# DEFINIBILIDADE EM SISTEMAS AUTO-REFERENTES

JACOB ZIMBARG SOBRINHO

TESE APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA O CONCURSO DE HABILITAÇÃO

À LIVRE-DOCÊNCIA

NO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

- SÃO PAULO, MARÇO DE 1982 -

# ÍNDICE


Introdução. . . . . 1

1. A linguagem Formal, Axiomas e Regras Lógicas . . . . . 5

2. Semântica de $L$ . . . . . 9

3. A Teoria $W$ . . . . . 16

4. O Axioma da Construtibilidade em $W$ . . . . . 20

5. Modelos Standard de $W$. . . . . 27

6. A Teoria $\langle W, * \rangle$ . . . . . 34

7. Modelos Isotrópicos. . . . . 40

8. Definibilidade por Ordinais. . . . . 46

9. As Classes como Extensões de Predicados. . . . . 55

Referências Bibliográficas. . . . . 61

Posfácio. . . . . 63

# INTRODUÇÃO

Em [4], foram introduzidos os assim denominados sistemas auto-referentes como linguagens que podem ser utilizadas como fundamento para a Matemática atual. Trata-se de uma teoria de classes descrita por uma linguagem cujos predicados se referem a si mesmos, desde que identifiquemos cada um deles com a classe que representa sua extensão. Mediante a chamada interpretação auto-referente, verifica-se que todo predicado possui uma extensão dada por um objeto interno à teoria. Assim, a classe universal é representada por um dado objeto (que é $V_{-1}$), fato que não acontece com as linguagens usuais da teoria dos conjuntos devido ao paradoxo de Russell-Zermelo. Este último é cuidadosamente evitado mediante a utilização de tipos nas variáveis usadas, os quais sugestivamente foram denominados de tipos negativos.

A linguagem dos tipos permitiu que as instâncias do Esquema da Compreensão pudessem ser realizadas no sistema, sem que os paradoxos corriqueiros aparecessem em sua forma usual. É claro que a consistência absoluta (no sentido Hilbertiano) não se demonstra, e os paradoxos, pois, poderão aparecer sob outra forma, se bem que nossa posição com respeito à imunidade do sistema quanto aos mesmos é bastante otimista.

De qualquer maneira, a todo predicado corresponde um objeto na interpretação auto-referente. Os leitores familiares com [4] verificarão que ao predicado $\phi$ da linguagem $L$ corresponde, pela interpretação acima, o objeto $\{x^*:\phi^*(x^*)\}$ dado por

$$\phi(\text{de } L) \xrightarrow{\text{(tradução)}} \phi^*(\text{de } L^*) \xrightarrow{\text{(compreensão)}} \{x^*:\phi^*(x^*)\} \text{ (classe)}.$$

Numa etapa posterior deste programa de fundamentos, surgiu a questão da correspondência oposta, entre objetos e predicados, ou seja, a de que cada objeto deveria ser definido por uma fórmula da linguagem. Infelizmente tal condição não pôde ser expressa na linguagem de primeira ordem (com tipos) utilizada, e, como alternativa para o desenvolvimento da lógica de ordem superior a nível metamatemático, optou-se pelo estudo das teorias dentro de si mesmas. Como a teoria $W$ utilizada era suficientemente forte para se desenvolver a teoria dos conjuntos, tal opção não se configurou como uma alternativa artificial, pelo contrário, ela é extremamente natural e tratável dentro do próprio sistema. Chega-se assim à noção de modelo standard da teoria, isto é, aquele em que todo objeto é definível por uma fórmula da linguagem, na interpretação natural dos predicados lingüísticos (isto é, aquela devida a Tarski).

A imposição da condição de modelo standard para a teoria resultou em uma condição equivalente de enorme simplicidade em presença do axioma da regularidade: é a de que o universo satisfaz à condição de que todos os objetos sejam definidos por

ordinais, que é o célebre axioma sugerido por Gödel em [3] e estudado por Myhill & Scott [7], Mac Aloon [6] e outros: V = = OD. Prova-se, em $W$, que

1) Todo modelo standard de $W$+regularidade satisfaz V = OD.

2) Todo modelo de $W$ + regularidade + V = OD é elementarmente equivalente a um modelo standard.

Isto mostra que $W$ não somente possui uma interpretação até certo ponto natural, que faz com que os predicados sejam representáveis, como também oferece a possibilidade (em matéria de poder expressivo da linguagem) desta poder ser estudada dentro de si mesma, e de se poder falar internamente de noções refratárias ao poder expressivo das linguagens de primeira ordem, como, por exemplo, a noção de modelo standard.

Em resumo, a presente tese tem por finalidade completar o programa lingüístico iniciado em [4], o que é feito através da introdução da cláusula de definibilidade, mediante a qual os objetos da teoria podem ser 'identificados' às fórmulas definidoras pela interpretação usual das mesmas (isto é, aquela devida a Tarski). Assim, se em [4], pela interpretação autoreferente, as fórmulas de $L$ se realizam como objetos, aqui procuraremos explorar a correspondência oposta: a de que todo objeto seja definível por meio de uma fórmula.

Para finalizar esta introdução, devo esclarecer que vários resultados apresentados nesta tese resultam da colaboração conjunta entre o autor e o Professor Amadeo P. Hiller. Eles pude-

ram ser utilizados na elaboração da tese graças à sua cavalheiresca permissão, motivo pelo qual expresso os sinceros agradecimentos. Caso estes resultados venham a ser aceitos para publicação, a omissão de seu nome como co-autor será equivalente a uma injustiça. Desejo também agradecer aos Professores Newton C. A. da Costa e Rolando Chuaqui pela paciência com que me brindaram ao ouvir as idéias envolvidas na elaboração desta tese, bem como pelas inúmeras e valiosas sugestões, observações e críticas apresentadas que, para mim, se constituiram em uma fonte muito grande de enriquecimento.

- o -

## 1 - A LINGUAGEM FORMAL, AXIOMAS E REGRAS LÓGICAS

Neste parágrafo, faremos uma revisão dos conceitos básicos que dizem respeito aos sistemas auto-referentes: a linguagem formal utilizada será cuidadosamente explicitada, como também o deverão ser as noções lógicas pertinentes aos mesmos.

A linguagem formal deverá empregar variáveis individuais com tipos: estes deverão ser os números naturais negativos 0, -1, -2, e assim por diante. Os símbolos utilizados são os seguintes:

a) variáveis individuais, $v_n^i$, onde n é um número natural e i é um tipo;

b) símbolos de predicado: $\in$ (pertinência) e $=$ (igualdade), ambos binários;

c) conectivos: $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (implicação), $\leftrightarrow$ (equivalência) e $\neg$ (negação);

d) quantificadores: $\forall$ (universal) e $\exists$ (existencial).

As fórmulas da linguagem são construídas recursivamente a partir das fórmulas atômicas mediante a utilização dos conectivos e quantificadores da maneira usual:

$v_m^i \in v_n^j$, $v_m^i = v_n^j$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$, $\neg\phi$, $\forall v_n^i \phi$ e $\exists v_n^i \phi$.

A linguagem assim construída será denotada pela letra *L*.

Em nosso discurso matemático será permitido o emprego de variáveis outras que $v_n^i$ no lugar destas: poderemos utilizar as letras $x_n^i$, $y_n^i$, $z_n^i$, $u_n^i$ e $w_n^i$ contanto que sejam guardadas as seguintes convenções:

a) o índice 0 (superior ou inferior) pode ser omitido;

b) $x_n^i$, $y_n^i$, $z_n^i$, $u_n^i$ e $w_n^i$ sempre denotam uma variável da forma $v_m^i$;

c) em um dado contexto, se $x_n^i$ denota $v_m^i$, então $x_n^j$ está no lugar de $v_m^j$;

d) em uma dada fórmula, letras distintas (como por exemplo $x_n^i$ e $y_n^i$) ou a mesma letra com índices distintos (como $x^i$, $x_1^i$, $x_2^i$) estarão sempre no lugar de variáveis distintas.

Dada uma fórmula $\phi$, sempre que usarmos a notação simbólica

$$\phi(x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}) \quad .$$

estaremos supondo que as únicas variáveis que possuem ocorrências livres em $\phi$ são $x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}$. A fórmula obtida de $\phi(x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n})$ por meio da substituição livre das variáveis $x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}$ pelas variáveis $y_1^{i_1},\ldots,y_n^{i_n}$ será denotada por

$$\phi\left[x_1^{i_1}/y_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}/y_n^{i_n}\right]$$

e se todas as ocorrências livres de $x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}$ tiverem sido substituídas por $y_1^{i_1},\ldots,y_n^{i_n}$, usaremos a notação

$$\phi\left[y_1^{i_1}, \ldots, y_n^{i_n}\right]$$

para a fórmula que resulta desta substituição de variáveis, contando que não haja nenhum perigo de confusão.

A lógica a ser empregada coincide essencialmente com o cálculo de predicados de 1ª ordem, com as modificações necessárias para o processamento das variáveis com tipos. As adaptações estão ligadas ao fato de que nos sistemas auto-referentes, se i e j são tipos, com $i \leq j \leq 0$, então todo objeto de tipo i é também objeto de tipo j.

Os axiomas e regras de natureza lógica vêm logo a seguir:

AXIOMA 1.1 - ($AL_1$): toda tautologia proposicional é um axioma.

AXIOMA 1.2 - ($AL_2$): para toda fórmula $\phi$, se $j \leq i \leq 0$ então

$$\forall v_m^i \phi \rightarrow \phi\left[v_m^i / v_n^j\right] \quad \text{e} \quad \phi\left[v_m^i / v_n^j\right] \rightarrow \exists v_m^i \phi$$

são axiomas lógicos.

AXIOMA 1.3 - ($AL_3$): para toda variável $v_n^i$, $\forall v_n^i (v_n^i = v_n^i)$ á um axioma lógico.

AXIOMA 1.4 - ($AL_4$): se $\psi$ é obtida da fórmula $\phi$ pela substituição de uma ocorrência livre da variável $v_n^i$ pela variável $v_m^j$ sem colisões de variáveis, então

$$(v_n^i = v_m^j \wedge \phi) \rightarrow \psi$$

é um axioma lógico.

As regras lógicas são as seguintes:

REGRA 1.5 - $(RL_1)$: Destacamento:

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi,\ \phi}{\psi}$$

REGRA 1.6 - $(RL_2)$:

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi}{\phi \longrightarrow \forall v_n^i \psi} \quad \text{e} \quad \frac{\psi \longrightarrow \phi}{\exists v_n^i \psi \longrightarrow \phi}$$

contanto que $v_n^i$ não possua ocorrências livres em $\phi$.

## 2 - SEMÂNTICA DE $L$

Neste parágrafo, iremos estudar as interpretações semânticas de $L$, e, para tanto, será necessário definir a noção de *estrutura* para a linguagem $L$ bem como definir as noções de satisfação e verdade que são ao caso pertinentes. Trabalharemos aqui de maneira informal, como acontece nos artigos usuais de Teoria dos Modelos. Convém no entanto observar que todos os raciocínios efetuados podem ser formalizados no âmbito da Teoria dos Conjuntos (ZF, por exemplo), e que deverá, neste parágrafo, servir de base a todas as nossas considerações.

DEFINIÇÃO 2.1 (Estruturas para a linguagem $L$) - Uma *estrutura para a linguagem* $L$ é um par $M = \langle\langle M_i : -i\in\omega\rangle, E\rangle$ tal que:

1) $M_i \neq 0$ e se $j \leq i \leq 0$ então $M_j \subset M_i$;

2) $E \subset M_0 \times M_0$.

Para não sobrecarregar a notação, usaremos também a simbologia $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ ou, mais simplificadamente, $M=\langle M_i, E\rangle$ para denotar as estruturas acima definidas.

DEFINIÇÃO 2.2 (Valorações) - Uma *valoração* em $M$ é uma aplicação f cujos elementos do domínio são variáveis individuais $v_n^i$ de tal modo que $f(v_n^i)\in M_i$, para todo $v_n^i$ no domínio de f. Ater-nos-

emos tão-somente a valorações de domínio finito, sendo conveniente também lembrar que 0 (o conjunto vazio) é também considerado como valoração.

Com esta noção em mente estamos aptos a definir os conceitos satisfação e verdade entre fórmulas e modelos de $L$.

DEFINIÇÃO 2.3 (Satisfação) - Seja M uma estrutura para $L$ e f uma valoração. A expressão *"a valoração* f *satisfaz à fórmula* $\phi$ *em* M" – e que será abreviada pela notação $M \models \phi[f]$ – será definida pela recorrência no comprimento de $\phi$ pelas seguintes cláusulas:

a) $M \models (v_m^i \in v_n^j)[f] \iff f = \{\langle v_m^i, a\rangle, \langle v_n^j, b\rangle\}$ & $a \in M_i$ & $b \in M_j$ & $\langle a,b\rangle \in E$;

b) $M \models (v_m^i = v_n^j)[f] \iff f = \{\langle v_m^i, a\rangle, \langle v_n^j, b\rangle\}$ & $a \in M_i$ & $b \in M_j$ & $a = b$;

c) $M \models (\phi \vee \psi)[f] \iff$ existem valorações g e h com $f = g \cup h$, tais que os domínios de g e h são os conjuntos das variáveis livres de $\phi$ e $\psi$ respectivamente e $M \models \phi[g]$ ou $M \models \psi[h]$ (definições análogas valem para as fórmulas $\phi \wedge \psi$, $\phi \longrightarrow \psi$, $\phi \iff \psi$);

d) $M \models \neg\phi[f] \iff$ f é uma valoração cujo domínio é o conjunto das variáveis livres de $\phi$ e não se tem que $M \models \phi[f]$;

e) $M \models \exists v_n^j \phi[f] \iff$ existe uma valoração $g \supset f$ tal que $M \models \phi[g]$;

f) $M \models \forall v_n^j \phi[f] \iff$ para toda valoração $g \supset f$ tem-se $M \models \neg\phi[g]$.

DEFINIÇÃO 2.4 (Verdade) - Uma sentença $\sigma$ de $L$ é *verdadeira* em $M$ se $M \models \sigma[0]$. Este fato será denotado pela expressão $M \models \sigma$.

É fácil verificar que os axiomas e regras lógicas introduzidas no parágrafo precedente tornam o cálculo dedutivo proposto *correto*. Passaremos a provar que ele é também *completo*, isto é, se um conjunto de sentenças é consistente, possui modelo no sentido dado pela Definição 2.4. O argumento utilizado nesta demonstração será do tipo Henkin, o qual consiste na ampliação da linguagem acrescendo-se a mesma de novas constantes o que possibilita a introdução das assim chamadas "testemunhas" para cada fórmula do tipo $\exists v_m^i \phi$. Para que possamos processar as constantes tipadas no cálculo dedutivo, é preciso estender o axioma $AL_2$ do parágrafo 1.

AXIOMA 2.5 ($AL_2'$): para toda fórmula $\phi$, se $j \leq i \leq 0$ e $c_n^j$ é uma constante individual, então

$$\forall v_m^i \phi \longrightarrow \phi[v_m^i / c_n^j] \quad \text{e} \quad \phi[v_m^i / c_n^j] \longrightarrow \exists v_m^i \phi$$

são axiomas lógicos.

À guisa de auto-suficiência, demonstraremos a completude da Lógica utilizada:

TEOREMA 2.6 (Teorema da Completude) - Sendo $\Sigma$ um conjunto consistente de sentenças de $L$, existe uma estrutura $M$ para $L$ que é um modelo de $\Sigma$.

DEMONSTRAÇÃO (Henkin) - Seja $L'$ a linguagem obtida de $L$ pela introdução de constantes novas $\{c_m^i : -i, m \in \omega\}$ e seja $\langle \sigma_n : n \in \omega \rangle$

uma enumeração das sentenças de $L'$ construídas a partir das fórmulas atômicas pela aplicação tão-somente dos símbolos $\vee$, $\neg$ e $\exists$. Iremos construir uma cadeia $\langle \Sigma_n : n \in \omega+1 \rangle$ de conjuntos de sentenças tal que:

i) $\Sigma_0 = \Sigma$;

ii) se $n \leq m$ então $\Sigma_n \subset \Sigma_m$;

iii) $U\{\Sigma_n : n \in \omega\} = \Sigma_\omega$ é um subconjunto consistente maximal de sentenças de $\{\sigma_n : n \in \omega\}$

A construção se faz pela recorrência, através das seguintes cláusulas:

1) se $\Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$ é inconsistente, $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$;

2) se $\Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$ é consistente e $\sigma_n$ é atômica ou da forma $\neg\phi$, então $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$;

3) se $\Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$ é consistente e $\sigma_n$ é da forma $\phi \vee \psi$ então $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi, \phi\}$ se este também o for; em caso contrário $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi, \psi\}$;

4) se $\Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$ é consistente e $\sigma_n$ é da forma $\exists v_n^i \phi$ então $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\sigma_n, \phi[v_n^i / c_m^i]\}$, onde $c_m^i$ é a constante de índice inferior mais baixo que não ocorre em $\Sigma_n \cup \{\sigma_n\}$.

A partir das condições acima, verifica-se que:

i) $\Sigma_0 = \Sigma$ (por construção);

ii) a seqüência dos $\Sigma_n$ é monotônica pela inclusão, e, portanto, resta provar que $\Sigma_\omega$ é um subconjunto consisten-

te maximal de $\{\sigma_n : n\in\omega\}$. Para tanto, basta provar que a consistência de $\Sigma_{n+1}$ decorre da de $\Sigma_n$, já que, por hipótese ela se verifica para $\Sigma_0$. Na hipótese de $\Sigma_{n+1}$ ser obtido de $\Sigma_n$ como em 1) ou 2) acima, nada há a demonstrar. Em caso constrário, a consistência de $\Sigma_{n+1}$ decorre dos seguintes fatos:

(A) Se $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi\}$ é consistente, então $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi, \phi\}$ ou $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi, \psi\}$ também o é.

De fato, caso $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi\} \vdash \neg\phi$ e $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi\} \vdash \neg\psi$, então $\Sigma_n \cup \{\phi \vee \psi\}$ é inconsistente.

(B) Se $\Sigma_n \cup \{\exists v_m^i \phi\}$ é consistente e $c$ não ocorre em $\Sigma_n \cup \{\phi\}$ então $\Sigma_n \cup \{\exists v_m^i \phi, \phi[v_m^i/c]\}$ também o é.

De fato, suponha que $\vdash \sigma \rightarrow \neg\phi[v_m^i/c]$, onde $\sigma$ é uma conjunção de sentenças de $\Sigma_n \cup \{\exists v_m^i \phi\}$. Analisando-se os passos de uma possível demonstração da sentença acima a partir dos axiomas lógicos, deduz-se que existe uma variável $v_n^i$ que não ocorre em $\sigma$ ou $\phi$, tal que $\vdash \sigma \rightarrow \neg\phi[v_m^i/v_n^i]$. Utilizando-se $AL_1$, $AL_3$, $RL_2$ e $RL_1$, segue-se que $\vdash \forall v_n^i(\sigma \rightarrow \neg\phi[v_m^i/v_n^i])$ e por $AL_2$ e $RL_1$, $\vdash (\sigma \rightarrow \neg\phi[v_m^i/v_n^i])[v_n^i/v_m^i]$, isto é, $\vdash \sigma \rightarrow \neg\phi$. Daí infere-se que $\vdash \phi \rightarrow \neg\sigma$, $\vdash \exists v_m^i \phi \rightarrow \neg\sigma$ e portanto $\Sigma_n \cup \{\exists v_m^i \phi\} \vdash \neg\sigma$ o que contradiz a hipótese da consistência feita sobre $\Sigma_n \cup \{\exists v_m^i \phi\}$.

Para provarmos que $\Sigma_\omega$ é consistente maximal em $\{\sigma_n : n\in\omega\}$, basta mostrar que dado $\sigma_n$, então $\sigma_n \in \Sigma_\omega$ ou $\sigma_m = \neg\sigma_n \in \Sigma_\omega$. De fato, suponha $n < m$ e que $\neg\sigma_n$, $\sigma_n \notin \Sigma_\omega$. Isto significa que $\Sigma_m \cup \{\neg\sigma_n\}$ e $\Sigma_m \cup \{\sigma_n\}$ são inconsistentes. Portanto, $\Sigma_m \vdash \neg\sigma_n$ e $\Sigma_m \vdash \sigma_n$, o que

acarreta a inconsistência de $\Sigma_m$. Isto não sendo possível, segue-se que $\Sigma_\omega$ é consistente maximal com respeito a inclusão.

Para construirmos o modelo $M$, definimos em $\{c_m^i : -i, m \in \omega\}$ a seguinte relação $\equiv$:

$$c_m^i \equiv c_n^j \iff (c_m^i = c_n^j) \in \Sigma_\omega .$$

Pelo fato de valerem os axiomas lógicos da igualdade $AL_3$ e $AL_4$ verifica-se que $\equiv$ é uma relação de equivalência e que a relação E abaixo está bem definida:

$$M_i = \{c_m^i/\equiv : m \in \omega\} \quad (-i \in \omega);$$

$$E = \{\langle c_m^i/\equiv,\ c_n^j/\equiv\rangle : (c_m^i \in c_n^j) \in \Sigma_\omega\},$$

onde $c_m^i/\equiv$ denota a classe de equivalência à qual pertence $c_m^i$.

Para provarmos que $M = \langle M_i, E\rangle_{-i \in \omega}$ é uma estrutura para $L$, considere $i \leq j \leq 0$. Como $\vdash c_m^i = c_m^i \longrightarrow \exists v_n^j (v_n^j = c_m^i)$ e $\vdash c_m^i = c_m^i$ (por $AL_2'$ e $AL_3$), segue-se que $\exists v_n^j (v_n^j = c_m^i) \in \Sigma_\omega$. Pela cláusula 4) da construção dos $\Sigma_n$, para algum $c_n^j$ tem-se que $(c_n^j = c_m^i)$ e, portanto $c_n^j/\equiv$ coincide com $c_m^i/\equiv$. Isto mostra que $M_i \subset M_j$. Como $(c_0^i/\equiv) \in M_i$, tem-se $M_i \neq 0$, o que mostra ser $M$ uma estrutura para a linguagem $L$.

Para verificarmos que $M \models \Sigma$, basta provar que, para toda fórmula $\phi(v_1^{i_1}, \ldots, v_n^{i_n})$ de $L$,

$$\phi\left[v_1^{i_1}/c_1^{i_1}, \ldots, v_n^{i_n}/c_n^{i_n}\right] \in \sum_\omega \iff M \models \phi[f]$$

onde $f = \left\{\langle v_1^{i_1}, c_1^{i_1}/\equiv\rangle, \ldots, \langle v_n^{i_n}, c_n^{i_n}/\equiv\rangle\right\}$. Isto pode ser feito por

indução no comprimento da fórmula $\phi$, e sendo rotineiro, será omitido.

Q.E.D.

- o -

## 3 - A TEORIA $W$

Passaremos aqui a enunciar os axiomas específicos da teoria (que será denotada por $W$) e que foi estudada em [4]. Antes, porém, faz-se necessário introduzir o operador sintático $*$ que é *externo* a $L$, operando sobre fórmulas.

DEFINIÇÃO 3.1 - O operador sintático $*$ se define pela recorrência no comprimento das fórmulas de $L$ pelas seguintes cláusulas:

1) $(v_m^i \in v_n^j)^* = (v_m^{i-1} \in v_n^{j-1})$ e $(v_m^i = v_n^j)^* = (v_m^{i-1} = v_n^{j-1})$;

2) $(\phi \vee \psi)^* = (\phi^* \vee \psi^*)$ e $(\neg\phi)^* = \neg\phi^*$

(análogas definições são feitas para as fórmulas $\phi \wedge \psi$, $\phi \longrightarrow \psi$ e $\phi \longleftrightarrow \psi$);

3) $(\exists v_m^i \phi)^* = \exists v_m^{i-1} \phi^*$ e $(\forall v_m^i \phi)^* = \forall v_m^{i-1} \phi^*$.

Feito isto, passaremos a enunciar os axiomas de $W$:

AXIOMA 3.2 $(A_1)$ - $\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y$.

AXIOMA 3.3 $(A_2)$ - $(x \in y^i \vee x \subset y^i) \longrightarrow \exists z^i (z^i = x)$.

AXIOMA 3.4 $(A_3)$ - Sendo $\phi$ uma fórmula tal que $\phi = \psi^*$

$$\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow \exists z^i (z^i = x \wedge \phi))$$

é um axioma de $W$.

AXIOMA 3.5 ($A_4$) - Para toda sentença $\sigma$, $\sigma \longleftrightarrow \sigma^*$ é um axioma de $W$.

AXIOMA 3.6 ($A_5$) - Seja $\phi(x_1^i,\ldots,x_n^i)$ uma fórmula tendo i como tipo mais baixo, e não tendo variáveis livres outras que $x_1^i,\ldots,x_n^i$. Então

$$\phi\left[x_1^{i-1},\ldots,x_n^{i-1}\right] \longleftrightarrow \phi^*$$

é um axioma de $W$.

Passaremos a enunciar, omitindo as demonstrações, algumas propriedades verificadas em $W$.

TEOREMA 3.7 - Para cada $i < 0$, temos

$$\exists u^{i+1}\forall x(x\in u^{i+1} \longleftrightarrow \exists z^i(z^i=x)).$$

Tal $u^{i+1}$ é único, e será denotado por $V_i$. Podemos intuitivamente imaginar $V_i$ como sendo a coleção dos objetos de tipo i.

TEOREMA 3.8 - Para cada $i < 0$, temos

$$(A_3'):\ \exists y^{i+1}\forall x(x\in y^{i+1} \longleftrightarrow \exists z^i(z^i=x\wedge\phi))$$

com a única restrição de que $y^{i+1}$ não possua ocorrências livres em $\phi$.

TEOREMA 3.9 - Para cada $i \leq 0$, temos

$$\exists y^{i+1}\forall x^i(x^i\in y^{i+1} \longleftrightarrow \phi).$$

TEOREMA 3.10 - Seja $q_j$ um dos símbolos: $\forall$, $\exists$ ou $\exists!$; então, para toda fórmula $\phi$ cujo tipo mais baixo seja i, e tal que as únicas variáveis com ocorrências livres sejam $x_1^i,\ldots,x_n^i$, temos:

$$(R)\quad q_1 x_1^{i-1}\ldots q_n x_n^{i-1}\phi\left[x_1^{i-1},\ldots,x_n^{i-1}\right] \longleftrightarrow q_1 x_1^{i-1}\ldots q_n x_n^{i-1}\phi^*.$$

TEOREMA 3.11 - Seja $\phi$ uma fórmula tal que todas as suas variáveis tenham tipo 0 e tal que a única variável livre de $\phi$ seja x. Então, se $W\vdash\exists!x\phi(x)$, o único objeto x que satisfaz à fórmula $\phi$ possui tipo arbitrariamente baixo, isto é, para cada $i \leq 0$,

$$W\vdash\forall x(\phi(x)\longrightarrow\exists u^i(u^i=x)).$$

TEOREMA 3.12 (Substituição generalizada) - Seja

$$\phi(x^i,y^i,w^i,w_1^i,\ldots,w_{n-1}^i)$$

uma fórmula cujo tipo mais baixo é i e cujas únicas variáveis livres são as exibidas acima. O seguinte esquema é verdadeiro em $W$:

$$(S):\quad \forall w^i\forall w_1^i\ldots\forall w_{n-1}^i[\forall x^i\exists!y^i\phi\longrightarrow\forall z^i\exists u^i\forall y^i(y^i\in u^i\longleftrightarrow\exists x^i(x^i\in z^i\wedge\phi))].$$

Cumpre observar que a linguagem da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel possui uma tradução natural para a linguagem $L$: basta substituir nas fórmulas cada variável $v_n$ por $v_n^0$. Assim, suporemos daqui por diante que a linguagem de ZF está canonicamente identificada a uma sublinguagem de $L$, e, com isto em mente, temos:

TEOREMA 3.13 - $\mathcal{W} \vdash$ ZF-regularidade.

Para finalizar este parágrafo, observemos que $\langle V_{-1}, \varepsilon \rangle$ é uma estrutura do universo de $\mathcal{W}$ para a qual vale:

TEOREMA 3.14 - Se $\sigma$ é uma sentença 1-tipada, então

$$\mathcal{W} \vdash \langle V_{-1}, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \sigma \urcorner \iff \sigma .$$

TEOREMA 3.15 - Sendo $\sigma$ um axioma de ZF-regularidade, temos

$$\mathcal{W} \vdash \langle V_{-1}, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \sigma \urcorner .$$

Em particular, $\mathcal{W} \vdash$ Con(ZF).

As demonstrações de todos estes teoremas do presente parágrafo estão essencialmente contidas em [4].

- o -

## 4 - O AXIOMA DA CONSTRUTIBILIDADE EM $W$

Como vimos no parágrafo anterior, é possível imergir a linguagem de ZF em $L$ e mediante esta identificação, $W$ contém ZF propriamente como subteoria. Assim, todas as considerações válidas em ZF são automaticamente arrastadas para a teoria $W$ por meio da aludida tradução de fórmulas. Em particular, a noção de construtibilidade, devida a Gödel, pode ser feita em $W$, e será o tema de discussão do presente parágrafo. Para uma exposição dos conceitos relativos à construtibilidade em teoria dos conjuntos, recomendamos [1].

Vimos no parágrafo 2 que ZF poderia ser utilizado como teoria formal para considerações relativas à Teoria dos Modelos pertinente à linguagem $L$. Como $W$ é tão forte quanto ZF, podemos fazer isto na própria teoria $W$, que servirá de pano de fundo para todas as nossas eventuais discussões. Em particular, estaremos preocupados em estudar os modelos de $W$, cuja existência, no entanto, não pode ser demonstrada dentro da própria teoria. Assim, sempre que se fizer necessário, estaremos supondo que a sentença $\mathrm{Con}(W)$ tenha sido incorporada aos axiomas de $W$ a fim de se garantir a existência dos modelos para a teoria em questão.

DEFINIÇÃO 4.1 - Seja L(x) a sentença de ZF (expressa em $L$) que

diz ser x uma classe construtível. A relativação da fórmula $\phi$ (de $L$) à classe dos construtíveis — a ser denotada por $\phi^L$ — se define pela recorrência no seu comprimento pelas seguintes cláusulas:

i) $(v_m^i \in v_n^j)^L = v_m^i \in v_n^j \wedge L[v_m^i] \wedge L[v_n^j]$ e

$(v_m^i = v_n^j)^L = v_m^i = v_n^j \wedge L[v_m^i] \wedge L[v_n^j]$;

ii) $(\phi \vee \psi)^L = \phi^L \vee \psi^L$ e $(\neg\phi)^L = \neg\phi^L$ (definições análogas valem para $\phi \vee \psi$, $\phi \longrightarrow \psi$ e $\phi \longleftrightarrow \psi$);

iii) $(\exists v_m^i \phi)^L = \exists v_m^i (L[v_m^i] \wedge \phi^L)$; e $(\forall v_m^i \phi)^L = \forall v_m^i (L[v_m^i] \longrightarrow \phi^L)$.

OBSERVAÇÃO - Se $\phi$ é uma fórmula de $L$, então $(\phi^L)^*$ pode ser expressa como $(\phi^*)^{L^*}$, onde a relativização de uma formula a L* possui uma definição análoga à definição dada em 4.1.

DEFINIÇÃO 4.2 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{i \in \omega}$ um modelo de $\mathcal{W}$ e seja $L^M = \{x \in M_0 : M \models L(\underline{x})\}$. A estrutura $M^L = \langle L_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ se define como sendo formada pelos conjuntos $L_i = L^M \cap M_i$ $(i<0)$ e será denominada a *parte construtível* de $M$.

Pelo Teorema 3.7, existe um objeto $V_i$ formado pelos elementos de tipo i: $\mathcal{W} \vdash \forall x\,(x \in V_i \longleftrightarrow \exists y^i (y^i = x))$. Dado um modelo $M$ de $\mathcal{W}$, pode-se verificar que para todo $i<0$, $M_i = \{x : x \in M_0 \wedge M \models \underline{x} \in \underline{V_i}^M\}$. Isto significa, pois, que a classe $M_i$ é interna ao modelo; o teorema que vem a seguir enuncia o fato análogo para a parte construtível de um modelo $\mathcal{W}$.

TEOREMA 4.3 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ um modelo de $\mathcal{W}$ e $M^L = \langle L_i, E \rangle_{-i \in \omega}$

sua parte construtível. Para cada $i < 0$, $L_i^M$, é interno a $M$, isto é, como classe, é co-extensional a um objeto de $M$, onde $L_i^M = M_i \cap L^M$.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 3.15, $\langle V_{-1}, \varepsilon \rangle$ é um modelo transitivo 'standard' de ZF-regularidade. Como

$$(\langle V_i, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \sigma \urcorner)^* \longleftrightarrow (\langle V_{i-1}, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \sigma \urcorner),$$

deduzimos que $\langle V_i, \varepsilon \rangle$ também é um modelo transitivo standard de ZF-regularidade. Para cada $i < 0$, denotaremos por $\Omega_i$ ao menor ordinal que não pertence a $V_i$. Segue-se que $V_i \cap L = L_{\Omega_i}$ em virtude da transitividade de $V_i$. Logo, temos

$$L_i^M = M_i \cap L^M = V_i^M \cap L^M = (V_i \cap L)^M = L_{\Omega_i}^M$$

o que prova ser $L_i^M$ interno.

Q.E.D.

Daqui por diante, $L_i$ denotará o predicado $V_i \cap L$, para $i<0$, co-extensional a um objeto de V. O Teorema 4.3 acima justifica os abusos de notação que se cometem ao considerarmos $L_i^M$ como objeto de $M$. O objetivo a seguir é demonstrar que a parte construtível de um modelo de $\mathcal{W}$ é ainda um modelo de $\mathcal{W}$. Antes, porém, necessitamos de um lema que demonstraremos logo em seguida:

LEMA 4.4 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ um modelo de $\mathcal{W}$ e $M^L = \langle L_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ sua parte construtível. Para toda fórmula $\phi$ de $\mathcal{L}$ e toda valoração f, temos:

$$M \models \phi^L[f] \longleftrightarrow M^L \models \phi[f].$$

DEMONSTRAÇÃO - Fá-la-emos por indução no comprimento da fórmula $\phi$, supondo ainda que os únicos símbolos lógicos presentes são $\vee$, $\neg$ e $\exists$. Para fórmulas atômicas temos:

$$M \models (v_m^i \in v_n^j)^L[f] \leftrightarrow M \models (v_m^i \in v_n^j \wedge L[v_m^i] \wedge L[v_n^j])[f]$$

$$\leftrightarrow f(v_m^i), f(v_n^j) \in L \wedge \langle f(v_m^i), f(v_n^j)\rangle \in E$$

$$\leftrightarrow \langle L_i^M, E\rangle_{-i\in\omega} \models (v_m^i \in v_n^j)[f]$$

$$\leftrightarrow M^L \models (v_m^i \in v_n^j)[f].$$

Demonstração análoga se faz para $(v_m^i = v_n^j)$. No caso em que $\phi$ é uma disjunção ou uma negação, a demonstração é rotineira. Finalmente, supondo que $v_m^i$ ocorra livre em $\phi$, temos:

$$M \models (\exists v_m^i \phi)^L[f] \leftrightarrow M \models \exists v_m^i (L[v_m^i] \wedge \phi^L)[f]$$

$$\leftrightarrow (\exists g \supset f)(M \models \phi^L[g] \wedge g(v_m^i) \in L^M)$$

$$\leftrightarrow (\exists g \supset f)(M^L \models \phi[g])$$

$$\leftrightarrow M^L \models \exists v_m^i \phi[f].$$

Q.E.D.

TEOREMA 4.5 - Sendo $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ um modelo de $\mathcal{W}$, a parte constutível $M^L = \langle L_i^M, E\rangle_{-i\in\omega}$ de $M$ é também um modelo de $\mathcal{W}$.

DEMONSTRAÇÃO - Verificaremos os axiomas $A_1$ - $A_5$ do parágrafo 3.

1) O axioma de extensionalidade $A_1$ é uma conseqüência do fato de $\langle L^M, E\rangle$ ser modelo E-transitivo de ZF, e portanto, sua prova é imediata.

2) Suponha que $M^L \models \underline{x} \in \underline{y}^i$. Então, $x \in L^M$ & $y^i \in L_i^M$ & $xEy^i \in M_i$, logo $xEy^i \in V_i^M$. Pela E-transitividade de $V_i^M$, $xEV_i^M$ e portanto $x \in M_i \cap L^M = L_i^M$, ou seja $M^L \models \exists z^i(\underline{x}=z^i)$. Suponha que $M^L \models \underline{x} \subset \underline{y}^i$. Então $x \in L^M$ & $M \models \forall u(u \in \underline{x} \rightarrow u \in \underline{y}^i)^L$ (pelo Lema 4.4). Mas, sendo $L^M$ E-transitivo, como $x \in L^M$ tem-se $M \models \forall u(u \in \underline{x} \rightarrow L[u])$. Logo $M \models \underline{x} \subset \underline{y}^i$. Mas isto prova que $x \in M_i \cap L^M = L_i^M$ e, portanto, $M^L \models \exists z^i(z^i=\underline{x})$, o que termina a demonstração de $A_2$.

3) Seja $\phi = \psi^*$ uma fórmula de $L$ cujas únicas variáveis livres são $z^i$ e $w^j$, e seja $a^j$ um elemento arbitrário de $L_j$. Queremos mostrar que $A_3$ é verdadeiro em $M^L$, isto é,

$$M^L \models \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \exists z^i(z^i=x \wedge \phi[z^i, \underline{a}^j]))$$

onde $\phi[z^i, \underline{a}^j]$ denota a fórmula $\phi[w^j/\underline{a}^j]$.

Sendo $M$ um modelo de $W$, por $A_3$, temos

$$M \models \forall w^j \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \exists z^i(z^i=x \wedge L^*[z^i] \wedge (\psi^L)^*).$$

Mas, $(\psi^L)^* = (\psi^*)^{(L^*)} = \phi^{(L^*)}$ e como por $A_5$,

$$W \vdash L[x^{-1}] \leftrightarrow L^*[x^{-1}],$$

temos $W \vdash \phi^{(L^*)} \leftrightarrow \phi^L$ e, portanto, deduzimos que

$$M \models \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow (\exists z^i(z^i=x \wedge \phi(z^i, \underline{a}^j)))^L).$$

Substituindo-se os quantificadores $\exists v_m^i$ e $\forall v_m^i$ pelos quantificadores limitados $(\exists v_m \in \underline{L}_i^M)$ e $(\forall v_m \in \underline{L}_i^M)$ evitando colisões, concluímos que a fórmula $(\exists z^i(z^i=x \wedge \phi(z^i, \underline{a}^j)))^L$ é equivalente (em $M$) a uma fórmula $\theta(x, a^j, \underline{L}_{-1}^M, \ldots, \underline{L}_{-n}^M)$ que cai no nível $\Delta_0^{ZF}$ da hierarquia de Levy (vide [6]).

Além disto, como seus parâmetros estão em $L^M$, e por se ter válida a condição $M \models \forall x(\theta(x) \rightarrow L[x])$, podemos concluir do caráter absoluto de $\theta(x)$ que

$$M \models \forall x(x \in \underline{L_{-1}} \wedge \theta(x) \leftrightarrow \langle \underline{L_{-1}}, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \theta(\underline{x}) \urcorner).$$

Sendo b a classe (de M) tal que $M \models \forall x(x \in \underline{b} \leftrightarrow \langle \underline{L^M_{-1}}, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \theta(\underline{x}) \urcorner)$, concluímos que $bEL^M_{\Omega_{-1}+1}$ e portanto $b \in L^M$. Logo

$$M \models L[\underline{b}] \wedge (\forall x(x \in \underline{b} \leftrightarrow \exists z^i(z^i = x \wedge \phi(z^i, \underline{a}^j))))^L,$$

ou seja, pelo Lema 4.4,

$$M^L \models \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \exists z^i(z^i = x \wedge \phi(z^i, \underline{a}^j))),$$

o que prova $A_3^L$.

4) Seja $\phi$ uma fórmula de $L$ cujo tipo mais baixo é $i < 0$ e cujas únicas variáveis livres são $x_1^i, \ldots, x_n^i$. Seja f uma valoração de $\{x_1^i, \ldots, x_n^i\}$ em $L^M_{i-1}$ e g a valoração de $\{x_1^{i-1}, \ldots, x_n^{i-1}\}$ em $L^M_{i-1}$ tal que $f(x_m^i) = g(x_m^{i-1})$, com $1 \leq m \leq n$. Então,

$$M^L \models \phi[f] \leftrightarrow M \models \phi^L[f] \text{ (pelo Lema 4.4)}$$

$$\leftrightarrow M \models (\phi^L)^*[g] \text{ (por } A_5)$$

$$\leftrightarrow M \models (\phi^*)^{(L^*)}[g] \text{ (pois } (\phi^L)^* = (\phi^*)^{(L^*)})$$

$$\leftrightarrow M \models (\phi^*)^L[g] \text{ (por } A_5)$$

$$\leftrightarrow M^L \models (\phi^*[g] \text{ (pelo Lema 4.4).}$$

Isto mostra que $M^L \models (\phi[x_1^{i-1}, \ldots, x_n^{i-1}] \leftrightarrow \phi^*)[g]$, ou se-

ja, vale $A_5$.

Q.E.D.

Ficou assim demonstrado que $M^L$ é um modelo de $W$. Pode-se verificar que os axiomas da regularidade, construtibilidade e escolha valem em $M^L$, o que prova a consistência relativa de $M$ com estes axiomas.

- o -

## 5 - MODELOS STANDARD DE $\mathcal{W}$

Ao iniciarmos o presente parágrafo, gostaríamos de enfatizar que a palavra 'standard' será utilizada em acepção diversa daquela utilizada normalmente no contexto do estudo de ZF. Com efeito, quando se considera um modelo $M = \langle M, E\rangle$ standard de ZF, a palavra quer significar que a relação E entre os elementos de M coincide com a relação $\varepsilon$ de pertinência do 'mundo real'. Ora, é fácil verificar que se $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ é um modelo de $\mathcal{W}$, não é possível ter, em presença do axioma da regularidade, a igualdade $E = \varepsilon \cap (M_0 \times M_0)$, já que existe a seqüência (externa) E-descendente

$$\ldots V_{-3}^{M} \, E \, V_{-2}^{M} \, E \, V_{-1}^{M}.$$

Temos, pois, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 5.1 (Modelos standard de $\mathcal{W}$) - A estrutura $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ é *modelo standard* de $\mathcal{W}$ se M for modelo de $\mathcal{W}$ e todo elemento $a^i \in M_i$ é definível por uma fórmula $\phi(v^i)$ de $\mathcal{L}$ tendo $v^i$ como única variável livre e sem a presença de parâmetros:

$$M \models \exists! v^i \phi \wedge \phi(\underline{a}^i)$$

onde $\phi(\underline{a}^i)$ é a fórmula $\phi[v^i/\underline{a}^i]$.

O conceito introduzido tem a sua importância pela postu-

ra filosófica de natureza formal-nominalista que resolvemos adotar em relação aos fundamentos da Matemática, isto é, a de que os objetos matemáticos 'coincidem' com aqueles definíveis pelas fórmulas de uma determinada linguagem formal — e que no caso é $L$. Deste ponto de vista, o ideal seria que a condição de definibilidade fosse parte integrante do próprio sistema $W$. Para fazê-lo, no entanto, é preciso ter-se internamente a noção *completa* de verdade (e não uma parcial, como em $W$, para fórmulas n-tipadas); isto, entretanto, só pode ser feito com o recurso de sistemas essencialmente mais poderosos que os de 1ª ordem, como os de ordem superior. Para evitar estes últimos, resolvemos impor a condição de definibilidade aos *modelos* de $W$, estudá-los dentro da própria teoria $W$, e, em seguida, exportar os resultados que adviessem desta condição para o nível formal da mesma.

No entanto, a existência de modelos standard de $W$ não pode ser demonstrada em $W$ (seria assim violado o segundo teorema de incompletude de Gödel). Neste parágrafo, iremos demonstar que a condição $\mathrm{Con}(W)$ já é suficiente para garantir a existência de tais modelos:

$$W + \mathrm{Con}(W) \vdash \text{'}\exists M \ (M \text{ é modelo standard de } W)\text{'}.$$

Passaremos a considerar noções relativas a modelos em nosso contexto:

DEFINIÇÃO 5.2 ($\omega$-subestruturas) - Sejam $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ e $N = \langle N_i, E'\rangle_{-i\in\omega}$ duas estruturas para a linguagem $L$. Diremos que $M$ é uma *$\omega$-subestrutura* de $N$ se

1) para todo $i < 0$, $M_i \subset N_i$;

2) $E' \cap (M_0 \times M_0) = E$. (Para evitarmos sobrecarga, uniformizaremos as notações: $E = E'$).

DEFINIÇÃO 5.3 ($\omega$-subestrutura elementar) - Sejam $M$ e $N$ estruturas para $L$, $M$ sendo uma $\omega$-subestrutura de $N$, como acima. Diremos que $M$ é uma *$\omega$-subestrutura elementar* de $N$ se para toda fórmula $\phi$ de $L$ e toda valoração $f$ em $M$,

$$M \models \phi[f] \longleftrightarrow N \models \phi[f].$$

Isto é equivalente a impor que, para toda sentença $\sigma$ da linguagem diagrama $L(M_0)$, $M \models \sigma \longleftrightarrow N \models \sigma$. A notação $M \prec_\omega N$ será utilizada para expressar que $M$ é $\omega$-subestrutura elementar de $N$.

DEFINIÇÃO 5.4 ($\omega$-equivalência elementar) - Sendo $M$ e $N$ estruturas para $L$, diremos que $M$ é *$\omega$-elementarmente equivalente* a $N$ (sendo tal fato denotado por $M \equiv_\omega N$) se para toda sentença $\sigma$ de $L$, $M \models \sigma \longleftrightarrow N \models \sigma$.

Pode-se verificar que, se $M \prec_\omega N$ então $M \equiv_\omega N$.

Passaremos a enunciar e demonstrar o critério análogo ao de Tarski-Vaught (vide [8]) da Teoria dos Modelos para a noção de $\omega$-subestrutura elementar.

TEOREMA 5.5 (Tarski-Vaught) - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ uma $\omega$-subestrutura de $N = \langle N_i, E \rangle_{-i \in \omega}$. Uma condição suficiente para que $M \prec_\omega N$ é que, dada uma fórmula $\exists v^i \phi$ da linguagem diagrama $L(M_0)$, se $N \models \exists v^i_m \phi$ então existe $a^i \in M_i$ tal que $N \models \phi[v^i_m / \underline{a}^i]$.

DEMONSTRAÇÃO - Ater-nos-emos tão-somente às fórmulas de $L(M_0)$

construídas a partir das fórmulas atômicas mediante o emprego dos símbolos $\vee$, $\neg$ e $\exists$. Para estas, iremos demonstrar, por indução no comprimento, que

$$M \models \sigma \longleftrightarrow N \models \sigma,$$

qualquer que seja a sentença $\sigma \in L(M_0)$.

Se $\sigma$ é uma sentença atômica, o fato acima é verdadeiro por ser $M$ $\omega$-subestrutura de $N$.

No caso de $\sigma$ ser uma disjunção ou uma negação, a demonstração é rotineira. Finalmente, se $\sigma$ é da forma $\exists x^i \phi$ e $N \models \exists x^i \phi$, pela hipótese do teorema podemos achar $a^i \in M_i$ tal que $N \models \phi[x^i/\underline{a}^i]$. Mas neste caso, por indução, temos que $M \models \phi[x^i/\underline{a}^i]$ e portanto

$$N \models \exists x^i \phi \longrightarrow M \models \exists x^i \phi.$$

A implicação oposta se demonstra imediatamente.

Q.E.D.

Pode-se verificar sem grandes dificuldades que a condição do Teorema 5.5 é também necessária.

A seguir, daremos novamente ênfase ao fato bem conhecido de que o universo construtível dos conjuntos admite uma boa ordenação definível por uma fórmula da linguagem de ZF. Esta boa ordem será denotada por $<_L$; para introduzi-la, seguem-se algumas notações:

DEFINIÇÃO 5.6 - Seja $M$ uma estrutura de universo M relativa a uma linguagem dada. Denotaremos por Def(M) ao conjunto dos elementos de M que são definíveis na linguagem por uma fórmula

contendo apenas uma única variável livre, e sem parâmetros. A subestrutura de M cujo universo é Def(M) será denominada a *subestrutura definível* de M e denotada por Def(M).

O *comprimento* de uma fórmula $\phi$ designará o número natural $cp(\phi)$ que corresponde à aritmetização de $\phi$ dadas pelas seguintes regras:

i) $cp(v_m^i \in v_n^j) = 2 \cdot 3^{-i} \cdot 5^m \cdot 7^{-j} \cdot 11^n$; $cp(v_m^i = v_n^j) = 2^2 \cdot 3^{-i} \cdot 5^m \cdot 7^{-j} \cdot 11^n$.

ii) $cp(\phi \vee \psi) = 2^3 \cdot 3^{cp(\phi)} \cdot 5^{cp(\psi)}$; $cp(\neg\phi) = 2^4 \cdot 3^{cp(\phi)}$.

iii) $cp(\exists v_m^i \phi) = 2^5 \cdot 3^{-i} \cdot 5^m \cdot 7^{cp(\phi)}$.

É claro que o comprimento pode ser definido em $\omega$ para números de Gödel de fórmulas e no caso, estão apenas interessando as fórmulas construídas a partir das atômicas mediante o emprego dos símbolos $\vee$, $\neg$ e $\exists$.

Suponhamos que $x \in Def(M)$. Denotaremos por $cp(x,M)$ ao comprimento da menor fórmula que define x em M. Com estas notações, temos:

$$x <_L y \iff (\min_\alpha(x \in Def(R_\alpha^L)) < \min_\beta(y \in Def(R_\beta^L)) \vee$$
$$\exists\alpha(\min_\alpha(x \in Def(R_\alpha^L)) = \min_\beta(y \in Def(R_\beta^L)) = \alpha \wedge$$
$$cp(x, R_\alpha^L) < cp(y, R_\alpha^L)).$$

Finalizaremos o presente parágrafo com os três teoremas que vêm a seguir:

TEOREMA 5.7 - Seja M um modelo de $\omega$, $M^L$ sua parte construtível e $Def(M^L) = \langle Def(L^M) \cap L_i^M, E\rangle_{-i \in \omega}$ a $\omega$-subestrutura definível de $M^L$

(na linguagem $L$). Então

$$Def(M^L) \prec_\omega M^L.$$

DEMONSTRAÇÃO - Usaremos o critério de Tarski-Vaught do Teorema 5.5. Seja $\exists x^i \sigma$ uma sentença da linguagem diagrama de $Def(M^L)$ tal que $M^L \models \exists x^i \sigma$ e sejam $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ os parâmetros que aparecem em $\sigma$. Como os elementos $a_1, \ldots, a_n$ são definíveis em $M^L$ por meio de fórmulas sem parâmetros, então existe uma fórmula $\phi(x^i)$ tendo tendo uma única variável livre (e não contendo parâmetros), tal que

$$M^L \models \forall x^i (\sigma \longleftrightarrow \phi).$$

Considere o elemento $a \in L^M$ definido em $M^L$ pela seguinte fórmula:

$$\phi(x^i) \wedge \forall y^i (\phi[y^i] \longrightarrow x^i <_L y^i).$$

É claro que $a \in Def(M^L)$ e que $M^L \models \sigma[x^i/\underline{a}]$. Logo, a condição de Tarski-Vaught se verifica e portanto $Def(M^L) \prec_\omega M^L$.

Q.E.D.

TEOREMA 5.8 - Se $M$ é um modelo de $W$, então $Def(M^L)$ é modelo standard de $W$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $M \models W$, pelo Teorema 4.5 $M^L \models W$. Como pelo teorema anterior $Def(M^L) \prec_\omega M^L$, tem-se que $Def(M^L) \equiv_\omega M^L$ e portanto $Def(M^L)$ é modelo de $W$. Resta provar que ele é standard.

Suponha que 'a' seja um elemento definível em $M^L$. Então existe uma fórmula $\phi(x^i)$ de $L$ sem parâmetros tal que

$$M^L \models \exists! x^i \phi \wedge \phi[x^i/\underline{a}].$$

Mas o elemento 'a' pertence ao universo de $Def(M^L)$, e como $Def(M^L) \prec_\omega M^L$, temos

$$Def(M^L) \models \exists! x^i \phi \wedge \phi[x^i/\underline{a}],$$

o que prova que 'a' é definível em $Def(M^L)$.

Q.E.D.

TEOREMA 5.9 -

$$\mathcal{W} \vdash Con(\mathcal{W}) \longrightarrow \exists N \ (N \text{ é modelo standard de } \ulcorner \mathcal{W} \urcorner).$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema da Completude 2.6, $Con(\mathcal{W})$ acarreta que $\mathcal{W}$ possui um modelo $M$. Pelo teorema anterior, $Def(M^L) = N$ é modelo standard de $\mathcal{W}$.

Q.E.D.

## 6 - A TEORIA <W,*>

Nos parágrafos precedentes tivemos a oportunidade de observar que o operador * é um operador sintático transformando fórmulas de *L* em fórmulas de *L*, mediante o abaixamento dos tipos de variáveis, os quais passam de i para i-1. Foi observado, contudo, que * é um operador *externo*, no sentido de que não faz parte de *L*, o qual possui como símbolos não-lógicos primitivos as relações ε e =.

Entretanto, é parte de nosso programa formal-nominalista que os objetos do universo (isto é, as 'classes') sejam em certo sentido identificadas às fórmulas que as definem, e como * atua sobre estas, é natural esperar que possa atuar sobre os objetos da teoria (isto é, as próprias 'classes').

Tentou-se (em [4]) a introdução do operador * partindo-se da hipótese de consistência de *W*, isto é, imitando-se a prova de Henkin (da completude do Cálculo de predicados), procurou-se construir um modelo de <W,*>; pelo fato de tal argumento envolver a homogeneidade de escolhas das 'testemunhas' nos infinitos tipos, ele foi denominado por alguns de *argumento homogêneo de Henkin*.

Neste parágrafo, iremos demonstrar a existência de um mo-

delo de $\langle W,* \rangle$ sem o auxílio do argumento homogêneo de Henkin; usaremos em seu lugar a técnica de construção de modelos standard para a teoria $W$. O que será demonstrado é, pois, o seguinte:

$$W \vdash \mathrm{Con}(W) \longrightarrow \exists M \ (M \text{ é modelo de } \langle W,* \rangle).$$

Antes, porém, definamos precisamente o sistema $\langle W,* \rangle$:

DEFINIÇÃO 6.1 (a teoria $\langle W,* \rangle$) - Seja $L_1$ a linguagem (com tipos) obtida de $L$ mediate a introdução de um símbolo funcional unário (ainda designado por $*$). A teoria $\langle W,* \rangle$ é formulada em $L_1$ pela adjunção dos seguintes axiomas aos de $W$:

$$\forall x_1^{i_1} \ldots \forall x_n^{i_n} \left( \phi^* \left[ *x_1^{i_1}, \ldots, *x_n^{i_n} \right] \longleftrightarrow \phi \right)$$

onde $x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}$ são as únicas variáveis livres possuindo ocorrências livres em $\phi$ e $\phi^*$ é uma fórmula de $L$ na qual é possível substituir $x_1^{i_1-1}, \ldots, x_n^{i_n-1}$ pelos termos $*x_1^{i_1}, \ldots, *x_n^{i_n}$ sem que haja colisões de variáveis.

TEOREMA 6.2 - Seja $M$ um modelo standard de $W$. Em $M$, é possível definir uma operação unária $*^M$ de tal modo que $\langle M,*^M \rangle$ seja um modelo da teoria $\langle W,* \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO - Para definirmos $*^M$, tomemos um elemento qualquer do universo de $M$, e denotê-mo-lo por $a^i$. Como $M$ é standard, existe uma fórmula $\phi(v^i)$, possuindo uma única variável livre, que define o objeto 'a':

$$M \models \exists! v^i \phi \wedge \phi[v^i/\underline{a}].$$

Pelo axioma $A_4$ de $\mathcal{W}$, temos $M \models \exists v^{i-1} \phi^*$ e, portanto, existe um elemento 'b' do modelo $M$ tal que $M \models \phi^*[v^{i-1}/\underline{b}]$. Por definição, colocaremos $*^M a = b$.

É preciso demonstrar que $*^M$ está bem definida, isto é, que a escolha de $*^M a$ não depende da fórmula que define 'a' em $M$. Seja, pois $\psi(v^j)$ uma fórmula de $L$ nas mesmas condições de $\phi$:

$$M \models \exists! v^j \psi \wedge \psi[v^j/\underline{a}].$$

Então, temos:

$$M \models \forall v^i (\phi \longleftrightarrow \exists v^j (v^i = v^j \wedge \psi)).$$

Mas, por $A_4$, temos

$$M \models \forall v^{i-1} (\phi^* \longleftrightarrow \exists v^{j-1} (v^{i-1} = v^{j-1} \wedge \psi^*)).$$

Como $M \models \phi^*[v^{i-1}/\underline{b}]$, segue-se que $M \models \psi^*[v^{j-1}/\underline{b}]$ e, portanto $\psi^*$ também define 'b', o que prova estar a função $*^M$ bem definida.

Para terminarmos a demonstração, provemos que os axiomas adicionais que aparecem na Definição 6.1 · são verdadeiros em $\langle M, *^M \rangle$. Seja $\phi$ uma fórmula de $L$ tal que $M \models \phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]$, onde $\phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]$ é uma sentença de $L(M_0)$ e $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ são as constantes que aparecem nesta fórmula.

Sejam $\psi_1(v_1^{i_1}), \ldots, \psi_n(v_n^{i_n})$ fórmulas que definem os elementos $a_1, \ldots, a_n$ em $M$ (cf. foi visto na definição de $*^M$). Então, temos

$$M \models \exists v_1^{i_1} \ldots \exists v_n^{i_n} (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \phi).$$

Por $A_4$, tem-se

$$M \models \exists v_1^{i_1-1} \ldots \exists v_n^{i_n-1} (\psi_1^* \wedge \ldots \wedge \psi_n^* \wedge \phi^*),$$

e, portanto, $M \models \phi^*[*\underline{a}_1, \ldots, *\underline{a}_n]$, o que verifica esquema da definição 6.1.

Q.E.D.

Uma conseqüência agradável da definição de $*^M$ é que com ela podemos dar uma bela definição da noção de *conjunto* na estrutura M. Antes, porém, vem um fato:

TEOREMA 6.3 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ um modelo standard de $\mathcal{W}$. Então,

$$\{a \in M_0 : *^M a = a\} = \cap\{M_i : -i \in \omega\}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $a \in M_0$ um objeto tal que $*^M a = a$. Se $a \in M_i$, então $M \models \exists x^i (x^i = \underline{a})$ e portanto $\langle M, *^M \rangle \models \exists x^{i-1} (x^{i-1} = *\underline{a})$. Mas isto significa que $*^M a \in M_{i-1}$ e, portanto, $a \in \cap\{M_i : -i \in \omega\}$.

Suponha que $a \in \cap\{M_i : -i \in \omega\}$. Como M é standard, 'a' é definível por uma fórmula $\phi(v^i)$ em M. Como o tipo de 'a' é menor do que i, por $A_5$, temos

$$M \models \phi[\underline{a}] \longleftrightarrow M \models \phi^*[\underline{a}].$$

Segue-se daí que $*^M a = a$.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 6.4 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ um modelo standard de $\mathcal{W}$. Um elemento $a \in M_0$ se diz *conjunto* (em M) se $*^M a = a$.

Em virtude do teorema anterior, os conjuntos nos modelos standard são objetos que possuem tipo negativo arbitrariamen-

te baixo.

TEOREMA 6.5 - Seja $M$ um modelo standard de $\mathcal{U}$. Então:

i) se 'a' é um conjunto e $bEa$, então 'b' é um conjunto;

ii) se 'a' é um conjunto e $M \models \underline{b} \subset \underline{a}$, então 'b' é um conjunto.

A demonstração é imediata em virtude do Teorema 6.3.

TEOREMA 6.6 - Seja $M$ um modelo standard de $\mathcal{U}$. A noção de conjunto (de $M$) é *externa* a $M$ — isto é, *não* existe objeto $K \in M_0$ tal que

$$(\forall a \in M_0)(a \text{ é conjunto} \longleftrightarrow M \models \underline{a} \in \underline{K}).$$

DEMONSTRAÇÃO - Suponha que exista a coleção K de todos os conjuntos. Em virtude do Teorema 6.5, K é uma classe transitiva. Seja $\Omega_K$ o menor ordinal que não figura em K.

Se $\xi \in \Omega_K$ então $\xi \in K$, logo $*\xi = \xi$. Mas $*\xi \in *\Omega_K$, portanto $\xi \in *\Omega_K$, o que prova que $\Omega_K \subset *\Omega_K$. Mas, se $\Omega_K$ é um objeto de tipo i, então $*\Omega_K$ é de tipo i-1, e, portanto, $*\Omega_K \in \Omega_K$ ou $*\Omega_K = \Omega_K$. Daí segue-se que $*\Omega_K \subset \Omega_K$. Isto prova que $\Omega_K = *\Omega_K$, ou seja, $\Omega_K$ é conjunto e, portanto $\Omega_K \in K$, o que é uma contradição.

Q.E.D.

Para finalizar este parágrafo, provaremos que a classe (externa) dos conjuntos satisfaz aos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Mais tarde será provado um resultado mais forte, qual seja, a de que os conjuntos estão imersos como subestrutura elementar nos vários universos $V_i$ $(i<0)$. Antes, porém, um lema:

LEMA 6.7 - Seja $M$ um modelo standard de $\mathcal{U}$ e $a \in M_0$ um elemento

definido por uma fórmula 1-tipada tendo como parâmetros elementos que sejam todos conjuntos. Então 'a' também é conjunto.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $\phi(v^i;\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ defina 'a', onde $*b_i = b_i$, para $1 \leq i \leq n$. Temos então que $M \models \phi[\underline{a};\ \underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n]$. Logo, $\langle M, *^M\rangle \models \phi^*[*\underline{a};\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n]$. Como $*^M a, b_1,\ldots,b_n$ possuem tipo mais baixo do que 0, pelo axioma $A_5$, temos:

$$M \models \phi[\underline{*^M a},\ \underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n].$$

Logo, $*^M a = a$, e portanto 'a' é conjunto de M.

Q.E.D.

TEOREMA 6.8 - A classe dos conjuntos de um modelo M de $\mathcal{W}$ satisfaz aos axiomas de ZF-regularidade.

Trata-se de uma conseqüência imediata dos Teoremas 6.5 e 6.7 já que os conjuntos cuja existência é garantida pelo esquema da substituição e pelos axiomas das partes e da reunião são definíveis no modelo por fórmulas 1-tipadas tendo como parâmetros conjuntos. O axioma da infinidade é válido pelo fato de $\omega$ ser definível.

- o -

## 7 - MODELOS ISOTRÓPICOS

Estes modelos foram definidos por A.P.Hiller em resposta à questão de se saber se, dado um modelo $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ de $W$, existe ou não um isomorfismo $f: M_0 \rightarrow M_0$ tal que $f(M_i) = M_{i-1}$, para todo $i < 0$. A existência de tal isomorfismo acarreta serem os níveis correspondentes aos diversos tipos negativos essencialmente os mesmos.

Utilizando-se a técnica da construção de modelos standard de $W$, podemos demonstrar a existência de modelos isotrópicos de $W$, ou melhor, de $\langle W, * \rangle$ de modo que o isomorfismo entre os diversos níveis é dado pela denotação da função $*$.

A construção dos modelos isotrópicos desta maneira desenvolvida é devida a A.P.Hiller, e foi colocada na presente tese com a sua devida permissão. Creio que a importância de tais modelos se prende principalmente ao estudo de sistemas autoreferentes com observadores internos, onde o sistema é descrito por dentro de si mesmo. O tema da introdução do observador no sistema, com todas as perturbações por ela ocasionadas, é longo e interessante, fugindo entretanto ao escopo deste trabalho. Aqui, limitar-nos-emos à construção do modelo isotrópico. Começaremos com uma definição.

DEFINIÇÃO 7.1 - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ uma estrutura para a lin-

guagem de $L$. O *estrelado* de $M$ – a ser denotado por $M^*$ – é ainda uma estrutura para a linguagem $L$, da forma $\langle N_i, E\rangle_{-i\in\omega}$, definida pela condição $N_i = M_{i-1}$, para todo $i \leq 0$.

Vê-se, pois, que $M^*$ é a restrição de $M$ aos elementos de tipo $i < 0$ seguida da elevação de uma unidade dos índices referentes a tipos. Cumpre observar que, se $\langle M, *^M\rangle$ é um modelo de $\langle \mathcal{W}, *\rangle$, faz sentido considerar a estrutura $\langle M^*, *^M\rangle$, já que a função $*^M$ restrita a $M_1$, tem valores em $M_1$.

TEOREMA 7.2 - Seja $M$ um modelo de $\mathcal{W}$. Então, para toda fórmula $\phi(x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n})$ cujas únicas variáveis livres são $x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}$ e para toda n-upla $a_1,\ldots,a_n \in M_{-1}$, temos:

$$M \models \phi^*[\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n] \longleftrightarrow M^* \models \phi[\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n].$$

DEMONSTRAÇÃO - Será feita por indução no comprimento da fórmula $\phi$. Se $\phi$ é atômica, ou uma disjunção ou uma negação a demonstrar é rotineira. Se $\phi$ é da forma $\exists v^i \psi$, temos

$$M \models (\exists v^i \psi)^*[\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n] \longleftrightarrow M \models \exists v^{i-1} \dot{\psi}^*[\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n]$$

$$\longleftrightarrow (\exists a \in M_{i-1}) M \models \psi^*[\underline{a},\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n]$$

$$\longleftrightarrow (\exists a \in N_i) M^* \models \psi[\underline{a},\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n]$$

$$\longleftrightarrow M^* \models \exists v^i \psi[\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n].$$

Q.E.D.

COROLÁRIO 7.3 - Se $M$ é modelo de $\mathcal{W}$, $M^*$ também é modelo de $\mathcal{W}$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\sigma$ uma sentença de $L$. Por $A_4$ e 7.2, temos $M \models \sigma \longleftrightarrow M \models \sigma^* \longleftrightarrow M^* \models \sigma$, ou seja, $M \equiv_\omega M^*$.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 7.4 - Seja $\langle M, *^M \rangle$ um modelo de $\langle \mathcal{U}, * \rangle$, com $M = \langle M_i, E \rangle_{-i \in \omega}$. Denotaremos por $*M$ à estrutura $\langle N_i, E \rangle_{-i \in \omega}$ para a linguagem $L$ definida pelas condições: $N_i = *^M(M_i)$, para todo $i \leq 0$.

Como $*^M : M_i \rightarrow M_{i-1}$, verifica-se que $*M$ é uma $\omega$-subestrutura de $M^*$. O próximo teorema nos diz que ela é uma $\omega$-subestrutura elementar.

TEOREMA 7.5 - $*M \prec_\omega M^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos do universo de $*M$ e seja $\exists v^i \phi(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})$ uma fórmula de $L$ cujas únicas variáveis livres são as exibidas.

Então, temos:

$$M^* \models \exists v^i \phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \longleftrightarrow M \models (\exists v^i \phi)^*[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \quad \text{(por 7.2)}$$

$$\longleftrightarrow M \models (\exists v^i \phi)^*[*^M\underline{b}_1, \ldots, *^M\underline{b}_n] \quad \text{(onde } *^M b_j = a_j\text{)}$$

$$\longleftrightarrow M \models (\exists v^i \phi)[\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n] \quad \text{(por 6.2)}$$

$$\longleftrightarrow M \models \phi[\underline{b}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n] \quad \text{(onde } b \in M_i\text{)}$$

$$\longleftrightarrow M \models \phi^*[*^M\underline{b}, *^M\underline{b}_1, \ldots, *^M\underline{b}_n] \quad \text{(por 6.2)}$$

$$\longleftrightarrow M \models \phi^*[\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \quad \text{(onde } a = *^M b\text{)}$$

$$\longleftrightarrow M^* \models \phi[\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \quad \text{(por 7.2).}$$

Como $a = *^M b$ concluímos que 'a' pertence ao universo de $*M$, e pelo Teorema 5.5 de Tarski-Vaught, temos que $*M \prec_\omega M^*$.

TEOREMA 7.7 - Seja $\langle M, *^M \rangle$ um modelo de $\langle \mathcal{U}, * \rangle$ e sejam $N = \langle *M, *^N \rangle$ e

$M_1 = \langle M^*, *^{M_1} \rangle$ as estruturas obtidas restringindo-se $*^M$ aos universos de $*M$ e $M_1$, respectivamente. Então:

i) $N$ e $M_1$ são modelos de $\langle \mathcal{U}, * \rangle$;

ii) $*^N$ é a restrição de $*^{M_1}$ ao universo de $*M$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $M$ é modelo de $\mathcal{U}$, por 7.3, $M^*$ também o é. Pelo Teorema 7.5, $*M \prec_\omega M^*$, logo $*M$ é modelo de $\mathcal{U}$. Para provarmos i) resta verificar que $N$ e $M_1$ satisfazem às condições adicionais da Definição 6.1. Mas como $*M$ é fechado pela operação $*^M$ e $*M \prec_\omega M^*$, basta verificar as condições 6.1 para $M_1$.

Seja $\phi(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})$ uma fórmula de $L$ cujas únicas variáveis livres são as exibidas e sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos do universo de $M^*$. Então,

$$M_1 \models \phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \leftrightarrow M \models \phi^*[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \qquad \text{(por 7.2)}$$

$$\leftrightarrow \langle M, *^M \rangle \models \phi^{**}[*\underline{a}_1, \ldots, *\underline{a}_n] \quad \text{(já que } \langle M, *^M \rangle \models \langle \mathcal{U}, * \rangle)$$

$$\leftrightarrow M_1 \models \phi^*[*\underline{a}_1, \ldots, *\underline{a}_n] \quad . \quad \text{(por 7.2).}$$

Isto prova i). Para vermos ii), basta observar que os universos de $*M$ e de $M^*$ são fechados por $*^M$ e as funções $*^N$ e $*^{M_1}$ são restrições desta função.

Q.E.D.

O teorema que vem a seguir é central na construção do modelo isotrópico:

TEOREMA 7.8 - Seja $\langle M, *^M \rangle$ um modelo de $\langle \mathcal{U}, * \rangle$. Então existe um modelo $\langle M^+, *^{M^+} \rangle$ de $\langle \mathcal{U}, * \rangle$ tal que:

i) $M \prec_{\omega} M^{+}$;

ii) $*^{M^{+}}$ é uma extensão de $*^{M}$.

DEMONSTRAÇÃO - Sendo $\langle M, *^{M} \rangle$ um modelo de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$, sejam $N = \langle *M, *^{N} \rangle$ e $M_1 = \langle M^*, *^{M_1} \rangle$ os modelos de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$ dados pelo Teorema 7.7. Por 6.1, $*^{M}$ é um isomorfismo de $M$ sobre $*M$. Como $*^{N}$ é uma restrição de $*^{M}$ ao universo de $*M$, segue-se que $*^{M}$ e $*^{N}$ comutam, e, portanto, $*^{M}$ é um isomorfismo da estrutura $\langle M, *^{M} \rangle$ sobre $N$. Seja $M^{+}$ a estrutura obtida de $M_1$ identificando-se os elementos de $M$ aos de $N$ através do isomorfismo $*^{M}$. Como $N \prec_{\omega} M_1$, segue-se que $M \prec_{\omega} M^{+}$ e como $*^{M_1}$ estende $*^{N}$, concluimos que $*^{M^{+}}$ estende $*^{M}$.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 7.9 (Modelo isotrópico) - Seja $\langle \mathcal{I}, *^{\mathcal{I}} \rangle$ um modelo de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$. Dizemos que $\langle \mathcal{I}, *^{\mathcal{I}} \rangle$ é *modelo isotrópico* de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$ se $*^{\mathcal{I}}$ é uma bijeção de $I_j$ sobre $I_{j-1}$, para todo $j \leq 0$.

TEOREMA 7.10 - $\mathcal{W} + \mathrm{Con}(\mathcal{W}) \models$ Existe um modelo isotrópico de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO - Sabemos pelo Teorema 6.2 que $\mathrm{Con}(\mathcal{W})$ acarreta a existência de um modelo $\langle M, *^{M} \rangle$ da teoria $\langle \mathcal{W}, * \rangle$. Vamos construir pela recorrência uma cadeia $\langle \langle M_j, *^{M_j} \rangle : j \in \omega \rangle$ de modelos de $\langle \mathcal{W}, * \rangle$ da seguinte maneira:

$$\langle M_0, *^{M_0} \rangle = \langle M, *^{M} \rangle; \quad \langle M_{j+1}, *^{M_{j+1}} \rangle = \langle M_j^{+}, *^{M_j^{+}} \rangle$$

onde $M_j \prec_{\omega} M_j^{+}$ e $*^{M_j^{+}} = *^{M_{j+1}}$ é uma extensão de $*^{M_j}$. A existência de $\langle M_{j+1}, *^{M_{j+1}} \rangle$ satisfazendo às condições acima é conseqüência de 7.8.

Seja $I$ a reunião da cadeia $\omega$-elementar formada pelas extruturas $M_i$. Pelo critério 5.5 de Tarski-Vaught, $M_j \prec_\omega I$, para todo $j \leq 0$. Logo $I$ é modelo de $W$. Como as operações $*^{M_j}$ se estendem, a reunião $*^I$ das mesmas está definida como função de $I_0$ em $I_0$. Verifiquemos que $\langle I, *^I \rangle$ é um modelo de $\langle W, * \rangle$.

De fato, seja $\phi(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})$ uma fórmula cujas únicas variáveis livres são as exibidas e sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos do universo de $I$. Seja $j \in \omega$ um número natural definido de modo que $a_1, \ldots, a_n$ pertençam ao universo de $M_j$.

Como $M_j \prec_\omega I$, temos

$$I \models \phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n] \leftrightarrow M_j \models \phi[\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n]$$

$$\leftrightarrow M_j \models \phi^*[*^{M_j}\underline{a}_1, \ldots, *^{M_j}\underline{a}_n] \quad \text{(pois } M_j \models \langle W, * \rangle\text{)}$$

$$\leftrightarrow I \models \phi^*[*^{M_j}\underline{a}_1, \ldots, *^{M_j}\underline{a}_n] \quad (M_j \prec_\omega I)$$

$$\leftrightarrow I \models \phi^*[*^I\underline{a}_1, \ldots, *^I\underline{a}_n] \quad (*^{M_j} \subset *^I)$$

$$\leftrightarrow I \models \phi^*[*\underline{a}_1, \ldots, *\underline{a}_n] \quad (*^I \text{ é a denotação de } *).$$

Para finalizar, provemos que $*^I$ é uma bijeção de $I_j$ sobre $I_{j-1}$. Levando em conta que $*^I$ preserva tipos e é injetora — já que é reunião dos isomorfismos $*^{M_j}$ — é suficiente provar que $*^I(I_0) = I_{-1}$. Seja $a^{-1} \in I_{-1}$ e seja $j_0$ o menor índice em $\omega$ tal que $a^{-1}$ pertence ao universo de $M_{j_0}$. Na construção da cadeia $M_j$, $a^{-1}$ foi identificado a algum elemento de $*M_{j_0}$ pertencente a $M_{j_0+1}$. Logo, existe 'b' em $M_{j_0+1}$ tal que $*^{M_{j_0+1}} b = a^{-1}$. Mas isto significa que $*^I b = a^{-1}$.

Q.E.D.

## 8 - DEFINIBILIDADE POR ORDINAIS

O presente parágrafo visa estabelecer a correlação entre modelos standard de $W$ e o axioma da definibilidade por ordinais introduzido por Gödel em [3]. Provaremos que em todo modelo stardard de $W$ + regularidade, este axioma se verifica, isto é, todo elemento do modelo é definível por meio de uma fórmula da linguagem de ZF (unitípica) tendo no máximo um único parâmetro livre, qual seja, um ordinal. Depois deste fato, examinaremos algumas conseqüências válidas no modelo, e que dizem respeito à imersão elementar dos conjuntos no universo.

DEFINIÇÃO 8.1 (Definibilidade por ordinais) - Seja $M = \langle M, E \rangle$ um modelo de ZF-regularidade, e seja $x \in M$. Diremos que $x$ é *definível por ordinais* em $M$ se existir uma fórmula $\phi(v_0, v_1)$ da linguagem de ZF, tendo $v_0$ e $v_1$ como as únicas variáveis com ocorrências livres em $\phi$, e um ordinal $\alpha \in M$ de $M$ tal que

$$M \models \exists! v_0 \phi(v_0, \underline{\alpha}) \wedge \phi(\underline{x}, \underline{\alpha}).$$

Utilizaremos a notação $V = OD$ para designar o fato de que todo elemento do universo é definível por ordinais.

A sentença $V = OD$ não é diretamente expressável na linguagem de 1ª ordem de ZF, de vez que a noção de definibilidade pressupõe a noção de verdade, que é essencialmente um con-

ceito de 2ª ordem. No entanto, em ZF existe outra forma equivalente de expressar V = OD — em primeira ordem — e para podermos vê-lo, provaremos o teorema a seguir.

TEOREMA 8.2 - Seja $M = \langle M, E \rangle$ um modelo de ZF onde se verifica a condição V = OD. Em $M$ a seguinte sentença se verifica:

$$\forall x \exists \theta \exists \ulcorner \phi(v_0) \urcorner (\langle R_\theta, \varepsilon \rangle \models \ulcorner \exists! v_0 \phi(v_0) \wedge \phi(\underline{x}) \urcorner).$$

Cumpre elucidar que a simbologia $\exists \ulcorner \phi(v_0) \urcorner$ se constitui em abuso de notação, e o que queremos com isto expressar é a existência de um objeto pertencente ao conjunto dos números de Gödel de fórmulas da linguagem de ZF, contendo apenas a variável $v_0$ com ocorrências livres, e sem a presença de parâmetros.

DEMONSTRAÇÃO - Fixemos o elemento $x \in M$ e a fórmula $\phi_1(v_0, v_1)$ que o define em conseqüência de V = OD por meio do ordinal $\alpha$. A demonstração será subdividida nos seguintes passos:

1) Em $M$ se verifica a seguinte fórmula:

$$\forall x \exists \alpha \exists \beta (x, \alpha \in R_\beta \wedge (\phi_1^{R_\beta}(x, \alpha) \longleftrightarrow \phi_1(x, \alpha))).$$

Trata-se de mera aplicação do princípio de reflexão de Levy.

2) Na linguagem de ZF existe um predicado $W(u,v)$, que recai no nível $\Delta_0^{ZF}$ da hierarquia de Levy, e que expressa intuitivamente o seguinte:

'$\exists \xi, \eta, \xi', \eta'$ $(u = \langle \xi, \eta \rangle \,\&\, v = \langle \xi', \eta' \rangle \,\&\, \xi \leq \eta \,\&\, \xi' \leq \eta' \,\&\, (\eta < \eta' \text{ ou } (\eta = \eta' \,\&\, \xi < \xi')))$'.

Além disto, qualquer conjunto de pares $\langle \xi, \eta \rangle$, com $\xi \leq \eta$ é bem ordenado pela relação sobre ele definida por W.

3) Seja $J(\xi,\eta,\zeta)$ o predicado de ZF definido por:

$$\exists f(f \text{ é função} \wedge \text{dom } f = W^{-1}(\{<\xi,\eta>\}) \wedge \text{im } f = \zeta \wedge$$

$$\wedge (\forall u,v \in \text{dom } f)(W(u,v) \longrightarrow f(u) \in f(v))).$$

A seguinte fórmula se verifica em $M$:

$$\forall \xi,\eta,\zeta,\rho(\zeta \leq \rho \longrightarrow (J^{R_{\rho+4}}(\xi,\eta,\zeta) \longleftrightarrow J(\xi,\eta,\zeta))).$$

A demonstração de faz por indução sobre $\rho$ levando em conta o caráter absoluto de W dado em 2) e das demais noções utilizadas na definição de J. Vê-se claramente que $J(\xi,\eta,\zeta)$ se verifica sse existe um W-isomorfismo da estrutura $<W^{-1}[\{<\xi,\eta>\}],W>$ sobre a estrutura $<\zeta,\varepsilon>$. Este isomorfismo é único e é absoluto relativamente à estrutura $<R_{\rho+4},\varepsilon>$.

4) Sejam $\alpha$ e $\beta$ os ordinais dados em 1) e $\gamma$ o ordinal definido pela condição $J(\alpha,\beta,\gamma)$. Seja $\phi(v_0)$ a fórmula dada por

$$\exists \xi,\eta,\zeta\ (\zeta+3 \text{ é ordinal maximal} \wedge J(\xi,\eta,\zeta) \wedge \phi^{R_\zeta}(v_0,\xi)).$$

Então $\phi(v_0)$ não possui parâmetros e em $M$ tem-se:

$$\forall x \forall \alpha \exists \gamma(\phi^{R_{\gamma+4}}(x) \longleftrightarrow \phi_1(x,\alpha)).$$

5) Seja $\ulcorner\phi(v_0)\urcorner$ o número de Gödel da fórmula $\phi(v_0)$ dada em 4). Então, sendo $\gamma$ o ordinal dado por 4), tem-se:

$$M \models \forall v_0(\underline{<R_{\gamma+4},\varepsilon>} \models \ulcorner\phi(\underline{v_0})\urcorner \longleftrightarrow \phi_1(v_0,\underline{\alpha})).$$

Este fato é conseqüência de 1) e do esquema

$$\forall \gamma(\forall \beta<\gamma+4)(\forall a_1,\ldots,a_n \in R_\beta)(<R_{\gamma+4},\varepsilon> \models \ulcorner\psi^{R_\beta}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)\urcorner \longleftrightarrow \psi^{R_\beta}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)),$$

que se demonstra por indução no comprimento de $\psi$.

6) $M \models (\underline{<R_{\gamma+4}, \varepsilon>} \models \ulcorner \exists! v_0 \phi(v_0) \wedge \phi(\underline{x}) \urcorner)$, que se verifica para todo $x \in M_0$ e todo $\gamma \in Ord^M$.

Isto advém de 5) e do fato de que $\phi_1(v_0, \underline{\alpha})$ define x em M.

Q.E.D.

COROLÁRIO 8.3 - Seja M um modelo de ZF (+ regularidade). Em M, a condição V = OD é equivalente a

$$M \models \forall x \exists \theta \exists \ulcorner \phi(v_0) \urcorner (\underline{<R_\theta, \varepsilon>} \models \ulcorner \exists! v_0 \phi(v_0) \wedge \phi(\underline{x}) \urcorner),$$

onde $\ulcorner \phi(v_0) \urcorner$ é um objeto pertencente ao conjunto dos números de Gödel de fórmulas da linguagem de ZF tendo apenas uma variável livre e não contendo parâmetros.

DEMONSTRAÇÃO - Basta demonstrar que a condição verificada por M no enunciado acarreta V = OD. Podemos supor sem perda de generalidade que $\theta \geq \omega$ e que os números de Gödel pertencem a $\omega$.

Dado $x \in |M|$, seja $n = \ulcorner \phi(v_0) \urcorner \in \omega^M$ a fórmula que o define internamente em $R_\theta^M$. Chamando-se de $\alpha$ ao ordinal $J_2^M(n, \theta)$ e sendo $\psi(v_0, v_1)$ a fórmula $\exists u, v (v_1 = J_2(u,v) \wedge <R_v, \varepsilon> \models u[\ulcorner v_0 \urcorner / v_0])$, vê-se então que

$$M \models \ulcorner \exists! v_0 \psi(v_0, \underline{\alpha}) \wedge \psi(\underline{x}, \underline{\alpha}) \urcorner .$$

onde $J_2(u,v) = w$ see $J(u,v,w)$.

Q.E.D.

Vê-se, pois, que em ZF + regularidade a condição de defi-

nibilidade por ordinais pode ser expressa em 1ª ordem por meio da sentença que figura acima. Estabeleceremos a seguir a correlação entre a condição de definibilidade V = OD e os modelos standard, que é um dos principais resultados desta tese.

TEOREMA 8.4 - Em todo modelo standard de $W$ + regularidade vale V = OD.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $M = \langle M_i, E \rangle_{-i\in\omega}$ um modelo standard $W$+regularidade. Denotemos o menor ordinal de $M$ que não figura em $V_i^M$ por $\Omega_i$ $(i<0)$. Verifica-se que $R^M_{\Omega_i} = V_i^M$.

Seja $x\in M_0$. Como $M$ é standard, existe uma fórmula interna $\ulcorner\phi(v_0)\urcorner$, que define $x$ em $M$:

$$M\models \ulcorner\exists!v_0\phi(v_0) \wedge \phi(\underline{x})\urcorner.$$

A fórmula $\phi$ possui no máximo n tipos. Podemos encontrar uma fórmula $\ulcorner\phi_1(v_0)\urcorner$, cujas variáveis são universais, possuindo no máximo as constantes $\underline{V^M_{-1}}, \underline{V^M_{-2}}, \ldots, \underline{V^M_{-n+1}}$ e que em $M$ seja equivalente a $\ulcorner\phi\urcorner$:

$$M\models \ulcorner\forall v_0(\phi(v_0) \leftrightarrow \phi_1(v_0))\urcorner.$$

Basta para tanto substituir cada quantificador da forma $(\exists x^i)$ por $(\exists x\in\underline{V_i^M})$ e $(\forall x^i)$ por $(\forall x\in\underline{V_i^M})$ evitando-se colisões de variáveis na fórmula $\ulcorner\phi\urcorner$.

Tendo-se em vista que $V_i^M = R^M_{\Omega_i}$, a fórmula $\ulcorner\phi_1(v_0)\urcorner$ é equivalente à fórmula $\ulcorner\phi_2(v_0;\underline{\Omega_{-1}},\ldots,\underline{\Omega_{-n+1}})\urcorner$ obtida definindo-se as constantes $V_i$ por meio dos ordinais $\Omega_{-1},\ldots,\Omega_{-n+1}$. Seja $J_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$

a função que colapsa m-uplas de ordinais em ordinais definida através da definição recursiva:

$$J_2(\alpha,\beta) = \gamma \longleftrightarrow J(\beta,\alpha,\gamma) \quad \text{(cf. 3) do Teorema 8.2)}$$

$$J_{m+1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}) = J_2(\alpha_{m+1},J_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)).$$

Chamando-se de $\alpha$ ao ordinal $J_{n-1}(\Omega_{-1},\ldots,\Omega_{-n+1})$, a fórmula $\ulcorner\phi_3(v_0,\underline{\alpha})\urcorner$ dada por

$$\ulcorner\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}(J_{n-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) = \underline{\alpha} \wedge \phi_2(v_0;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}))\urcorner$$

define o elemento x em $M$ por meio do ordinal $\alpha$.

Q.E.D.

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de observar que, ao contrário do que acontece com o axioma de construtibilidade V = L, a condição V = OD não se constitui em condição de limitação na largura do universo de conjuntos. Isto porque, apesar de ser exigida a definibilidade envolvendo fórmulas curtas, a classe dos ordinais pode sempre ser enriquecida no comprimento de modo a apresentar elementos que venham a definir através das fórmulas conjuntos bastante aleatórios. Por esta razão, e pela demonstração de sua consistência com cardinais mensuráveis ±HGC, considero V = OD como um axioma extremamente razoável para uma teoria cantoriana de conjuntos.

Como aplicação destes resultados provaremos o seguinte:

TEOREMA 8.5 - Seja $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ um modelo standard de $\mathcal{W}$ + regularidade, e seja $K^M = \bigcap\{M_i : -i\in\omega\}$ a classe (externa) dos conjuntos de M. Então,

$$\langle K^M, E\rangle \prec \langle M_0, E\rangle,$$

ou seja, a classe dos conjuntos se encontra elementarmente imersa no universo do modelo.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 6.3, todo elemento $a \in K^M$ é ponto fixo da função $*^M$ definida em 6.2. Para provarmos a tese, aplicaremos o critério de Tarski-Vaught para as estruturas $\langle M_0, E\rangle$ e $\langle K^M, E\rangle$.

Sejam $a_1, \ldots, a_n \in K^M$ e $\exists v \phi(v; v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula unitípica cujas únicas variáveis possuindo ocorrências livres sejam as explicitadas. Suponhamos que

$$M \models \exists v \phi(v; \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n).$$

Como $M$ é standard, os elementos $a_1, \ldots, a_n$ podem ser definidos em $M$ por meio de fórmulas sem parâmetros $\psi_1(v_1), \ldots, \psi_n(v_n)$ da linguagem $L$. Além disto, $M$ sendo modelo standard de $\mathcal{W}$ + regularidade, segue-se que em $M$ podemos definir a seguinte boa ordem:

$$x \leq_D y \longleftrightarrow x, y \in M_0 \ \& \ (\min_\alpha(x \in Def(R_\alpha)) < \min_\beta(y \in Def(R_\beta)))$$

ou

$$\exists \alpha(\min_\alpha(x \in Def(R_\alpha)) = \min_\beta(y \in Def(R_\beta)) = \alpha \ \& \ cp(x, R_\alpha) \leq cp(y, R_\alpha)),$$

onde $cp(u, R_\xi)$ denota o comprimento da menor fórmula da linguagem de ZF que define $u$ em $\langle R_\xi, \varepsilon\rangle$. A fórmula $x \leq_D y$ possui apenas variáveis de tipo 0, como se pode facilmente verificar.

Seja $\phi_1(v)$ a seguinte fórmula:

$$\exists v_1 \ldots v_n (\psi_1(v_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(v_n) \wedge \phi(v, v_1, \ldots v_n) \wedge$$

$$\forall u(\phi(u, v_1, \ldots, v_n) \longrightarrow v \leq_D u)).$$

É claro que $\phi_1(v)$ define um único elemento de M, e que é o elemento $\leq_D$-minimal satisfazendo $\exists v \phi(v, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ em M. Seja 'a' o elemento definido por $\phi_1(v)$. Tem-se então que

$$M \models \phi(\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \wedge \forall u(\phi(u, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \longrightarrow \underline{a} \leq_D u).$$

Finalizaremos a prova ao mostrarmos que 'a' é conjunto de M. Temos

$$(M \models \phi(\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)) \longrightarrow M \models \phi^*(\underline{{}^*{}^M a}, \underline{{}^*{}^M a_1}, \ldots, \underline{{}^*{}^M a_n}) \quad \text{(por 6.2)}$$

$$\longrightarrow M \models \phi^*(\underline{{}^*{}^M a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \qquad ({}^*{}^M a_i = a_i)$$

$$\longrightarrow M \models \phi(\underline{{}^*{}^M a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \qquad \text{(por } A_5\text{)}.$$

Como ${}^*{}^M a$ satisfaz $\phi(v, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$, segue-se que $a \leq_D {}^*{}^M a$.

Por outro lado, temos

$$M \models \forall u(\phi(u, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \longrightarrow \underline{a} \leq_D u) \Longrightarrow M \models \forall u^{-1}(\phi^*(u^{-1}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underline{{}^*{}^M a} \leq^*_D u^{-1}) \qquad \text{(por 6.2)}$$

$$\Longrightarrow M \models \forall u(\phi(u, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \longrightarrow \underline{{}^*{}^M a} \leq_D u) \qquad \text{(por } A_5\text{)}.$$

e portanto, ${}^*{}^M a \leq_D a$. Segue-se que ${}^*{}^M a = a$.

Q.E.D.

O corolário que vem a seguir, e que finaliza o presente parágrafo, expressa que os diversos universos $M_i$ juntamente com

os conjuntos de um modelo standard de $W$+regularidade formam uma cadeia elementar.

COROLÁRIO 8.6 - Seja $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ modelo standard de $W$+regularidade e seja $K^M$ a classe dos conjuntos de $M$. Então, para todo par i,j, com $j < i \leq 0$, temos

$$\langle K^M, E\rangle \prec \langle M_j, E\rangle \prec \langle M_i, E\rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO - Sabemos pelo teorema anterior que $K^M \prec M_0$ e que $K^M \subset M_i$, para todo $i < 0$. Assim, se provarmos que $M_i \prec M_0$, a demonstração estará terminada.

Seja $\phi(v_1,\ldots,v_n)$ uma fórmula unitípica cujas únicas variáveis com ocorrências livres sejas as explicitadas. Tomemos $a_1^i,\ldots,a_n^i \in M_i$. Denotemos por $\phi^{*i}$ à fórmula obtida de $\phi$ pela aplicação do operador * -i vezes. Então

$$M \models \phi(\underline{a}_1^i,\ldots,\underline{a}_n^i) \longrightarrow M \models \phi^{*i}(\underline{a}_1^i,\ldots,\underline{a}_n^i) \quad \text{(por } A_5\text{)}$$

$$\longrightarrow \langle M_i, E\rangle \models \phi(\underline{a}_1^i,\ldots,\underline{a}_n^i) \text{ (por ser } \phi \text{ unitípica).}$$

Como $\langle M_0, E\rangle \models \phi(\underline{a}_1^i,\ldots,\underline{a}_n^i)$ é equivalente a $M \models \phi(\underline{a}_1^i,\ldots,\underline{a}_n^i)$, o teorema se segue.

Q.E.D.

- o -

## 9 - AS CLASSES COMO EXTENSÕES DE PREDICADOS

A teoria $W$ de tipos negativos foi introduzida de modo a que todo predicado da linguagem $L$ admita em qualquer modelo da teoria uma classe de objetos que represente sua extensão. É claro que, tendo em vista o paradoxo de Russell-Zermelo, a interpretação normal (devida a Tarski) dos predicados não atinge o objetivo proposto. Este pode ser alcançado pela chamada *interpretação auto-referente* ou interpretação $*$ dos predicados, que pode ser definida assim:

$$M \models^* \phi[f] \longleftrightarrow M \models \phi^*[f].$$

Mediante a interpretação $*$, todo predicado pode ser pensado como uma classe interna ao modelo. O nosso programa nominalista permanecerá incompleto, no entanto, na medida em que não se estabeleça a correlação inversa, isto é, a de que as classes estejam de alguma forma relacionadas às fórmulas. O presente parágrafo será devotado a este problema.

O modo mais liso de estabelecer esta correlação consiste em impor a condição de que o universo em apreço seja standard. No entanto, como já sabemos, tal condição necessita em princípio do aparato de lógica de ordem superior, e portanto não pode ser processada no contexto da linguagem tipificada de 1ª or-

dem $L$ que estamos utilizando. De maneira análoga à que foi feita no parágrafo 8 com respeito à definibilidade por ordinais, procuraremos encontrar condições equivalentes, porém processáveis na teoria que estamos considerando, e que juntadas a $W$ reflitam com fidelidade as condições aparentemente mais fortes de definibilidade a que nos propusemos impor.

Para sermos mais específicos, seja $T$ uma teoria que estende $W$ formulável em $L$. Estamos à procura da extensão mais fraca de $T$, denotada por $F(T)$, tal que:

1) Todo modelo de $F(T)$ é $\omega$-elementarmente equivalente a um modelo standard de $T$.

2) Todo modelo standard de $T$ é um modelo de $F(T)$.

A teoria $F(T)$, se existir, é a extensão mais fraca de $T$ verdadeira em todos os modelos standard de $T$ e cujos modelos são todos standard a menos de $\omega$-equivalência elementar. Tal fato é conseqüência direta do teorema de completude 2.6. Assim, é claro que a teoria $F(T)$, se existir, representa a condição que estamos buscando, isto é, a de que o universo de $F(T)$ é essencialmente standard.

O problema da existência de $F(T)$ satisfazendo 1) e 2) é complexo e, em geral, não foi possível obter sua solução. No entanto, conseguiu-se resolvê-lo no caso importante em que $T$ é extensão de $W$ + regularidade. Neste caso, a resposta é simples e uniforme, sendo válida para toda extensão $T$:

$$F(T) = T + (V=OD).$$

TEOREMA 9.1 - Seja $T$ uma teoria que estende $W$ + regularidade. Então, a teoria $F(T) = T + (V=OD)$ verifica as condições 1) e 2) acima.

DEMONSTRAÇÃO - A condição 2) foi demonstrada no Teorema 8.4. Resta, pois verificar 1).

Seja $M = \langle M_i, E\rangle_{-i\in\omega}$ um modelo de $F(T)$ e seja $Def(M)$ a $\omega$-subestrutura de $M$ formada pelos objetos $L$-definíveis de $M$ (cf. Definição 5.6). Sendo $M$ modelo de $F(T)$, $M$ verifica $V = OD$. Provemos que $Def(M) \prec_\omega M$, e, para tanto, apliquemos a condição de Tarski-Vaught. Seja $\exists v^i \phi(v^i, v_1^{i_1}, \ldots, v_n^{i_n})$ uma fórmula de $L$ cujas únicas variáveis contendo ocorrências livres são as explicitadas e sejam $a_1^{i_1}, \ldots, a_n^{i_n}$ objetos definíveis em $M$ mediante as fórmulas $\psi_1(v_1^{i_1}), \ldots, \psi_n(v_n^{i_n})$ de $L$. Considere a fórmula $\phi_1(v^i)$ dada por

$$\exists v_1^{i_1} \ldots \exists v_n^{i_n} (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \phi \wedge \forall u(\phi(u, v_1^{i_1}, \ldots, v_n^{i_n}) \rightarrow v^i \leq_D u).$$

Suponhamos que $M \models \exists v^i \phi(v^i; \underline{a}_1^{i_1}, \ldots, \underline{a}_n^{i_n})$. Então $\phi_1(v^i)$ define um único objeto 'a' satisfazendo à condição $M \models \phi(\underline{a}, \underline{a}_1^{i_1}, \ldots, \underline{a}_n^{i_n})$.

Como $a \in |Def(M)|$, a condição de Tarski-Vaught se verifica e portanto $Def(M) \prec_\omega M$. Mas isto implica que $Def(M) \equiv_\omega M$.

Resta verificar que $Def(M)$ é standard, o que é conseqüência imediata de que os elementos de $Def(M)$ são definíveis em $M$ por fórmulas de $L$, e de $Def(M) \prec_\omega M$.

Q.E.D.

O fato de que a teoria $F(T)$ pôde ser encontrada para ex-

tensões de $W$ + regularidade constitui-se em ampla justificativa a que se aceite o axioma da regularidade e V = OD como princípios de nossa teoria.

A seguir, denotaremos por $W_r$ à teoria W+regularidade. Já vimos que a condição de definibilidade de todas as classes por fórmulas pode ser estudada *via* modelos standard e que a teoria $W_r$ + (V=OD) essencialmente descreve tal fato.

No entanto, estudamos até aqui os modelos de $W$ de modo totalmente informal, sem nos preocuparmos com as implicações axiomáticas que daí derivam, e isto será objeto das considerações que se seguem.

Se queremos estudar a definibilidade do universo através de seus modelos, o que devemos fazer é estudar, internamente a $W_r$, os seus modelos standard e exportar as conclusões obtidas por meio deste estudo para o nível lingüístico (externo) da teoria em questão. Em outras palavras, o método utilizado consiste em juntar a $W_r$ o seguinte esquema de axiomas:

$$(\Sigma)\colon \forall M(M \text{ é standard} \wedge M \models \ulcorner W_r \urcorner \longrightarrow M \models \ulcorner \sigma \urcorner) \longrightarrow \sigma$$

onde $\sigma$ é sentença de $L$. Este esquema expressa que $\sigma$ é verdadeira se for válida em todos os mundos possíveis, sendo estes os modelos standard de $W_r$. É claro que $W_r + \Sigma$ acarreta V = OD, e surge, pois, a questão de se descobrir um sistema natural X de axiomas tal que

$$W_r + (V=OD) + X \models \sigma \iff W_r + \Sigma \models \sigma, \text{ para todo } \sigma.$$

A resposta é surpreendentemente simples e consiste no princípio total de reflexão de Kreisel-Levy especializado a $W_r + (V=OD)$ e estudado em [5].

Este princípio pode ser enunciado assim:

$$(KL): \quad Prov(\ulcorner W_r + V=OD \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner) \longrightarrow \sigma$$

onde o predicado Prov(x,y) expressa que existe uma demonstração (interna) do número de Gödel y utilizando-se o conjunto x de axiomas.

TEOREMA 9.2 - As teorias $W + (V=OD) + KL$ e $W_r + \Sigma$ são logicamente equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO - Provemos inicialmente que (V=OD) e KL são conseqüências de $W_r + \Sigma$. Pelo Teorema 8.4, todo modelo standard de $W_r$ satisfaz V = OD. Logo

$$W_r + \Sigma \vdash \forall M \ (M \text{ standard} \wedge M \vdash \ulcorner W_r \urcorner \longrightarrow M \models \ulcorner V=OD \urcorner).$$

Logo, $W_r + \Sigma \vdash V = OD$. Para verificarmos que $W_r + \Sigma \vdash KL$, consideremos $W_r + \Sigma + Prov(\ulcorner W_r + V=OD \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner)$. Pelo Teorema da Completude 2.6, temos

$$\forall M \ (M \models \ulcorner W_r + V=OD \urcorner \longrightarrow M \models \ulcorner \sigma \urcorner).$$

Logo $\ulcorner \sigma \urcorner$ é válido em todos os modelos standard de $\ulcorner W_r \urcorner$, o que por $\Sigma$ acarreta $\sigma$. Logo $W_r + \Sigma \vdash KL$.

Provemos agora que $W_r + (V=OD) + KL \vdash \Sigma$. Para isto, consideremos a teoria

$$W_r + (V=OD) + KL + \forall M \ (M \text{ standard} \wedge M \models \ulcorner W_r \urcorner \longrightarrow M \not\models \ulcorner \sigma \urcorner).$$

Se $\ulcorner\sigma\urcorner$ é verdadeira em todos os modelos standard de $W_r$, $\ulcorner\sigma\urcorner$ é conseqüência de $\ulcorner W_r+V=OD\urcorner$, pois todo modelo de $\ulcorner W_r+V=OD\urcorner$ possui um modelo standard $\omega$-elementarmente ao modelo dado. Segue-se que $Prov(\ulcorner W_r+V=OD\urcorner, \ulcorner\sigma\urcorner)$, e como estamos admitindo KL, concluímos $\sigma$. Logo, $W_r + (V=OD) + KL \models \Sigma$.

Q.E.D.

Verificamos que as condições $W_r + V = OD + KL$ servem de base axiomática para as considerações de que o universo é standard e portanto as classes são essencialmente definíveis por fórmulas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] DEVLIN, Keith J. *Aspects of constructibility*. Berlin, Springer, 1973. 240p. (Lecture Notes in Mathematics, 354)

[2] DRAKE, Frank R. *Set theory: an introduction to large cardinals*. Amsterdam, North-Holland, 1974. 351p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 76)

[3] GÖDEL, Kurt. Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics. In: DAVIS, Martin, ed. *The undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*. Hewlett, Raven Press, c1965. p.84-88.

[4] HILLER, Amadeo P. *Sistemas auto-referentes e o paradoxo de Russell*. São Paulo, 1980. 68p. Tese(Doutoramento) - IME-USP. (A ser defendida)

[5] KREISEL, Georg & LEVY, Azriel. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiom systems. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 14:97-142, 1968.

[6] McALOON, Kenneth. Consistency results about ordinal definability. *Annals of Mathematical Logic*, 2:449-467, 1970.

[7] MYHILL, John & SCOTT, Dana. Ordinal definability. In: SCOTT, Dana, ed. *Axiomatic set theory*. Providence, AMS, 1971. p.271-278. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 13-1)

[8] TARSKI, Alfred & VAUGHT, Robert L. Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio Mathematica*, *13*:81-102, 1957.

- o -

## POSFÁCIO

A seguir, formularemos algumas questões que surgiram em discussões mantidas com N.C.A.da Costa e Rolando Chuaqui, e que consideramos bastante relevantes:

1. O sistema $W$ foi obtido tendo-se como ponto de partida ZF. O mesmo método pode, evidentemente, ser aplicado à teoria KM (Kelly-Morese). Neste caso deve-se formular um axioma de Substituição, do qual resulta um sistema substancialmente mais forte do que $W$, bem como algumas de suas extensões. Como problema sugerimos, pois, seu estudo metamatemático, especialmente a caracterização de seus diversos tipos de modelos, paralelamente ao que foi feito para $W$. (É claro que da elaboração de $W$ pode, em princípio, ser aplicado a outros sistemas como NF e ML de Quine.)

2. $W$ tem uma formulação alternativa óbvia que consiste na introdução de uma família enumerável de constantes na linguagem de ZF, como é feito nos sistemas T e T* de [A]. Surge, portanto, a questão de se comparar esses sistemas mostrando suas relações mútuas e estabelecendo sua utilidade como possíveis fundamentos para a Matemática – particularmente a avaliação filosófica de suas potencialidades.

3. Como é sabido, a Teoria das Categorias não pode ser fundamentada de modo conveniente nos sistemas usuais de Teoria dos Conjuntos. Para tanto, foram criados sistemas mais fortes como os sistemas T e T* de [A] e [B]. Dada a semelhança entre esses sistemas e $\mathcal{W}$, é claro que este último, também pode servir como Fundamento para a Teoria das Categorias. Daí devermos investigar sistematicamente $\mathcal{W}$ como fundamento da referida teoria, mostrando em especial, como as construções referentes às Categorias, podem ser feitas módulo as classes $V_i$. (Em $\mathcal{W}$ vale uma generalização do princípio da ambigüidade de tipos Russell.)

4. Esta tese, como a de A.P.Hiller, acha-se intimamente correlacionada com a noção informal de auto-referência, para cujo esclarecimento o sistema $\mathcal{W}$ sem dúvida contribui. No entanto, dada a relevância do conceito, seria altamente desejável que se tentasse esclarecê-lo melhor, tanto matemática quanto filosoficamente.

[A] - N.C.A.da COSTA, On the underlying logic of two systems of set theory, Koninkl. Nederl. Ak. van Wetensch.,73 (1980), 1-8.

[B] - N.C.A.da COSTA, α-models and the systems T and T*,Notre Dame J. of Formal Logic, 15(1974), 443-454.