aquela na qual a descrição do potencial efetivo deixa de ser confiável. Isso aponta claramente na direção de tornar os dois métodos semiclássicos complementares.

As referências (34), (58), e (63) mostram por outro lado que, além de não serem inconsistentes com cosmologia, este esquema parece ser bem vindo para a mesma.

A extensão desses resultados para Teorias de Gauge (Abelianas e não Abelianas) está em andamento.

APÊNDICE

Nêsse apêndice apresentamos o detalhamento matemático que permite escrever a forma final para Δs , conforme colocado na expressão (5.26) do capítulo V. De acordo com as expressões (5.16)-(5.25) não é difícil verificar que

$$\begin{aligned}
 -\Delta s = & \frac{\beta}{2} \int \frac{d^2 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \sqrt{k_T^2} + \sqrt{k_T^2 + \frac{3\mu^2}{2}} + \frac{2}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2}}) + \frac{2}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2 + \frac{3\mu^2}{2}}}) \right\} \\
 & + \frac{\beta}{2} \int \frac{d^2 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_q \sqrt{k_T^2 + \frac{\mu^2}{2} q^2 + 2\mu^2} - \sum_p \sqrt{k_T^2 + p^2 + 2\mu^2} \right\} \\
 & + \int \frac{d^2 k_T}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_q \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2 + \frac{\mu^2}{2} q^2 + 2\mu^2}}) - \sum_p \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2 + p^2 + 2\mu^2}}) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

na qual os termos da primeira linha resultam da contribuição dos dois estados ligados do setor do sôliton e os demais são contribuições do contínuo nos setores do vácuo e do sôliton.

Denominando por S_1 e S_2 as somas

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_q \sqrt{k_T^2 + \frac{\mu^2}{2} q^2 + 2\mu^2} - \frac{1}{2} \sum_p \sqrt{k_T^2 + p^2 + 2\mu^2} \tag{A.2}$$

$$S_2 = \sum_q \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2 + \frac{\mu^2}{2} q^2 + 2\mu^2}}) - \sum_p \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{k_T^2 + p^2 + 2\mu^2}}) \tag{A.3}$$

podemos reescrevê-las de forma conveniente a partir da relação entre os momenta longitudinais do setor do vácuo $k_L^V = p$ e do setor do sôliton $k_L^S = k_L = \frac{\mu q}{\sqrt{2}}$, que é obtida a partir de

$$pL = \frac{\mu q}{\sqrt{2}} L + \delta(q) = 2n\pi \quad (\text{A.4})$$

onde $\delta(q)$ representa os phase-shifts obtidos no setor do sôliton; $\delta(q)$ é tal que⁽³²⁾

$$\frac{d\delta(q)}{dq} = -6 \frac{q^2+2}{(q^2+1)(q^2+4)} \quad (\text{A.5})$$

Assim, se escrevermos

$$E(p) = \sqrt{11k^2 + p^2 + 2\mu^2}$$

$$E(q) = \sqrt{11k^2 + \frac{\mu^2}{2}q^2 + 2\mu^2}$$

podemos obter facilmente, utilizando (A.4)

$$\begin{aligned} E(p) &= \sqrt{11k^2 + 2\mu^2 + \left(\frac{\mu q}{\sqrt{2}} + \frac{\delta(q)}{L}\right)^2} \\ &= \sqrt{11k^2 + 2\mu^2 + \frac{\mu^2}{2}q^2 + \frac{2\mu q}{\sqrt{2}L} \delta(q) + O(L^{-2})} \end{aligned}$$

Como queremos o limite do contínuo no qual $L \rightarrow \infty$, tomamos apenas o termo dominante em L ; neste caso podemos escrever

$$E(p) \simeq E(q) + \frac{2}{\sqrt{2}\mu L} \delta(q) \frac{dE(q)}{dq} \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a expressão (A.6) a soma S_1 (A.2) pode ser reescrita na forma

$$S_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\mu L} \sum_q \delta(\omega_q) \frac{d\epsilon(\omega_q)}{d\omega_q}$$

que, no limite do contínuo, no qual

$$\sum_q \longrightarrow \frac{\mu L}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{2\pi}$$

resulta ser

$$S_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \delta(\omega) \frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega}$$

Integrando por partes e fazendo a troca $q \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\mu} k_L$ obtemos finalmente

$$S_1 = -\frac{3\sqrt{2}\mu^2}{2\pi} - \frac{1}{2} \int \frac{dk_L}{(2\pi)} g(k_L) \sqrt{k_T^2 + k_L^2 + 2\mu^2} \quad (\text{A.7})$$

na qual escrevemos

$$g(k_L) = 2\sqrt{2}\mu^2 \left(\frac{1}{k_L^2 + 2\mu^2} + \frac{1}{2k_L^2 + \mu^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

Para obter a soma S_2 procedemos de maneira análoga ao cálculo de S_1 ; com isso podemos escrever

$$\ln(1 - e^{-\beta \epsilon(p)}) \simeq \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(q)}) + \ln \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\mu L} \delta(q) \frac{d}{dq} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(q)}) \right]$$

ou melhor

$$\ln(1 - e^{-\beta \epsilon(p)}) \simeq \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(q)}) + \frac{\sqrt{2}}{\mu L} \delta(q) \frac{d}{dq} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(q)}) \quad (\text{A.9})$$

o que permite escrever S_2 como

$$S_2 = - \frac{\sqrt{2}}{\mu L} \int \frac{\delta(q)}{q} \frac{d}{dq} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(q)}) \quad (\text{A.10})$$

No limite do contínuo e, em completa analogia com o caso anterior, podemos escrever finalmente

$$S_2 = - \int \frac{dk_L}{2\mu} g(k_L) \ln(1 - e^{-\beta \sqrt{\mu^2 k_L^2 + k_L^2}}) \quad (\text{A.11})$$

já que neste caso a contribuição de superfície, na integração por partes é nula.

Com os valores de S_1 e S_2 dados em (A.7) e (A.11) e a partir de (A.1), (A.2) e (A.3) obtemos a expressão (5.26).

NOTAS DE RODAPÉ

(i) Utilizamos o sistema de unidades no qual $\hbar = c = K_B = 1$.

(ii) Ao longo do trabalho usamos indistintamente \mathcal{G} e χ_4 . Nosso propósito inicialmente foi o de utilizamos χ_4 só para a teoria à temperatura zero.

(iii) Essa identidade foi deduzida por Dolan e Jackiw na ref. 13. Ocorre que a soma é, rigorosamente, infinita. Na ref. 14 C. Bernard mostra essencialmente que a parte divergente é absorvida pelo fator de normalização. Nas demais expressões deveríamos utilizar a identidade correta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{A^2}{\left(\frac{2n\pi}{\beta}\right)^2 + Z^2} \right) = \sqrt{A^2 + Z^2} + \frac{Z}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{Z^2 + A^2}} \right) - Z - \frac{Z}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta Z} \right)$$

Donde vemos que para a diferença, usada no texto, podemos utilizar essa identidade.

(iv) $R(t)$ que aqui aparece é o fator de escala da métrica de Robertson-Walker. Vide ref (60).

REFERÊNCIAS

- (1) L.Landau e E.Lifchitz "Physique Statistique"
Editions MIR Moscou 1967.
- (2) S.L.Glashow, Nucl.Phys. 22, 579 (1961);
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19, 1264(1967);
A.Salam, Proc. 8th Nobel Symposium, Stocklm 1968, ed. N.
Svartholm (Almgvist and Wicksell, Stockolm, 1968), p.367.
- (3) J.C.Pati e A.Salam, Phys. Rev. D8(1973) 1240
H.Georgi e S.L.Glashow, Phys. Rev. Lett. 32(1975)438.
- (4) R.Slansky, Phys. Reports 79, 1 (1981)
S.H.Tye "Introduction to the SU(5) Grand Unified Theory
and Related Topics" Cornell Preprint CLNS-82/527.
- (5) R.P.Feynmann e A.R.Hibbs, "Quantum Mechanics and Paths
Integrals" - McGraw-Hill, N.Y. 1965.
- (6) F.W.Wiegel, Physics Reports 16, 57 (1975).
- (7) J.B.Kogut, Reviews of Modern Physics 51, 659 (1979)
Vide também refs. 13 e 14.
- (8) D.J.Gross, M.Perry e L.Yaffe, Phys.Rev. D25, 330(1982).
- (9) Robert H.Brandenberger, "Quantum Field Theory Methods in
Cosmology" Preprint Univ. Harvard HUTMF 82/B122
- (10) D.Amit, "Field Theory, the Renormalization Group, and
critical Phenomena" McGraw Hill - N.York (1978).
- (11) S.Coleman e E.Weinberg, Phys.Rev. D7(1973)1888
- (12) S.Coleman, V.Glaser e A.Martin, Comm.Math.Physics 58,
211(1978).
- (13) L.Dolan e R.Jackiw, Phys.Rev. D9, 3320 (1974).
- (14) C.Bernard, Phys.Rev. D9, 3312(1974).

- (15) A.D.Linde, Rep.Prog.Phys. 42(1979)389.
- (16) P.W.Higgs, Phys.Lett. 12(1964)132
F.Englert e R.Brout, Phys.Rev.Lett.13(1964)321
G.Guralnik, C.Hagen e T.Kibble, Phys.Rev.Lett. 13
(1964)585
P.W.Higgs, Phys.Rev. 145(1966)1156
T.Kibble, Phys.Rev.(1967)1554.
- (17) K.Babu Joseph, V.Kuriakose e M.Sabir - Phys.Letters
115B, 120(1982).
- (19) C.Aragão de Carvalho, G.C. Marques , A.J. da Silva e
I. Ventura, "Domain walls at Finite Temperatura", em
preparação.
- (19) A.Ferraz de Camargo Filho, R.Shellard e G.C. Marques
"Vacuum Decay in a Soluble Model". IFUSP Preprint P-386
(1983).
- (20) A.C.Davis and S.H.Kasdan, Phys. Lett. 100B,145(1981).
- (21) E.Witten, Nucl.Phys. B177, 477(1981).
- (22) P.Steinhardt, Nucl.Phys. B179,492(1981).
- (23) I.Bialynicki-Birula and J.Mycielski, Bull.Acad.Pol.Sci.
Cl.III, 23, 461(1965);
G.C.Marques and I.Ventura, Rev.Bras.Fís. 7,297(1977);
I.Ventura, Doctoral Thesis, IFUSP(1978);
I.Ventura and G.C.Marques, J.Math.Phys. 19(838)1978.
- (24) S.Coleman, "The uses of instantons" "Lectures at the
International school of subnuclear physics, Ettore Ma-
jorana" (1977) ed. A.Zichichi.
- (25) S.W.Hawking, Comm.Math.Phys.55,149(1977).
- (26) S.Coleman, Phys.Rev. D15,2929(1977)
C.G.Callan and S.Colemann, Phys.Rev. D16,1762(1977).
- (27) G.C.Marques e I.Ventura, Phys.Rev. D14, 1056(1976)

- (28) L.S.Schulman - "Techniques and Applications of Path Integrals", J.Wiley - N.York (1981).
- (29) J.S.Langer, Ann.Physics 41, 108(1967) e 54, 258(1969)
A.D.Linde, Phys.Lett. B100, 37(1981)
I.Affleck, Phys.Rev.Letters 46, 388(1981).
- (30) Resultados numéricos obtidos com os autores da ref. (19)
- (31) I.Ventura, Phys.Rev. B24, 2812(1979).
- (32) R.Rajararaman, Phys. Reports 21C, 5(1975).
- (33) J.M.Kosterlitz e D.J.Thouless, J.Physics C6,1181(1973).
- (34) G.C.Marques e I.Ventura, "An alternative view of cosmological phase transitions" IFUSP Preprint P-342(1982).
- (35) D.Bazeia, G.C.Marques e I.Ventura - A ser publicado na Rev. Bras. Física (1983).
- (36) A.D.Dolgov e Ya. B.Zeldovich, Reviews of Modern Physics 53, 1(1981)
G.Steigman, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci 29, 313(1979)
G.Steigman,"The early Universe - The ultimate accelerator"Bartol Research Foundation Preprint (1982)
F.Wilczek - Proc.Natl.Acad.Sci USA 79, 3376(1982)
G.C.Marques, "Física de Partículas Elementares, Transições de Fase e Cosmologia", Preprint IFUSP (1983).
- (37) S.Weinberg, The First Three Minutes, New York, Bantam.
- (38) A.A.Penzias e R.W.Wilson, Astrophys. J. 142, 419(1965)
R.W.Dicke, P.J.E.Peebles, P.G.Roll e D.T.Wilkinson
As. J. 142, 414(1965).
- (39) G.Steigman, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci 29, 313(1979).
G.Steigman,"The early Universe - The ultimate accelerator Bartol"Research Foundation Preprint (1982).
- (40) R.Opher, "Neutrinos in the Universe", Proc. III Escola

de Gravitação e Cosmologia, Rio de Janeiro, Fev. 1982.

- (41) P.N.Schramm e R.W.Wagoner, Ann.Rev.Nucl. Sci. 27, 37 (1977).
- (42) S.M.Autin - "The creation of the light elements - Cosmic Rays and Cosmology - Preprint MSUCL-333(1980)
S.Pacheco - Comunicação no I Encontro de Cosmologia , Gravitação e Física de Partículas. Rio de Janeiro 1982.
- (43) G.Steigman, Annual Rev. Astron. Astrophys. 14, 339(1976).
- (44) A.Sakharov, JEPT 5, 24(1967).
M.Yūshimura, Phys.Lett. 41, 281(1978).
S.Dimopoulos and L.Susskind, Phys.Rev.D18, 4500(1979).
D.Toussaint, S.B.Treiman, F.Wilczek and A.Zee, Phys. Rev. D19, 1036(1979).
S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. 42, 850(1979).
A.Ignatiev, W.Krasnikov, V.Kuzmin and A.Taukhelidze, Phys.Lett. 76B, 436(1978).
J.Ellis, M.R.Gaillard and V.Nanopoulos, Phys.Lett. 80B, 360(1978).
E.W.Kolb and S.Wolfram, Phys.Lett. 91B 217(1980)
Nucl.Phys. B172, 224(1980).
- (45) A.H.Guth e E.Weinberg, Phys.Rev. D23, 876(1981).
- (46) T.W.B.Kibble, J.Phys. A9, 1387(1976) e Phys. Reports 67, 183(1980).
- (47) G.Lazarides, Q.Shafi e T.F.Walsh, Nucl.Physics B195, 157(1982).
Vide também A.Vilenkin, Phys.Rev. D23, 852(1981).
- (48) H.B.Nielsen e P.Olesen, Nuclear Physics B61, 41(1973).
- (49) Vide o artigo de resenha de P.Goddard e D.Olive, Rep. Prog.Phys. 41, 1357(1978).
- (50) Ya.B.Zel'Dovich and M.Yu.Khlopov, Phys.Lett. 79B, 239

- (1978).
- J.P.Preskill, Phys.Rev.Lett. 43, 1365(1979).
- (51) A.H.Guth and S.H.H.Tye, Phys.Rev.Lett. 44, 631(1980);
M.Einhorn and K.Sato, Nucl.Phys. B180, 385(1981).
- (52) O.Bertolami Neto, A Evolução do Conceito "Constante Cosmológica" - a ser publicada nos anais do I Encontro de Cosmologia, Gravitação e Física de Partículas.
- (53) Ya.B.Zeldovich, Sov.Phys.Usp. 11, 381(1968) e JETP Letters 6, 345(1967).
- (54) A.D.Linde, JETP Letters, 19(5), (1974).
- (55) Ya.B.Zeldovich, Mon.Not.R.Astronomy Soc. (1972), Short communication.
- (56) A.Vilenkin, Phys.Rev. D24, 2082(1981);
A.Vilenkin, Phys.Rev.Letters 46, 1169(1981).
- (57) R.Holdon, "Domain Wall: Galaxy Formation and Baryons Number" - Preprint Univ. Stanford ITP 712 e 713 (82).
- (58) O.Bertolami Neto e G.C.Marques, "Domain Walls and Clustering of Matter in Early Universe" - em preparação (1983).
- (59) A.D.Linde, Nuclear Physics B216, 421(1983).
- (60) A.Guth, Phys.Rev. D23, 347(1981).
- (61) D.J.Callaway e D.J.Maloof, "Effective Potential of Lattice Ψ^4 theory", Phys.Rev. D(1983).
C.M.Bender e Fred Cooper, "Failure of the Naive Loop Expansion in Ψ^4 Field Theory when there is Broken Symmetry" Preprint Los Alamos LA 83-222
- (62) J.Fröhlich, G.Morchio and F.Strocchi, Nucl.Phys. B190, 553(1981).
- (63) O.Bertolami Neto, Panorama em Física de Partículas e Cosmologia - Tese de Mestrado (1983).

F I G U R A S

Fig.1 - Comportamento do potencial efetivo em função da temperatura.

- (a) Comportamento a $T = 0$
- (b) Comportamento para $T < T_c$
- (c) Comportamento para $T = T_c$
- (d) Extrapolação para $T = \infty$

Fig.2 - Comportamento do potencial efetivo de uma teoria de Gauge.

- (a) $T = \infty$
- (b) $T_c < T < \infty$
- (c) $T = T_c$
- (d) $T < T_c$
- (e) $T = 0$

Fig.3 - Comportamento do parâmetro de ordem com a temperatura mostrando também a curva de "histerese".

Fig.4 - Comportamento do potencial associado ao modelo dado pela equação (4.3)

- (a) $T > T_c$
- (b) $T < T_c$

Fig. 5 - Imagem do sistema coalhado de paredes.

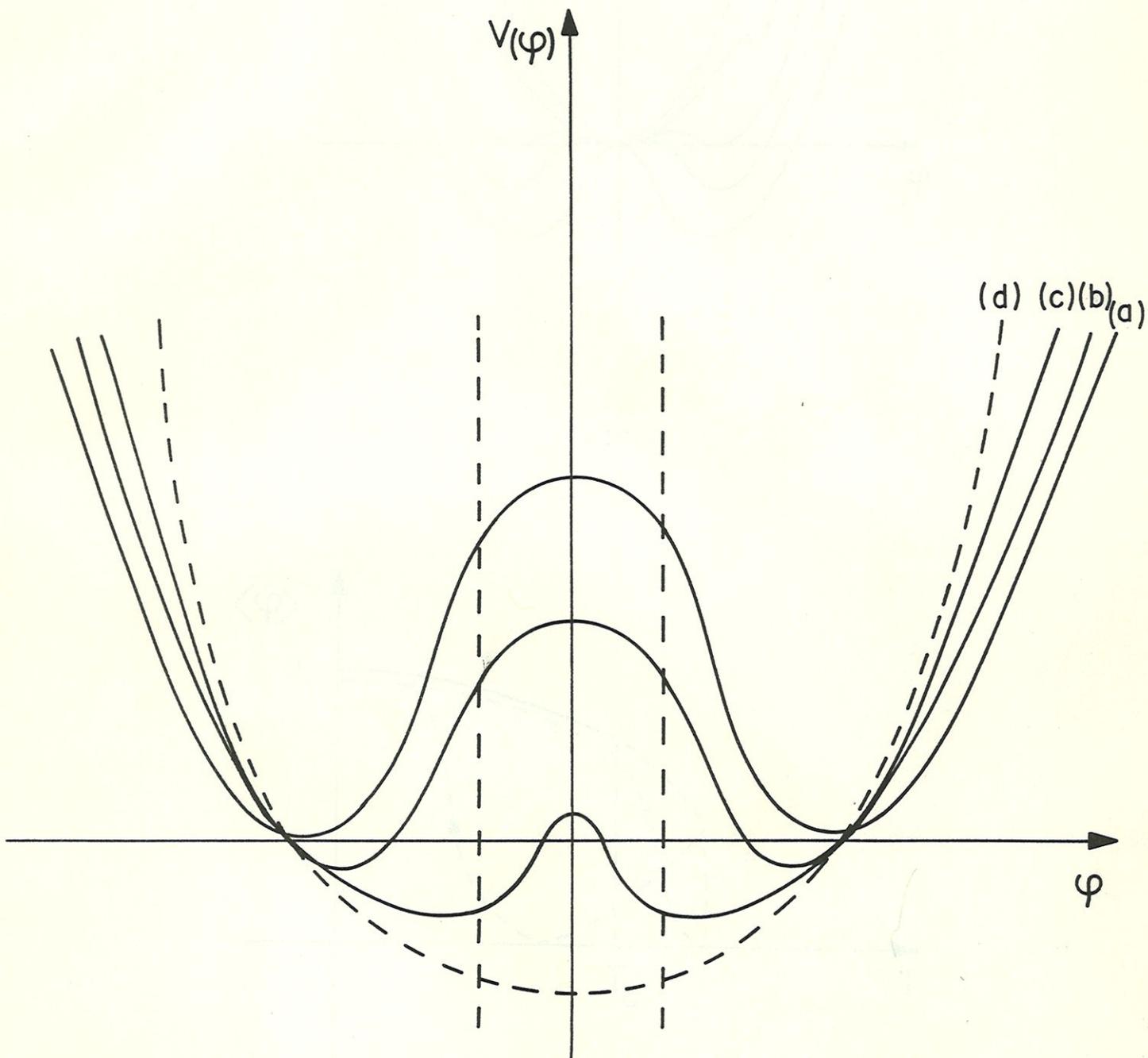


FIG 1

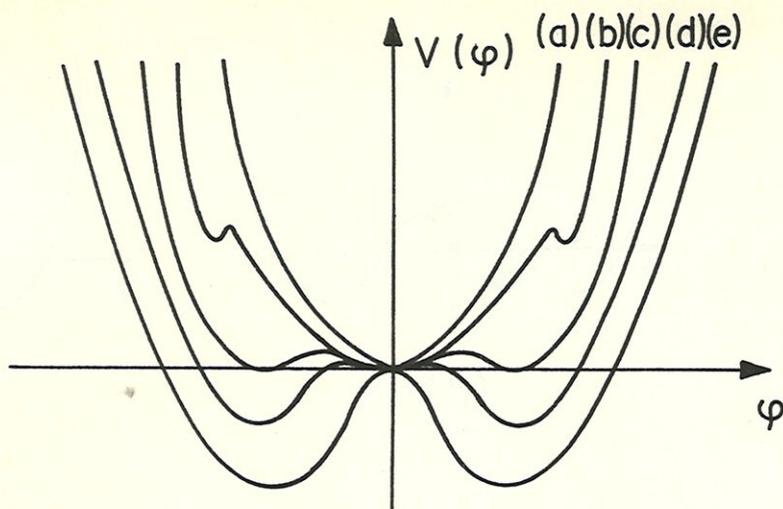


FIG2

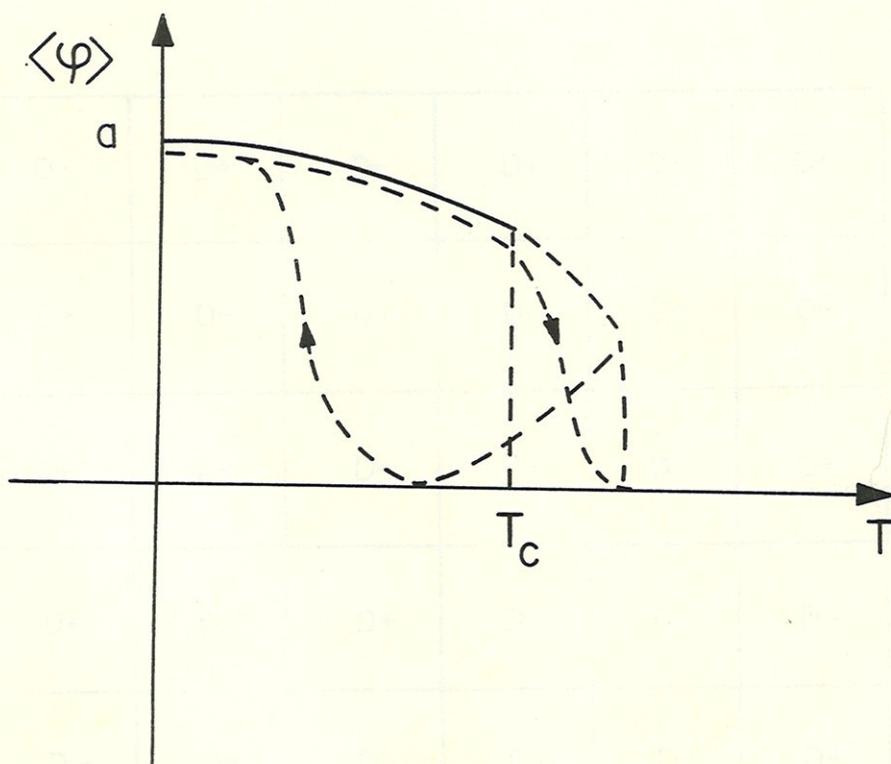


FIG 3

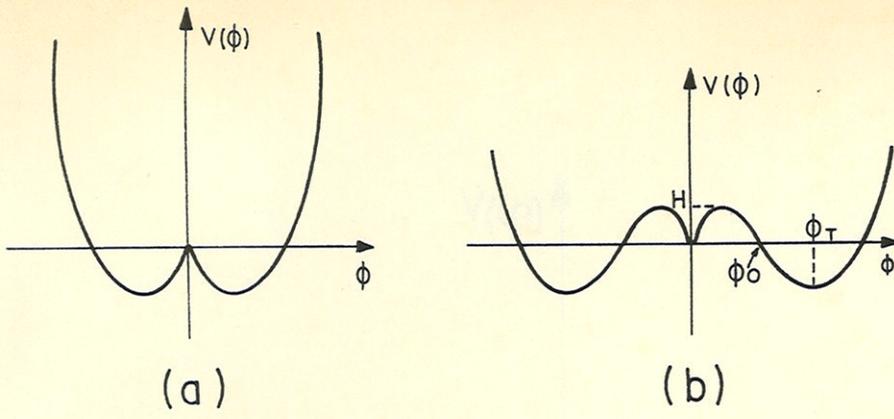


FIG 4

D-	D+	D-	D+	D-	D+
D+	D-	D+	D-	D+	D-
D-	D+	D-	D+	D-	D+
D+	D-	D+	D-	D+	D-
D-	D+	D-	D+	D-	D+

FIG 5