EXTREMOS DETECTÁVEIS POR JATOS

*Angelo Barone Netto**

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE LIVRE DOCENTE
EM MATEMÁTICA

* Durante a realização deste trabalho o autor contou com o auxílio financeiro do CNPq (IMPA) e da USP (MAP-IME), aos quais o autor agradece.

São Paulo, março de 1980

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de expressar aqui sua gratidão às pessoas sem cujo concurso este trabalho não teria sido possível, mesmo correndo o risco de esquecer algumas: seus colegas do IME-USP e os professores do IMPA, que me propiciaram uma estada agradável e proveitosa nesta Instituição, particularmente os professores dos dois Institutos que tiveram a paciência de me ouvir, me apontar incorreções e às vezes também porque não dizê-lo, me ensinaram a corrigi-las e mais particularmente ainda aos profs. drs. Maurício Matos Peixoto, Alcilêa Augusto Homem de Mello e Mário Barone Júnior sem cuja ajuda "física" eu jamais teria logrado fazer sequer o que fiz, pelo menos no prazo em que fi-lo.

Ângelo

EXTREMOS DETECTÁVEIS POR JATOS

C A P Í T U L O 0

Introdução

Consideraremos germes $f:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$. Como usualmente representaremos também por f um representante do germe. É nosso escopo indicar condições sobre o jato punctual de f em $0 \in \mathbb{R}^n$ para que se possa decidir se esse ponto é um extremo local de f.

A idéia é reduzir o estudo ao comportamento local em $0 \in \mathbb{R}^+$ de um número finito de germes

$$f_i:(\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0)$$

de funções de uma única variável.

Inicialmente, abordaremos o caso em que f é um polinômio e daremos uma caracterização completa.

Em seguida, consideraremos o caso em que f tem "jato k generalizado" e então a caracterização não será mais completa, porém, mostraremos que ela é a melhor possível no sentido que apenas não são classificados aqueles germes cujo "jato k" não contém a informação desejada.

CAPÍTULO 1

Extremos de polinômios

1.0 - DEFINIÇÃO - Sejam $f:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$ um polinômio de grau menor do que $k(\leq k)$ e

$$g:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$$
$$x \mapsto |x|^2$$

Daremos o nome de $V(f)$ ao conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^n$ onde grad f é radial, ou seja,

$$V(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \left(\text{posto de } \begin{bmatrix} \text{grad } f(x) \\ \text{grad } g(x) \end{bmatrix}\right) < 2\right\}.$$

Seja $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x| = \varepsilon\}$. Então $V(f) \cap S_\varepsilon$ é precisamente o conjunto dos pontos críticos de $f|S_\varepsilon$. Em particular, $\forall \varepsilon \geq 0$, $V(f) \cap S_\varepsilon \neq \emptyset$, o que mostra que $V(f)$ é uma subvariedade algébrica do $\mathbb{R}^n$ da qual a origem é um ponto não isolado.

Ser-nos-á útil no futuro o seguinte

1.1 - TEOREMA ALGÉBRICO DE SARD - Sejam V uma subvariedade semi-algébrica do $\mathbb{R}^n$ e $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um polinômio. Então o conjunto dos valores críticos de $f|V$ é finito.

PROVA - V admite uma estratificação com um número finito de estratos que ainda são semi-algébricos [G]. Basta provar então o resultado para o caso em que V é subvariedade diferenciável semi-algébrica.

O conjunto $A = \{x \in V |\ x$ é ponto crítico de $f|V\}$ é semi-algébrico pelo teorema de Tarski-Seidenberg [G] pois

$$A = V \setminus \pi(TV \setminus \ker Df)$$

onde TV e $\ker Df$ são semi-algébricos em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a primeira projeção.

Então A tem um número finito de componentes conexas [G]. Mas $f|A$ é localmente constante e portanto é constante nas componentes conexas. □

1.2 - PROPOSIÇÃO - Se $f:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$ for um polinômio então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall \varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0 \Rightarrow V(f) \cap B_{\varepsilon_1}$ é um retrato de deformação de $V(f) \cap B_{\varepsilon_2}$ onde $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| < \alpha\}$.

PROVA - Na notação de 1.0, $g|V(f)$ tem um número finito de valores críticos estritamente positivos dos quais o menor representaremos por ε_0^2. Isto significa que, dentre as esferas S_ε não transversais a $V(f)$, S_{ε_0} é a menor. □

Vemos assim que $V(f) \cap (B_{\varepsilon_0} \setminus \{0\})$ tem um número finito de componentes conexas, cada uma das quais é um cone K_i (de "vértice na origem"):

$V(f) \cap (B_{\varepsilon_0} \setminus \{0\}) = \cup K_i$, reunião disjunta, onde $K_i \cong A_i \times (0;1)$ e A_i é uma componente conexa de $V(f) \cap S_\varepsilon$

com $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Vamos agora definir os germes

$$\phi_i : (\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0)$$

a cujo estudo o teorema seguinte permitirá reduzir a detecção do extremo de f.

Em correspondência a cada K_i seja

$$\phi_i : (\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0) \text{ dada por}$$

$\phi_i(0) = 0$ e $\phi_i(\alpha) = f(x)$ onde $x \in K_i \cap S_\alpha$, $0 < \alpha < \varepsilon_0$.

Para mostrar que ϕ_i está bem definida notemos que $f|K_i \cap S_\alpha$ é constante pois $K_i \cap S_\alpha$ é conexa e $\mathrm{grad}(f|K_i \cap S_\alpha) = 0$. Temos assim associado ao polinômio f um número finito de funções ϕ_i de uma variável, de modo que podemos enunciar o seguinte:

1.3 - <u>TEOREMA</u> A) Uma condição necessária e suficiente para que $0 \in \mathbb{R}^n$ seja ponto de mínimo (mínimo forte, máximo, máximo forte) para f é que $0 \in \mathbb{R}^+$ o seja para todas as ϕ_i.

B) Uma condição necessária e suficiente para que $0 \in \mathbb{R}^n$ não seja ponto de extremo para f é que existam i, j tais que ϕ_i tenha máximo forte e ϕ_j mínimo forte em $0 \in \mathbb{R}^+$.

<u>PROVA</u> - Para estabelecer a validade de todo o teorema, basta verificar que a condição da parte A

é suficiente. Para tanto, suponhamos, por exemplo, que todas as ϕ_i têm mínimo em $0 \in \mathbb{R}^+$. Como a família de tais funções é finita, existe $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon_0$) tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\forall i$, $\phi_i(\varepsilon) \geq 0$.

Consideremos $f|S_\varepsilon$. O conjunto dos pontos críticos dessa função é $V(f) \cap S_\varepsilon$. Portanto o valor mínimo de $f|S_\varepsilon$ é $\phi_i(\varepsilon)$ para algum i, o que mostra que $f|B_{\varepsilon_1} \geq 0$ e portanto $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo para f. □

1.4 - <u>OBSERVAÇÃO</u> - K_i é um aberto de uma variedade algébrica e $0 \in \overline{K_i}$. Isto implica, pelo "curve selection lemma" [M], que existe uma curva analítica.

$$\gamma_i : [0;1) \to \mathbb{R}^n \quad \text{tal que}$$

$\gamma_i(0) = 0$ e $\gamma_i(t) \in K_i$ para $t \neq 0$.

Notemos que $\gamma_i(t) = a_{m_i} t^{m_i} + \sum_{k=m_i+1}^{\infty} a_k t^k$ com $a_k \in \mathbb{R}^n$ $\forall k \geq m_i$, $a_{m_i} \neq 0$ e $m_i \geq 1$ (pois $\gamma(0) = 0$) e assim $h_i = |\gamma_i| : (\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R}^+;0)$ é um germe de homeomorfismo pois h_i é contínua e localmente estritamente crescente; como $\phi_i \circ h_i = f \circ \gamma_i$ e o segundo membro é uma função analítica temos que ou $\phi_i \equiv 0$ ou $0 \in \mathbb{R}^+$ é um zero isolado de ϕ_i e portanto um extremante forte.

Ainda, como h_i é crescente, ϕ_i tem máximo (mínimo) em $0 \in \mathbb{R}^+$ se e só se $f \circ \gamma_i$ o tiver e este fato é detectável pelo sinal da derivada de menor ordem de $f \circ \gamma_i$ que não se anular na origem.

Além disso temos:

$$h_i(t) = \sqrt{<\gamma_i(t);\gamma_i(t)>} = \sqrt{|a_{m_i}|^2 t^{2m_i} + \sum_{j=2m_i+1} b_j t^j} =$$

$$= |a_{m_i}| t^{m_i} \sqrt{1 + \psi(t)} \quad \text{com } \psi \text{ analítica}$$

e $\psi(0) = 0$ donde

$$\frac{|a_{m_i}|}{2} t^{m_i} \leq h_i(t) \leq 2|a_{m_i}| t^{m_i}$$

e evidentemente

$$\frac{|a_{m_i}|}{2} \left[h_i^{-1}(u)\right]^{m_i} \leq u \leq 2|a_{m_i}| \left[h_i^{-1}(u)\right]^{m_i},$$

desigualdades estas que serão usadas no capítulo 3.

CAPÍTULO 2

Uma extensão do conceito de jato e do "splitting lemma"

Consideraremos germes de funções

$$f:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$$

e, como de hábito, representaremos por f quer um germe, quer uma função que o represente.

2.0 - DEFINIÇÃO - Diremos que um germe f admite jato punctual de ordem k na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ se existir um polinômio

$$P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

de grau menor do que $k(\leq k)$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{|x|^k} = 0$$

Obviamente tal polinômio, quando existir, é único e coincide com o polinômio de Taylor de ordem k quando f admitir tal polinômio. Representá-lo-emos por $j^k f$ chamando-o simplesmente de jato k da f.

O conjunto dos germes $f:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R};0)$ que admitem jato k será representado por $G^k(n)$.

Observemos que $G^{k+1}(n) \subset G^{k}(n)$ e que o conjunto dos germes de classe C^k está contido propriamente em $G^k(n)$. A inclusão é trivial e a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + e^{-1/x^2} & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

que é descontínua exceto na origem e pertence a $G^k(1)$ para todo k mostra que a inclusão é própria.

2.1 - <u>OBSERVAÇÃO</u> - O conceito de jato punctual se extende de maneira natural a germes $f:(\mathbb{R}^n;x) \to (\mathbb{R}^p;y)$ e, neste contexto, são válidos, com as adaptações evidentes, os teoremas gerais do Cálculo Diferencial, tais como: a regra da cadeia, as formas locais das imersões e submersões, o lema de Morse, etc.

No que segue examinaremos como ilustração apenas a forma local das submersões para p=1 e o "splitting lemma".

2.2 - <u>FORMA LOCAL DAS SUBMERSÕES</u> - Seja $f \in G^k(n)$, $k \geq 1$. Se $j^1f \neq 0$ então para todo r com $1 \leq r \leq k$ e todo s tal que $r \leq s \leq \omega$ existe um germe de difeomorfismo $\phi:(\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R}^n;0)$ de classe C^s tal que

$$j^r(f\circ\phi) = \pi_1$$

<u>PROVA</u> - Basta considerar o caso r=k e $s=\omega$. Temos $j^1f \neq 0$ e como j^kf é um polinômio e

$$j^1(j^kf) = j^1f \neq 0$$

existe $\phi \in Dif^\omega(\mathbb{R}^n;0)$ tal que

$$(j^kf)\circ\phi = \pi_1$$

Então

$$j^k(f\circ\phi) = j^k((j^k f)\circ(j^k\phi)) = j^k((j^k f)\circ\phi) =$$

$$= j^k\pi_1 = \pi_1. \quad \square$$

2.3 - <u>SPLITTING LEMMA</u> - Seja $f \in G^k(n)$, $k \geq 2$. Se $j^1 f = 0$ então existem uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^w$ e, para todo r com $2 \leq r \leq k$ e todo s tal que $r \leq s \leq \infty$, um germe de difeomorfismo $\phi: (\mathbb{R}^n;0) \to (\mathbb{R}^n;0)$ de classe C^s tais que

$$j^r(f\circ\phi)(x;y;z) = |x|^2 - |y|^2 + p_r(z)$$

onde $p_r(z)$ é um polinômio de grau menor do que r com $j^2 p_r = 0$.

<u>PROVA</u> - Basta considerar o caso $r=k$ e $s=\infty$. Como $j^k f$ é um polinômio e $j^1(j^k f) = 0$, existem uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^w$ e uma $\phi \in \mathrm{Dif}^\infty(\mathbb{R}^n;0)$ tais que

$$((j^k f)\circ\phi)(x;y;z) = |x|^2 - |y|^2 + g(z)$$

onde $j^2 g = 0$.

Ora

$$j^k(f\circ\phi) = j^k((j^k f)\circ\phi) \text{ donde}$$

$$j^k(f\circ\phi)(x;y;z) = |x|^2 - |y|^2 + j^k g(z).$$

Chamando $j^k g = p_k$ temos $j^2 p_k = 0$ pois $j^2(j^k g) = j^2 g = 0$. $\square$

C A P Í T U L O 3

Extremos detectáveis por jatos.

Neste capítulo estenderemos às funções que têm jato k os resultados já obtidos para polinômios, com as necessárias adaptações.

3.0 - <u>DEFINIÇÃO</u> - Diremos que $f \in G^r(n)$ é <u>k-decidível</u> $(k \leq r)$ se, a partir de $j^k f$, for possível concluir que $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo, máximo, ou que não é extremamente de f.

Observemos que se $f \in G^r(n)$ for k-decidível, e se s for tal que $k \leq s \leq r$ então f é s-decidível.

Se $f \in G^r(n)$, fixado $k \leq r$ podemos aplicar ao polinômio $j^k f$ o processo descrito no capítulo 1, obtendo uma família finita

$$(\phi_i), \quad \phi_i : (\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0).$$

Vamos agora definir os germes

$$f_i : (\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0)$$

a cujo estudo o teorema seguinte permitirá, eventualmente, reduzir a detecção do extremo de f.

Usando as notações de 1.4 temos:

$$\phi_i \circ h_i = (j^k f) \circ \gamma_i, \text{ que é analítica}$$

e

$$\gamma_i(t) = a_{m_i} t^{m_i} + \sum_{j=m_i+1}^{\infty} a_j t^j \quad \text{com } a_{m_i} \neq 0.$$

Seja $f_i:(\mathbb{R}^+;0) \to (\mathbb{R};0)$ dada por

$$f_i = j^{m_i k}(\phi_i \circ h_i).$$

O germe f_i é o substituto natural que encontramos para o jato k de ϕ_i cuja existência não sabemos garantir. A demonstração do próximo teorema continuaria válida se substituíssemos f_i por $j^k\phi_i$ quando este existisse.

Já estamos em condições de enunciar o seguinte

3.1 - TEOREMA - A) Se todas as f_i tiverem mínimo (máximo) forte em $0 \in \mathbb{R}^n$, então f tem também mínimo (máximo) forte em $0 \in \mathbb{R}^n$.

B) Se existirem i e j tais que f_i tem mínimo forte e f_j máximo forte em $0 \in \mathbb{R}^+$, então $0 \in \mathbb{R}^n$ não é extremamente de f.

C) Nos demais casos, f não é k-decidível.

DEMONSTRAÇÃO - A) Suponhamos, por exemplo, que cada f_i tem mínimo forte em $0 \in \mathbb{R}^+$. Como f_i é um polinômio de grau menor que $m_i k$ ($\leq m_i k$), podemos escolher

$$\alpha_i > 0 \quad \text{e} \quad \sigma_i > 0 \quad \text{tais que}$$

$$\forall t,\ 0<t<\sigma_i \Rightarrow f_i(t)>\alpha_i t^{m_i k}>\beta_i[h_i(t)]^k$$

com $\beta_i>0$ obtido usando as desigualdades de 1.4. Por se tratar de uma família finita, podemos tomar $\beta>0$, $\sigma>0$ tais que

$$\forall i,\ \forall t,\quad 0<t<\sigma \Rightarrow f_i(t)>\beta[h_i(t)]^k.$$

Por outro lado

$\forall\gamma>0$, $\exists\zeta>0$, $\zeta\leq h_i(\sigma)$ para todo i, tal que

$$\forall i,\ \forall u,\quad 0<u<\zeta \Rightarrow |\phi_i(u) - f_i(h_i^{-1}(u))| <$$

$$< \gamma[h_i^{-1}(u)]^{m_i k} < \frac{\beta}{2}\, u^k$$

se γ for conveniente.

Tomemos finalmente $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\zeta$, tal que

$$\forall x,\ |x| = \delta<\varepsilon \Rightarrow |f(x) - j^k f(x)| < \frac{\beta}{4}\,\delta^k.$$

Temos então

$$\forall x,\ |x| = \delta<\varepsilon \Rightarrow f(x) = j^k f(x) + f(x) - j^k f(x) \geq$$

$$\geq \min j^k f|\ S_\delta - \frac{\beta}{4}\,\delta^k.$$

No capítulo 1 vimos que existe i tal que

$$\min j^k f|\ S_\delta = \phi_i(\delta).$$

Portanto, para todo x, se $|x| = \delta<\varepsilon$ então

$$f(x) \geq \phi_i(\delta) - \frac{\beta}{4}\,\delta^k = \phi_i(\delta) - f_i(h_i^{-1}(\delta)) + f_i(h_i^{-1}(\delta)) - \frac{\beta}{4}\,\delta^k \geq$$

$$\geq f_i(h_i^{-1}(\delta)) - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{4}\right) \delta^k \geq \frac{\beta}{4}\,\delta^k$$

o que mostra que

$$|x|<\varepsilon \Rightarrow f(x) \geq \frac{\beta}{4}\,|x|^k$$

e $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo forte para f. Isto prova A.

Para provar B tomemos $\alpha>0$ e $\sigma>0$ tais que

$$\forall t,\ 0<t<\sigma \Rightarrow f_i(t) > \alpha t^{m_i k} > \beta_i [h_i(t)]^k$$

$$\text{e} \quad f_j(t) < -\alpha t^{m_j k} < -\beta_j [h_j(t)]^k.$$

Sejam $\beta = \min(\beta_i;\beta_j) > 0$ e $\zeta>0$, $\zeta<h_i(\sigma)$ e $\zeta<h_j(\sigma)$ tais que

$$\forall u,\ 0<u<\zeta \Rightarrow |\phi_i(u) - f_i(h_i^{-1}(u))| < \frac{\beta}{2}\,u^k$$

$$\text{e} \quad |\phi_j(u) - f_j(h_j^{-1}(u))| < \frac{\beta}{2}\,u^k.$$

Tomemos finalmente $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\zeta$ tal que

$$\forall x,\ |x|<\varepsilon \Rightarrow |f(x) - j^k f(x)| \leq \frac{\beta}{4}\,|x|^k.$$

Mostremos que, $\forall\delta>0$, $\delta<\varepsilon$, existem em S_δ pontos $x_i \in K_i$, $x_j \in K_j$ (K_i e K_j como em 1.2) tais que $f(x_i)>0$ e $f(x_j)<0$.

De fato, se $x_j \in S_\delta \cap K_j$ temos

$$f(x_j) = j^k f(x_j) + f(x_j) - j^k f(x_j) \le \phi_j(|x_j|) + \frac{\beta}{4}|x_j|^k =$$

$$= \phi_j(|x_j|) - f_j(h_j^{-1}(|x_j|)) + f_j(h_j^{-1}(|x_j|)) + \frac{\beta}{4}|x_j|^k \le$$

$$\le f_j(h_j^{-1}(|x_j|)) + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{4}\right)|x_j|^k \le \frac{\beta}{4}|x_j|^k < 0.$$

Analogamente se $x_i \in S_\delta \cap K_i$ temos

$$f(x_i) \ge \frac{\beta}{4}|x_i|^k > 0$$

e portanto arbitrariamente perto da origem f assume valores estritamente positivos e negativos o que prova B.

Para provar C focalizemos o caso em que todas as f_i têm mínimo mas existe λ tal que f_λ tem mínimo brando ($f_\lambda \equiv 0$).

Basta construir dois germes g_1 e g_2 tais que $j^k g_\nu = j^k f$ $\nu=1,2$ e $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo forte para um deles e não é ponto de mínimo (sequer brando) para o outro.

Para tanto, para cada λ tal que $f_\lambda \equiv 0$, escolhamos $\varepsilon_\lambda>0$ (suficientemente pequeno) e $\alpha_\lambda>0$ (suficientemente grande) tais que

$$\forall t,\ 0<t<\varepsilon_\lambda \implies |\phi_\lambda(h_\lambda(t))| < \alpha_\lambda t^{m_\lambda k+1} <$$

$$< \beta_\lambda \left[h_\lambda(t)\right]^{\frac{m_\lambda k+1}{m_\lambda}} .$$

A obtenção da primeira desigualdade é possível pois $j^{m_\lambda k}(\phi_\lambda \circ h_\lambda) = f_\lambda = 0$ e então $j^{m_\lambda k+1}(\phi_\lambda \circ h_\lambda)$ é um monômio de grau $m_\lambda k+1$; β_λ é obtido das desigualdades de 1.4.

Como há finitos valores de λ tais que $f_\lambda \equiv 0$, é possível encontrar $\varepsilon>0$, $\beta>0$ e $m \in \mathbb{N}^*$ de modo que para todos estes valores de λ tenhamos

$$\forall t,\ 0<t<\varepsilon \Longrightarrow |\phi_\lambda(h_\lambda(t))| < \beta\left[h_\lambda(t)\right]^{\frac{mk+1}{m}} .$$

Definimos então

$$g_\nu(x) = j^k f(x) + (-1)^\nu \beta |x|^{\frac{mk+1}{m}} \qquad \nu=1,2.$$

É claro que $j^k g_\nu = j^k f$ e que os pontos críticos de $g_\nu|S_\sigma$ são precisamente os pontos críticos de $j^k f|S_\sigma$, $\forall\sigma>0$.

Temos ainda para todo i,

$$g_\nu(\gamma_i(t)) = j^k f(\gamma_i(t)) + (-1)^\nu \beta \left|\gamma_i(t)\right|^{\frac{mk+1}{m}} =$$

$$= \phi_i(h_i(t)) + (-1)^\nu \beta \left[h_i(t)\right]^{\frac{mk+1}{m}} .$$

Verifiquemos que g_1 não tem mínimo (sequer brando) em $0 \in \mathbb{R}^n$, isto é, que em toda vizinhança de

$0 \in \mathbb{R}^n$ existem pontos nos quais g_1 assume valores estritamente negativos.

De fato, se $f_\lambda \equiv 0$ e $x_\lambda \in K_\lambda$ com $0<|x_\lambda|<h_\lambda(\varepsilon)$ então

$$g_1(x_\lambda) = g_1(\gamma_\lambda(t)) = \phi_\lambda(h_\lambda(t)) - \beta\left[h_\lambda(t)\right]^{\frac{mk+1}{m}} < 0$$

pela escolha do ε.

Mostremos agora que g_2 admite mínimo forte em $0 \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\sigma>0$ tal que, para todo λ,

$$f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow \sigma<h_\lambda(\varepsilon).$$

Temos $\min g_2|\, S_\sigma = g_2(\gamma_i(t))$ para algum i, e então

$$\min g_2|\, S_\sigma = \phi_i(h_i(t)) + \beta\left[h_i(t)\right]^{\frac{mk+1}{m}}.$$

Se $f_i \equiv 0$, $\min g_2|\, S_\sigma > 0$ pela escolha de ε, β e m; caso contrário,

$\phi_i(h_i(t)) > \mu_i t^k$, para um conveniente $\mu_i>0$, numa vizinhança adequada de 0 em $\mathbb{R}^+$ e

$$g_2(\gamma_i(t)) > \mu_i t^k + \beta\left[h_i(t)\right]^{\frac{mk+1}{m}} > 0$$

o que mostra que $0 \in \mathbb{R}^n$ é ponto de mínimo forte para g_2. □

B I B L I O G R A F I A

[G] - *Gibson*, C. - Construction of Canonical Stratifications - Topological Stability of Smooth Mappings - Lecture Notes in Mathematics nº 552 - Springer - Verlag.

[M] - *Milnor*, J. - Singular points of complex surfaces - Ann. of Math. Studies 61 - Princeton Univ. Press - Princeton - N.J. - 1968.