ÁLGEBRAS COMUTATIVAS SATISFAZENDO UMA IDENTIDADE DE GRAU QUATRO

LUIZ ANTONIO PERESI

Texto Sistematizando o Trabalho Científico
Apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da USP
Para o Concurso de
Livre-Docência no Departamento de Matemática

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

São Paulo, março de 1991.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Após a conclusão de nosso doutorado em 1986, concentramos nossa atividade de pesquisa em tres direções: na obtenção de um algorítmo que permite construir exemplos de álgebras que não verificam uma dada identidade, no estudo das álgebras que verificam uma certa identidade de grau quatro, e no estudo de alguns problemas que aparecem na classe das álgebras de Bernstein. Os resultados obtidos estão contidos em seis artigos que publicamos durante os anos de 88, 89, 90 e 91. O presente texto é uma sistematização destes resultados.

Nos três capítulos que seguem, vamos apresentar os nossos resultados bem como os resultados que os motivaram. Sempre que possível, daremos um resumo dos argumentos utilizados. Acreditamos que isto dará ao leitor uma melhor compreensão da linha de pesquisa em que estamos engajados e de nossa contribuição.

Nos últimos dez anos, temos tido o privilégio de conviver com os Professores Roberto Celso Fabrício Costa da Universidade de São Paulo (que orientou nosso trabalho de doutorado), Irvin Roy Hentzel da Iowa State University e Philip Holgate da London University. O presente trabalho é resultado desta convivência.

CAPÍTULO I

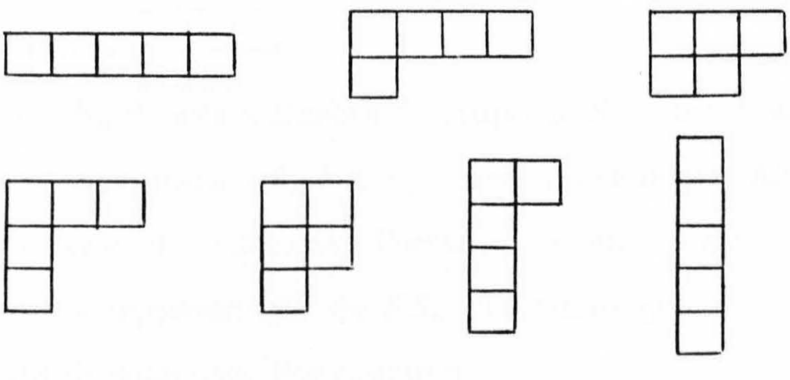
CONSTRUÇÃO DE CONTRA-EXEMPLOS

1. A Representação Natural do Grupo Simétrico

O grupo simétrico S_n tem uma representação natural sobre um corpo F algebricamente fechado e de característica zero. Mais precisamente, existe um homomorfismo que leva S_n em uma soma direta de grupos lineares. Denotemos por $L_t(F)$ o grupo linear das matrizes inversíveis $t \times t$. Temos por exemplo:

$$S_3 \to L_1(F) \oplus L_2(F) \oplus L_1(F),$$
$$S_4 \to L_1(F) \oplus L_3(F) \oplus L_2(F) \oplus L_3(F) \oplus L_1(F),$$
$$S_5 \to L_1(F) \oplus L_4(F) \oplus L_5(F) \oplus L_6(F) \oplus L_5(F) \oplus L_4(F) \oplus L_1(F).$$

Esta representação é obtida utilizando-se uma construção devida a A. Young. Um diagrama de Young é um diagrama constituido de n quadrados arranjados em linhas com comprimentos decrescentes. O número de diagramas determina o número de somandos que aparecem na soma direta. Para $n = 5$ os possíveis diagramas são:



Um tableau é um diagrama onde cada um dos números de 1 até n foi colocado em um dos quadrados. Quando isto é feito de tal maneira que os números crescem à medida que percorremos uma linha (da esquerda para a direita) ou uma coluna (de cima para baixo), dizemos que o tableau é standard. Os tableaux standard (em ordem lexicográfica) determinados pelo diagrama são:

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix}1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{matrix}$$

O número de tableuax standard determina o grau da representação irredutível determinado pelo diagrama. No exemplo acima, o grau da representação é 5 e corresponde ao terceiro somando da representação do S_5.

Boerner [11] fornece um procedimento baseado na construção de Young para calcular efetivamente a representação do S_n. Usando este procedimento, Smith [29] escreveu um programa que calculou as matrizes correspondentes aos geradores (12) e (123...n) do S_n para $n \leq 9$. Obter estas matrizes quando $n > 9$ é impossível do ponto de vista computacional pois o procedimento exige cálculos tediosos envolvendo certas cadeias de permutações. Uma versão simplificada do procedimento que elimina estes cálculos foi obtida por Clifton [32]. Dada a permutação π, construimos a matriz A_π da seguinte maneira: Sejam $\tau_1, ..., \tau_s$ os tableaux standard determinados por algum diagrama. Aplicamos π ao tableau τ_j obtendo o tableau $\pi\tau_j$. Se existem dois números que aparecem em alguma coluna de τ_i e em alguma linha de $\pi\tau_j$, então o coeficiente da matriz A_π na posição (i,j) é 0. Caso contrário, o coeficiente é o sinal da permutação que deixa as colunas de τ_i fixas como conjuntos mas leva os números de τ_i nas linhas em que eles aparecem em $\pi\tau_j$. [Por exemplo, se $\pi = (12)$ e $\tau_j = \begin{matrix}1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{matrix}$ temos $\pi\tau_j = \begin{matrix}2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & \end{matrix}$. Para $\tau_i = \begin{matrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{matrix}$ a permutação é (14) e logo $(A_\pi)_{ij} = -1$.] A matriz correspondente a π é $A_I{}^{-1} A_\pi$ onde I é a permutação identidade. A tabela I contém o cálculo da matriz associada a (12) relativa ao diagrama $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \; & \; \\ \cline{1-2}\end{array}$.

Se FS_n denota a álgebra de grupo de S_n sobre F então toda representação σ de FS_n induz uma representação $\bar{\sigma} \equiv \sigma|_{S_n}$ e reciprocamente. Além disso, a correspondência $\sigma \to \bar{\sigma}$ é unicamente determinada. Portanto, podemos usar a representação natural de S_n para obter uma representação de FS_n. Obtemos que FS_n é isomorfo a uma soma direta de álgebras de matrizes. Por exemplo,

$$FS_4 \simeq M_1(F) \oplus M_3(F) \oplus M_2(F) \oplus M_3(F) \oplus M_1(F).$$

2. A Técnica de Processar Identidades

Uma álgebra não-associativa sobre um corpo F é uma álgebra onde o axioma da associatividade $(x, y, z) \equiv (xy)z - x(yz) = 0$ é simplesmente retirado ou substituido por uma condição mais fraca. Por exemplo, quando substituimos $(x, y, z) = 0$ por $(x, y, y) = 0$, obtemos a classe das álgebras alternativas à direita. Uma identidade é qualquer polinômio não-associativo e em geral não-comutativo. Dizemos que a álgebra A satisfaz uma identidade se, quando as indeterminadas são substituidas por quaisquer elementos de A e a expressão é calculada, o resultado é zero. Vamos considerar sempre identidades homogêneas e lineares em cada uma das indeterminadas. Um problema de identidades é um problema do seguinte tipo: suponhamos que A satisfaz as identidades de grau k $X_1, X_2, ..., X_n$ e seja X_{n+1} uma outra identidade de grau k; a identidade X_{n+1} é uma consequência das identidades $X_1, ..., X_n$? Em [26, 28] Hentzel propôs um método para "processar" identidades, isto é, para obter uma resposta afirmativa ou negativa para um problema de identidades.

Sejam $x_1, x_2, ..., x_k$ k indeterminadas. Existem $c \equiv \frac{1}{k}\binom{2(k-1)}{k-1}$ maneiras diferentes de associar o produto $x_1 x_2 ... x_k$, indicadas por $T_1, T_2, ..., T_c$. Denotemos por $F[x_1, ..., x_k]$ o espaço dos polinômios não-associativos, não-comutativos, homogêneos de grau k e lineares (isto é, cada indeterminada x_i aparece uma e somente uma vez). Se M_i denota o subespaço de $F[x_1, ..., x_k]$ gerado pelos monômios associados de maneira T_i então

$$F[x_1, ..., x_k] = M_1 \oplus ... \oplus M_c.$$

Seja M o conjunto dos monômios associativos, não-comutativos, homogêneos de grau k e lineares. Cada T_i determina a aplicação $\hat{T}_i : M \to M_i$ que leva $m \in M$ no monômio obtido de m associando-se de maneira T_i. Uma permutação $\pi \in S_k$ induz uma aplicação $\hat{\pi} : M \to M$ que leva $m \in M$ no monômio obtido de m permutando-se as posições das indeterminadas segundo π. Assim, se $\pi(i) = j$ então a indeterminada que ocupa a posição i em m ocupa a posição j em $\hat{\pi}(m)$. É bom esclarecer que em geral $\hat{\pi}(x_1 x_2 ... x_k) \neq x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} ... x_{\pi(k)}$. Um elemento g_i de M_i pode ser escrito na forma

$$g_i(x_1,...,x_k) = \sum_{\pi \in S_k} \quad \alpha_\pi \quad \hat{T}_i \circ \hat{\pi}(x_1 x_2 ... x_k) \qquad (\alpha_\pi \in F)$$

e pode então ser identificado com o elemento

$$\sum_{\pi \in S_k} \alpha_\pi$$

de FS_k. Isto estabelece um isomorfismo de espaços vetoriais entre M_i e FS_k. Portanto, $F[x_1,...,x_k]$ pode ser identificado com a soma direta $FS_k \oplus ... \oplus FS_k$ de c cópias da álgebra FS_k.

Usando esta identificação, consideramos cada uma das identidades $X_1,...,X_n,X_{n+1}$ como sendo um elemento de $FS_k \oplus ... \oplus FS_k$. Seja L o FS_k-submódulo gerado por $X_1,...,X_n$. É imediato que X_{n+1} é uma consequência de $X_1,...,X_n$ se e somente se $X_{n+1} \in L$. Seja $P : FS_k \to M_t(F)$ uma representação irredutível de FS_k.

O homomorfismo P induz um homomorfismo

$$\bar{P} : FS_k \oplus ... \oplus FS_k \to M_t(F) \oplus ... \oplus M_t(F)$$

que leva L no subespaço vetorial $\bar{P}(L)$. Note que um elemento de $\bar{P}(L)$ é uma soma formal de c matrizes $t \times t$. Segue que $X_{n+1} \in L$ se e somente se $\bar{P}(X_{n+1}) \in \bar{P}(L)$ para todos os homomorfismos $\bar{P}$ determinados por todas as representações irredutíveis de FS_k.

Temos então uma maneira eficiente e prática para resolver um problema de identidades. Para cada representação irredutível de FS_k, está associada à identidade X_i uma soma formal de matrizes quadradas de ordem t, onde t é o grau da representação. Considerando todas as identidades obtemos a matriz de blocos dada na tabela II. Calculamos o posto desta matriz com e sem as linhas provenientes da identidade X_{n+1}. Se o posto é o mesmo então, no que concerne esta representação, X_{n+1} é uma consequência de $X_1,...,X_n$. Se isto ocorre para toda representação irredutível, então é verdade que X_{n+1} pode ser obtida de $X_1,...,X_n$.

À medida que n (o número de identidades) ou t (o grau da representação) ou k (o grau das identidades) cresce, a matriz de blocos torna-se muito grande. Logo, é necessário usar o computador para fazer os cálculos. Existe um programa, denominado Crunch (escrito em linguagem Fortran), que processa identidades de graus 4, 5 e 6. Crunch calcula a matriz de blocos dada na tabela II e a reduz à sua forma canônica de linhas dada na tabela III, donde se obtém facilmente o posto. O printout fornecido pelo computador contém o posto e a forma canônica de linhas.

Vamos ilustrar o método descrito acima com o seguinte exemplo. Na literatura foi provado que toda álgebra pertencente a uma certa subclasse da classe das álgebras alternativas à direita satisfaz a identidade $(x, x, [x, y])$, onde $[x, y] = xy - yx$. Pode-se perguntar então se toda álgebra alternativa à direita satisfaz esta identidade. Linearizando a identidade (x, y, y) obtemos $(x, y, z) + (x, z, y)$, donde se obtém as seguintes identidades de grau 4 que valem em toda álgebra alternativa à direita:

$$
\begin{array}{ll}
X_1 & x(y, z, w) + x(y, w, z), \\
X_2 & (xy, z, w) + (xy, w, z), \\
X_3 & (x, yz, w) + (x, w, yz), \\
X_4 & (x, y, z)w + (x, z, y)w.
\end{array}
$$

Qualquer outra identidade de grau 4 que vale em toda álgebra alternativa à direita deve ser uma consequência de X_1, X_2, X_3 e X_4. A forma linearizada de $(x, x, [x, y])$ é

$$
\begin{array}{ll}
X_5 & (x, y, [z, w]) + (y, x, [z, w]) + (z, x, [y, w]) \\
& \quad +(x, z, [y, w]) + (y, z, [x, w]) + (z, y, [x, w]).
\end{array}
$$

Existem cinco maneiras de associar quatro indeterminadas:

$$
\begin{array}{lll}
T_1 = ((RR)R)R, & T_2 = (R(RR))R, & T_3 = (RR)(RR), \\
T_4 = R((RR)R), & T_5 = R(R(RR)). &
\end{array}
$$

Expandindo os associadores obtemos, por exemplo,

$$
\begin{array}{lcccc}
 & T_2 & T4 & T_3 & T_5 \\
X_3 & (x(yz))w & -x((yz)w) & +(xw)(yz) & -x(w(yz))
\end{array}
$$

que como elemento de $FS_4 \oplus ... \oplus FS_4$ é escrito na forma

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & T_1 & & T_2 & & T_3 & & T_4 & & T_5 \\
X_3 & 0 & \oplus & I & \oplus & (234) & \oplus & -I & \oplus & -(234)
\end{array}
$$

A permutação (234) expressa o fato de que em $(xw)(yz)$, por exemplo, a variável y que usualmente ocupa a posição 2 está na posição 3, a variável z está na posição 4 e a variável

w está na posição 2. As identidades X_1, X_2, X_4 e X_5 também são escritas nesta forma (veja a tabela IV). A correspondência

$$(12) \to 1 \oplus \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus -1$$

$$(1234) \to 1 \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus -1$$

define um isomorfismo entre FS_4 e $M_1(F) \oplus M_3(F) \oplus M_2(F) \oplus M_3(F) \oplus M_1(F)$. Consideremos a representação determinada pelo segundo somando. A permutação identidade é levada na matriz identidade e a permutação (234) é levada na matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a X_3 corresponde

$$\begin{array}{ccccccccc} T_1 & & T_2 & & T_3 & & T_4 & & T_5 \\ 0 & \oplus & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \oplus & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \oplus & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \oplus & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

As somas correspondentes a X_1, X_2, X_4, X_5 também são calculadas. Todas juntas formam a matriz de blocos que está na tabela V. A forma canônica desta matriz sem as linhas provenientes de X_5 está na tabela VI e com estas linhas está na tabela VII. Vemos que a primeira tem posto 9 enquanto que a segunda tem posto 10. Isto mostra que X_5 não pode ser obtida a partir de X_1, X_2, X_3, X_4. Portanto, nem toda álgebra alternativa à direita satisfaz a identidade $(x, x, [x, y])$.

O problema de identidades do exemplo pode ser resolvido rapidamente usando-se Crunch. Basta criar um arquivo contendo as identidades $X_1, ..., X_5$. Neste arquivo, a identidade X_3, por exemplo, é escrita da seguinte maneira:

3 21234 1

3 41234-1

3 31423 1

3 51423-1

Em cada linha, o primeiro número diz que trata-se da terceira identidade, o segundo expressa a maneira de colocar parênteses, o último o coeficiente e os números 1, 2, 3 e 4 as indeterminadas x, y, z e w, respectivamente. A tabela VIII contém o arquivo completo para o problema. Agora, é só rodar o programa. O computador imprimirá as tabelas VI e VII.

3. Contra-exemplos

Consideremos novamente um problema de identidades: dadas as identidades homogêneas $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$, a identidade X_{n+1} é uma consequência de $X_1, ..., X_n$? Na seção anterior, vimos que a técnica de processar identidades (via representação do grupo simétrico) fornece uma solução para o problema. Esta técnica é, no entanto, apenas um processo de decisão: fornece uma resposta afirmativa ou negativa. No caso afirmativo, temos que encontrar uma prova para o fato da identidade X_{n+1} ser uma consequência de $X_1, ..., X_n$. Mas somente o fato de saber que se está na direção certa é de grande ajuda. No caso negativo, o ideal é encontrar um exemplo simples de uma álgebra onde valem as identidades $X_1, ..., X_n$ mas não vale a identidade X_{n+1}.

O artigo **Counterexamples in Nonassociative Algebra** contém um algorítmo que utiliza as informações contidas na forma canônica de linhas fornecida pelo computador para construir um exemplo. Como uma aplicação, cinco exemplos foram construidos. Estes exemplos são importantes para a teoria das algebras alternativas à direita pois mostram que certas identidades não valem. É conhecido que elas valem em certas subclasses. Um dos exemplos foi feito em detalhes. A sequir vamos construir este exemplo de uma maneira não eficiente mas que mostra exatamente o que se está fazendo quando se aplica o algorítmo.

Na seção anterior, mostramos que existem álgebras alternativas à direita que não satisfazem a identidade $(x,x,[x,y])$. Isto foi feito usando-se a representação irredutível determinada pelo diagrama $\ydiagram{3,1}$. Vamos construir um exemplo de uma tal álgebra. O diagrama tem duas linhas. Os elementos de nossa álgebra são então palavras no alfabeto com duas letras a, b. Todas as palavras com pelo menos cinco letras, ou com quatro letras sendo duas delas letras b, são iguais a zero. Palavras com quatro letras sendo tres delas letras a podem ou não ser iguais a zero. Isto se deve ao fato de que a primeira linha do diagrama tem comprimento 3 e a segunda comprimento 1. A forma canônica dada pela tabela VII difere daquela dada pela tabela VI pelo fato de aparecer um novo degrau na segunda coluna do bloco referente a T_3. As matrizes associadas às formas linearizadas das identidades $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$ (com qualquer distribuição de parênteses) são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz associada ao conjunto de identidades $a((aa)b)$, $a((ab)a)$, $a((ba)a)$ é

$$\begin{array}{ccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ & & & \begin{array}{rrr} -2 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{array} & \end{array}$$

(as colunas nulas foram suprimidas). A forma canônica desta matriz é

$$\begin{array}{ccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ & & & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & \end{array}$$

Logo, podemos fazer $a((aa)b) = a((ab)a) = a((ba)a) = b((aa)a) = 0$ pois usando a matriz identidade que aparece no bloco determinado por T_4 podemos gerar os blocos referentes a T_4 que aparecem nas tabelas VI e VII. Por um argumento semelhante, podemos fazer

$a(a(ab)) = a(a(ba)) = a(b(aa)) = b(a(aa)) = 0$. A forma canônica da matriz associada às identidades $(aa)(ab)$, $(ba)(aa)$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se acrescentamos a identidade $(aa)(ba)$ ou $(ab)(aa)$ obtemos a matrtiz identidade cujo espaço-linha obviamente contém $0\ 1\ -1$. Logo, como não queremos que X_5 seja uma identidade, podemos fazer $(aa)(ab) = (ba)(aa) = 0$ mas $(aa)(ba)$ e $(ab)(aa)$ tem que ser necessariamente diferente de zero. Como $(ba, a, a) = (b, a, a)a = 0$ temos $((ba)a)a = (b(aa))a = 0$. De $(a, ab, a) + (a, a, ab) = 0$ segue então que $(a(ab))a = 0$. As igualdades $(ab, a, a) = 0$ $(a, aa, b) + (a, b, aa) = 0$, $(a, ba, a) + (a, a, ba) = 0$, e $(a, a, a)b = 0$ fornecem

$$((aa)a)b = (a(aa))b = -(ab)(aa) = -((ab)a)a,$$
$$(a(ba))a = -(aa)(ba).$$

Somando as igualdades $(aa, a, b) + (aa, b, a) = 0$ e $(a, a, b)a + (a, b, a)a = 0$ obtemos então $2((aa)b)a = 0$, donde $((aa)b)a = 0$ (supondo a característica $\neq 2$). Logo, usando novamente a primeira destas igualdades, temos

$$((aa)a)b = (aa)(ba).$$

Tomando $(aa)(ba) = \omega$ os produtos não-nulos de grau 4 são:

$$((aa)a)b = \omega \qquad (a(aa))b = \omega$$

$$(aa)(ba) = \omega$$

$$((ab)a)a = -\omega \qquad (a(ba))a = -\omega \qquad (ab)(aa) = -\omega$$

Os fatores não-nulos são: $a, b, aa, ab, ba, (aa)a, (ab)a, a(aa), a(ba)$. Temos portanto a tábua de multiplicação dada na tabela IX. Note que nesta tabela as linhas bem como as colunas determinadas por $(aa)a$ e $a(aa)$ são linearmente dependentes. Logo, podemos tomar $(aa)a = a(aa) = \omega_1$. Analogamente, temos $(ab)a = a(ba) = \omega_2$. A tábua de multiplicação está agora simplificada (veja a tabela X). Escrevendo $e_1 = a$, $e_2 = b$, $e_3 = aa$, $e_4 = ab$,

$e_5 = ba$, $e_6 = \omega_1$, $e_7 = \omega_2$, $e_8 = \omega$, temos a tábua de multiplicação dada na tabela XI. Note que $(e_1, e_1, [e_1, e_2]) = -e_8$. O exemplo construido vale para qualquer característica.

Tabela I

I	1 2 3 4 5	1 2 4 3 5	1 2 5 3 4	1 3 4 2 5	1 3 5 2 4
1 2 3 4 5	1	0	0	0	-1
1 2 4 3 5	0	1	0	0	0
1 2 5 3 4	0	0	1	0	0
1 3 4 2 5	0	0	0	1	0
1 3 5 2 4	0	0	0	0	1

(12)	2 1 3 4 5	2 1 4 3 5	2 1 5 3 4	2 3 4 1 5	2 3 5 1 4
1 2 3 4 5	1	0	0	-1	0
1 2 4 3 5	0	1	0	-1	0
1 2 5 3 4	0	0	1	0	-1
1 3 4 2 5	0	0	0	-1	0
1 3 5 2 4	0	0	0	0	-1

$(12) \to A_I^{-1} A_{(12)} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tabela II

	T_1	T_2	$\ldots$	T_c
X_1				
X_2				
X_3				
$\vdots$			$\ddots$	
X_n				
X_{n+1}				

Tabela III

T_1		T_2		....	T_c
1	0	0	0		
	1	0	0		
		1	0		
			1		
				$\ddots$	
				1	
					$\ddots$

Tabela IV

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
X_1				$I+(34)$	$-I-(34)$
X_2	$I+(34)$		$-I-(34)$		
X_3		I	(234)	$-I$	$-(234)$
X_4	$I+(23)$	$-I-(23)$			
X_5			I $-(34)$ (12) $-(12)(34)$ (123) $-(1243)$ (23) $-(243)$ (132) $-(1432)$ (13) $-(143)$		$-I$ (34) $-(12)$ $(12)(34)$ $-(123)$ (1243) $-(23)$ (243) $-(132)$ (1432) $-(13)$ (143)

Tabela V

	T_1 $((RR)R)R$	T_2 $(R(RR))R$	T_3 $(RR)(RR)$	T_4 $R((RR)R)$	T_5 $R(R(RR))$
X_1				$\begin{matrix} 2 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & . & . \\ . & -1 & -1 \\ . & -1 & -1 \end{matrix}$
X_2	$\begin{matrix} 2 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} -2 & . & . \\ . & -1 & -1 \\ . & -1 & -1 \end{matrix}$		
X_3		$\begin{matrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ 1 & . & . \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & . & . \\ . & -1 & . \\ . & . & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} . & -1 & . \\ . & . & -1 \\ -1 & . & . \end{matrix}$
X_4	$\begin{matrix} 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & . & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & . \\ -1 & -1 & . \\ . & . & -2 \end{matrix}$			
X_5			$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & -8 & 8 \end{matrix}$		$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 8 & -8 \end{matrix}$

(pontos indicam zeros)

Tabela VI

T_1 $((RR)R)R$	T_2 $(R(RR))R$	T_3 $(RR)(RR)$	T_4 $R((RR)R)$	T_5 $R(R(RR))$
$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} & 1 & 1 \\ & & \\ & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ & & 1 \\ & & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & -1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ & & 1 \\ & & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & \\ & -1 & -2 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & & \\ & -1 & -1 \end{matrix}$

Tabela VII

T_1 $((RR)R)R$	T_2 $(R(RR))R$	T_3 $(RR)(RR)$	T_4 $R((RR)R)$	T_5 $R(R(RR))$
$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} & & 2 \\ & & \\ & & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ & & 1 \\ & & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & & -2 \\ & -1 & -1 \\ & & 2 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & 1 \\ & & 1 \\ & & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ & & 1 \\ & & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & & -1 \\ & -1 & -2 \\ & & 2 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} 1 & & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & & -2 \\ & -1 & 1 \\ -1 & & \end{matrix}$
			$\begin{matrix} & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -1 & -1 \end{matrix}$

(somente as entradas não-nulas foram escritas)

Tabela VIII

5 40

1 41234 1	5 32134 1
1 51234-1	5 52134-1
1 41243 1	5 32143-1
1 51243-1	5 52143 1
2 11234 1	5 33124 1
2 31234-1	5 53124-1
2 11243 1	5 33142-1
2 31243-1	5 53142-1
3 21234 1	5 31324 1
3 41234-1	5 51324-1
3 31423 1	5 31342-1
3 51423-1	5 51342 1
4 11234 1	5 32314 1
4 21234-1	5 52314-1
4 11324 1	5 32341-1
4 21324-1	5 52341 1
5 31234 1	5 33214 1
5 51234-1	5 53214-1
5 31243 1	5 33241-1
5 51243-1	5 53241 1

O arquivo deve ser feito colocando-se as linhas uma após a outra. Aqui, por questão de estética, colocamos as últimas vinte linhas ao lado das vinte primeiras. Para usar somente a parte do arquivo relativa às quatro primeiras identidades, basta trocar os números 5 e 40 na primeira linha por 4 e 16.

Tabela IX

	a	b	aa	ab	ba	$(aa)a$	$(ab)a$	$a(aa)$	$a(ba)$
a	aa	ab	$a(aa)$		$a(ba)$				
b	ba								
aa	$(aa)a$				ω				
ab	$(ab)a$		$-\omega$						
ba									
$(aa)a$		ω							
$(ab)a$	$-\omega$								
$a(aa)$		ω							
$a(ba)$	$-\omega$								

Tabela X

	a	b	aa	ab	ba	ω_1	ω_2
a	aa	ab	ω_1		ω_2		
b	ba						
aa	ω_1				ω		
ab	ω_2		$-\omega$				
ba							
ω_1		ω					
ω_2	$-\omega$						

Tabela XI

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_3	e_4	e_6		e_7			
e_2	e_5							
e_3	e_6				e_8			
e_4	e_7		$-e_8$					
e_5								
e_6		e_8						
e_7	$-e_8$							
e_8								

CAPÍTULO II

IDENTIDADES DE GRAU QUATRO EM ÁLGEBRAS COMUTATIVAS

1. Identidades Irredutíveis

Na primeira parte do artigo [14], Osborn introduziu o conceito de identidade irredutível em álgebras não-associativas e estabeleceu um critério para determinar se uma dada identidade é ou não irredutível.

Sejam $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ inteiros positivos e $x_1, \ldots, x_k$ um conjunto de indeterminadas não-associativas (e em geral não-comutativas). Uma identidade (homogênea) de tipo $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ é um polinômio $P = P(x_1, \ldots, x_k)$ com coeficientes em um corpo F tal que o número de x_i em cada termo é exatamente n_i. A soma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ é denominada o grau de P. Dizemos que uma álgebra A sobre F satisfaz a identidade P se $P(a_1, \ldots, a_k) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_k$ em A. O conjunto das identidades é parcialmente ordenado da seguinte maneira: Se P e P' são identidades de graus n e n' e tipos $[n_1, \ldots, n_k]$ e $[n'_1, \ldots, n'_{k'}]$, respectivamente, então $P < P'$ se e somente se $n < n'$ ou $n = n'$ e $n_j > n'_j$ para o primeiro j com $n_j \neq n'_j$.

Seja S um conjunto qualquer de identidades. Uma identidade P é dita irredutível relativo a S se toda identidade menor do que P, que é uma consequência das identidades em $S \cup \{P\}$, é também uma consequência das identidades em S.

Seja $P(x_1, \ldots, x_k)$ uma identidade de tipo $[n_1, \ldots, n_k]$. Substituindo formalmente a indeterminada x_i por $x_i + 1$ obtemos

$$P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_k) = P(x_1, \ldots, x_k) + P_1(x_1, \ldots, x_k) + \ldots + P_{n_i}(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k)$$

onde P_t $(1 \leq t \leq n_i)$ é uma identidade na qual x_i tem grau $n_i - t$. O polinômio P_t é denominado a t-ésima derivada parcial de P com relação a x_i.

O critério de irredutibilidade é dado por

Teorema 1. (Osborn [14]) A identidade P é irredutível relativo ao conjunto de identidades S se e somente se as seguintes condições estão satisfeitas:

(i) Toda derivada parcial de P é consequência das identidades em S.

(ii) Toda identidade menor do que P, obtida de P ou de uma linearização de P considerando-se certas indeterminadas iguais, é consequência das identidades em S.

2. Identidades Irredutíveis em Álgebras Comutativas

Na segunda e terceira partes do artigo [14], Osborn usou o critério de irredutibilidade dado pelo teorema 1 para determinar as identidades de grau ≤ 5 que são irredutíveis relativo à lei comutativa.

Teorema 2. (Osborn [14]) Sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$, uma identidade de grau ≤ 4 é irredutível relativo à comutatividade se e somente se ela é uma das seguintes identidades:

(1) $(yx)x = yx^2$,

(2) $x^3x = x^2x^2$,

(3) $2((yx)x)x + yx^3 = 3(yx^2)x$,

(4) $2(y^2x)x - 2((yx)y)x - 2((yx)x)y + 2(x^2y)y - y^2x^2 + (yx)(yx) = 0$.

Como um exemplo, vamos mostrar como a identidade (3) foi obtida. Uma identidade do tipo $[3, 1]$ tem a forma

(5) $$\alpha_1((yx)x)x + \alpha_2(yx^2)x + \alpha_3yx^3 + \alpha_4(yx)x^2 = 0,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in F$. Agora, suponhamos que (5) é irredutível relativo à comutatividade. Fazendo $y = x$ em (5) obtemos

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^3x + \alpha_4x^2x^2 = 0$$

e a primeira derivada parcial de (5) com relação a x é

$$(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4)(yx)x + (\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4)yx^2 = 0.$$

Mas o teorema 1 diz que estas duas últimas identidades devem ser uma consequência da lei comutativa e isto é possível se e somente se

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0,$$
$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

isto é, se e somente se, $\alpha_1 = 2\alpha_3$, $\alpha_2 = -3\alpha_3$. A identidade (5) reduz-se então à identidade (3). Por outro lado, a identidade (3) é irredutível relativo à comutatividade já que não se obtém nenhuma identidade a partir de (3) fazendo-se $y = x$ ou calculando derivadas parciais e também não se obtém identidades de tipo [4] fazendo-se certas indeterminadas iguais em alguma linearização de (3).

Um anel (não necessariamente comutativo) que satisfaz a identidade (1) é denominado alternativo à direita. Uma álgebra é associativa nas potências se a subálgebra gerada por um elemento qualquer da álgebra é associativa. Note que basta fazer $y = x^2$ em (1) para obter (2). Como demonstrado por Albert [4], a identidade (2) é equivalente à associatividade nas potências em uma álgebra comutativa de característica $\neq 2, 3, 5$. Um anel de Jordan é um anel comutativo que satisfaz a identidade de Jordan $(x^2y)x - x^2(yx) = 0$. Um anel comutativo de característica $\neq 2, 3$ satisfaz a identidade de Jordan se e somente se satisfaz as identidades (2) e (3). É possível encontrar álgebras comutativas com elemento unidade satisfazendo (2) ou (3), mas que não são de Jordan.

Como qualquer identidade de grau ≤ 4 implica uma identidade irredutível de grau ≤ 4, temos a seguinte consequência do teorema anterior:

Teorema 3. (Osborn [15]) Seja A uma álgebra comutativa com elemento unidade de característica $\neq 2, 3$ e suponhamos que A satisfaz uma identidade de grau ≤ 4 que não é uma consequência da comutatividade. Então, A satisfaz pelo menos uma das identidades

(2), (3) e (4).

Portanto, o estudo das álgebras comutativas com elemento unidade que satisfazem uma identidade de grau ≤ 4 (que não é uma consequência da lei comutativa) fica reduzido ao caso em que a álgebra satisfaz uma das identidades (2), (3) ou (4). A identidade (2) foi estudada por Albert [4, 6], Kokoris [5, 7, 8] e Oehmke [10, 20], e as identidades (3) e (4) por Osborn [15, 18]. Os resultados obtidos (não em suas formas mais geral) podem ser enunciados da seguinte maneira:

Teorema 4. (Osborn [18]) Seja A uma álgebra comutativa, simples e de dimensão finita sobre um corpo de característica 0. Suponhamos que A contém um idempotente. Seja A' a álgebra obtida de A adicionando-se um elemento unidade e suponhamos que A' satisfaz uma identidade de grau ≤ 4 que não é consequência da comutatividade. Então, A é uma álgebra de Jordan ou A é uma álgebra de dimensão 2 sobre certo corpo K. No último caso, existem elementos f e g que formam uma base de A sobre K e tais que $f^2 = f$, $fg = -g$ e $g^2 = \alpha f$ ($\alpha \in K, \alpha \neq 0$).

As álgebras comutativas que satisfazem a identidade (3) foram estudadas também por Petersson [16, 17]. Ele definiu para estas álgebras uma noção de radical, semelhante ao de radical de Jacobson para álgebras associativas. Ele provou que se uma tal álgebra é semisimples então ela tem um elemento unidade e admite uma decomposição direta em componentes simples. Além disso, sobre um corpo de característica 0, uma tal álgebra semisimples é de Jordan. Obteve também uma decomposição de Wedderburn

$$A = S \oplus Rad(A), \quad S \cap Rad(A) = 0,$$

onde A é uma tal álgebra e S é uma subálgebra semisimples de A.

Quando o grau é cinco, além da identidade

$$2(x^3x)x - 3(x^2x^2)x + x^3x^2 = 0$$

existem duas famílias a dois parâmetros e duas famílias a tres parâmetros de identidades irredutíveis relativo à comutatividade. Não existem resultados como aqueles do teorema 4 para estas identidades.

No artigo [19], Osborn refaz toda esta teoria sobre identidades irredutíveis e também estuda o caso em que a álgebra não é comutativa.

3. Identidades de Grau Quatro em Álgebras Comutativas

Hentzel-Piacentini Cattaneo-Carini [41] estenderam o resultado de Osborn sobre identidades irredutíveis em álgebras comutativas com elemento unidade. Usando a técnica de processar identidades (capítulo I, seção 2), eles determinaram todas as identidades (irredutíveis ou não) de grau quatro que não são consequência da comutatividade.

Teorema 5. (Hentzel et al [41]) Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Suponhamos que A satisfaz uma identidade de grau quatro que não é consequência da lei comutativa. Então, A satisfaz pelo menos uma identidade pertencente a uma das seguintes famílias de identidades:

$$\alpha(x^2x^2) + \beta x^3x = 0, \tag{6}$$

$$\beta\{(yx^2)x - ((yx)x)x\} + \delta\{yx^3 - ((yx)x)x\} = 0, \tag{7}$$

$$\alpha\{(xy)(xy) - x^2y^2\} + \beta\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\} = 0, \tag{8}$$

$$((xy)z)t - ((xy)t)z + ((yt)x)z - ((yt)z)x + ((yz)t)x - ((yz)x)t = 0. \tag{9}$$

Se A contém um elemento unidade então as identidades (6)-(9) ficam reduzidas a lei associativa ou as identidades (2)-(4).

A identidade (7), por exemplo, é obtida da seguinte maneira. Existem duas maneiras de associar quatro indeterminadas no caso comutativo: (RR)(RR) e ((RR)R)R. A lei comutativa fornece as identidades:

$$X_1 \qquad (xy)(zw) - (yx)(zw) = 0,$$

$$X_2 \qquad (xy)(zw) - (xy)(wz) = 0,$$

$$
\begin{array}{ll}
X_3 & (xy)(zw) - (zw)(xy) = 0, \\
X_4 & ((xy)z)w - ((yx)z)w = 0.
\end{array}
$$

A matriz de blocos associada a estas identidades (relativa a um certo diagrama) é

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & & (RR)(RR) & & & ((RR)R)R & \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & & & \\
X_1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & & & \\
X_2 & 0 & 1 & -1 & & & \\
 & 0 & -1 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & & & \\
X_3 & 0 & 2 & 0 & & & \\
 & -1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
 & & & & 2 & 0 & 0 \\
X_4 & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

que tem a forma canônica de linhas

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & (RR)(RR) & & & ((RR)R)R & \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Portanto, a identidade com a representação matricial

$$((RR)R)R$$

$$0 \quad \beta \quad \delta$$

não é consequência da lei comutativa. Esta identidade é a identidade (7).

Quando $\beta + 3\delta = 0$ a identidade (7) reduz-se a identidade (3) e temos o resultado enunciado no teorema 4. Para $\beta + 3\delta \neq 0$ temos o seguinte

Teorema 6. (Hentzel et al [41]) Seja A uma álgebra comutativa simples sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Suponhamos que A satisfaz a identidade (7) com $\beta \neq 0$, $\beta + 3\delta \neq 0$ e contém um idempotente. Então, A é associativa. O caso $\beta = 0$ corresponde à identidade $((yx)x)x = yx^3$ e a classe de álgebras que satisfazem esta identidade contém álgebras comutativas simples que não são associativas.

4. A Identidade $\mathbf{2((yx)x)x + yx^3 = 3(yx^2)x}$

Como já foi observado na seção 2 deste capítulo, todo anel de Jordan de característica $\neq 2, 3$ satisfaz esta identidade. A recíproca em geral é falsa. O teorema 4 fornece condições suficientes para que uma álgebra comutativa satisfazendo esta identidade seja uma álgebra de Jordan. Em verdade, Osborn [15] provou o seguinte resultado mais forte:

Teorema 7. (Osborn [15]) Seja R um anel comutativo de característica $\neq 2$ satisfazendo a identidade $2((yx)x)x + yx^3 = 3(yx^2)x$. Suponhamos que R é simples e contém um idempotente. Então, R é um anel de Jordan.

Para obter este resultado, Osborn considera a decomposição de Pierce relativa a um idempotente e: $R = R_1 \oplus R_{\frac{1}{2}} \oplus R_0$, onde $R_i = \{x \in R : ex = ix\}$. Prova que R é um anel de Jordan se e somente se R_1 e R_0 são anéis de Jordan e finalmente estabelece que estas duas condições estão satisfeitas quando R é simples.

No artigo **Almost Jordan Rings** estudamos esta identidade utilizando a técnica de processar identidades via representação do grupo simétrico S_5 (veja a seção 2 do capítulo I), com o objetivo de substituir as hipóteses da existência de um idempotente e da simplicidade que são estremamente fortes. Obtivemos a seguinte generalização do teorema 7:

Teorema 8. Seja R um anel comutativo de característica $\neq 2, 3$ satisfazendo a identidade $2((yx)x)x + yx^3 = 3(yx^2)x$. Se R é semiprimo então R é um anel de Jordan.

Um anel R é dito semiprimo quando verifica a seguinte condição: se I é um ideal de R e $I^2 = 0$ então $I = 0$. Note que esta condição é mais fraca que a de simplicidade onde se exige que o anel não contenha ideais próprios.

O argumento usado para provar o teorema 8 é o seguinte: Denotemos por (x, y, z) o associador $(xy)z - x(yz)$. Sejam I e J o conjunto das somas formais de elementos da forma (x^2, x, x) e (x^2, y, x), respectivamente, $x, y \in R$. Sejam

$$T = \{x \in R : x(y, z, w) = 0, \quad (y, x, z) = 0, \quad \forall y, z, w \in R\}$$

e

$$T' = \{x \in R : xz = 0, \quad (y, x, z) = 0, \quad \forall y \in R, \quad \forall z \in T\}.$$

É óbvio que $(T \cap T')^2 = 0$. Provamos que T e T' são ideais de R. Logo, $T \cap T'$ é um ideal de R e como R é semiprimo obtemos $T \cap T' = 0$. Por outro lado, provamos que $2^7 3^2 J \subset I$ e $I \subset (T \cap T')$. Se a característica é $\neq 2, 3$ temos então que $J = 0$. Como $(x^2 y)x - x^2(yx) \in J$ temos portanto que $(x^2 y)x - x^2(yx) = 0$, $\forall x, y \in R$, isto é, R é um anel de Jordan.

Para estabelecer certos passos deste argumento foi essencial provar que

$$(w, (a^2, a, a), b) = 0, \quad \forall w, a, b \in R.$$

Esta identidade foi obtida da identidade

$$(\omega, (a^2, b, a), a) = 0, \quad \forall \omega, a, b \in R,$$

que pode ser escrita na forma

$$(10) \qquad (a^2, b, a)'a' - ((a^2, b, a)a)' = 0$$

onde c' denota a multiplicação à direita por c: $xc' = xc$. Em R vale

$$f(x, y, z) \equiv x'y'z' + z'y'x' - (xy)'z' - (yz)'x' - (zx)'y' + ((xz)y)' = 0.$$

A partir desta identidade obtemos vinte e tres identidades onde aparecem quatro letras a e uma letra b. Por exemplo:

$$a'a'f(a, b, a), \quad f(a, (ab)a, a), \quad [(ab)f(a, a, a)]'.$$

A identidade (10) foi obtida como uma combinação linear destas vinte e tres identidades. Cada uma das identidades foi processada separadamente no computador para que pudessemos perceber sua contribuição na combinação linear.

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

1. O Problema de Bernstein

Em 1923 Bernstein [3] propôs o problema da descrição explícita de todos os operadores evolução que atingem o equilíbrio na segunda geração.

Sejam $a_1, ..., a_n$ n tipos hereditários. Denotemos por δ_{ijk} a probabilidade de obter-se a_k a partir de a_i e a_j. Temos $\delta_{ijk} \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{n} \delta_{ijk} = 1$. Se $x = (x_1, ..., x_n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, representa a distribuição de frequências dos tipos hereditários em uma dada geração, então a distribuição de frequências na geração seguinte é $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ onde

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \delta_{ijk}.$$

O operador evolução é o operador quadrático V definido por $V(x) = x'$. A população atinge o equilíbrio na segunda geração se e somente se $V^2 = V$.

Bernstein resolveu o problema para $n = 3$ e obteve resultados para n arbitrário em certos casos. A seguir temos dois exemplos obtidos por Bernstein.

Exemplo 1. Seja V o operador quadrático dado por

$$x'_1 = (x_1 + \tfrac{1}{2}x_3)^2, \quad x'_2 = (x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2, \quad x'_3 = 2(x_1 + \tfrac{1}{2}x_3)(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3),$$

onde $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Se $P = (p_1, p_2)$ onde $p_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_3$ e $p_2(x) = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ e $Q(p_1, p_2) = (p_1^2, p_2^2, 2p_1p_2)$, então $V = QP$. Temos:

$$p_1(x') = x'_1 + \tfrac{1}{2}x'_3 = p_1(x)^2 + p_1(x)p_2(x) = p_1(x)[p_1(x) + p_2(x)] = p_1(x),$$

já que $p_1(x) + p_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Analogamente, $p_2(x') = p_2(x)$. Logo, $PV = P$. Segue então que $V^2 = QPV = QP = V$.

O operador dado no exemplo 1 é conhecido como operador de Hardy-Weinberg e foi obtido independentemente por Hardy [1] e Weinberg [2] em 1908. A descoberta deste operador foi importante para o desenvolvimento da genética. Mesmo atualmente, ele é usado quando se faz análise estatística em genética (veja Lyubich [21]). Uma das interpretações que pode ser dada é a de que este operador é o operador evolução de uma população com gene dominante A e recessivo a e tipos hereditários $a_1 = AA$, $a_2 = aa$ e $a_3 = Aa$.

Exemplo 2. *(Lei da Quadrilha)* Seja V o operador quadrático dado por

$$x_1' = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \qquad x_2' = (x_1 + x_2)(x_2 + x_4)$$
$$x_3' = (x_3 + x_4)(x_1 + x_3) \qquad x_4' = (x_3 + x_4)(x_2 + x_4),$$

onde $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Temos $V = QP$ onde

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$
$$p_1(x) = x_1 + x_2, \quad p_2(x) = x_3 + x_4, \quad p_3(x) = x_1 + x_3, \quad p_4(x) = x_2 + x_4,$$
$$Q(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4).$$

É imediato verificar que $PV = P$ e logo que $V^2 = V$.

Lyubich [21] deu a seguinte interpretação para o operador dado no exemplo 2. Consideremos uma população com genes femininos X, x e genes masculinos Y, y. O tipos hereditários que aparecem são sempre híbridos e são os seguintes: $a_1 = XY$, $a_2 = Xy$, $a_3 = xY$ e $a_4 = xy$. Existe diferenciação pelo sexo ao nível dos genes mas não ao nível dos zigotos. O operador evolução desta população é dado pela lei da quadrilha.

O problema de Bernstein foi estudado por Lyubich [21, 23, 24]. Ele introduziu o conceito de estrutura génica para um operador evolução e classificou os operadores com tal estrutura.

Denotemos por σ^{n-1} o simplexo $\{x = (x_1, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \;\; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Seja $V : \sigma^{n-1} \to \sigma^{n-1}$ um operador evolução. Uma forma linear $p : R^n \to R$ é dita invariante se $p(V(x)) = p(x)$ para todo $x \in \sigma^{n-1}$. O conjunto de todas as formas invariantes é um espaço vetorial e o conjunto das formas invariantes com coeficientes não-negativos é um cone neste espaço. Sejam $p_1, ..., p_s$ uma base para este cone, normalizada no sentido de que o maior coeficiente de cada forma p_i é 1. A transformação linear $P : \sigma^{n-1} \to R^s$, dada por $P = (p_1, ..., p_s)$, é denominada operador meiose e representa a transformação de zigotos em gametas. Dizemos que o operador V tem estrutura génica se existe uma transformação quadrática $Q : R^s \to \sigma^{n-1}$ com coeficientes não-negativos tal que $V = QP$. Esta transformação Q é denominada operador fertilização e descreve a formação de zigotos a partir da união de gametas. Quando as formas $p_1, ..., p_s$ são linearmente independentes, dizemos que V tem estrutura génica elementar. O operador dado no exemplo 1 tem estrutura génica elementar enquanto que aquele dado no exemplo 2 tem estrutura génica. Se V tem estrutura génica (elementar ou não) então $V^2 = V$.

O operador V é dito normal quando a população que ele descreve tem as seguintes propriedades: nenhum tipo hereditário desaparece (isto é, $x'_i \neq 0$); dois tipos hereditários não são do mesmo tipo (isto é x'_i não é um múltiplo de x'_j); dois tipos hereditários não podem ser unificados (isto é, o operador depende de x_i e x_j e não de $x_i + x_j$).

Teorema 1. (Lyubich [21]) Um operador tem estrutura génica elementar e é normal se e somente se (a menos de uma permutação de coordenadas) tem a seguinte forma:

$$x'_1 = p_1^2 + 2p_1 \sum_{k \neq 1} a_{1k} p_k, \; . \; . \; ., \; x'_s = p_s^2 + 2p_s \sum_{k \neq s} a_{sk} p_k \quad (1 \leq k \leq s),$$
$$x'_{s+1} = 2b_1 p_{i_1} p_{k_1}, \; . \; . \; ., \; x'_n = 2b_\delta p_{i_\delta} p_{k_\delta},$$

$s \geq 2, \delta = n - s \geq 1$, $i_1 < k_1, ..., i_\delta < k_\delta$, nenhum dos pares $(i_1, k_1), ..., (i_\delta, k_\delta)$ coincidem,

$$p_k = x_k + \sum_{l=1}^{\delta} c_{kl} x_{s+l} \quad (k = 1, ..., s),$$

os coeficientes a_{ik}, b_j, c_{kl} estão contidos em [0,1], $b_j > 0$, $c_{i_1 1} > 0$, $c_{k_1 1} > 0$,..., $c_{k_\delta \delta} > 0$, os c_{kl} restantes são nulos,

$$c_{i_l l} + c_{k_l l} = 1, \quad a_{i_l k_l} + c_{i_l l} b_l = \tfrac{1}{2}, \quad a_{k_l i_l} + c_{k_l l} b_l = \tfrac{1}{2}.$$

$(l = 1, ..., \delta)$ e, finalmente, para os pares (i, k) que ainda não foram considerados,

$$a_{ki} = a_{ik} = \tfrac{1}{2}.$$

A classe dos operadores dada pelo teorema 1 é parametrizada pelos 2δ parâmetros $b_1, ..., b_\delta, c_{i_1 1}, ..., c_{i_\delta \delta}$. Quando $s = 2$, $\delta = 1$, $b_1 = 1$, $c_{11} = \frac{1}{2}$, temos $c_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{12} = a_{21} = 0$ e obtemos o operador evolução do exemplo 1.

A lei da quadrilha pode ser generalizada. Seja $n = kl$ com $k, l > 1$. O elemento $x = (x_1, ..., x_n)$ pode ser escrito na forma matricial

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & . & . & . & x_l \\ x_{l+1} & . & . & . & x_{2l} \\ . & . & . & . & . \\ x_{(k-1)l+1} & . & . & . & x_{kl} \end{bmatrix}$$

Denotemos por $p_i(x)$ e $q_j(x)$ a soma dos elementos da i-ésima linha e da j-ésima coluna, respectivamente. A lei da quadrilha generalizada é dada por:

$$x' = \begin{bmatrix} p_1 q_1 & . & . & . & p_1 q_l \\ p_2 q_1 & . & . & . & p_2 q_l \\ . & . & . & . & . \\ p_k q_1 & . & . & . & p_k q_l \end{bmatrix}$$

O operador meiose é dado por $P = (p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_l)$ e o fertilização por

$$Q(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_l) = (p_1 q_1, ..., p_1 q_l, p_2 q_1, ..., p_k q_l).$$

Temos $V = QP$ e este operador tem estrutura génica.

Teorema 2. (Lyubich [23]) Seja V um operador evolução normal. Então, V tem estrutura génica elementar ou é uma lei da quadrilha generalizada.

Assim, o problema de Bernstein com certas restrições foi resolvido por Lyubich. Estas restrições foram impostas para que o problema não saisse do campo da genética. No artigo [24], Lyubich fornece dois possíveis modelos genéticos: um é descrito por um operador do tipo dado pelo teorema 1 e o outro pela lei da quadrilha generalizada.

2. Álgebras de Bernstein

No artigo [25], Holgate introduziu o conceito de álgebra de Bernstein, fornecendo uma formulação algébrica para o problema de Bernstein.

Seja $V(x) = x'$ o operador evolução dado por

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \delta_{ijk}.$$

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de R^n. Introduzindo em R^n a multiplicação dada por

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ijk} e_k,$$

obtemos uma álgebra B. Em termos da álgebra B, $V(x) = x^2$ e a estabilidade na segunda geração é expressa por $x^2x^2 = x^2$ ($x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \geq 0$, $\sum x_i = 1$). É imediato verificar que a forma linear $\rho : B \to R$ definida por $\rho(x) = \sum x_i$ é um homomorfismo de álgebras. Aqui estamos considerando os operadores evolução $V(x) = x^2$ que satisfazem $x^2x^2 = \rho(x)^2 x^2$ para todo $x \in B$.

Uma álgebra de Bernstein é um par (A, ω) consistindo de uma álgebra não-associativa comutativa A sobre um corpo K e um homomorfismo não-nulo de álgebras $\omega : A \to K$ tais que

$$(1) \qquad x^2x^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad (\forall x \in A).$$

Assim, (B, ρ) é uma álgebra de Bernstein. É importante observar que ω é unicamente determinado: se (A, ω_1) e (A, ω_2) são álgebras de Bernstein então $\omega_1 = \omega_2$.

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de característica $\neq 2$. Se $y \in A$ e $w(y) \neq 0$, seja $x = (w(y))^{-1} y$. Da identidade (1) segue que x^2 é um idempotente. Escolhendo um idempotente e temos a soma direta (de espaços vetoriais) $A = Ke \oplus N$, onde N é o núcleo de ω. Se R_e denota a multiplicação à direita por e atuando sobre N, temos $2R_e^2 = R_e$. Isto fornece a decomposição de Pierce $A = Ke \oplus U \oplus Z$ onde U é o núcleo de $2R_e - I$ e Z é o núcleo de R_e. Os subespaços U e Z satisfazem

(2) $\qquad U^2 \subset Z, \quad UZ \subset U, \quad Z^2 \subset U, \quad UZ^2 = 0.$

A decomposição acima depende da escolha do idempotente. No entanto, quando a dimensão de A é finita, a dimensão de U e consequentemente a dimensão de Z são invariantes de A. Neste caso, o par $(dimU + 1, dimZ)$ é denominado o tipo de A. Todos estes fatos são obtidos linearizando-se a identidade (1). Veja por exemplo Worz-Busekros [30].

O problema da classificação das álgebras de Bernstein tem-se mostrado difícil. Como observado por Lyubich [36], existem obstáculos a uma classificação em geral pois esta classificação contém como subproblemas a classificação de formas quadráticas e de feixes de operadores lineares. No entanto, certos teoremas de classificação tem sido obtidos. Por exemplo, no artigo [36], Lyubich classificou as álgebras de Bernstein de dimensão n sobre C de tipos $(n, 0)$, $(n-1, 1)$, $(1, n-1)$ e $(2, n-2)$. No artigo [35], ele obteve a classificação das álgebras de tipo $(3, n-3)$ que não são excepcionais, isto é, tais que $U^2 \neq 0$. Os enunciados são muito técnicos para serem dados aqui.

3. Nilpotência e Solubilidade

Seja A uma álgebra não-associativa. Dizemos que A é nilpotente se existe um número natural n tal que o produto de quaisquer n elementos de A, com qualquer arranjo de parênteses, é zero. O menor número com esta propriedade é denominado o índice de nilpotência de A. Consideremos duas sequências de subconjuntos de A definidas indutivamente por

$$A^1 = A,\ A^2, \ldots,\ A^n = A^{n-1}A + A^{n-2}A^2 + \ldots + A^2A^{n-2} + AA^{n-1},$$
$$A^{(0)} = A,\ A^{(1)} = A^2, \ldots,\ A^{(n)} = \left(A^{(n-1)}\right)^2.$$

A condição de A ser nilpotente é equivalente a $A^n = 0$ para algum n. A álgebra A é dita solúvel se $A^{(n)} = (0)$ para algum n. O menor n com esta propriedade é denominado o índice de solubilidade de A.

Consideremos o seguinte exemplo de álgebra de Bernstein:

Exemplo 3. Seja $A = Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5$ munido da multiplicação

$$(k_1, a_1, b_1)(k_2, a_2, b_2) = (k_1 k_2, \tfrac{1}{2}k_1 a_2 + \tfrac{1}{2}k_2 a_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2, 0).$$

É fácil ver que o par (A, ω) onde $\omega(k, a, b) = k$ é uma álgebra de Bernstein. O núcleo de ω é $N = 0 \oplus Z_5 \oplus Z_5$. Se $a = (0, 1, 0)$ e $b_i = (0, 0, 1)$ $(1 \leq i \leq n)$ temos

$$(...(((ab_1)b_2)b_3)...)b_n = a \neq 0.$$

Logo, N não é nilpotente.

No restante desta seção a característica de K é $\neq 2$.

Se $A = Ke \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein então em geral N não é nilpotente, mesmo quando A tem dimensão finita. Quanto a solubilidade de N, no artigo **Semiprime Bernstein Algebras** obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 3. Se $A = Ke \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein finitamente gerada então N é solúvel.

Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ a decomposição de A relativa a um idempotente e. Sejam $L = \{x \in U : xU = 0\}$ e $M = \{x \in N \ : \ xN \subset L\}$. O conjunto L é um ideal de A. Provamos que $n^3 \in L$, para todo $n \in N$. Logo, N/L é nil de índice 3. Provamos que M é um ideal de N e que N/M é uma álgebra de Jordan especial. Isto significa que N/M é isomorfo a uma subálgebra de uma álgebra $E^{(+)}$. A álgebra $E^{(+)}$ é obtida definindo-se em uma álgebra associativa E a multiplicação $\circ$ dada por $x \circ y = xy + yx$. No nosso caso, E é a álgebra dos endomorfismos de $(N/L, +)$. Como N/M é isomorfo ao quociente de N/L por M/L, temos que N/M também é nil de índice 3. É conhecido que toda álgebra de Jordan especial nil de índice finito é localmente nilpotente, isto é, toda subálgebra finitamente gerada é nilpotente (veja [33]). Logo, N/M é nilpotente (aqui estamos usando a hipótese de que A é finitamente gerada). Temos então que $(N/M)^{(r)} = 0$ para algum r e portanto

$$N^{(r+2)} \subset M^{(2)} \subset L^2 = 0,$$

isto é, N é solúvel.

Note que N/L é nilpotente. De fato, o quociente de N/L por M/L é nilpotente pois é isomorfo a N/M. Temos então

$$(N/L)^n \subset M/L$$

para algum n e logo

$$(N/L)^{n+1} \subset MN/L = 0$$

Após termos este artigo aceito para publicação, ficamos sabendo que o problema da nilpotência de N havia sido estudado primeiramente por Odoni-Stratton [44] e depois por Grishkov [37]. Eles obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 4. (Odoni-Stratton [44], Grishkov [37]) Seja $A = Ke \oplus N$ uma álgebra de Bernstein de dimensão finita. Se $A^2 = A$ então N é nilpotente.

O argumento usado em [44] não difere em essência daquele dado acima para provar que N/L é nilpotente. O argumento dado por Grishkov é diferente e interessante, embora existam vários pontos onde a prova torna-se obscura. É o seguinte:

Um espaço vetorial B com uma operação trilinear $(\ ,\ ,\ )$ é denominada uma T-álgebra se verifica as seguintes condições:

$$(a,b,c) = (b,a,c), \quad (a,b,c) + (b,c,a) + (c,a,b) = 0,$$
$$((a,b,c),d,e) + ((a,b,d),c,e) = 0,$$

para todo $a,b,c \in B$. Definimos as potências de B por $B^{[1]} = B$, $B^{[2]} = (B,B,B)$, ..., $B^{[n]} = (B^{[n-1]},B,B)$. A T-álgebra B é dita nilpotente se existe um n tal que $B^{[n]} = 0$. Em seguida, provamos que toda T-álgebra de dimensão finita é nilpotente. Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma álgebra de Bernstein. Como $U^2 \subset Z$, U não é uma subálgebra de A. Mas munido da operação trilinear $(a,b,c) = (ab)c$, U torna-se uma T-álgebra. Se A tem dimensão finita então $U^{[n]} = 0$ para algum n. Se $A^2 = A$ então disto segue que $N^{2n+2} = 0$, isto é, N é nilpotente no sentido da definição dada no início desta seção.

No final de [37], Grishkov conjecturou que o teorema 4 continua válido quando a hipótese dimensão finita é substituida por finitamente gerada. No artigo **Nilpotency in Bernstein Algebra**, provamos que esta conjectura é verdadeira.

Teorema 5. Seja $A = Ke \oplus N$ uma álgebra de Bernstein finitamente gerada satisfazendo $A^2 = A$. Então, N é nilpotente.

Para provar este resultado, usamos o mesmo argumento da prova do teorema 3 com $L = ann(N)$, onde $ann(N) = \{n \in N \ : \ nN = 0\}$. Temos que N/M é nilpotente, onde $M = \{x \in N \ : \ xN \subset L\}$. Logo, $(N/M)^n = 0$ para algum n. Temos então que

$$N^{n+2} \subset (MN)N \subset ann(N)N = 0,$$

isto é, N é nilpotente. Para levar a cabo o argumento é necessário provar que $n^3 \in ann(N)$, para todo $n \in N$, e aqui usa-se que $Z = U^2$. Este último fato segue da condição $A^2 = A$.

Além das álgebras de Bernstein, existem outras classes de álgebras não-associativas que tiveram origem a partir de problemas em genética. Uma destas classes é a classe das álgebras triangulares. Uma álgebra A é dita triangular se A tem uma base $c_0, c_1, ..., c_n$ satisfazendo as seguintes condições: se

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ijk} c_k$$

então $\lambda_{000} = 1$, $\lambda_{0jk} = \lambda_{j0k} = 0$ para $k < j$ e $\lambda_{ijk} = 0$ para $k \leq max\{i, j\}$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Seja $A = Ke \oplus N$ uma álgebra de Bernstein de dimensão finita. Lyubich [34] provou que A é triangular se e somente se N é nilpotente. Como uma consequência do teorema 4, Grishkov provou que a conjectura proposta por Lyubich em [34] é verdadeira: Se $A^2 = A$ então A é triangular.

4. A Propriedade de Jordan

Nesta seção K é um corpo de característica $\neq 2$.

Uma álgebra de Jordan é uma álgebra não-associativa comutativa que satisfaz a identidade $(x^2y)x = x^2(yx)$. Burgueño-Baeza-Alcalde [42] provaram que uma álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus Z$ é de Jordan se e somente se $Z^2 = 0$ e $(uz)z = 0$ para todo $u \in U$, $z \in Z$. Uma outra caracterização das álgebras de Bernstein que são de Jordan é dada pelo seguinte

Teorema 6. (Walcher [40]) Sejam A uma álgebra comutativa sobre K e $\omega : A \to K$ um homomorfismo não-nulo de álgebras. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) (A, ω) é uma álgebra de Bernstein e de Jordan.

(ii) (A, ω) é uma álgebra de Bernstein associativa nas potências.

(iii) $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ para todo $x \in A$.

No artigo **Semiprime Bernstein algebras** obtivemos os seguintes resultados:

Teorema 7. Se A é uma álgebra de Bernstein semiprima então A é uma álgebra de Jordan.

Teorema 8. Seja A uma álgebra de Bernstein semiprima sobre um corpo K. Se A é finitamente gerada então A é isomorfa a K.

Uma álgebra não-associativa A é dita semiprima quando verifica a seguinte condição: Se I é um ideal de A e $I^2 = 0$ então $I = 0$.

Seja $A = Ke \oplus U \oplus Z$ uma decomposição de A. O subconjunto $L = \{x \in U : xU = 0\}$ é um ideal de A. Como $L^2 = 0$ segue que $L = 0$. Em seguida, provamos que $Z^2 \subset L$ e $(uz)z \in L$, para todo $u \in U$ e $z \in Z$, e disto segue que A é uma álgebra de Jordan. Em verdade, a prova do teorema 7 dada no artigo usa uma caracterização das álgebras de Bernstein que são de Jordan dada por Worz-Busekros [38]. Agora, que temos a caracterização de Burgueño et al, a prova pode ser feita de maneira mais simples.

Como foi observado na seção anterior, N/L é nilpotente. No presente caso, $L = 0$ e logo N é nilpotente. Como nilpotente implica solúvel, $N^{(r)} = 0$ para algum r. Provamos que $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, ... são ideais de A. Como A é semiprima e $\left(N^{(r-1)}\right)^2 = N^{(r)} = 0$

temos que $N^{(r-1)} = 0$. Aplicando o argumento novamente a $N^{(r-1)} = 0$ obtemos $N^{(r-2)} = 0$. Continuando com este processo chegamos a $N = 0$. Portanto, $A = Ke$ e isto estabelece o teorema 8.

5. Álgebras de Bernstein Dadas Por Formas Bilineares Simétricas

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre K e denote por N o núcleo de ω. No artigo [43], Costa propôs o problema da classificação das álgebras de Bernstein de dimensão finita tais que N^2 é unidimensional. Neste caso, $N^2 = Kc$ e a multiplicação em N é dada por $xy = b(x, y)c$, onde b é uma forma bilinear simétrica. Quando o índice de Witt de b é zero, Costa obteve uma classificação completa.

Teorema 9. (Costa [43]) Seja $A = Ke \oplus N$ uma álgebra de Bernstein sobre um corpo K de característica $\neq 2$. Suponhamos que $xy = b(x, y)c$, para todo $x, y \in N$, onde b é uma forma bilinear simétrica com índice de Witt 0. Então, A tem uma base $c_0, c_1, ..., c_n$ em relação a qual os produtos não-nulos são dados por uma das seguintes tábuas:

$$\text{(i)} \quad c_0^2 = c_0, \quad c_0c_i = \tfrac{1}{2}c_i \quad (1 \leq i \leq r+k, \ 0 \leq k \leq n-r), \quad c_i^2 = d_ic_n \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{(ii)} \quad c_0^2 = c_0, \quad c_0c_i = \tfrac{1}{2}c_i \quad (r+n-k+1 \leq i \leq n, \ r < k \leq n), \quad c_i^2 = d_ic_n,$$

onde $c_n = c, \quad 0 \leq r \leq n.$

Dado r, que é a dimensão da parte anisotrópica de b, o número total de álgebras não-isomorfas é $2(n-r)+1$.

O argumento usado na prova do teorema 9 é o seguinte: Temos que $N = B_1 \oplus rad(b)$. Seja r a dimensão de B_1. Escolhendo uma base ortogonal $c_1, ..., c_r$ para B_1, e uma base $c_{r+1}, ..., c_n$ para $rad(b)$ com $c_n = c$, a tábua de multiplicação de N é dada por:

$$c_i^2 = d_ic_n \quad (1 \leq i \leq r); \quad \text{demais produtos são zero.}$$

Resta especificar os produtos $c_0c_i \quad (1 \leq i \leq n)$, onde c_0 é um idempotente de A. Isto é feito impondo as condições para que $Kc_0 \oplus N$ seja uma álgebra de Bernstein.

No artigo **Bernstein Algebras Given by Symmetric Bilinear Forms**, mostramos que a classificação das álgebras de Bernstein sobre R para as quais N tem dimensão 1 divide-se em dois casos, dependendo se $N^2 \subset Z$ ou $N^2 \subset U$ ($Re \oplus U \oplus Z$ é uma decomposição de Pierce de A). No primeiro caso, obtemos a classificação completa. No segundo, obtemos uma classificação parcial, dando a tábua de multiplicação do que chamamos álgebra completa, e provando que toda tal álgebra é uma subálgebra de uma álgebra completa.

Seja V um espaço vetorial de dimensão $2s + d + 1$ $(s > 0,\ d \geq 0)$ sobre R. Seja e, u_i, z_j $(1 \leq i \leq s + d,\ 1 \leq j \leq s)$ uma base de V. Seja c um elemento do subespaço vetorial gerado pelos u_i. Introduzindo em V a multiplicação dada pela tábua

$$e^2 = e, \quad eu_i = \tfrac{1}{2}u_i \quad (1 \leq i \leq s+d), \quad u_i z_i = c \quad (1 \leq i \leq s),$$

$$z_i^2 = \begin{cases} c & (1 \leq i \leq k) \\ -c & (k < i \leq k+t) \end{cases}$$

demais produtos são 0,

onde $k, t \geq 0$, $k + t \leq s$, obtemos uma álgebra de Bernstein de tipo $(s + d + 1, s)$. Esta álgebra é denominada álgebra completa com parâmetros s, d, k, t, c. Note que $N^2 = Rc$ e que a decomposição da álgebra relativa ao idempotente e é $Re \oplus U \oplus Z$, onde $U = < u_i >$ e $Z = < z_i >$ (como espaços vetoriais). O parâmetro d é a dimensão do subespaço $\{u \in U \ : \ uZ = 0\}$.

Teorema 10. Seja $A = Re \oplus U \oplus Z$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(r + 1, s)$ tal que $N^2 = Rc$. Então, vale uma das seguintes afirmações:

(i) A tem uma base e, u_i, z_j $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s)$ e os produtos não-nulos são

$$e^2 = e, \quad eu_i = \tfrac{1}{2}u_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

(3)

$$u_i^2 = \begin{cases} c & (1 \leq i \leq k) \\ -c & (k < i \leq k+t) \end{cases} \quad \text{(para algum } k, t \geq 0, k + t \leq r).$$

(ii) A é uma subálgebra de uma álgebra completa com parâmetros s, d, k, t, c.

Usando as relações (2) e o fato de que $N^2 = Rc$, é imediato que temos duas possibilidades: $U^2 \neq 0$, $UZ = Z^2 = 0$, $c \in Z$; $U^2 = 0$, $c \in U$. No primeiro caso, basta escolher uma base conveniente para U para obter-se a tábua de multiplicação (3). No segundo caso, uma tábua de multiplicação é dada por

$$z_i u_j = p_{ij} c, \quad z_i z_j = q_{ij} c,$$

onde $u_1, ..., u_r$ é uma base de U e $z_1, ..., z_s$ é uma base de Z, isto é, por um par de matrizes (P, Q) com $P = (p_{ij})$ e $Q = (q_{ij})$. O posto da matriz P é $\leq s$. Acrescentando novas colunas à matriz P (se necessário) obtemos uma matriz $P^{\#}$ de posto s. O par $(P^{\#}, Q)$ fornece a tábua de multiplicação de uma álgebra $A^{\#} = Re \oplus U^{\#} \oplus Z$, onde $U \subset U^{\#}$ e A é uma subálgebra de $A^{\#}$. Fazendo uma mudança de base conveniente, vemos que $A^{\#}$ é uma álgebra completa.

A álgebra dada pela tábua de multiplicação (3) é uma álgebra de Jordan e é a única que aparece no caso $U^2 \neq 0$. No caso $U^2 = 0$, a condição ser uma álgebra de Jordan fornece $Z^2 = 0$ e $cN = 0$. A condição cN é equivalente à identidade $(uz)z = 0$. O único produto que resta para ser especificado é ZU e basta escolher bases convenientes para U e Z para obter-se a tábua de multiplicação (4). Temos portanto:

Teorema 11. Seja A uma álgebra de Bernstein sobre R de tipo $(r + 1, s)$ tal que $N^2 = Rc$. Então, A é uma álgebra de Jordan se e somente se uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) A é a álgebra dada na parte (i) do teorema 10.

(ii) A tem uma base e, u_i, z_j $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s)$, com $u_r = c$ e os produtos não-nulos são:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &e^2 = e, \quad eu_i = \tfrac{1}{2} u_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ &u_i z_i = u_r = c \quad (1 \leq i \leq k;\ \text{para algum } k,\ k < r \text{ e } k \leq s). \end{aligned}$$

6. Estabilidade Após Um Número Finito de Gerações

O conceito de álgebra de Bernstein pode ser generalizado. Seja A uma álgebra não-associativa comutativa sobre um corpo K. Definimos as potências plenas de um elemento $x \in A$ por $x^{[1]} = x$, $x^{[2]} = x^2, \ldots, x^{[n+1]} = x^{[n]}x^{[n]}$. A é denominada uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima ($k \geq 1$) se existe um homomorfismo não-trivial de álgebras $\omega : A \to K$ e as potências plenas de qualquer elemento $x \in A$ satisfazem a identidade

$$(5) \qquad x^{[k+2]} = w(x)^{2^k} x^{[k+1]}.$$

O caso $k = 1$ corresponde às álgebras de Bernstein. Esta definição e alguns exemplos para $k = 2$ foram dados por Abraham [31]. Se A descreve uma população e o elemento $y \in A$ representa uma distribuição de frequências dos tipos hereditários na geração inicial (neste caso $\omega(y) = 1$), então $y^{[k]}$ representa a distribuição de frequências na k-ésima geração. Agora, como A satisfaz a identidade (5), temos $y^{[k+2]} = y^{[k+1]}$ e isto indica o fato de que a população atingiu o equilíbrio na k+1-ésima geração.

No artigo **On kth-Order Bernstein Algebras and Stability at the k+1 Generation in Polyploids** iniciamos o estudo desta classe de álgebras. Obtivemos as primeiras propriedades básicas, construímos exemplos e caracterizamos populações poliplóides com alelos múltiplos sujeitos a mutação que atingem o equilíbrio após k gerações.

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima sobre um corpo K com pelo menos 2^{k+1} elementos e de característica $\neq 2$.

Seja $x_0 \in A$ com $\omega(x_0) \neq 0$. Da identidade (5) segue que $e = w(x_0)^{-2^k} {x_0}^{[k+1]}$ é um idempotente de A. Seja N o núcleo de ω. Então, A/N é isomorfo a K e $A = Ke \oplus N$ (soma direta de espaços vetoriais).

O homomorfismo ω é unicamente determinado. De fato, suponhamos que $\delta : A \to K$ é um homomorfismo não-nulo de álgebras. Se $x \in N$ então $x^{[k+2]} = 0$ por (5). Logo, $(\delta(x))^{[k+2]} = 0$ donde segue que $\delta(x) = 0$. Temos então $\delta(N) = 0$. Por outro lado, de $e^2 = e$ segue que $w(e) = 0$ ou $w(e) = 1$. O caso $w(e) = 0$ não ocorre pois $\omega \neq 0$. Analogamente, $\delta(e) = 1$. Portanto, $\delta = \omega$.

Proposição. Seja $L : N \to N$ o operador multiplicação à esquerda por e. Denote por U a imagem de L^k e por Z o núcleo de L^k. Então:

(i) $L^{k+1} = \frac{1}{2}L^k$.

(ii) $A = Ke \oplus U \oplus Z$.

(iii) $U = \{n \in N : en = \frac{1}{2}n\}$, $U^2 \subset Z$.

Para obter (i) linearizamos a identidade (5). Aqui isto significa que substituimos x por $\alpha e + n$ onde $\alpha \in K$ e $n \in N$. Para fazer isto é necessário que o corpo tenha pelo menos 2^{k+1} elementos. Agora, é só comparar os termos em $\alpha^{2^{k+1}-1}$ para obter $L^{k+1} = \frac{1}{2}L^k$. A decomposição $N = U \oplus Z$ é dada por $n = L^k(2^k n) + (n - L^k(2^k n))$ e temos (ii). Se $u \in U$ então $u = L^k(n)$ para algum $n \in N$ e logo $L(u) = L^{k+1}(n) = \frac{1}{2}L^k(n) = \frac{1}{2}u$. Por outro lado, se $n \in N$ e $en = \frac{1}{2}n$ então $n = L^k(2^k n) \in U$. Falta estabelecer $U^2 \subset Z$. Para fazê-lo, dado $u \in U$, escrevemos $u^2 = u' + z'$ com $u' \in U$ e $z' \in Z$. Em seguida provamos que $u' + z'' = 0$ para algum $z'' \in Z$. Como a soma $U + Z$ é direta, temos $u' = 0$ e portanto $u^2 = z' \in Z$.

As propriedades obtidas na proposição sugerem a seguinte classe de exemplos. Sejam P e Q espaços vetoriais sobre K e $T : Q \to Q$ um operador linear. No espaço vetorial $K \times P \times Q$ munido das operações de adição e multiplicação por elementos de K definidas componente a componente, definimos a multiplicação

$$(\alpha, x, y)(\alpha', x', y') = (\alpha\alpha', \tfrac{1}{2}(\alpha x' + \alpha' x), \tfrac{1}{2}T(\alpha y' + \alpha' y)).$$

Se $\omega : K \times P \times Q \to K$ é o homomorfismo definido por $\omega(\alpha, x, y) = \alpha$, o par $(K \times P \times Q, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima se e somente se $T^{k+1} = T^k$. Note que se este é o caso e $e = (1, 0, 0)$ então $U = \{0\} \times P \times imT^k$ e $Z = \{0\} \times \{0\} \times kerT^k$. Note que $N^2 = 0$. Podemos construir um exemplo específico tomando $P = K^p$, $Q = K^q$, $0 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e, para $1 \leq k \leq q$, $k \neq \infty$, definindo $T(y_1, y_2, ..., y_k, y_{k+1}, ..., y_q) = 2(0, y_1, ..., y_{k-1}, 0, ..., 0)$. Note que $T^k = 0$ e obviamente $T^{k+1} = T^k$. Esta álgebra é denotada por $A_k(p, q)$.

Se A satisfaz a condição $N^2 = 0$ então A/I é isomorfa a álgebra $A_s(p, s)$. Aqui p é a dimensão de U e s é o maior inteiro tal que $1 < s \leq k$ e $L^{s-1}(Z) \neq 0$. (Estamos excluindo o caso trivial em que $L(Z) = 0$.) Para obter o ideal I de A, escolhemos $z_1, ..., z_s$ tais que $L^{s-1}(z_1) \neq 0$ e $z_{i+1} = L^i(z_1)$ $(1 \leq i < s)$ e tomamos I de tal maneira que $Z = < z_1, ..., z_s > \oplus I$.

É claro que nem sempre a condição $N^2 = 0$ ocorre. Seja S uma álgebra comutativa nil plena de índice $k+1$ $(k > 1)$, isto é, uma álgebra tal que $k+1$ é o menor inteiro positivo satisfazendo $y^{[k+1]} = 0$ para todo $y \in S$. No espaço vetorial $K \times S \times S$ definimos a seguinte multiplicação

$$(\alpha, x, y)(\alpha', x', y') = (\alpha\alpha', \tfrac{1}{2}(\alpha x' + \alpha' x), yy').$$

Obtemos uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima. Tomando um elemento $y \in S$ tal que $y^2 \neq 0$ temos $(0,0,y)^2 = (0,0,y^2) \neq 0$. Logo, $N^2 \neq 0$. Um exemplo específico de uma tal álgebra S é a álgebra com base $c_1, ..., c_{2^k-1}$ e tábua de multiplicação dada por: $c_i c_j = c_j c_i = c_{i+j}$ se $i + j \leq 2^k - 1$ e os outros produtos são iguais a zero.

Consideremos uma população $2m$-plóide com $n+1$ alelos $A_0, A_1, ..., A_n$. Isto significa que temos m pares de cromossomos e em cada cromossomo um gene que pode assumir $n+1$ estados distintos. Os tipos hereditários considerados aqui são os tipos gaméticos da população. Cada um destes tipos é representado por um monômio de grau m nas variáveis $A_0, ..., A_n$. A identidade

$$(6) \qquad (A_0^{i_0} \dots A_n^{i_n})(A_0^{j_0} \dots A_n^{j_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{k_0+\dots+k_n=m} \binom{i_0+j_0}{k_0} \dots \binom{i_n+j_n}{k_n} A_0^{k_0} \dots A_n^{k_n}$$

expressa o fato de que o gameta $A_0^{k_0} \dots A_n^{k_n}$ é obtido a partir do zigoto formado pela união dos gametas $A_0^{i_0} \dots A_n^{i_n}$ e $A_0^{j_0} \dots A_n^{j_n}$ com probabilidade $\binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0+j_0}{k_0} \dots \binom{i_n+j_n}{k_n}$. Pode ocorrer mutação entre os alelos. Se a probabilidade de que o alelo A_i se transforme no alelo A_j é m_{ij} e a probabilidade de que ele permanece o mesmo é m_{ii} (note que $m_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=0}^n m_{ij} = 1$), o análogo de (6) é dado por

$$(7) \qquad A_0^{i_0} \dots A_n^{i_n} * A_0^{j_0} \dots A_n^{j_n} = [(A_0 M)^{i_0} \dots (A_n M)^{i_n}][(A_0 M)^{j_0} \dots (A_n M)^{j_n}],$$

onde $M = (m_{ij})$ e $A_i M = \sum_{j=0}^n m_{ij} A_j$. O espaço vetorial real gerado por todos os monômios de grau m munido da multiplicação * definida por (7) é uma álgebra não-associativa que denotamos por $G(n+1,2m,M)$. Esta formulação algébrica foi obtida por Gonshor [9, 12, 22]. Veja também Holgate-Campos [39].

A forma linear $\omega : G(n+1,2m,M) \to R$ definida por $\omega(A_0^{i_0} \dots A_n^{i_n}) = 1$ é um homomorfismo não-trivial de álgebras e pode-se provar que é unicamente determinado. Cada elemento $x = (x_i) \in G(n+1,2m,M)$ com $x_i \geq 0$ e $\omega(x) = 1$ representa uma distribuição de frequências dos tipos gaméticos. Estabelecer condições (sobre as taxas de mutação) para que a distribuição de frequências atinja o equilíbrio após k gerações (não importando a distribuição inicial) é equivalente a estabelecer condições para que $(G(n+1,2m,M),\omega)$ seja uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima.

Teorema 12. (i) A álgebra $G(n+1,2,M)$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima se e somente se $M^k = M^{k+1}$ e $M^j \neq M^{j+1}$, $j = 1, ..., k-1$.

(ii) A álgebra $G(n+1,2m,M)$, $m > 1$, é uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima para algum $k \leq n$ se e somente se 0 é um autovalor de M com multiplicidade n.

Como um exemplo, observamos que $G(2,2m,M)$ é uma álgebra de Bernstein se e somente se $m = 1$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $m \geq 1$ e $M = \begin{bmatrix} 1-r & r \\ 1-r & r \end{bmatrix}$ $(0 \leq r \leq 1)$. Para qualquer uma destas matrizes, o estado de equilíbrio da população ocorre na segunda geração. Este último fato já havia sido notado por Gonshor [9].

A álgebra de Bernstein $G(n+1,2,I)$ satisfaz uma identidade bastante forte: $x^2 = x$ para todo x com $\omega(x) = 1$. Logo, $x*x = (xM)(xM) = xM$ (pois $\omega(xM) = 1$) e por indução que $x^{*[r]} = xM^{r-1}$. Disto segue que $x^{*[k+2]} = x^{*[k+1]}$ se e somente se $M^{k+1} = M^k$. Assim, o fato de que a identidade $x^2 = x$ vale implica que a matriz M das taxas de mutação precise satisfazer apenas a condição $M^{k+1} = M^k$, onde k é o menor inteiro tal que isto ocorre. No caso $m > 1$, é necessário que M satisfaça uma condição mais específica pois a identidade $x^2 = x$ não é mais verdadeira.

O argumento que estabelece (ii) é o seguinte:

Suponhamos que 0 é autovalor de M com multiplicidade n. Queremos provar que $x^{*[k+2]} = x^{*[k+1]}$ (para algum $k \leq n$) para todo x com $\omega(x) = 1$. Para fazê-lo temos que encontrar uma base conveniente para $G(n+1,2m,M)$. Seja $L(n+1)$ o espaço vetorial real gerado por $A_0, A_1, ..., A_n$. Como espaço vetorial $G(n+1, 2m, M)$ é um produto tensorial de m cópias de $L(n+1)$. Logo, basta encontrar uma base conveniente para $L(n+1)$. Isto é feito interpretando M como uma matriz de transição de uma cadeia de Markov finita e usando um resultado de Brosh-Gerchak [27]. É exatamente neste ponto que a hipótese de que 0 tem multiplicidade n é necessária. Provamos que existe um $k \leq n$ tal que $yM^k = 0$ para todo $y \in K_0$, onde K_0 é o subespaço de $L(n+1)$ gerado por $A_0 - A_1$, ..., $A_0 - A_n$. Temos $K_0 M^k = 0 \subset K_0 M^{k-1} \subset ... \subset K_0 M^2 \subset K_0 M$. Podemos então escolher uma base d_{ij} de $L(n+1)$ tal que $d_{ij}M$ $((i,j) \neq (0,0))$ é combinação linear dos elementos d_{uv} com $u \geq i$. O elemento x é combinação linear dos monômios de grau m nas variáveis d_{ij}. Devido às propriedades especiais da base d_{ij} temos $x^{*[k+1]} = (d_{00}^m)^{*[k+1]}$. Portanto, $x^{*[k+2]} = (x^{*2})^{*[k+1]} = (d_{00}^m)^{*[k+1]} = x^{*[k+1]}$, para todo x com $w(x) = 1$.

Por outro lado, suponhamos que $G(n+1, 2m, M)$ é uma álgebra de Bernstein de ordem k-ésima ($k \leq n$). Definimos um homomorfismo H desta álgebra em $L(n+1)$ por $H(A_0^{i_0} \dots A_n^{i_n}) = \frac{1}{m}(i_0 A_0 + ... + i_n A_n)$. Provamos que $H(x^{*[j]}) = H(x)M^{j-1}$ para todo x com $\omega(x) = 1$. Como $x^{*[k+2]} = x^{*[k+1]}$ segue que $H(x)M^{k+1} = H(x)M^k$. Logo, $M^{k+1} = M^k$ e os autovalores de M são 0 e 1. Para estabelecer que a multiplicidade de 0 é n, interpretamos novamente o problema como uma cadeia de Markov finita. Se a multiplicidade de 0 fosse menor do que n seria possível construir um homomorfismo de $G(n+1, 2m, M)$ em uma álgebra que não satisfaz a condição de Bernstein.

REFERÊNCIAS

1. G. H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, Science 28:49-50 (1908).

2. W. Weinberg, Uber den Nachweis der Vererbung bein Menschen, Jahresh. Verein. Vaterl. Naturk. Wurttemberg 64:368-383 (1908).

3. S. N. Bernstein, Principe de stationarité et généralization de la loi de Mendel, C. R. Acad. Sci. Paris 177:581-584 (1923).

4. A. A. Albert, A theory of power-associative commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 69:503-527 (1950).

5. L. A. Kokoris, Power-associative commutative algebras of degree two, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38:534-537 (1952).

6. A. A. Albert, On commutative power-associative algebras of degree two, Trans. Amer. Math. Soc. 74:323-343 (1953).

7. L. A. Kokoris, New results on power-associative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 77:363-373 (1954).

8. L. A. Kokoris, Simple power-associative algebras of degree two, Ann. Math. 64:544-550 (1956).

9. H. Gonshor, Special train algebras arising in genetics, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 12:41-53 (1960).

10. R. H. Oehmke, On commutative algebras of degree two, Trans. Amer. Math. Soc. 105:295-313 (1962).

11. H. Boerner, Representations of groups with special consideration for the needs of modern physics, North-Holland (1963).

12. H. Gonshor, Special train algebras arising in genetics II, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 14:333-338 (1965).

13. M. Burrow, Representation theory of finite groups, Academic Press (1965).

14. J. M. Osborn, Identities of nonassociative algebras, Canad. J. Math. 17:78-92 (1965).

15. J. M. Osborn, Commutative algebras satisfying an identity of degree four, Proc. Amer. Math. Soc. 16:1114-1120 (1965).

16. H. Petersson, Zur theorie der Lie-tripel-algebren, Math. Z. 97:1-15 (1967).

17. H. Pertersson, Uber den Wedderburnschen struktursatz fur Lie-tripel-algebren, Math. Z. 98:104-118 (1967).

18. J. M. Osborn, Commutative nonassociative algebras and identities of degree four, Canad. J. Math. 20:769-794 (1968).

19. J. M. Osborn, Varieties of algebras, Adv. Math. 8:163-369 (1970).

20. R. H. Oehmke, Commutative power-associative algebras of degree one, J. Algebra 14:326-332 (1970).

21. Yu. I. Lyubich, Basic concepts and theorems of evolution genetics of free populations, Russian Math. Surveys 26:51-123 (1971).

22. H. Gonshor, Contributions to genetic algebras, Proc. Edinb. Math. Soc. 17:289-298 (1971).

23. Yu. I. Lyubich, On the mathematical theory of hereditary, Sov. Math. Dokl. 14:579-581 (1973).

24. Yu. I. Lyubich, On analogs of the Hardy-Weinberg principle, Genetika 9:139-144 (1973).

25. P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, J. London Math. Soc. (2) 9:612-624 (1975).

26. I. R. Hentzel, Processing identities by groups representations, Computers in nonassociative rings and algebras, R. E. Beck, B. Kolman (editors), Academic Press (1977).

27. I. Brosh, Y. Gerchak, Markov chains with finite convergence time, Stochastic Proc. Appl. 7:247-253 (1978).

28. I. R. Hentzel, Alternators of a right alternative algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 242:141-156 (1978).

29. R. K. Smith, Integral representation of the symmetric group S_n, Dissertação de Mestrado, Iowa State University (1978).

30. A. Worz-Busekros, Algebra in genetics, Lecture Notes in Biomathematics 36, Springer-Verlag (1980).

31. V. M. Abraham, Linearizing quadratic transformations in genetic algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 40:346-363 (1980).

32. J. M. Clifton, A simplification of the computation of the natural representation of the symmetric group S_n, Proc. Amer. Math. Soc. 83:248-250 (1981).

33. K. A. Zevlakov et al, Rings that are nearly associative, Academic Press (1982).

34. Yu. I. Lyubich, Mathematical structures in populations genetics (in Russian), Naukova Dunka (1983).

35. Yu. I. Lyubich, A classification of nonexceptional Bernstein algebras of type (3,n-3) (in Russian), Vestnik Harkov. 254, Meh. Mat. 84:36-42 (1984).

36. Yu. I. Lyubich, A classification of some types of Bernstein algebras, Selecta Math. Sov. 6:1-14 (1987).

37. A. N. Krishkov, On the genetic property of Bernstein algebras, Sov. Math. Dokl. 35:489-492 (1987).

38. A. Worz-Busekros, Bernstein algebras, Arch. Math. 48:388-398 (1987).

39. P. Holgate, T. M. M. Campos, Algebraic isotopy in genetics, I. M. A. J. Math. Appl. Med. Biol. 4:215-222 (1987).

40. S. Walcher, Bernstein algebras which are Jordan algebras, Arch. Math. 50:218-222 (1988).

41. I. R. Hentzel, J. M. Piacentini Cattaneo, L. Carini, Degree four identities not implied by commutativity, Comm. Alg. 16:339-356 (1988).

42. M. T. Alcalde, R. Baeza, C. Burgueño, Autour des algèbres de Bernstein, Arch. Math. 53:134-140 (1989).

43. R. Costa, A note on Bernstein algebras, Linear Alg. Appl. 112:195-205 (1989).

44. R. W. K. Odoni, A. E. Stratton, Structure of Bernstein algebras, não publicado.

Counterexamples in Nonassociative Algebra

Irvin Roy Hentzel*
Department of Mathematics
Iowa State University
Ames, Iowa 50011

and

Luiz Antonio Peresi†
Department of Mathematics
University of São Paulo
São Paulo, Brazil 01000

Received November 9, 1987

Abstract

We present a method of constructing counterexamples in nonassociative algebra. The heart of the computation is constructing a matrix of identities and reducing this matrix (usually very sparse) to row canonical form. The example is constructed from the entries in one column of this row canonical form. While this procedure is not polynomial in the degree of the identity, several shortcuts are listed which shorten calculations. Several examples are given.

**This paper was written while the author held a research grant from the Sciences and Humanities Research Institute from Iowa State University.*

†This research was done while the author was at Iowa State University with a fellowship from CNPq, Brazil.

AMS 1980 Subject Classification: 17-04, 17D15

Introduction

An identity is a nonassociative polynomial in one or more indeterminates. A nonassociative algebra A is said to satisfy an identity, if whenever the indeterminates are replaced by elements of A and the expression is evaluated, the result is zero. If we are given a set of identities, X_1, X_2, X_3, ..., X_n, X_{n+1}, the problem of constructing a counterexample requires finding an example of a non-associative algebra which satisfies X_1, X_2, X_3, ..., X_n, but does not satisfy X_{n+1}. The construction of counterexamples is difficult. Even the problem of checking if a given algebra satisfies X_1, X_2, ..., X_n, is time consuming, though it is at least a problem which is polynomial in the dimension of the algebra. Constructing a counterexample seems much harder than checking it. The bulk of the work of constructing an example depends on reducing a large sparse matrix to row canonical form. The size of the matrix depends on the degree of the identities studied. It depends on the number of identities studied, and it also depends on the number of distinct unknowns involved. The method we give increases in size like n factorial, where n is the degree of the identity. Fortunately, the properties of the identity being studied can often be used to minimize the computations involved.

We use the method given in [1] and [2] to represent identities as matrices. These papers show how to decide if a particular identity is a consequence of given identities, but they do not give a method of computing a counterexample. This means that the reader is forced to trust what amounts to a tremendous amount of computation with all the possibilities of errors. To duplicate the author's program from scratch is usually too much work, and if the reader simply runs the original program he will perpetuate any existing errors. A counterexample, however, will often be simple enough that it can be checked by hand or with a small computer using a simple program the reader creates himself. Furthermore, for a particular counterexample it is clear which characteristics must be avoided. In reducing the matrix of identities to row canonical form, any division will potentially make the results invalid for characteristics where that divisor is zero. If one uses an efficient program from a library to get the row canonical form, one has no way of knowing which characteristics have to be excluded. However, after constructing a counterexample from the row canonical form, the same example will usually work for many different characteristics. The example itself is a great deal more trustworthy when deciding if a given identity is valid for certain characteristics than the row canonical form is. The row canonical form is probably valid for most, if not all, characteristics, but one usually has to assume characteristic zero to be certain.

Method

We shall briefly review the method given in [1] and [2]. If we are given X_1, X_2, ..., X_{n+1}, and we wish to construct an example of a ring that satisfies X_1, X_2, ..., X_n, but not X_{n+1}, we first linearize all the identities so that they are all homogeneous and linear in each indeterminate. The number of identities may change and in particular X_{n+1} may yield X'_{n+1}, X''_{n+1}, X'''_{n+1}, etc. In that case, if we find a counterexample where any of the X'_{n+1}, X''_{n+1}, X'''_{n+1}, etc. is not zero, we are through. The linearization can be done provided there are at least as many elements in the field as the degree of X_{n+1}. We now assume our identities $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$, are homogeneous and linear in each variable. We discard any of degree greater than $\deg(X_{n+1})$. We then create new identities by making substitutions in $X_1, X_2, \ldots, X_n$, in all possible ways so that they become identities which are still homogeneous and linear in each variable and in addition will have their degrees all equal to the degree of X_{n+1}. We renumber this list of identities and now assume our identities are all homogeneous of degree D in D distinct indeterminates.

There are $c = \frac{1}{D}\binom{2(D-1)}{D-1}$ ways to associate D objects, and we express our identities $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ as a block matrix (see Table I) using a representation of the symmetric group on D objects. The number of column blocks is the number of ways to associate products of D objects. The column blocks are labeled by the association types, T_i where $i = 1$ to c. The row blocks are labeled by X_i, $i = 1$ to $n + 1$ where the X_i are the homogeneous identities of degree D which are linear in each indeterminate. These identities are the ones just constructed from the given identities. Each block is a square $s \times s$ matrix where s is the size of the particular representation used.

Table I

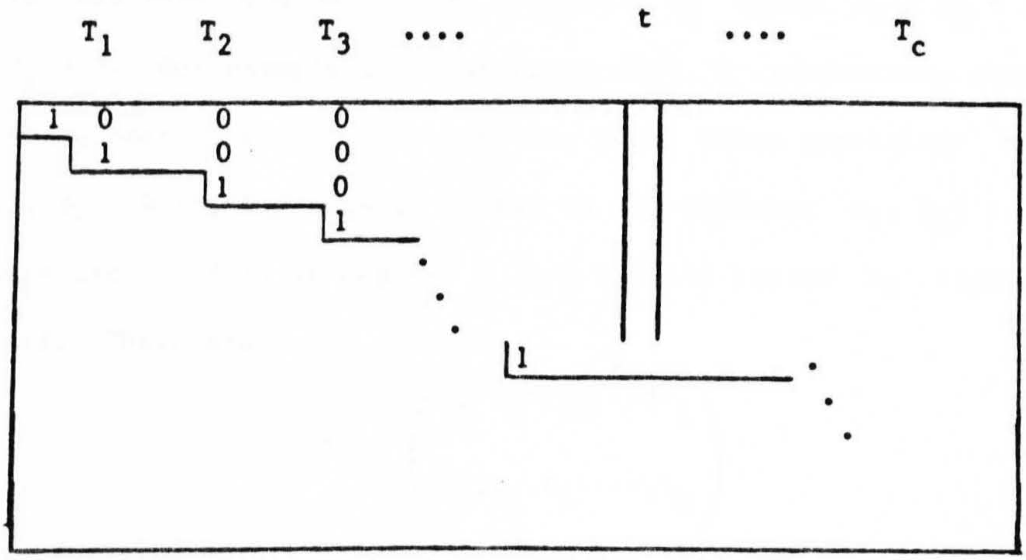
	T_1	T_2	....	T_c
X_1				
X_2				
X_3				
$\vdots$				
X_n				
X_{n+1}				

We compute the rank of this system with and without the rows from equation X_{n+1}. If the rank is the same, then as far as this representation is concerned, X_{n+1} is a consequence of $X_1, X_2, \ldots, X_n$. If in every representation the rank is the same, then X_{n+1} is a consequence of $X_1, X_2, \ldots, X_n$, provided of course that the characteristic of the field is greater than D, and that the row reduction was valid for that characteristic.

If the ranks are different, then X_{n+1} is not a consequence of $X_1, X_2, \ldots, X_n$. The purpose of this paper is to turn this row canonical form into a counterexample.

We indicate the row canonical form of the identities $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in Table II.

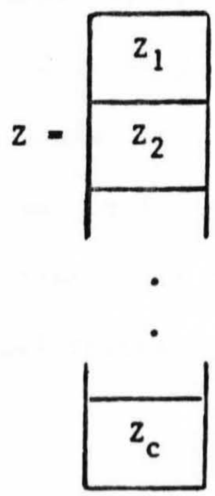
Table II



The number t refers to the column where a new leading one appears when the X_{n+1} identity is added. We use the entries of column t to produce a counterexample.

As in solving a system of simultaneous linear equations, we can produce a column Z such that $[X_i]Z = 0$ for $i = 1$ to n and $[X_{n+1}]Z \neq 0$. By the notation $[X_i]$ we mean the block of rows from the matrix of identities which was produced by identity X_i.

We now partition Z into lengths that match the block structure of the matrix of identities.



Now consider the tableau for the representation. Let us suppose that its rows have lengths $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ where $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_k = D$. Our example is constructed with k generators, where k is the number of rows in the tableau. Call these generators $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Our interest will center on the alphabet $a_1, a_2, \ldots, a_k$ where each word is of degree D and has the factor a_i repeated r_i times. There are

$$d = \binom{r_1+r_2+r_3+\ldots+r_k}{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k}$$

distinct words. Enumerate them as $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_d$. The π_i represent the arrangements of the letters of our words only. To make them represent associated products, we will specify the association type $T_j (1 \leq j \leq c)$ and write π_{ij}. By $[\pi_i]$ we denote the representation of the linearized form of π_i. Each of the $[\pi_i]$ has rank one and they all have the same column space. Let Ω be a vector which spans this column space.

For each $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq c$, let $[\pi_i]Z_j = \varepsilon_{ij}\Omega$. The nonzero products of degree D in our algebra will be those π_{ij} (arrangement π_i associated in manner T_j) where $\varepsilon_{ij} \neq 0$. The collection of all nonzero products consists of these products of degree D as well as all of their factors. Certainly, for a degree D product to be nonzero, each of its factors must be nonzero. This set of products must be nonzero, but they may be linearly dependent. To create the example, we must discover any dependence relations. This is done as follows.

Write out a multiplication table of the following form as indicated in Table III.

Table III

	deg 1	deg 2	deg 3	. . . .	deg D-1
deg 1					##
deg 2				##	
deg 3				##	
.					
.					
.				##	
.			##		
		##			
deg D-1	##				

The nonzero products are grouped together by their degree. The block minor diagonal is indicated by ## and on it are located, in the appropriate positions, all the nonzero products of degree D. If $\epsilon_{ij} \neq 0$ (remember that $[\pi_i]Z_j = \epsilon_{ij}\Omega$), represent the factors of π_{ij} by $\pi_{ij} = uv$. In row u and column v of the table we will place $\epsilon_{ij}\Omega$. All other entries of degree greater than D are zero (those below the block minor diagonal). Fill in the entries above the block minor diagonal by listing only those products which are nonzero.

The rows of the multiplication table, as well as the columns, are indexed by the nonzero products. We will look for a linear dependence relation which holds for both the rows as well as the columns. If such a dependence relation can be found, it is used to eliminate one of the nonzero products from the table. That particular product is replaced by the linear combination of the other products wherever it occurs in the table, and the row and column indexed by it are deleted. This process is continued until all dependencies are removed. The resulting table is an example of a nonassociative algebra satisfying X_1, X_2, X_3, ..., X_n, while X_{n+1} is not satisfied.

Example

We generate an example of a right alternative algebra where $(a,a,[a,b]) \neq 0$.

Method: The right alternative law is (x,y,y). We linearize this to $(x,y,z) + (x,z,y)$. Then we make all substitutions to get all degree four identities.

$$X_1 \qquad x(y,z,w) + x(y,w,z)$$

$$X_2 \qquad (xy,z,w) + (xy,w,z)$$

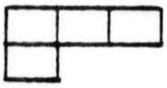
$$X_3 \qquad (x,yz,w) + (x,w,yz)$$

$$X_4 \qquad (x,y,z)w + (x,z,y)w$$

The linearized form of $(a,a,[a,b])$ is:

$$X_5 \qquad (x,y,[z,w]) + (y,x,[z,w]) + (z,x,[y,w]) + (x,z,[y,w]) + (y,z,[x,w]) + (z,y,[x,w])$$

We consider the representation indexed by this Young's tableau.



The entire representation is listed in [2, Table III], but for the sake of completeness, we give the generators here:

$$(12) \;\to\; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1234) \;\to\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrix of the five identities is given in Table IV.

Table IV

The Degree Four identities of the Right Alternative Law

As Well As the Additional One

	T_1 ((RR)R)R	T_2 (R(RR))R	T_3 (RR)(RR)	T_4 R((RR)R)	T_5 R(R(RR))
X_1				$\begin{matrix} 2 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & . & . \\ . & -1 & -1 \\ . & -1 & -1 \end{matrix}$
X_2	$\begin{matrix} 2 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} -2 & . & . \\ . & -1 & -1 \\ . & -1 & -1 \end{matrix}$		
X_3		$\begin{matrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ 1 & . & . \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & . & . \\ . & -1 & . \\ . & . & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} . & -1 & . \\ . & . & -1 \\ -1 & . & . \end{matrix}$
X_4	$\begin{matrix} 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & . & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & . \\ -1 & -1 & . \\ . & . & -2 \end{matrix}$			
X_5			$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & -8 & 8 \end{matrix}$		$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 8 & -8 \end{matrix}$

The row canonical form of the right alternative identities, e.g. X_1, X_2, X_3, X_4 is given in Table V.

Table V

Row Canonical Form of Degree Four

Identities of the Right Alternative Law

T_1			T_2			T_3			T_4			T_5		
((RR)R)R			(R(RR))R			(RR)(RR)			R((RR)R)			R(R(RR))		
1							1	1				-1	-1	-1
	1										1		-1	-1
		1					-1	-1			-1		1	1
			1				1					-1	-1	
				1				1			1		-1	-2
					1		-1	-1			-1		1	1
						1	1	1				-1	-1	-1
									1			-1		
										1	1		-1	-1

The row canonical form of the right alternative identities and the extra identity, e.g. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, is given in Table VI. The new leading one is indicated with a box around it.

Table VI

The Row Canonical Form Of All Degree Four

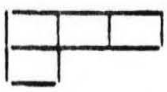
Identities As Well As the Additional One

T_1			T_2			T_3			T_4			T_5		
((RR)R)R			(R(RR))R			(RR)(RR)			R((RR)R)			R(R(RR))		
1								2				-1		-2
	1										1		-1	-1
		1						-2			-1			2
			1					1				-1		-1
				1				1			1		-1	-2
					1			-2			-1			2
						1		2				-1		-2
							$\boxed{1}$	-1					-1	1
									1			-1		
										1	1		-1	-1

The new leading one appeared in column 8. Go back to the row canonical form of the right alternative law alone given in Table V and create the five annihilator vectors. They are:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Z_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Z_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Z_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The tableau for this representation is:



We use 3 a's and 1 b for our example. There are four arrangements of 3 a's and 1 b. They are listed along with their representations.

π_1 = aaab π_2 = aaba π_3 = abaa π_4 = baaa

$$[\pi_1] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\pi_2] = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\pi_3] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\pi_4] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Let $\Omega = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Then the product table $[\pi_i]Z_j$ is given in Table VII.

Table VII

The Product Table $[\pi_i]Z_j$

	T_1 ((RR)R)R Z_1	T_2 (R(RR))R Z_2	T_3 (RR)(RR) Z_3	T_4 R((RR)R) Z_4	T_5 R(R(RR)) Z_5
π_1 aaab	1	1	0	0	0
π_2 aaba	0	0	1	0	0
π_3 abaa	-1	-1	-1	0	0
π_4 baaa	0	0	0	0	0

The nonzero products of degree four are:

$$
\begin{array}{lll}
((aa)a)b & (a(aa))b & \\
 & & (aa)(ba) \\
((ab)a)a & (a(ba))a & (ab)(aa)
\end{array}
$$

The nonzero factors are: $a, b, aa, ab, ba, (aa)a, (ab)a, a(aa), a(ba)$.

The multiplication table is first written as Table VIII.

Table VIII

Construction Table for Counterexample

	a	b	aa	ab	ba	(aa)a	(ab)a	a(aa)	a(ba)
a	aa	ab	a(aa)		a(ba)				
b	ba								
aa	(aa)a				Ω				
ab	(ab)a		$-\Omega$						
ba									
(aa)a		Ω							
(ab)a	$-\Omega$								
a(aa)		Ω							
a(ba)	$-\Omega$								

The dependent rows are $[(aa)a]=[a(aa)]=\Omega_1$ and $[(ab)a]=[a(ba)]=\Omega_2$. Rewrite Table VIII with these substitutions. We have done this in Table IX.

Table IX

The Dependencies are Removed

	a	b	aa	ab	ba	Ω_1	Ω_2
a	aa	ab	Ω_1		Ω_2		
b	ba						
aa	Ω_1				Ω		
ab	Ω_2		$-\Omega$				
ba							
Ω_1		Ω					
Ω_2	$-\Omega$						

Now there are no more dependent rows and columns with the same dependency. This is our example. It is dimension 8 with 11 nonzero products. Furthermore $(a,a,[a,b]) = -\Omega$. We can rename the basis by

$a = e_1$, $b = e_2$, $aa = e_3$, $ab = e_4$, $ba = e_5$, $\Omega_1 = e_6$, $\Omega_2 = e_7$, $\Omega = e_8$.
Then Table IX assumes the traditional form for a multiplication table and is given in Table X.

Table X

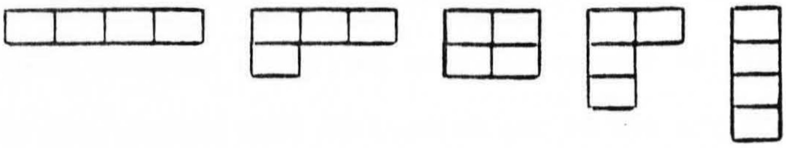
Example of a Right Alternative Algebra
in Which (a,a,[a,b]) is Not an Identity

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_3	e_4	e_6		e_7			
e_2	e_5							
e_3	e_6				e_8			
e_4	e_7		$-e_8$					
e_5								
e_6		e_8						
e_7	$-e_8$							
e_8								

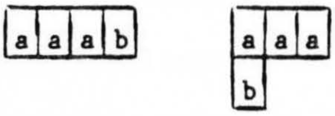
In our example given in Table X, $(e_1,e_1,[e_1,e_2]) = -e_8$. The right alternative law can be checked by hand or with a small computer. Notice that this example is valid for all characteristics.

SHORTCUTS

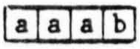
Rather than to try every representation, it is often possible to know beforehand which representations are worth looking at. If the identity you wish to prove has repeated entries, this automatically excludes some representations. The rule is that for a representation to be worth checking, one has to be able to fit the letters into the tableau so that each column contains distinct letters. Thus, for our example of degree four using letters a,a, a,b the five tableau are:



The only ones which need to be checked are:



In each representation the elements in a row of the tableau are considered equal. If we had used



it would have appeared in this representation that we were examining something with four equal elements. Since (a,a,[a,a]) does equal zero, we would not find a counterexample in this representation. The only representation which remains is the one we used.

When doing the row reduction, one can do both row reductions simultaneously, except the new leading ones are chosen from the original rows from $X_1, X_2, \ldots, X_n$ only. When the leading one finally has to be picked from X_{n+1}, the process is terminated.

The table can be constructed from the highest degree of the products downward. Then the dependencies can be noted before the elements are written down. This saves making the substitutions in the table later on.

THEORY BEHIND THE METHOD

The row canonical form contains all the degree D identities implied by $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Since X_{n+1} is not in the row space, then X_{n+1}

is not implied by $X_1, X_2, \ldots, X_n$. We could say that the free ring will provide the counterexample. This is true, but we really want a small example. Thus, we must set as many different products to zero as we can, but we must be careful not to set any product to zero which will force X_{n+1} to be zero as well.

If X_{n+1} produces a new leading one in column t, then we set all the independent columns to zero except column t. Now all the dependent columns take their values from the independent columns, which are either zero, or column t. The only products which are not zero are those which have a nonzero entry in column t. These are computed and listed. None of these products can be zero, since that would imply that the entry in column t is zero.

Finally, all factors of a nonzero product must be nonzero as well. These compromise all the nonzero entries. If a linear combination of these nonzero products always is sent to zero by every multiplication, that linear combination can be set to zero without forcing the entry in column t to be zero. When we are through, since the row canonical form contains all information about the identities $X_1, X_2, \ldots, X_n$, the algebra resulting must satisfy these identities. Since we never added an identity which would force a leading one in column t to appear, X_{n+1} is not an identity.

SOME EXAMPLES

We tried out our procedure on right alternative algebras to produce some examples. The multiplication tables are given in Tables XI through XIV.

Table XI is an example of a right alternative algebra where the square of an alternator is not zero. The alternator $(e_1,e_1,e_2)^2 = e_{11}$. Miheev [3] proved that the fourth power of an alternator was zero, and in the same paper he presented an example where the square was not zero. Our example is simpler than Miheev's. His dimension was 13 with 26 nonzero products, while ours if of dimension 11 with 17 nonzero products.

Table XII shows that in a right alternative algebra of characteristic $\neq 2$, $(a,[a,b], (a,a,b)) \neq 0$. In particular $(e_1,[e_1,e_2],(e_1,e_1,e_2)) = 2e_9$. We know our example is a right alternative algebra in all characteristics. It provides a counter example to $(a,[a,b],(a,a,b))$ in all characteristics except characteristic 2. All we know about characteristic 2 is that this particular example does not work. Conceivably, some other example could work in characeristic 2, but we do not know. The dimension is 9 and the number of nonzero products is 12.

Table XIII shows that $(a,a,(a,a,[a,b]))$ and $(a,a,[a,(a,a,b)])$ need not hold in a right alternative algebra. In particular $(e_1,e_1,(e_1,e_1,[e_1,e_2])) = -2e_{10}$. This example requires characteristic $\neq 2$. Also, $(e_1,e_1,[e_1,(e_1,e_1,e_2)]) = e_{10}$. The dimension is 10 and the number of nonzero products is 16.

Table XIV shows that $(a,a,(a,a,b))$ need not hold in a right alternative algebra. The result is obvious from Table XIII, except for characteristic 2. $(e_1,e_1,(e_1,e_1,e_2)) = -e_7$. The dimension is 7 and the number of nonzero products is 9.

Table XI

A Right Alternative Algebra Where

The Square of An Alternator is Not Zero

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
e_1	e_3	e_4			e_6+e_7	e_8					
e_2	e_5		$-e_6-e_7$								
e_3		e_6				e_9					
e_4	e_7					e_{10}					
e_5	$-e_6-e_7$										
e_6						e_{11}					
e_7						$-e_{11}$					
e_8	$-e_9$	$-e_{10}$									
e_9		$-e_{11}$									
e_{10}	e_{11}										
e_{11}											

Table XII

A Right Alternative Algebra Where
$(a,[a,b],(a,a,b))$ is Not an Identity

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
e_1	e_3	e_4		e_6	$-e_6-e_7$		e_8		
e_2	e_5		e_7						
e_3		$-e_7$							
e_4									
e_5	e_7								
e_6							$-e_9$		
e_7									
e_8				e_9	$-e_9$				
e_9									

Table XIII

A Right Alternative Algebra Where $(a,a,(a,a,[a,b]))$ and $(a,a,[a,(a,a,b)])$ are Not Identities

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
e_1	e_3	e_4	e_5	e_6		e_7		e_9		
e_2	$-e_4$									
e_3	e_5			e_7-e_8				e_{10}		
e_4										
e_5				$-e_9$		e_{10}				
e_6	e_8									
e_7	e_9		$-e_{10}$							
e_8										
e_9	$-e_{10}$									
e_{10}										

Table XIV

A Right Alternative Algebra Where $(a,a,(a,a,b))$ is Not an Identity

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_3	e_4			$-e_6$	$-e_7$	
e_2							
e_3		e_5		e_6			
e_4	$-e_5$		$-e_6$				
e_5	e_6						
e_6							
e_7							

REFERENCES

[1] I. R. Hentzel, Alternators of a right alternative algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 242(1978), 141-156.

[2] I. R. Hentzel, Processing identities by group representation, Special Session on Computers in Nonassociative Rings and Algebras, Amer. Math. Soc. 82nd Annual Meeting, San Antonio, Texas, 1976, Academic Press Inc. 1977.

[3] I. M. Miheev, One identity in right alternative rings, Algebra and Logic, vol. 8, no. 3(1969), 204-211.

PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 104, Number 2, October 1988

ALMOST JORDAN RINGS

IRVIN ROY HENTZEL AND LUIZ ANTONIO PERESI

(Communicated by Donald S. Passman)

ABSTRACT. It is well known that any Jordan ring satisfies the identity: $2((ax)x)x + a((xx)x) = 3(a(xx))x$. We show that this identity along with commutativity implies the Jordan identity in any semiprime ring. The proof requires characteristic $\neq 2, 3$.

Introduction. A Jordan algebra is a commutative (nonassociative) algebra which satisfies the additional identity $((aa)x)a = (aa)(xa)$. This identity is called the "Jordan identity". It is not an irreducible identity with respect to commutativity (in the sense of Osborn [**3**, p. 184]), but is equivalent to the assumption of the following two identities, both of which are irreducible [**2**, p. 1114].

$$((aa)a)a = (aa)(aa) \quad \text{fourth power associativity,} \tag{1}$$

$$2((ax)x)x + a((xx)x) = 3(a(xx))x. \tag{2}$$

Under certain conditions, one of these identities alone is capable of implying the other. For example, Oehmke in [**1**] studied equation (1). Osborn in [**2**] and Petersson [**4**] studied equation (2). These papers relied on idempotent decompositions and arguments involving trace. This required assumptions like finite dimensionality and characteristic zero. Under rather restrictive conditions, it is known that simple commutative rings satisfying equation (1) are associative [**1**, p. 326], and those satisfying equation (2) are Jordan [**2**, Theorem 1].

In this paper we show that semiprime commutative rings satisfying equation (2) are Jordan. It is surprisingly uncomplicated. We will use the associator notation: $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. We show that there is an ideal which squares to zero which contains all associators of the form (xx, a, x). In a semiprime ring, this ideal must be zero. This implies that the ring satisfies the Jordan identity. Throughout this paper R will be a commutative ring of characteristic $\neq 2, 3$. We will often use a dot to indicate multiplication as well as juxtaposition. When this happens, it is intended that the product indicated by a dot will be done last. Thus by $(ab)(cd.e).f$ we mean $((ab)((cd)e))f$. We also use the Smiley notation for right multiplication: a prime on an element represents right multiplication by that element. Given a nonassociative ring $(R, +, *)$, the endomorphisms of $(R, +)$ form an associative algebra. For any a in R, right multiplication by a is an endomorphism and is indicated by a'. For

Received by the editors September 4, 1987.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 17A30; Secondary 17C99.
Key words and phrases. Semiprime, Jordan algebra, linearization.
This paper was written while the first named author held a grant from the Sciences and Humanities Research Institute.
This paper was written while the second named author was visiting Iowa State University on a grant from the CNPq of Brazil.

elements a, b, c, d, e, f in R, we could consider the element $a'(bc)'(de \cdot f)'$ which is an endomorphism. When it acts on an element x in R, it sends x to $((xa)(bc))(de \cdot f)$.
Linearization:

In an algebra over a field, Osborn [3, p. 177, Proposition 3.1] showed that to linearize an identity of degree n, there must be at least $n+1$ distinct elements in the field. By the distributive laws, any ring is an algebra over the integers. The same type of argument will work when the scalars come from the integers as when they come from a field, except that we cannot necessarily get rid of the coefficients.

We do not wish to assume that our ring is an algebra over a field. If the scalars were a field, then we could cancel off any nonzero coefficient. Instead, we will only assume that we can cancel off coefficients of 2 and 3. We assume characteristic $\neq 2, 3$. By this we mean that in our rings:

$$nx = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{for } n = 2 \text{ or } n = 3.$$

Suppose that $g(x1, x2, \ldots, xn)$ is a function of n arguments and is linear in all of them. Furthermore, assume that S is a set which is closed under addition and that $g(x, x, \ldots, x)$ is in S for any x in R. We wish to argue that when we linearize the function g, each of its homogeneous components will be in S as well. If we replace x by $a + \delta b$ in g and use linearity to collect the homogeneous components, we get an identity of this form.

$$K_0 + \delta K_1 + \delta^2 K_2 + \delta^3 K_3 + \cdots + \delta^n K_n = s_\delta \in S.$$

In this identity δ can be any integer. K_i represents the homogeneous component with i arguments "b" and $n-i$ arguments "a". Written in matrix notation for different values of δ, we get a coefficient matrix which is a Vandermonde matrix.

$$\begin{bmatrix} 1 & \delta_0 & \delta_0^2 & \delta_0^3 & \cdots \delta_0^n \\ 1 & \delta_1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 & \cdots \delta_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \delta_n & \delta_n^2 & \delta_n^3 & \cdots \delta_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}.$$

Call this coefficient matrix M. Multiplying the equation by the adjoint of M will produce the result that $\det(M) * K_i \in S$ for $0 \leq i \leq n$.

Letting $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$, $\delta_3 = 2, \ldots$, $\delta_{2k} = -k$, $\delta_{2k+1} = k+1$, then $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} i!$ where n is the degree of the function g. We shall only need $\det(M)$ for $n = 3, 4, 5$. The values of $\det(M)$ for these sizes are $12 = 2^2 3$, $288 = 2^5 3^2$, $34560 = 2^8 3^3 5$. We state these remarks in the following lemma.

LEMMA 1. *Let S be a subset of R which is closed under addition, and let g be a function of n arguments which is linear in each argument. Furthermore, suppose that $g(x, x, \ldots, x) \in S$ for all x in R. If g is linearized, and its homogeneous parts are $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$, then $t * K_i \in S$ for $0 \leq i \leq n$ and $t = \prod_{i=1}^{n} i!$.*

Proof of the main theorem. We prove a series of six lemmas and then the main theorem.

LEMMA 2 (OSBORN).

$$f(x, y, z) = x'y'z' + z'y'x' - (xy)'z' - (yz)'x' - (zx)'y' + (xz \cdot y)' = 0.$$

PROOF. We linearize equation (2) to get the following.

$$\begin{aligned}&2(ay\cdot x)x+a(yx\cdot x)-3(a\cdot yx)x\\&+2(ax\cdot y)x+a(xy\cdot x)-3(a\cdot xy)x=0.\\&+2(ax\cdot x)y+a(xx\cdot y)-3(a\cdot xx)y\end{aligned}$$

We interchange a and y and multiply by minus one to obtain

$$\begin{aligned}&-2(ya\cdot x)x-y(ax\cdot x)+3(y\cdot ax)x\\&-2(yx\cdot a)x-y(xa\cdot x)+3(y\cdot xa)x=0.\\&-2(yx\cdot x)a-y(xx\cdot a)+3(y\cdot xx)a\end{aligned}$$

Adding the above equations gives $4(a,xx,y)=8(a,x,y)x$. Characteristic $\neq 2$ gives $(a,xx,y)=2(a,x,y)x$. This linearizes to $2(a,xz,y)=2(a,x,y)z+2(a,z,y)x$. We thus get the derivation law

$$(a,xz,y)=(a,x,y)z+(a,z,y)x. \tag{3}$$

Expanding equation (3) and writing the elements as acting on 'a' gives the desired result stated in the lemma.

We will let I represent the additive span of all elements of the form (xx,x,x). Eventually, we will show that both I and IR are in the middle nucleus, but for now, all we know about I is that it is closed under addition. We will let J be the additive span of all elements of the form (xx,y,x). Clearly $I\subset J$ and R will be Jordan if and only if $J=0$.

We now prove the following equation.

$$3(xx,a,x)-2(ax,x,x)-(xx,x,a)=0. \tag{4}$$

PROOF. Expand the associators and the left-hand side becomes $-2(ax\cdot x)x+3(a\cdot xx)x-a(x\cdot xx)$ which is zero by equation (2).

LEMMA 3. $2^7 3^2 J\subset I$.

PROOF. For any elements a and x in R, we have the following.

$$\begin{aligned}4(xx,a,x)&=(xx,a,x)+3(xx,a,x)\quad\text{using equation (4)}\\&=(xx,a,x)+2(ax,x,x)+(xx,x,a)\\&=(ax,x,x)+(xa,x,x)+(xx,a,x)+(xx,x,a).\end{aligned}$$

This final right-hand side is a linearized form of (xx,x,x). By Lemma 1 if we multiply this linearized form by the coefficient $288=2^5 3^2$, then it will land in I. This finishes the proof of Lemma 3.

LEMMA 4. $2^{10}3^4 IR\subset I$.

PROOF. For any elements a and x in R we have these four identities.

$$\begin{aligned}&\text{From equation (4)}\quad 6(xx,a,x)x-4(ax,x,x)x-2(xx,x,a)x=0,\\&\text{From equation (3)}\quad 6(xx,ax,x)-6(xx,x,x)a-6(xx,a,x)x=0,\\&\text{From equation (3)}\quad -2(ax,xx,x)+4(ax,x,x)x=0,\\&\text{From equation (3)}\quad -(xx,xx,a)+2(xx,x,a)x=0.\end{aligned}$$

Adding these gives $6(xx,x,x)a=6(xx,ax,x)-2(ax,xx,x)-(xx,xx,a)$. This last identity can be written as

$$6(xx,x,x)a=6(xx,ax,x)-\{(ax,xx,x)+(xa,xx,x)+(xx,xx,a)\}.$$

Multiply by 12 and use Lemma 1 to get $72(xx,x,x)a\in J$. From Lemma 3 we get $2^{10}3^4(xx,x,x)a\in 2^7 3^2 J\subset I$.

LEMMA 5. *For any a in R, we have*

$$(5)\qquad \begin{array}{l} -24(aa)'a'a'a' + 12(aa)'(aa)'a' + 32(aa\cdot a)'a'a' \\ -4(aa)'(aa\cdot a)' - 8((aa\cdot a)a)'a' - 12(aa\cdot aa)'a' \\ +2((aa\cdot a)a\cdot a)' - 3((aa\cdot aa)a)' + 5((aa\cdot a)\cdot aa)' \end{array} = 0.$$

PROOF. When the following linear combination of f identities is expanded, it gives equation (5).

$$-8a'f(a,a,a)a' + 8f(a,a,a)a'a' - 12f(a,aa,a)a' \\ +4f(a,aa\cdot a,a) + ((aa)f(a,a,a))'.$$

We will wish to use the linearized form of equation (5). Since equation (5) has five arguments, using Lemma 1 directly would require a coefficient with a factor of 5. Fortunately, we do not need to linearize at all. If we substitute one b and four a's in each of the 5 possible ways in the proof, the individual terms remain zero since f is an identity for any substitution in its arguments. The sum of all these terms will be the linearized form of equation (5).

LEMMA 6. *R satisfies the following identity.*

$$(w,(aa,a,a),b) = 0 \quad \textit{for all } w,a,b \textit{ in } R.$$

PROOF. The proof is done in much the same way that Lemma 5 was proved. However, to leave all the expansions to the reader is too discouraging. We have done all the expansions and put them in Table I. To keep the size of the table manageable, we have adopted a shorthand for the notation. Each term consists of four a's and one b. There are 5 different permutations of these letters. They are indicated by A, B, C, D, E. $A = baaaa$, $B = abaaa$, $C = aabaa$, $D = aaaba$, $E = aaaab$. Besides the permutation of the four a's and 1 b, each term has an "association". There are 20 different ways that the terms can be associated. Terms of like association are listed in the same column. The association type represented by a particular column is given below the main part of the table. If an identity gave more than one term of a particular association type, they are listed one above the other in the appropriate column. The "$\cdot$" represents zero.

The far left-hand column consists of identities written using the "f" function. Each identity is expanded out and forms a new row in the matrix. Since each row of the matrix is an identity, the sum of all these rows is again an identity. The sum is written across the bottom. In the bottom, the x means $A+B+C+D+E$. Comparing the columns where the x's are, one can see that the x's represent a linearization of identity equation (5). In the paragraph following Lemma 5, we explained why the linearized form of equation (5) is still an identity. Since all the x's cancel, we are left with $48(aa,b,a)'a' - 48((aa,b,a)a)' = 0$. It follows that

$$(6)\qquad (w,(aa,b,a),a) = 0 \quad \text{for all } a,b,w \text{ in } R.$$

Linearizing this on "a" using Lemma 1 and characteristic $\neq 2,3$ gives

$$(w,(ya,b,a),a) + (w,(ay,b,a),a) + (w,(aa,b,y),a) + (w,(aa,b,a),y) = 0.$$

We now set $b = a$ to get

$$(w,(ya,a,a),a) + (w,(ay,a,a),a) + (w,(aa,a,y),a) + (w,(aa,a,a),y) = 0.$$

TABLE I

Type	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$-8a'a'f(a,b,a)$	$-16D$	·	·	$16D$ $+8E$	·	·	·	·	·	·	$-8E$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$-8a'b'f(a,a,a)$	$-16B$	·	·	$24B$	·	·	·	·	·	·	$-8B$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$-8a'f(a,a,a)b'$	$-16E$	·	$24E$	·	·	·	·	·	·	$-8E$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$8f(a,a,a)a'b'$	$16E$	$-24E$	·	·	·	·	·	·	$8E$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$8f(a,a,a)b'a'$	$16D$	$-24D$	·	·	·	·	·	·	$8D$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$8f(a,b,a)a'a'$	$16B$	$-16B$ $-8C$	·	·	·	·	·	·	$8C$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$-16f(aa,b,a)a'$	·	$-16C$	·	$-16B$	·	$16B$	·	·	$16C$ $16D$	·	·	·	·	$-16D$	·	·	·	·	·	·
$-32f(ab,a,a)a'$	·	$-32B$	·	$-32D$	·	$32D$	·	·	$64B$	·	·	·	·	$-32B$	·	·	·	·	·	·
$-8a'f(a,aa,b)$	·	·	·	$-8B$ $-8E$	·	·	$8C$	·	·	$8D$ $8E$	·	·	·	·	·	·	$-8C$	·	·	·
$8a'f(a,ab,a)$	·	·	·	$16D$	·	·	$-8E$	·	·	$-16C$	·	·	·	·	·	·	$8C$	·	·	·
$-12f(a,aa,a)b'$	·	·	$-24E$	·	·	$12E$	·	·	$24E$	·	·	·	·	·	$-12E$	·	·	·	·	·
$8f(aa\cdot a,b,a)$	·	·	·	·	·	·	·	·	$8D$	·	$8B$	$-8B$	·	$-8D$ $-8E$	·	·	·	$8E$	·	·
$8f(aa\cdot b,a,a)$	·	·	·	·	·	·	·	·	$8C$	·	$8E$	$-8E$	·	$-16C$	·	·	·	$8C$	·	·
$-8f(aa,ab,a)$	·	·	·	·	·	$-8D$	$-8C$	·	·	·	·	·	$8B$ $+8E$	·	$8D$	·	·	·	·	$-8E$
$8f(ab,aa,a)$	·	·	·	·	·	$8B$	$8E$	·	·	·	·	·	$-8B$ $-8E$	·	$-8D$	·	·	·	·	$8B$
$-4f(a,aa\cdot b,a)$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$-8D$	·	$4E$	·	$8C$	·	·	·	·	·	$-4C$
$8f(a,ab\cdot a,a)$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$16C$	·	$-8D$	·	$-16B$	·	·	·	·	·	$8B$
$16[bf(a,a,a)]'a'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$32A$ $-48C$ $+16D$	·	·	·	·	·	·
$-16[bf(a,a,a)\cdot a]'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$-32A$ $+48C$ $-16D$	·	·
$-6[bf(aa,a,a)]'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$-6C$ $+12D$ $-6E$	·	$-6A$ $+6C$
$-3[bf(a,aa,a)]'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$6D$	$-6C$ $-3E$	$3C$
$6[af(a,ab,a)]'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$-12A$	$18C$	$-6E$
$24[ab\cdot f(a,a,a)]'$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$48B$	$-72B$	$24D$
$0 \;=$	·	$-24x$	·	·	·	$12x$	·	·	$32x$	·	·	$-4x$	·	$-8x$ $-48C$	$-12x$ $48C$	·	·	$2x$ $48C$	$-3x$ $-48B$	$5x$

Types used in this table are:

1. $R'R'R'R'R'$	2. $(RR)'R'R'R'$	3. $R'(RR)'R'R'$	4. $R'R'(RR)'R'$
5. $R'R'R'(RR)'$	6. $(RR)'(RR)'R'$	7. $R'(RR)'(RR)'$	8. $(RR)'R'(RR)'$
9. $(RR\cdot R)'R'R'$	10. $R'(RR\cdot R)'R'$	11. $R'R'(RR\cdot R)'$	12. $(RR)'(RR\cdot R)'$
13. $(RR\cdot R)'(RR)'$	14. $((RR\cdot R)R)'R'$	15. $(RR\cdot RR)'R'$	16. $R'((RR\cdot R)R)'$
17. $R'(RR\cdot RR)'$	18. $((RR\cdot R)R\cdot R)'$	19. $((RR\cdot RR)R)'$	20. $((RR\cdot R)\cdot RR)'$

Then by equation (4) we get

$$3(w, (aa, y, a), a) + (w, (aa, a, a), y) = 0.$$

Using equation (6) again, we get

$$(w, (aa, a, a), b) = 0.$$

LEMMA 7. *I and IR are contained in the middle nucleus.*

PROOF. Lemma 6 gives $(R, I, R) = 0$ so I is in the middle nucleus. Lemma 4 gives $2^{10}3^4 IR \subset I$. Thus $2^{10}3^4(R, IR, R) = 0$. Characteristic $\neq 2, 3$ forces $(R, IR, R) = 0$.

THEOREM. *Let R be a commutative ring satisfying equation (2). If R is semiprime and of characteristic $\neq 2, 3$, then R is a Jordan ring.*

PROOF. Let $T = \{x \in R | x(R, R, R) = (R, x, R) = 0\}$. T is clearly closed under addition. Furthermore, if $x \in T$ and $y \in R$, then $xy \cdot (R, R, R) = yx \cdot (R, R, R) \subset y \cdot x(R, R, R) + (y, x, (R, R, R)) = 0$ by definition of T. Using equation (3), we get $(R, xy, R) \subset (R, x, R)y + (R, y, R)x = 0$ by definition of T. We have shown that T is an ideal. Let $T' = \{x \in R | xT = (R, x, T) = 0\}$. T' is closed under addition. Let $x \in T'$ and $y \in R$. Then $xy \cdot T \subset yx \cdot T \subset y \cdot xT + (y, x, T) = 0$ by definition of T'. Also, using equation (3), $(R, xy, T) \subset (R, x, T)y + (R, y, T)x \subset 0 + Tx = 0$ using the definition of T' and the fact that T is an ideal. We have shown that T' is an ideal. Now, $T \cap T'$ is a trivial ideal and must be zero.

By equation (3) and Lemma 7, $I(R, R, R) \subset (R, IR, R) + (R, I, R)R = 0$. This and Lemma 7 prove that $I \subset T$. Since $I \subset (R, R, R)$, $IT = 0$ by definition of T. Since I is in the middle nucleus, $(R, I, T) = 0$. Thus $I \subset T'$. We conclude that $I = 0$. By Lemma 3, $2^7 3^2 J = 0$. Characteristic $\neq 2, 3$ proves that $J = 0$. Therefore, the ring A is Jordan.

REFERENCES

1. R. H. Oehmke, *Commutative power-associative algebras of degree one*, J. Algebra **14** (1970), 326–332.
2. J. M. Osborn, *Commutative algebras satisfying an identity of degree four*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1114–1120.
3. ——, *Varieties of algebras*, Adv. in Math. **8** (1972), 163–369.
4. H. Petersson, *Zur Theorie der Lie-Tripel-Algebren*, Math. Z. **97** (1967), 1–15.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, IOWA STATE UNIVERSITY, AMES, IOWA 50011

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SÃO PAULO, SÃO PAULO, BRAZIL

Sonderdruck aus
Arch. Math., Vol. 52, 539–543 (1989)

0003-889X/89/5206-0539 $ 2.50/0

Semi-prime Bernstein algebras

By

I. R. Hentzel and L. A. Peresi *)

1. Introduction. Bernstein algebras were introduced by Holgate [2] in connection with a problem in genetics. Recently, Wörz-Busekros [3, 4] proved that trivial Bernstein algebras are Jordan and gave a complete classification in the case where the dimension is finite. A Bernstein algebra A over a field K is called trivial if $A = Ke + N$ (additive direct sum) where e is an idempotent and N is a nilpotent ideal of index two.

In this paper we study the semiprime case. That is, we consider Bernstein algebras that do not have nonzero nilpotent ideals of index two. We prove that any such algebra is Jordan. Furthermore, under the condition that the algebra is finitely generated, we show that it must be a field. The proofs require characteristic different from two. Our work implies that nearly all (finitely generated) Bernstein algebras possess nonzero ideals which are nilpotent of index two. The only ones which do not are the fields.

2. Bernstein algebras. Throughout this paper, K will be a field of characteristic $\neq 2$, and A will be a nonassociative commutative algebra over K. A is called a Bernstein algebra if A has a nontrivial algebra homomorphism $w\colon A \to K$ which satisfies the following identity.

$$(1) \qquad x^2 x^2 = w(x)^2 x^2 \quad \text{for all} \quad x \in A.$$

The homomorphism w is uniquely determined [1, Lemma 1]. Let $N = \operatorname{Ker} w$. If $a \in A$ and $w(a) \neq 0$, then $e = a^2/w(a)^2$ is an idempotent of A and we have the Peirce decomposition:

$$A = Ke + U + Z \quad \text{(additive direct sum)}$$

where $U = \{ex\colon x \in N\}$ and $Z = \{z \in A\colon ez = 0\}$. Note that $N = U + Z$. The subspaces U and Z satisfy the following identities (see [3]).

$$(2) \qquad U^2 \subseteq Z, \quad UZ \subseteq U; \quad Z^2 \subseteq U, \quad UZ^2 = 0.$$

*) This paper was written while this author was visiting Iowa State University on a grant from the CNPq of Brazil.

Also, for any $u, u_1, u_2, u_3 \in U$ and $z, z_1, z_2 \in Z$, we have:

(3) $eu = \frac{1}{2}u$

(4) $u^3 = 0$ (4′) $(u_1 u_2)u_3 + (u_2 u_3)u_1 + (u_3 u_1)u_2 = 0$

(5) $u(uz) = 0$ (5′) $u_1(u_2 z) + u_2(u_1 z) = 0$

(6) $(uz)^2 = 0$ (6′) $(u_1 z)(u_2 z) = 0$ (6″) $(uz_1)(uz_2) = 0$.

An algebra A is called semiprime if it satisfies the following condition: If I is an ideal of A and $I^2 = 0$, then $I = 0$.

Lemma. *Let $A = Ke + U + Z$ be a semiprime Bernstein algebra. Then the following identities hold.*

(7) $Z^2 = 0$;

(8) $(uz)z = 0$ *for all* $u \in U$, $z \in Z$;

(8′) $(uz_1)z_2 + (uz_2)z_1 = 0$ *for all* $u \in U, z_1, z_2 \in Z$;

(9) $n^3 = 0$ *for all* $n \in N$;

(9′) $(n_1 n_2)n_3 + (n_2 n_3)n_1 + (n_3 n_1)n_2 = 0$ *for all* $n_1, n_2, n_3 \in N$.

Proof. Let $L = \{x \in U : xU = 0\}$. We claim that L is an ideal of A and $L^2 = 0$. If $x \in L$, then from Eq. (3), and the definition of L we obtain $xe = \frac{1}{2}x \in L$, $xU = 0$. We will now prove that $xZ \subseteq L$. From Eq. (5′) we have for any $u_1, u_2 \in U$, $z \in Z$, the condition $u_1(u_2 z) + u_2(u_1 z) = 0$. It follows then that $(u_1 Z)U \subseteq u_1(UZ)$. In our present circumstance, let $u_1 = x$. Then $(xZ)U \subseteq x(UZ) \subseteq xU = 0$ by Eq. (2) and definition of L. Since $xZ \subseteq U$ by Eq. (2) and we have just shown $(xZ)U = 0$, we have shown $xZ \subseteq L$. This shows that $LA \subseteq L$ and so L is an ideal. Since $L^2 \subseteq LU = 0$, we have $L^2 = 0$. Since A is semiprime, $L = 0$.

We now prove Eq. (7). By Eq. (2) $Z^2 \subseteq U$ and $Z^2 U = 0$. Thus $Z^2 \subseteq L$ and so $Z^2 = 0$.

We now prove Eq. (8). If $u \in U$ and $z \in Z$, we use Eq. (2), Eq. (5′), and Eq. (6′) to get $(uz)z \in U$ and $[(uz)z]U \subseteq (Uz)(uz) = 0$. This means that $(uz)z \in L$ and so $(uz)z = 0$. The identity Eq. (8′) is a linearization of Eq. (8).

We now prove Eq. (9). Let $n \in N$. Then $n = u + z$ where $u \in U$ and $z \in Z$. Then

$$n^3 = (u^2 + 2uz)(u + z) = u^3 + 2u(uz) + u^2 z + 2(uz)z = 0$$

since $z^2 = 0$ by Eq. (7), $u^3 = 0$ by Eq. (4), $u(uz) = 0$ by Eq. (5), and $(uz)z = 0$ by Eq. (8). The identity Eq. (9′) is a linearized form of Eq. (9).

A Jordan algebra is a commutative nonassociative algebra which satisfies the additional identity $(x^2 y)x - x^2(yx) = 0$.

Theorem 1. *Let A be a semiprime Bernstein algebra of characteristic $\neq 2$. Then A is a Jordan algebra.*

Proof. Let $A = Ke + U + Z$. From [3, Theorem 3] we know that A is a Jordan algebra if and only if Eq. (7), Eq. (8') and the following identities hold for all $u, u_1, u_2 \in U$ and $z, z_1, z_2 \in Z$.

$$(u_1^2 u_2) z + 2((u_1 z) u_2) u_1 = 0 \tag{10}$$

$$((u z_1) z_2) z_1 = 0 \tag{11}$$

$$(u_1^2 u_2) u_1 = 0 \tag{12}$$

$$((u z_1) z_2) u = 0. \tag{13}$$

We will show that A is Jordan by showing that Eq. (10) through Eq. (13) hold. By Eq. (2), Eq. (4'), Eq. (5') and Eq. (8') we obtain

$$(u_1^2 u_2) z = -(u_2 z)(u_1 u_1) = 2((u_2 z) u_1) u_1 = -2((u_1 z) u_2) u_1 .$$

This proves Eq. (10). By Eq. (2), Eq. (8), and Eq. (8') we get $((u z_1) z_2) z_1 = -((u z_1) z_1) z_2 = 0$. This proves Eq. (11). By Eq. (2), Eq. (4), and Eq. (5') we have $(u_1^2 u_2) u_1 = -(u_1^2 u_1) u_2 = 0$. This is Eq. (12). Finally, Eq. (2), Eq. (5') and Eq. (6'') imply that $((u z_1) z_2) u = -(u z_1)(u z_2) = 0$. This proves Eq. (13).

Theorem 2. *Let A be a semiprime Bernstein algebra of characteristic $\neq 2$. If A is finitely generated, then A is a field.*

Proof. Let $A = Ke + U + Z$. Remember that $N = U + Z$. We will first prove that N is a special Jordan algebra. The endomorphisms of $(N, +)$ form an associative algebra which we denote by E. We construct the Jordan algebra $E^{(+)}$ by defining in E the new operation "$\circ$" by $f \circ g = fg + gf$, where fg and gf mean the usual composition of functions. If $a \in N$, denote by R_a the right multiplication by a. That is, $x R_a = x a$. By Eq. (9'), $-x(ab) = (xa)b + (xb)a$ for any x, a, b in N. This means that

$$-R_{ab} = (-R_a)(-R_b) + (-R_b)(-R_a) = (-R_a) \circ (-R_b).$$

Therefore the map from N to $E^{(+)}$ which sends the element a to $-R_a$ is a homomorphism of algebras. The kernel of this map is an ideal of N which squares to zero. If we can show that it is also an ideal of A, then it must be zero because A is semiprime. Showing that it is an ideal of A requires that we show that it absorbs multiplication by the idempotent e. This follows, since whenever an element n is in the kernel, then the summands $n = u + z$ with $u \in U$ and $z \in Z$ must also be in the kernel as well from Eq. (7) and Eq. (2) and the fact that the sum $U + Z$ is an additive direct sum. Since the kernel of this map is zero, N is isomorphic to a subalgebra of $E^{(+)}$, and this means that N is a special Jordan algebra.

Now, we assert that N is nilpotent. We already know that N is a special Jordan algebra. Eq. (9) says that N is a nil algebra of bounded index. It is known that a special Jordan nil algebra of bounded index is locally nilpotent [5, p. 114]. Thus, N is locally nilpotent. This means that every finitely generated subalgebra of N is nilpotent. Since A is finitely generated, let $\{a_i, i = 1, \ldots, n\}$ be a finite set of generators of A. Decompose each a_i into $a_i = k_i e + u_i + z_i$ where $k_i \in K$, $u_i \in U$, and $z_i \in Z$. Then the u_i's and the z_i's generate N. Thus N itself is finitely generated and is nilpotent.

Finally, let I and J be ideals of A with the property that I and J are both contained in N. Eq. (9') yields

$$(IJ)N \subseteqq (JN)I + (NI)J \subseteqq IJ.$$

Thus IJ absorbs multiplication from N. We will now show that IJ absorbs multiplication from e as well. Let $x = u + z \in I$ and $y = u' + z' \in J$ where $u, u' \in U$ and $z, z' \in Z$. We have that $u = 2ex \in I$ by Eq. (3), and so also $z \in I$. Analogously, u' and z' are elements of J. By Eq. (2), Eq. (3) and Eq. (7) we have

$$(xy)e = (uu' + uz' + u'z)e = 1/2(uz' + u'z) \in IJ.$$

It follows that $(IJ)A = (IJ)(Ke + N) \subseteqq IJ$. Thus, IJ is an ideal of A. Therefore, $N^{(0)} = N$, $N^{(1)} = NN, \ldots, N^{(n+1)} = N^{(n)}N^{(n)}, \ldots$ are ideals of A. Since N is nilpotent, $N^{(r)} = 0$ for some r. This means that $N^{(r-1)}$ is an ideal which squares to zero. Since A is semiprime it forces $N^{(r-1)} = 0$. Continuing with this process we end up with the fact that $N = 0$. This implies that $A = Ke$ and the result of the theorem that A is a field follows.

Theorem 3. *Let $A = Ke + N$ be a Bernstein algebra where N is the kernel of w. If A is finitely generated, then N is solvable. That is $N^{(k)} = 0$ for some positive integer k.*

Proof. Any Bernstein algebra A can be decomposed as $A = Ke + N$ (additive direct sum) where N is an ideal of A. Let $L = \{x \in U : xU = 0\}$ and $\mathrm{Ann} = \{x \in N : xN \subseteqq L\}$. As in the proof of Theorem 2, N/L is a nil Jordan algebra of index three, and Ann/L is the kernel of the homomorphism of N/L into $\mathrm{End}\,(N/L)^{(+)}$. When A is finitely generated, N/Ann is a finitely generated special Jordan nil algebra of bounded index; thus N/Ann is nilpotent. It follows that for some positive integer r,

$$N^{(r+2)} \subseteqq \mathrm{Ann}^{(2)} \subseteqq L^{(1)} = 0.$$

Therefore, N is solvable.

With slightly more work one can show that N/L is nilpotent. However, N itself may not be nilpotent as the following example shows.

Example. Let C be any commutative algebra over a field K. The Cartesian product $K \times C \times C$ can be made into a Bernstein algebra by defining addition coordinatewise and defining multiplication by

$$(k_1, a_1, b_1)(k_2, a_2, b_2) = (k_1 k_2, \tfrac{1}{2} k_1 a_2 + \tfrac{1}{2} k_2 a_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2, 0).$$

The function w is defined by: $w(k, a, b) = k$.

The idempotents of this algebra are elements of the form $(1, a, 0)$. For the idempotent $e = (1, 0, 0)$, $U = (0, C, 0)$, and $Z = (0, 0, C)$. Since $(0, c_1, 0)(0, 0, c_2) = (0, c_1 c_2, 0)$, in this new algebra N is nilpotent if and only if C is nilpotent.

For a specific example let $K = C =$ the integers mod 5. Now $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, and $(0, 0, 1)$ generate the algebra, so the algebra is finitely generated. (It is even finite dimensional.) Since $(0, 1, 0)(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, right multiplication by $(0, 0, 1)$ leaves $(0, 1, 0)$ fixed. Therefore right multiplication by $(0, 0, 1)$ is not nilpotent, so N is not nilpotent.

This example is not semiprime. $L = (0, C, 0)$ is a trivial ideal. This example is not Jordan since for $x = (0, 0, 1)$ and $e = (1, 0, 0)$, $(x^2 e)x - x^2(ex) = (0, \frac{1}{2}, 0)$. This example shows that if we drop completely, the semiprime hypothesis from Theorem 1, the conclusion of Theorem 1 does not follow. Our example is a Bernstein algebra which is not Jordan. Since our example was not Jordan, it certainly was not a field. It is finitely generated though, so the semiprime hypothesis cannot be removed from Theorem 2 either.

References

[1] P. Holgate, Characterizations of genetic algebras. J. London Math. Soc. (2) **6**, 169–174 (1972).
[2] P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle. J. London Math. Soc. (2) **9**, 613–623 (1975).
[3] A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras. Arch. Math. **48**, 388–398 (1987).
[4] A. Wörz-Busekros, Further remarks on Bernstein algebras. Proc. London Math. Soc., to appear.
[5] K. A. Zhevlakov et al., Rings that are nearly associative. New York-London 1982.

Eingegangen am 9. 12. 1987

Anschriften der Autoren:

I. R. Hentzel
Department of Mathematics
Iowa State University
Ames, Iowa 50011
USA

L. A. Peresi
Department of Mathematics
University of São Paulo
São Paulo, Brazil 01000

a!/usr/sys/birkhaeuser/adm/umbruch6,Plk-S2906.01 Thu Mar 22 09:32:56 1990
Materialverbrauch 1 Seite(n) mal 1 Kopie(n) = 1 Blatt, Seite 1 agfa

Sonderdruck aus AdM S 2906

Arch. Math., Vol. 54, [redacted] (1990) 0003-889X/90/5405-[redacted] $ 2.[redacted]/0

Nilpotency in Bernstein algebras

By

Luiz Antonio Peresi *)

1. Introduction. A commutative nonassociative algebra A over a field K is called a Bernstein algebra if there is a nonzero algebra homomorphism $\omega: A \to K$ such that

$$x^2 x^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad (\text{for all } x \in A). \tag{1}$$

As known ω is uniquely determined. Let N denote the kernel of ω. The nilpotency and solvability of N have been studied independently in a series of papers. Odoni and Stratton [3] and Grishkov [1] have proved that if A is a finite-dimensional Bernstein algebra and $A^2 = A$ then N is nilpotent. The author and Hentzel have shown in [2] that N is not in general nilpotent but is solvable for any finitely generated Bernstein algebra. The proofs require characteristic different from two.

In the present note we combine the arguments used in [2] and [3] to show that the conjecture 2 stated in [1] is true. More precisely we prove:

Theorem. *Let A be a finitely generated Bernstein algebra of characteristic $\neq 2$ satisfying $A^2 = A$. Then N is nilpotent.*

2. Proof of theorem. Let A denote any arbitrary Bernstein algebra of characteristic $\neq 2$. Any element of the form $a^2/\omega(a)^2$, where $a \in A$ and $\omega(a) \neq 0$, is an idempotent. The surjectivity of ω yields the vector space direct sum $A = Ke \oplus N$ where e is an idempotent. Denoting by R_e right multiplication by e acting on N we obtain that $R_e(R_e - \frac{1}{2}I) = 0$ and we have the Peirce decomposition

$$A = Ke \oplus U \oplus Z$$

where U and Z denote the eigenspaces associated to the eigenvalues $\frac{1}{2}$ and 0 respectively.

The subspaces U and Z satisfy

$$U^2 \subset Z, \quad UZ \subset U, \quad Z^2 \subset U, \quad UZ^2 = 0. \tag{2}$$

*) This paper was written while the author held a grant from the CNPq of Brazil.

Furthermore for all $u, u_1, u_2, u_3 \in U$ and $z \in Z$ we have:

(3)	$u^3 = 0$	(3′)	$(u_1 u_2) u_3 + (u_2 u_3) u_1 + (u_3 u_1) u_2 = 0$
(4)	$u(uz) = 0$	(4′)	$u_1 (u_2 z) + u_2 (u_1 z) = 0$
(5)	$(uz)^2 = 0$	(5′)	$(u_1 z)(u_2 z) = 0$

All these facts are obtained by linearized identity (1); see [4].

From now on we assume that $A^2 = A$. Using (2) we see that $A^2 \subset Ke \oplus U \oplus U^2$ and then $Z = U^2$. Denote by $\mathrm{Ann}(N)$ the subset of N consisting of all $x \in N$ such that $xN = 0$. It is clearly an ideal of N. We now prove that $n^3 \in \mathrm{Ann}(N)$ for all $n \in N$. Writing $n = u + z$ ($u \in U$, $z \in Z$) we get

$$\begin{aligned} n^3 &= u^3 + 2u(uz) + uz^2 + u^2 z + 2(uz)z + z^3 \\ &= u^2 z + 2(uz)z + z^3 \end{aligned}$$

by identities (2), (3) and (4). We know by (2) that $Z^2 U = 0$. On the other hand $Z^2 Z = Z^2 U^2 \subset (Z^2 U) U = 0$ by (2), (3′) and the fact that $Z = U^2$. Thus $Z^2 \subset \mathrm{Ann}(N)$. This implies that $u^2 z \in \mathrm{Ann}(N)$ since $u^2 z \in Z^2$ by (2). Also $z^2 \in \mathrm{Ann}(N)$ and so $z^3 = 0$. Identities (2), (4′) and (5′) yield $[(uz)z] U \subset (Uz)(uz) = 0$ and then using (2) and (3′) we obtain $[(uz)z] Z = [(uz)z)] U^2 \subset \{[(uz)z] U\} U = 0$. This shows that $(uz)z \in \mathrm{Ann}(N)$. Therefore $n^3 = u^2 z + 2(uz)z$ is an element of $\mathrm{Ann}(N)$.

Denote by E the associative algebra formed by the endomorphisms of the additive group $N/\mathrm{Ann}(N)$. If we define a new multiplication in E by $f * g = fg + gf$ (where fg and gf mean usual function composition) we obtain the associated Jordan algebra $E^{(+)}$. We have proved above that $n^3 \in \mathrm{Ann}(N)$ for all $n \in N$. This means that $x^3 = 0$ is an identity satisfied by $N/\mathrm{Ann}(N)$. Linearizing this identity we get

$$(xa)b + (xb)a + x(ab) = 0$$

and it follows that $-R_{ab} = (-R_a)(-R_b) + (-R_b)(-R_a) = (-R_a) * (-R_b)$ where R_a denotes right multiplication by a. Thus, $a \in N/\mathrm{Ann}(N) \to -R_a \in E^{(+)}$ is a homomorphism.

Now, if $a = n + \mathrm{Ann}(N)$ ($n \in N$) and $-R_a = 0$ then $nN \subset \mathrm{Ann}(N)$. Thus, the kernel of this map is $H/\mathrm{Ann}(N)$, where H denotes the set of all $n \in N$ such that $nN \subset \mathrm{Ann}(N)$. Using isomorphism theorems we obtain then that the quocient algebra N/H is isomorphic to a subalgebra of $E^{(+)}$.

Finally, assume that A is finitely generated. As clear N/H is also finitely generated. The fact that N/H is isomorphic to a subalgebra of the Jordan algebra $E^{(+)}$ means by definition that N/H is a special Jordan algebra. On the other hand, since $n^3 \in \mathrm{Ann}(N) \subset H$ for every $n \in N$, the identity $x^3 = 0$ holds in N/H and this algebra is nil of bounded index. It is known [5, p. 114] that any special Jordan nil algebra of bounded index is locally nilpotent (i.e., every subalgebra with a finite number of generators is nilpotent). Therefore, N/H is nilpotent. We can find then a positive integer m such that $(N/H)^m = 0$, i.e., $N^m \subset H$. But then $N^{m+2} \subset (HN)N \subset \mathrm{Ann}(N) N = 0$ and N is nilpotent.

3. Example. Consider the class of Bernstein algebras $A = K \oplus K^r \oplus K^s$ where the multiplication is given by

$$(\alpha, x_1, y_1)(\beta, x_2, y_2) = (\alpha\beta, \tfrac{1}{2}(\alpha x_2 + \beta x_1), 0)$$

(see [4]). Here, $N = K^r \oplus K^s$ is nilpotent of index 2 but $A^2 = A$ if and only if $s = 0$. Therefore the condition $A^2 = A$ in the theorem is sufficient but not necessary.

References

[1] A. Grishkov, On the genetic property of Bernstein algebras. Soviet Math. Dokl. **35**, 489–492 (1987).
[2] I. R. Hentzel and L. A. Peresi, Semiprime Bernstein algebras. Arch. Math. **52**, 539–543 (1989).
[3] R. W. K. Odoni and A. Stratton, Structure of Bernstein algebras. Unpublished.
[4] A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras. Arch. Math. **48**, 388–398 (1987).
[5] K. A. Zhevlakov et al, Rings that are nearly associative. New York-London 1982.

Eingegangen am 5. 9. 1989

Anschrift des Autors:

Luiz Antonio Peresi
Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 20570 (Ag. Iguatemi)
São Paulo, Brazil 05508

Bernstein Algebras Given by Symmetric Bilinear Forms*

Irvin Roy Hentzel
Department of Mathematics
Iowa State University
Ames, Iowa 50011

and

Luiz Antonio Peresi
Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
C. P. 20570 (Ag. Iguatemi)
São Paulo 05508, Brazil

Submitted by Richard A. Brualdi

ABSTRACT

Let (A, ω) be a finite dimensional Bernstein algebra and N the kernel of ω. We study the algebras where dim N^2 is 1. The algebras fall into two general classes. For the first of these classes we give the multiplication tables for the complete set of nonisomorphic algebras. For the second of these classes we give the multiplication tables for what we call "complete algebras." We show that any algebra of the second class can be embedded in a complete algebra. The multiplication in the complete algebras is easy to describe. The Bernstein algebras of the second class are then characterized as subalgebras of the complete algebras. For Jordan Bernstein algebras satisfying dim $N^2 = 1$ we give the complete classification.

1. INTRODUCTION

A Bernstein algebra is a pair (A, ω) consisting of a commutative nonassociative algebra A over a field K and a nonzero homomorphism of algebras

*This paper was written while the second-named author held a grant from CNPq of Brazil and was visiting Iowa State University of a grant of FAPESP.

655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010 0024-3795/91/$3.50

$w: A \to K$ such that

$$x^2x^2 = \omega(x)^2 x^2 \qquad (\text{for all} \quad x \in A). \tag{1}$$

If (A, ω_1) and (A, ω_2) are both Bernstein algebras, then $\omega_1 = \omega_2$ (see [3, Lemma 1]), so the homomorphism ω is uniquely determined. These algebras were introduced by Holgate [4] in connection with the problem, proposed by Bernstein, of classifying populations that achieve equilibrium at the second generation (see Lyubich [2]).

Let N denote the kernel of ω. In [7] Costa studied the problem of classifying finite dimensional Bernstein algebras such that N^2 is one dimensional. In this case, $N^2 = Kc$ and the multiplication in N is given by $xy = b(x, y)c$, where b is a symmetric bilinear form. When the Witt index of b is zero a complete classification has been obtained.

In this paper we show that the classification of these algebras splits into two parts according as $N^2 \subseteq Z$ or $N^2 \subseteq U$. The first is completely classified. The second is partially classified by giving the basis multiplication for complete algebras and proving every such algebra is a subalgebra of a complete algebra. Furthermore, we completely classify the algebras that have the additional property of being Jordan.

The following algebra with parameters s, d, k, t $(0 < s,\ 0 \leqslant d,\ 0 \leqslant k,\ 0 \leqslant t,\ k + t \leqslant s)$ and element c is called a complete algebra on the parameters s, d, k, t, and c.

Take a vector space V of dimension $2s + d + 1$ over a field K. Pick a basis of V: e, u_i, z_j $(1 \leqslant i \leqslant s + d,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$. Pick c in the subspace spanned by the u_i. The nonzero products of V are

$$e^2 = e, \qquad eu_i = \tfrac{1}{2}u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant s + d),$$

$$u_i z_i = c \qquad (1 \leqslant i \leqslant s),$$

$$z_i^2 = \begin{cases} c, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ -c, & k < i \leqslant k + t. \end{cases} \tag{2}$$

The vector space V with this product becomes a Bernstein algebra of type $(s + d + 1, s)$. If U is the span of the u_i and Z is the span of the z_j, then $Ke \oplus U \oplus Z$ gives the idempotent decomposition of the algebra relative to the idempotent e. Notice that $N^2 = Kc \subseteq U$.

For the definition and elementary structure theorems, K may be any field of characteristic $\neq 2$. Because our proofs require orthogonally diagonalizing symmetric matrices over the field K, in our theorems we restrict K to be the real numbers and indicate this by calling the field $\mathbb{R}$. We will consider only finite dimensional Bernstein algebras. We will reserve the letter N to represent the kernel of the homomorphism ω. N is an ideal of A.

2. CHARACTERIZATION

Let (A, ω) be a Bernstein algebra. If $y \in A$ and $\omega(y) \neq 0$, let $x = [\omega(y)]^{-1}y$. Now $\omega(x) = 1$, so $x^2 \neq 0$, and by the identity (1) x^2 is an idempotent. We choose some idempotent e and write A as a vector space direct sum $A = Ke \oplus N$. If R_e denotes right multiplication by e acting on N, we have $2R_e^2 = R_e$. This gives the decomposition $A = Ke \oplus U \oplus Z$, where U is the kernel of $2R_e - I$ and Z the kernel of R_e. The subspaces U and Z satisfy

$$UZ \subset U, \qquad Z^2 \subset U, \qquad U^2 \subset Z. \tag{3}$$

All these facts are obtained from the linearized form of the identity (1). The above decomposition depends on the choice of the idempotent. However, it is known that the dimension of U and consequently the dimension of Z are invariants of A. The pair $(\dim U + 1, \dim Z)$ is called the type of A. See [5].

We now assume that $N^2 = Kc$. From (3) it follows that

$$UZ \subset U \cap Kc, \qquad Z^2 \subset U \cap Kc, \qquad U^2 \subset Z \cap Kc.$$

There are two possibilities. If $U^2 \neq 0$, then $UZ = Z^2 = 0$ and the multiplication table is known when the products $u_i u_j = b_{ij}c$ are specified for a basis $u_1, \dots, u_r$ of U. In this case $c \in Z$. If $U^2 = 0$, then the multiplication table requires the products $z_i u_j = p_{ij}c$ and $z_i z_j = q_{ij}c$ for some basis $u_1, \dots, u_r$ of U and $z_1, \dots, z_s$ of Z. In this case $c \in U$ and $c^2 = 0$.

THEOREM 1. *Let $A = \mathbb{R}e \oplus U \oplus Z$ be a real Bernstein algebra of type $(r+1, s)$ such that $N^2 = \mathbb{R}c$. Then one of the following assertions holds:*

(i) *A has a basis e, u_i, z_j $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$, and the nonzero products are*

$$e^2 = e, \qquad eu_i = \tfrac{1}{2}u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$u_i^2 = \begin{cases} c & (1 \leqslant i \leqslant k), \\ -c & (k < i \leqslant k+t) \end{cases} \qquad (\textit{for some} \quad k \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad k+t \leqslant r). \tag{4}$$

(ii) *A is a subalgebra of a complete (Bernstein) algebra with parameters s, d, k, t, and c.*

Proof. If $U^2 \neq 0$ then $UZ = Z^2 = 0$. Let $u_1, \ldots, u_r$ be a basis of U, and $u_i u_j = b_{ij} c$. The multiplication table is given by the matrix $B = (b_{ij})$. This matrix represents a symmetric bilinear form on U, and by a change of basis it can be reduced to

$$\begin{bmatrix} I_{k\times k} & & \\ & -I_{t\times t} & \\ & & O_{l\times l} \end{bmatrix},$$

where $k + t + l = r$. The integers k, t, l are unique by Theorem 5 of [1, p. 296]. This is the multiplication table given in (4).

Now assume $U^2 = 0$. Pick basis $\tilde{U} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ of U and $\tilde{Z} = \{z_1, \ldots, z_s\}$ of Z. We can give the multiplication table for this algebra by giving the matrix $[P \mid Q]$ with submatrices P and Q. P is $s \times r$, Q is $s \times s$, $z_i u_j = p_{ij} c$, *and* $z_i z_j = q_{ij} c$. *If we change the basis of* U *by* $\tilde{U} = R\tilde{U}'$ *and change the basis of* Z *by* $\tilde{Z} = S\tilde{Z}'$, *the multiplication table changes to* $[S^t P R \mid S^t Q S]$. Suppose that P is invertible. Choosing S in such a way that $S^t Q S = J$, where

$$J = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & & \\ & -I_{t\times t} & \\ & & O_{l\times l} \end{bmatrix} \qquad (k + t + l = s),$$

and setting $R = (S^t P)^{-1}$, we obtain the multiplication table $[I_{s\times s} \mid J]$. This is the multiplication table for a complete algebra with parameters s, d, k, t and element c. The parameter d is zero. If P is not invertible, then we proceed in two steps:

1. We augment P with enough columns until we obtain a matrix $P^{\#}$ with rank s. Now $[P^{\#} \mid Q]$ gives the multiplication of a complete algebra which has A as a subalgebra.
2. Since $P^{\#}$ has rank s, we can change the basis as in the previous case to obtain

$$\left[S^t P^{\#} R \mid S^t Q S \right] = \left[I_{s\times s} \quad O_{s\times d} \quad | J \right].$$

This is the multiplication table for a complete algebra with parameters s, d, k, t and element c. ■

The multiplication of the complete algebra is determined by the integers s, d, k, t and the element c. These parameters are determined by U and Z. The value of s is the dimension of Z; $k+t$ and $k-t$ are the rank and the signature of the symmetric bilinear form which gives the multiplication for Z. The subspace $\{u \in U : uZ = 0\}$ depends only on N, and its dimension is d. The equality $N^2 = \mathbb{R}c$ determines the element c up to a scalar multiple. Positive multiples leads to exactly the same values of k and t, while negative multiples lead to complete algebras with k and t interchanged. To specify one multiple over another, we could ask that c be chosen to maximize the signature.

The complete algebra is determined by $Ke \oplus U \oplus Z$. However, complete algebras defined by different multiplication tables can still be isomorphic. The algebras given by the following two tables are isomorphic:

$$A: \quad \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & z_1 & z_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} c & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & c \end{array}\right] \end{array} \qquad c = u_1 + u_2,$$

$$A': \quad \begin{array}{c} \\ z_1' \\ z_2' \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1' & u_2' & z_1' & z_2' \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} c' & 0 & c' & 0 \\ 0 & c' & 0 & -c' \end{array}\right] \end{array} \qquad c' = \sqrt{2}\, u_2'.$$

The matrix for an isomorphism from N' to N relative to $\{u_1', u_2', z_1', z_2'\}$ and $\{u_1, u_2, z_1, z_2\}$ is

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

The idempotent e' is mapped to the idempotent $e + \frac{1}{4}(u_1 + u_2)$.

Our proof shows how to embed the algebra into a complete algebra by simply enlarging the space U. If we start with a complete algebra $Ke \oplus U^* \oplus Z$ and let U be any subspace of U^* containing c, then the subspace $Ke \oplus U \oplus Z$ will also be a subalgebra. The set of all Bernstein algebras satisfying $N^2 = \mathbb{R}c$ with $c \in U$ can be generated in this way. The further question of which subspaces of U^* lead to isomorphic algebras seems to be a very difficult one and is related to the classical problems of bilinear and quadratic forms.

3. THE JORDAN PROPERTY

A Jordan algebra is a commutative nonassociative algebra that satisfies the identity

$$(x^2 y)x = x^2(yx).$$

As shown in [8], a Bernstein algebra $A = Ke \oplus U \oplus Z$ is a Jordan algebra if and only if

$$Z^2 = 0, \qquad (uz)z = 0 \quad \text{for any } u \in U,\ z \in Z.$$

Now assume that $N^2 = Kc$. When $U^2 \neq 0$ the algebra is always Jordan. In the case when $U^2 = 0$, the algebra is Jordan if and only if $Z^2 = 0$ and $cN = 0$.

THEOREM 2. *Let A be a real Bernstein algebra of type $(r+1, s)$ such that $N^2 = \mathbb{R}c$. Then A is a Jordan algebra if and only if one of the following statements is true*:

(i) *A is the algebra given in part* (i) *of Theorem* 1.

(ii) *A has a basis e, u_i, z_j $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s$, with $u_r = c)$, and the nonzero products are*

$$e^2 = e, \qquad eu_i = \tfrac{1}{2}u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$u_i z_i = u_r = c \qquad (1 \leqslant i \leqslant k, \text{for some } k < r \text{ and } k \leqslant s). \tag{5}$$

Proof. The algebras given in (i) and (ii) are clearly Bernstein Jordan algebras. Conversely, assume that A is Jordan. As in Theorem 1, we have two cases. If $U^2 \neq 0$, then A is necessarily the algebra given in part (i) of Theorem 1. Now assume that $U^2 = 0$. We know that $c \in U$, $cN = 0$, and $Z^2 = 0$. The only products left to specify are ZU. Let $\tilde{U} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ be a basis of U with $u_r = c$, and $\tilde{Z} = \{z_1, \ldots, z_s\}$ be a basis of Z. The multiplication is given by $z_i u_j = p_{ij}c$. If we change the basis $\tilde{U} = R\tilde{U}'$ and $\tilde{Z} = S\tilde{Z}'$, the new table is given by the matrix $P' = S^t PR$ where $P = (p_{ij})$. Then rank $P =$ rank $P' = k$, and we can choose S and R such that

$$P' = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

This is the table for the algebra in (5). ∎

REFERENCES

1 K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

2 Yu. I. Lyubich, Basic concepts and theorems of the evolutionary genetics of free populations, *Russian Math. Surveys* 26:51–123 (1971).

3 P. Holgate, Characterization of genetic algebras, *J. London Math. Soc. (2)* 6:169–174 (1972).

4 P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc. (2)* 9:613–623 (1975).

5 A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, New York, 1980.

6 Yu. I. Lyubich, A classification of some types of Bernstein algebras, *Selecta Math. Soviet.* 6:1–14 (1987).

7 R. Costa, A note on Bernstein algebras, *Linear Algebra Appl.* 112:195–205 (1989).

8 M. T. Alcalde, R. Baeza, and C. Burgueño, Autour des algèbres de Bernstein, *Arch. Math. (Basel)* 53:134–140 (1989).

Received 26 February 1990; final manuscript accepted 16 May 1990

IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology (1990) **7**, 33–40

On kth-Order Bernstein Algebras and Stability at the $k+1$ Generation in Polyploids

IRVIN ROY HENTZEL

Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, Iowa 50011, USA

LUIZ ANTONIO PERESI

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo, C.P. 20570 (Ag. Iguatemi) São Paulo, SP 01498, Brazil

PHILIP HOLGATE

Department of Mathematics and Statistics, Birkbeck College, University of London, Malet Street, London WC1E 7HX, UK

[Received 27 September 1989]

Some properties of kth-order Bernstein algebras are obtained, a class of examples constructed, and polyploid populations with multiple alleles subject to mutation characterized, whatever the initial distribution, where the frequency distribution of the gametic types is in equilibrium after $k+1$ generations.

Keywords: nonassociative algebra; genetic algebra; polyploidy; mutation; stable state.

1. Introduction

LET A be a commutative nonassociative algebra over a field K. We define the plenary powers of an element x of A by $x^{[1]}=x$, $x^{[2]}=x^2,\dots,x^{[n+1]}=x^{[n]}x^{[n]}$, $\dots$. A is called a kth-order Bernstein algebra ($k \geqslant 1$) if A has a nontrivial algebra homomorphism $\omega : A \to K$ and the plenary powers of any element $x \in A$ satisfy the identity

$$x^{[k+2]} = \omega(x)^{2^k} x^{[k+1]}. \tag{1.1}$$

If A is a stochastic algebra describing a population (Wörz-Busekros, 1980; p. 12) and the element y of A represents a frequency distribution of genotypes in the initial generation (in this case, $\omega(y)=1$), then $y^{[k]}$ represents the frequency distribution in the kth generation. Now, if A satisfies the identity (1.1), we have $y^{[k+2]}=y^{[k+1]}$, and this indicates the fact that the population is in equilibrium after $k+1$ generations. This means that, whatever the initial distribution of frequencies, the population achieves a stable state in the $(k+1)$th generation.

In the case where $k=1$, we have the so-called Bernstein algebras. These algebras have been studied extensively (see e.g. Holgate, 1975; Lyubich, 1978, 1987; Hentzel & Peresi 1989). The definition of kth-order Bernstein algebras and some examples for $k=2$ were given by Abraham (1980: p. 361).

The object of this paper is to obtain some properties of kth-order Bernstein algebras, construct examples, and characterize polyploid multiple allelic gametic algebras which are kth-order Bernstein.

2. Basic properties and examples

Throughout this section, A will be a kth-order Bernstein algebra, with nontrivial algebra homomorphism ω, over a field K of characteristic $\neq 2$ with at least 2^{k+1} elements.

Let $x_0 \in A$ such that $\omega(x_0) \neq 0$. From the identity (1.1), it follows that $e = \omega(x_0)^{-2^k} x_0^{[k+1]}$ is an idempotent of A. Let N denote the kernel of ω. Then, A/N is isomorphic to k and so $A = Ke \oplus N$ (additive direct sum).

We note that ω is uniquely determined. Assume that $\psi : A \to K$ is a nontrivial algebra homomorphism. If $x \in N$, then $x^{[k+2]} = 0$ by identity (1.1); it follows that $[\psi(x)]^{[k+2]} = 0$, i.e. $\psi(x) = 0$. Thus $\psi(N) = 0$. Now, since $e^2 = e$, we have $\omega(e) = 0$ or $\omega(e) = 1$. If $\omega(e) = 0$, we would have $\omega = 0$, a contradiction. Then $\omega(e) = 1$. Analogously, $\psi(e) = 1$. Therefore $\psi = \omega$.

PROPOSITION *Let $L : N \to N$ denote left multiplication by the idempotent e. Denote by U the image of L^k and by Z the kernel of L^k. Then*

(i) $L^{k+1} = \frac{1}{2}L^k$;

(ii) $A = Ke \oplus U \oplus Z$ *(additive direct sum)*;

(iii) $U = \{N \in N : en = \frac{1}{2}n\}, \quad U^2 \subseteq Z.$

Proof. Let $x = \alpha e + n$ $(\alpha \in K, n \in N)$. For any $l > 1$,

$$x^{[l]} = x^{2^{l-1}}e + \alpha^{(2^{l-1}-1)}2^{l-1}L^{l-1}(n) + y_l,$$

where y_l is the sum of terms of lesser degree in α. Thus, from (1.1), it follows that

$$x^{2^{k+1}}e + \alpha^{(2^{k+1}-1)}2^{k+1}L^{k+1}(n) + y_{k+2} = \alpha^{2^k}\big(\alpha^{2^k}e + \alpha^{(2^k-1)}2^kL^k(n) + y_{k+1}\big).$$

Since K has enough elements, these two expressions can be equal if and only if they agree term by term. Thus, comparing the terms in $\alpha^{(2^{k+1}-1)}$, we obtain $L^{k+1}(n) = \frac{1}{2}L^k(n)$. This proves (i).

If $n \in N$, then $n = L^k(2^kn) + \big(n - L^k(2^kn)\big)$, where $L^k(2^kn)$ is in U by definition and $n - L^k(2^kn)$ is in Z since $L^{2k}(n) = 2^{-k}L^k(n)$ by (i) and so $L^k\big(n - L^k(2^kn)\big) = 0$. It follows that $N = U + Z$. Now, if $x \in U \cap Z$, then $x = L^k(n)$ for some $n \in N$. Thus, $2^{-k}x = L^k(x) = 0$, and so $x = 0$. Therefore $N = U \oplus Z$ and (ii) is proved.

Finally, we prove (iii). Let $u \in U$. From the definition of U and (i), it is clear that $eu = \frac{1}{2}u$. On the other hand, if $n \in N$ and $en = \frac{1}{2}n$, then $n = L^k(2^kn) \in U$. Thus $U = \{n \in N : en = \frac{1}{2}n\}$. Now, let $x = \alpha e + u$ $(\alpha \in K,\ u \in U)$. For any $l > 1$, we have

$$x^{[l]} = \alpha^{2^{l-1}}e + \alpha^{(2^{l-1}-1)}u + \alpha^{(2^{l-1}-2)}P_l(L)(u^2) + (\text{terms of lesser degree in } \alpha),$$

where P_l is the polynomial $2^{l-2}t^{l-2} + 2^{l-3}t^{l-3} + \cdots + 2t + 1$. From identity (1.1), it then follows by comparing terms in $\alpha^{2^{k+1}-2}$ that $\big(P_{k+2}(L) - P_{k+1}(L)\big)(u^2) = 0$.

Now, write $u^2 = u' + z'$, where $u' \in U$ and $z' \in Z$. Since

$$P_{k+2}(L)(u') = (k+1)u', \qquad P_{k+1}(L)(u') = ku',$$
$$P_{k+2}(L)(z') \in Z, \qquad P_{k+1}(L)(z') \in Z,$$

it then follows that $u' + z'' = 0$ for some $z'' \in Z$ and so $u' = 0$. Therefore $u^2 = z' \in Z$, and the fact that $U^2 \subseteq Z$ follows. □

The conditions established in the preceding proposition suggest the following class of examples. Let P and Q be vector spaces over K, and $T: Q \to Q$ be a linear map. In the Cartesian product $K \times P \times Q$, we define addition and multiplication by elements of K componentwise, and multiplication by

$$(\alpha, x, y)(\alpha', x', y') = (\alpha\alpha', \tfrac{1}{2}(\alpha x' + \alpha' x), \tfrac{1}{2}T(\alpha y' + \alpha' y)). \tag{2.1}$$

Define $\omega((\alpha, x, y)) = \alpha$. Since, for any $l > 1$,

$$(\alpha, x, y)^{[l]} = (\alpha^{2^{l-1}}, \alpha^{(2^{l-1}-1)}x, \alpha^{(2^{l-1}-1)}T^{l-1}(y)),$$

the condition (1.1) is satisfied if and only if $T^{k+1}(y) = T^k(y)$ for any $y \in Q$. Thus the algebra $K \times P \times Q$ is kth-order Bernstein if and only if $T^{k+1} = T^k$. Note that, if this is the case and $e = (1, 0, 0)$, then $U = \{0\} \times P \times \{y \in Q : T(y) = y\} = \{0\} \times P \times \operatorname{Im} T^k$ and $Z = \{0\} \times \{0\} \times$ kernel of T^k. Note also that $N^2 = 0$. For a specific example, let $P = K^p$ and $Q = K^q$ $(0 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty)$ and, for $1 \leq k \leq q$ $(k \neq \infty)$, set

$$T[(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_q)] = 2(0, y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, \ldots, 0).$$

(We are setting $K^0 = 0$.) We have $T^k = 0$ and, of course, $T^{k+1} = T^k$. We denote this algebra by $A_k(p, q)$.

Assume now that the algebra A satisfies the condition $N^2 = 0$. We know from the preceding proposition that $N = U \oplus Z$, where $U = \{n \in N : en = \frac{1}{2}n\}$ and $L^k(Z) = 0$. For any $\alpha, \alpha' \in K$, $u, u' \in U$, and $z, z' \in Z$, we have

$$(\alpha e + u + z)(\alpha' e + u' + z') = \alpha\alpha' e + \tfrac{1}{2}(\alpha u' + \alpha' u) + e(\alpha z' + \alpha' z).$$

Thus, if we identify A with $K \times U \times Z$, the multiplication in A is given by (2.1), where $T = 2L$. Assume that $L(Z) \neq 0$ and let s be the greatest integer such that $1 < s \leq k$ and $L^{s-1}(Z) \neq 0$. Let $z_1 \in Z$ be such that $L^{s-1}(z_1) \neq 0$ and let $z_{i+1} = L^i(z_1)$ $(1 \leq i < s)$. It is clear that $\{z_1, \ldots, z_s\}$ is a linearly independent subset of Z. Denote by I_1 the subspace of A spanned by $z_1, \ldots, z_s$. Let I be the maximal subspace of A that is invariant under L and satisfies the condition $I_1 \cap I = 0$. As in the proof of lemma 6.5.4 in Herstein (1975), we may conclude that $Z = I_1 \oplus I$ (additive direct sum). It follows then that $eI \subset I$. On the other hand, $(U \oplus Z)I = 0$ since $N^2 = 0$. Thus, I is an ideal of A, and $A = Ke \oplus U \oplus I_1 \oplus I$ (additive direct sum). Also, $A/I \simeq Ke + U + I_1$ as algebras. Let p be the dimension of U. If we identify A/I with $K \times K^p \times K^s$, we see that the multiplication in A/I is given by (2.1), where T is defined by $T(y_1, \ldots, y_s) = 2(0, y_1, \ldots, y_{s-1})$. Therefore A/I is isomorphic to $A_s(p, s)$.

In all the examples considered so far, we have the condition $N^2 = 0$. We now give an example where this does not happen. Let S be a commutative plenary nil algebra of index $k+1$, i.e. an algebra such that $k+1$ is the smallest positive integer satisfying $y^{[k+1]}=0$ for all $y \in S$. In the vector space $K \times S \times S$, define the following multiplication:

$$(\alpha, x, y)(\alpha', x', y') = \left(\alpha\alpha', \tfrac{1}{2}(\alpha x' + \alpha' x), yy'\right).$$

Since $(\alpha, x, y)^{[k+1]} = (\alpha^{2^k}, \alpha^{(2^k-1)}x, y^{[k+1]}) = (\alpha^{2^k}, \alpha^{(2^k-1)}x, 0)$, it follows that condition (1.1) is fulfilled. Thus, the algebra obtained is kth-order Bernstein. Let y be an element of S such that $y^2 \neq 0$. We have $(0,0,y)(0,0,y) = (0,0,y^2) \neq 0$. Thus $N^2 \neq 0$. For a specific example, we take S to be the algebra with basis $c_1, \ldots, c_{2^k-1}$ and multiplication table given by $c_i c_j = c_j c_i = c_{i+j}$ if $i+j \leq 2^k - 1$ and the other products zero.

3. Polyploidy with multiple alleles

Consider a $2m$-ploid population with $n+1$ alleles $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Each monomial in the variables $A_0, \ldots, A_n$ of degree m represents one of the gametic types of the population. The output of a zygote formed by the union of gametes $A_0^{i_0} \cdots A_n^{i_n}$ and $A_0^{j_0} \cdots A_n^{j_n}$ is described by the identity

$$(A_0^{i_0} \cdots A_n^{i_n})(A_0^{j_0} \cdots A_n^{j_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{k_0 + \cdots + k_n = m} \binom{i_0 + j_0}{k_0} \cdots \binom{i_n + j_n}{k_n} A_0^{k_0} \cdots A_n^{k_n}. \quad (3.1)$$

If the probability that allele A_i changes to allele A_j is m_{ij} and the probability that it stays the same is m_{ii} in each generation (note that $m_{ij} \geq 0$ and $\sum_{j=0}^{n} m_{ij} = 1$), the analogue of (3.1) is given by

$$A_0^{i_0} \cdots A_n^{i_n} * A_0^{j_0} \cdots A_n^{j_n} = [(A_0 M)^{i_0} \cdots (A_n M)^{i_n}][(a_0 M)^{j_0} \cdots (A_n M)^{j_n}], \quad (3.2)$$

where $M = (m_{ij})$ and $A_i M = \sum_{j=0}^{n} m_{ij} A_j$. If we consider the real vector space generated by all monomials $a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n}$ of degree m and define multiplication as in (3.2), we obtain a nonassociative algebra which we shall denote by $G(n+1, 2m, M)$. Define the linear map $\omega : G(n+1, 2m, M) \to \mathbb{R}$ by $\omega(A_0^{i_0} \cdots A_n^{i_n}) = 1$. As is readily seen, ω is a nontrivial algebra homomorphism. $G(n+1, 2m, M)$ is a genetic algebra in the sense defined by Gonshor (1971), as shown in his theorem 4.1, and a genetic algebra has only one nontrivial algebra homomorphism (Wörz-Busekros, 1980: corollary 3.11, p. 40). Thus, ω is uniquely determined.

In what follows, we establish conditions under which $G(n+1, 2m, M)$ is a kth-order Bernstein algebra, or, equivalently, when the gametic distribution of the population is in equilibrium after $k+1$ generations whatever the initial distribution.

We start by noticing that $G(n+1, 2m, I)$ is not a Bernstein algebra of any order for $m > 1$. This follows because the necessary condition established in part (i) of the Proposition is not fulfilled. Since A_0^m is an idempotent, $c = A_0^{m-2}(A_0 - A_1)^2$ is in $\ker \omega$ and, if L denotes left multiplication by A_0^m, we have $L^k(c) = \binom{2m}{2}^{-k}\binom{m}{2}^k c$ and then $L^{k+1}(c) \neq \tfrac{1}{2}L^k(c)$ for any $k \geq 1$.

Let us call the space $L(n+1)$ of linear forms in the symbols $A_0, A_1, \ldots, A_n$ the *allelic space* of $G(n+1, 2m, M)$. The vector space underlying $G(n+1, 2m, M)$ is the nth symmetric tensor power of $L(n+1)$. The choice of a canonical basis

$C_0, C_1, \ldots, C_n$ in $L(n+1)$ defined by $C_0 = A_0$, $C_i = A_0 - A_i$ $(i \geq 1)$, induces a canonical basis in $G(n+1, 2m, M)$. Its multiplication table, in the case $M = I$, is (see e.g. Campos & Holgate, 1987; eqn (2.4))

$$(C_0^{p_0}C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n})(C_0^{q_0}C_1^{q_1} \cdots C_n^{q_n}) = \binom{2m}{m}^{-1}\binom{p_0+q_0}{m}C_0^{p_0+q_0}C_1^{p_1+q_1} \cdots C_n^{p_n+q_n}.$$

We note the following.

(i) Ker ω is spanned by the set of monomials of degree m in $C_0, C_1, \ldots, C_n$ with the exception of C_0^m.

(ii) $G(n+1, 2m, M)$ is a graded algebra, the component of degree k being spanned by the monomials $C_0^{p_0}C_1^{p_1} \cdots C_n^{p_n}$ for which $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = k$. This is evident from the multiplication table in the case $M = I$. In general, the linear mapping M leaves invariant the subspace of $L(n+1)$ spanned by $C_1, \ldots, C_n$, which will be denoted by $\ker_L \omega$, and hence leaves each component of the grading just described invariant. Thus it is also a grading for $G(n+1, 2m, M)$.

(iii) The automorphisms of $G(n+1, 2m, M)$ are exactly those induced by the symmetric tensor product construction from the affine group of linear transforms of $L(n+1)$ that leave invariant $\ker_L \omega$ (Micali & Revoy, 1986; §4).

We define a vector space homomorphism H to $L(n+1)$ from the space carrying $G(n+1, 2m, M)$ by $H(\prod A_i^{p_i}) = m^{-1} \sum p_i A_i$. In biological terms, if $a \in G(n+1, 2m, M)$ is the distribution of gametic types, $H(a) \in L(n+1)$ is the distribution of allelic proportions that it implies. From the definition of products, we have the following.

(i) $H(aM) = H(a)M$.
(ii) $H(ab) = \frac{1}{2}[H(a) + H(b)]$, and in particular $H(a^2) = H(a)$.
(iii) $H(a * b) = H(aM \cdot bM) = \frac{1}{2}[H(aM) + H(bM)] = \frac{1}{2}H(a+b)M = H(ab)M$.
In particular,

$$H(a * a) = H(a)M. \tag{3.3}$$

THEOREM

(*i*) *The algebra* $G(n+1, 2, M)$ *is a* kth*-order Bernstein algebra if and only if* $M^k = M^{k+1}$, $M^j \neq M^{j+1}$ $(j = 1, \ldots, k-1)$.

(*ii*) *The algebra* $G(n+1, 2m, M)$ $(m > 1)$ *is a* k-th *order Bernstein algebra for some* $k \leq n$ *if and only if* 0 *is a characteristic root of* M *with multiplicity* n.

Proof. In $G(n+1, 2, I)$, every element d of weight 1 (i.e. every element that is mapped into 1 by ω) is idempotent. Hence its jth plenary power in $G(n+1, 2, M)$ is $d^{*[j]} = dM^{j-1}$. The assertion (i) follows immediately.

Now consider part (ii). Assume that 0 is a characteristic root of M with multiplicity n. A mutation matrix is just a transition matrix of a finite discrete Markov chain. This type of matrix has 1 as one of its eigenvalues. The characteristic polynomial of M is then $x^n(x-1)$. By analogy with Markov chain theory, an allele A_i will be called transient if there is another allele A_j such that A_i can mutate to A_j in a finite number of steps, but the reverse mutation is not possible. Otherwise A_i will be called persistent. Suppose that there are s transient alleles. Then

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

where M_{22} is the submatrix corresponding to the transient allelic subset. The characteristic roots of M are those of M_{11} together with those of M_{22}, and clearly the single nonzero (unit) root must belong to M_{11}. Hence we have $M_{22}^s = 0$. Thus, after s generations, the allelic distribution is concentrated entirely on the persistent alleles. The evolution after that is described by the subalgebra obtained by deleting the transient alleles, for which M_{11} is the mutation matrix. Therefore it is sufficient to study the case where there are no transient alleles, i.e. the irreducible case. Under our conditions, M must be aperiodic. This follows because the number of characteristic roots of unit modulus of a periodic Markov matrix is at least equal to its period. Hence, by the results of Brosh & Gerchak (1978: theorem 3, (1) $\leftrightarrow$ (2)), our conditions are equivalent to the existence of an allelic distribution element π such that for any allelic distribution vector c we have $cM^k = \pi$. For every i $(1 \leq i \leq n)$, we have $C_iM^k = A_0M^k - A_iM^k = \pi - \pi = 0$. Hence $dM^k = 0$ for $d \in \ker_L \omega$ since $\ker_L \omega$ is spanned by $C_1, \dots, C_n$.

Let us define $K_0 = \ker_L \omega$, $K_1 = K_0M$, $K_2 = K_1M = K_0M^2, \dots, K_{k-1} = K_0M^{k-1}$, $K_k = K_0M^k = 0$. We now choose a basis for $L(n+1)$,

$$d_{00}, d_{11}, \dots, d_{1j_1}, d_{21}, \dots, d_{2j_2}, \dots, d_{k-1,1}, \dots, d_{k-1,j_{k-1}},$$

such that $d_{ij} \in K_i/K_{i+1}$ (as a quotient vector space) for $i = 1, \dots, k-1$. The contractive effect of M on $L(n+1)$ is expressed by

$$d_{ij}M = \sum_{u=i+1}^{k-1} \sum_{v} x_{uv} d_{uv}.$$

An element that represents a gametic distribution can be written in terms of the canonical basis,

$$d = \sum x_p d_{00}^{p_{00}} d_{11}^{p_{11}} \cdots d_{k-1,t}^{p_{k-1,t}},$$

where $t = j_{k-1}$ and $p = (p_{00}, p_{11} \cdots p_{k-1,t})$. Note that d starts with the term d_{00}^m. Suppose that d only involves powers of those d_{ij} with $i \geq u$. Then dM will only involve powers of d_{ij} with $i \geq u+1$. We now make use of the facts that the change to the basis in the d_{ij} does not alter the multiplication table and that $d * d = (dM)^2$. Consider the evaluation of $d^{*[k+1]}$. It will begin with the term $(d_{00}^m)^{*[k+1]}$, and potentially contain other terms arising as products in the $*$ multiplication involving the terms from $d - d_{00}^m$. But each of these is a $(k+1)$-fold product, and hence through the k-fold action of M, it vanishes. Thus after $k+1$ generations we have $d^{*[k+1]} = (d_{00}^m)^{*[k+1]}$. Moreover, $d^{*[k+2]} = (d^{*2})^{*[k+1]} = (d_{00}^m)^{*[k+1]}$. This proves that $G(n+1, 2m, M)$ is a kth-order Bernstein algebra, if there are no transient alleles.

We now prove the converse. On iterating identity (3.3), we find that $H(d^{*[j]}) = H(d)M^{j-1}$. Since we are assuming that $G(n+1, 2m, M)$ is a kth-order Bernstein algebra $d^{*[k+2]} = d^{*[k+1]}$. Thus $H(d)M^{k+1} = H(d)M^k$ and, since d is an arbitrary gametic distribution, we have $M^{k+1} = M^k$. In biological terms, the stationarity of the distribution of gametes implies the stationarity of the distribution of allelic proportions. This implies that all characteristic roots of M are 1 or 0. If the conditions of the theorem are not satisfied, the multiplicity of 1 as a characteristic root must be at least 2. Appealing to the ergodic theory of finite Markov chains, and noting that the powers of M are not periodic, we deduce that the set of alleles must be separable into a number of subsets $S_1, S_2, \ldots$ such that any allele in S_i will only produce alleles in S_i, no matter how many times the transformation M is applied (i.e. how many generations occur). These correspond to the 'recurrent' or 'persistent' sets of Markov chain theory, and there may in addition be a set of transient alleles such that it is impossible to obtain them by mutation from any member of a persistent class, but which can mutate into members of persistent classes. Suppose that there are s persistent sets of alleles, but that the transient set is empty. Then the linear transform defined by mapping every allele A_j into the symbol S_i of the persistent set to which it belongs, defines a homomorphism from $G(n+1, 2m, M)$ to $G(s, 2m, I)$. And this latter is not a Bernstein algebra of any order for $m > 1$ as already noticed. Finally, suppose that there are transient alleles. The subalgebra obtained by deleting them is not Bernstein of any order by the previous case, and hence the algebra of the full system cannot be Bernstein of any order.

It is readily seen from the theorem that $G(2, 2m, M)$ is a Bernstein algebra of some order if and only if

$$m = 1 \quad \text{and} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad m \geqslant 1 \quad \text{and} \quad M = \begin{bmatrix} 1-r & r \\ 1-r & r \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant r \leqslant 1).$$

In any case, the equilibrium state is achieved in the second generation. This last fact has been noticed by Gonshor (1960: p. 52). This particular result can also be proved directly as follows. Let

$$M = \begin{bmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{bmatrix}$$

and assume that $G(2, 2m, M)$ is a kth-order Bernstein algebra. Let $c_0, c_1, \ldots, c_m$ denote the canonical basis constructed by Gonshor (1960: theorem 7.1). The algebra $G(2, 2m, M)$ has an idempotent e (Gonshor, 1960: p. 52), $G(2, 2m, M) = \mathbb{R}e \oplus \operatorname{Ker} \omega$, and $\operatorname{Ker} \omega$ is generated by $c_1, \ldots, c_m$. Since $e = c_0 + f$ for some $f \in \operatorname{Ker} \omega$, it follows from the multiplication table that $L^t(c_1) = 2^{-t}(1 - r - s)^t c_1 + x_t$ for $t \geqslant 1$, where L denotes left multiplication by e and x_t is a linear combination of $c_2, \ldots, c_m$. Hence, since $L^{k+1} = \frac{1}{2}L^k$, we have $r + s = 1$ or $r = s = 0$ and the result follows.

4. Discussion

Bernstein (1923) posed the problem of determining all the equations of inheritance at the population level that would be in equilibrium in the second generation. With restriction imposed by the framework of genetics, the problem has been solved by Lyubich (1973).

This paper is concerned with equilibrium after a finite number of generations in polyploid populations with mutation. In Section 3, we have given a characterization of these populations in terms of the mutation rates matrix. The two parts of the Theorem illustrate the two features of a polyploid system that can lead to its achieving exact equilibrium after a finite number of generations. In a diploid system, the effect of random breeding described by the Hardy–Weinberg law is so strong that it is sufficient for mutation to produce any stationary distribution whatsoever of allelic types. In a system of higher ploidy, the stronger requirement of a unique exactly stationary distribution is necessary in order that the superconverging effect of the mutation should overwhelm the merely geometric rate of convergence produced by the breeding system.

Acknowledgements

Part of this paper was written while the second named author was visiting Iowa State University on a grant from the CNPq of Brazil.

References

Abraham, V. M. 1980 Linearizing quadratic transformations in genetic algebras. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **40,** 346–63.

Bernstein, S. 1923 Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel. *C.R. Acad. Sci. Paris* **177,** 581–4.

Brosh, I., & Gerchak, Y. 1978 Markov chains with finite convergence time. *Stochastic Processes Applic.* **7,** 247–53.

Campos, T. M. M., & Holgate, P. 1987 Algebraic isotopy in genetics. *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* **4,** 215–22.

Gonshor, H. 1960 Special train algebras arising in genetics. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **12,** 41–53.

Gonshor, H. 1971 Contributions to genetic algebras. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **17,** 289–98.

Hentzel, I. R., & Peresi, L. A. 1989 Semiprime Bernstein algebras. *Arch. Math.* **52,** 539–43.

Herstein, I. N. 1975 *Topics in Algebra.* New York: Wiley.

Holgate, P. 1975 Genetic algebras satisfying Bernstein's stationary principle. *J. Lond. Math. Soc.* (2) **9,** 613–23.

Lyubich, Yu. I. 1973 Analogues of the Hardy–Weinberg Law. *Sov. Genet.* **9,** 1321–5.

Lyubich, Yu. I. 1978 Algebraic methods in evolutionary genetics. *Biomet. J.* **20,** 511–29.

Lyubich, Yu. I. 1987 A classification of some types of Bernstein algebras. *Sel. Math. Sov.* **6,** 1–14.

Micali, A. & Revoy, P. 1986 Sur les algèbres gamétiques. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **29,** 187–97.

Wörz-Busekros 1980, Algebras in genetics. *Lecture Notes in Biomathematics 36.* New York: Springer.