TABILIDADE ESTATÍSTICA E GRANDES DES-
OS DO PROCESSO DE CONTACTO: UM ESTUDO
COMPORTAMENTO EM TEMPO INTERMEDIÁRIO.

JEFFERSON ANTONIO GALVES

Tese apresentada para Concurso de Livre-Docência junto ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

- São Paulo, Março de 1984

Esta tese foi parcialmente financiada pelo CNPq, Processo nº 301301/79.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO: SISTEMAS MARKOVIANOS COM UMA INFINIDADE DE PARTÍCULAS, ESTADOS INVARIANTES E COMO ELES SE FORMAM 1

CAPÍTULO 2 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES BÁSICAS DO PROCESSO DE CONTACTO 10

CAPÍTULO 3 - A DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE MORTE DO PROCESSO ... 24

CAPÍTULO 4 - ESTABILIDADE DAS MÉDIAS TEMPORAIS 36

BIBLIOGRAFIA 48

Para Charlotte,

companheira de muitas batalhas.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO: SISTEMAS MARKOVIANOS COM UMA INFINIDADE DE PARTÍCULAS, ESTADOS INVARIANTES E COMO ELES SE FORMAM.

1.1. O modelo que estudaremos nesta tese é um exemplo daquilo que se chama usualmente um "Sistema Markoviano com uma Infinidade de Partículas" (ou, mais modernamente, "Sistema Markoviano com uma Infinidade de Componentes"). Trata-se de uma classe de Processos de Markov, cujo estudo tem-se desenvolvido cada vez mais rapidamente, a partir da publicação em 1970 do artigo fundamental de Frank Spitzer, "Interaction of Markov Processes". Este título vale por uma descrição: imaginemos uma seqüência de partículas, cada uma delas evoluindo, ou melhor dizendo, tentando evoluir segundo um certo Processo de Markov, ao qual vem se sobrepor uma interação local, isto é, restrições na evolução possível de cada partícula, devido à presença ou ausência de outras partículas em sua vizinhança. Por exemplo, moléculas de um gás descrevendo Movimentos Brownianos e atraindo-se ou repelindo-se segundo um certo potencial. Ou, então, uma seqüência de neurônios, ou de spins, ou de autômatos, dispostos numa rede (em Z^d), cada um desses elementos podendo estar num determinado estado, escolhido num conjunto finito, ou enumerável, ou mesmo contínuo, de valores, e mudando ao longo do tempo,

aleatoriamente, mas com tendência a assumir um certo valor que depende dos valores dos elementos vizinhos. Enfim, todo tipo de modelo "microscópico" no qual atua uma interação puramente local. O objetivo inicial, definido por Spitzer, é a determinação da ordem global provocada por esta interação a partir de uma certa situação inicial imposta ao sistema. Ou, em outras palavras, a determinação das probabilidades invariantes do processo e de seus domínios de atração. As palavras que estou empregando nesta descrição informal, revelam qual é a fonte longínqua de inspiração da teoria: a Mecânica Estatística. Mostram também suas potencialidades na formulação de modelos em Biologia, em Ecologia, etc.

1.2. Para que a discussão adquira um caráter mais concreto, vamos agora apresentar informalmente dois exemplos importantes de Sistemas Markovianos com uma infinidade de partículas: o Processo de Contacto e o Processo de Exclusão Simples.

Imaginemos que haja partículas dispostas nos pontos de Z^d, sendo que em cada ponto pode haver no máximo uma partícula. O Processo de Exclusão Simples descreve a evolução dessas partículas, supondo que cada uma delas execute, independentemente das demais, um passeio aleatório a tempo contínuo, passeios esses, no entanto, que podem ser bloqueados ao longo do tempo pela seguinte regra de exclusão: uma partícula não pode saltar numa posição já ocupada por outra partícula. Ou, em outras palavras, a partícula situada na posição x espera um tempo aleatório exponencial de média 1, independentemente do que estiver acontecendo com o resto do sistema. Ao cabo desse tempo, ela decide pular para a posição y, com probabilidade $p(x,y)$. Se, no entanto, a posição y já estiver ocupada,

o salto não se realiza. Aí, ela deve recomeçar um novo período de espera de lei exponencial de média 1, independentemente do que acontecer e em seguida escolher uma nova posição z para saltar com probabilidade $p(x,z)$ e assim por diante. Chamemos de $Z(t)$ o conjunto de posições de Z^d ocupadas por partículas no instante t. Se supusermos que $p(\cdot,\cdot)$ é a probabilidade de transição de um passeio aleatório, pode-se mostrar que $Z(t)$, $t \geq 0$ é um Processo de Markov bem definido, qualquer que seja a configuração inicial $Z(0)$.

Os métodos empregados no estudo do Processo de Exclusão Simples estão inteiramente diferentes e alguns resultados são distintos, conforme a probabilidade de transição p seja simétrica (isto é, $p(x,y) = p(y,x)$, quaisquer que sejam x e y) ou não. Vamos, doravante, limitar-nos ao caso simétrico.

Como no processo de exclusão simples não há nem criação nem destruição de partículas, a densidade do sistema mantém-se constante. Fazendo uma analogia com a Termodinâmica, pode-se dizer que o sistema evolui numa superfície de "energia" constante. E aí a Segunda Lei da Termodinâmica nos lembra que a "entropia" do sistema deve aumentar ao longo do tempo. Em outras palavras, o sistema deve ir para configurações cada vez mais desordenadas.

Liggett e Spitzer deram um conteúdo matemático a esta descrição. Eles demonstraram que, se $X(o)$ for uma configuração fixada, com uma densidade p bem definida, ou se $X(o)$ for uma configuração aleatória com densidade e com suficiente independência entre pontos distantes, então $X(t)$ converge em distribuição, quando $t \to +\infty$, para a medida produto de Bernoulli de densidade p. Lembro que a medida produto de Bernoulli de densidade p dá a cada ponto a pro

babilidade p de ser ocupado, independentemente da situação de ocupação dos demais pontos do espaço. Esta é evidentemente a maneira mais caótica possível de se construir uma configuração de partículas em Z^d, com densidade p fixada. Liggett e Spitzer demonstraram também que todas as probabilidades invariantes do processo são combinações lineares de medidas produto de Bernoulli de parâmetro p, com $0 \leq p \leq 1$. Isso completa o programa inicial de pesquisa, tal como Spitzer o formulou em 1970, no que concerne o Processo de Exclusão Simples Simétrico.

Passemos agora ao Processo de Contacto. Também neste modelo diremos que há partículas dispostas em Z^d, uma no máximo em cada ponto. Mas agora poderá haver criação ou desaparecimento de partículas. A dinâmica é a seguinte: cada partícula, independentemente das demais, aguarda um tempo aleatório exponencial de parâmetro constante, ao cabo do qual desaparece, com probabilidade $1 / 1+d\lambda$, ou, com probabilidade $d\lambda / 1+d\lambda$, permanece na configuração, ao mesmo tempo colocando uma nova partícula numa das 2d posições vizinhas, escolhida com probabilidade $1 / 2d$. No entanto, e é aqui que a interação se manifesta, caso a posição escolhida já esteja ocupada por uma partícula, nada acontecerá, a nova partícula não poderá ser colocada, o sistema permanecerá como estava. Em outras palavras, pode-se pensar no Processo de Contacto como um sistema de Processos de Ramificação no qual o nascimento de cada novo indíviduo é condicionado pela disponibilidade de espaço.

Chamemos agora de $X(t)$ o conjunto de posições de Z^d ocupadas, no instante t, por partículas evoluindo da maneira descrita acima. Como não há aparecimento espontâneo de partículas, isto

é, cada nova partícula tem necessariamente que ser engendrada por uma partícula pré-existente, a configuração ϕ é necessariamente invariante. O problema é saber se há outras situações invariantes. Naturalmente, o parâmetro λ desempenha aqui um papel crucial, já que ele determina quem tem maior peso: criação ou destruição. Uma simples majoração por um sistema de Processos de Ramificação independentes entre si mostra que, se $\lambda < \frac{1}{2d}$, então o processo $X(t)$ converge em distribuição, quando $t \to +\infty$, para a probabilidade de Dirac dando peso 1 à configuração vazia qualquer que seja a configuração inicial $X(0)$ (a convergência à qual nos referimos é em relação à topologia fraca de medidas de probabilidade).

Pode-se também demonstrar que existe um valor crítico λ_*, $0<\lambda_*<+\infty$, que depende da dimensão d e que é tal que se $\lambda>\lambda_*$, então o Processo de Contacto admite, além da delta de Dirac na configuração vazia, uma outra probabilidade invariante extremal μ. Ela é obtida deixando-se evoluir o sistema a partir da configuração inicial tendo partículas em todos os pontos (isto é, $X(0)=Z^d$). É também possível demonstrar que em muitos casos, em que a configuração inicial é infinita, a lei do processo converge fracamente para μ. Em particular em dimensão 1 isso acontece qualquer que seja a configuração inicial infinita considerada. Por outro lado, se ela for finita, haverá convergência do processo para uma combinação linear das duas probabilidades extremais.

Tanto no caso do Processo de Exclusão Simples Simétrico, quanto no caso do Processo de Contacto, o que acabamos de fazer foi descrever os estados de equilíbrio alcançados pelo sistema ao cabo de um tempo muito longo. (Aqui a palavra estado foi usada co

mo sinônimo de "probabilidade invariante do processo", que é o seu sentido fundamental em Mecânica Estatística e quando digo fundamental, penso em Boltzmann.)

Descritos estados de equilíbrio e comportamento assintótico do sistema, a pergunta que vem à baila é: como é que esse equilíbrio se forma, ou em outras palavras, qual é o comportamento do sistema em tempos intermediários? É desta pergunta que nos ocuparemos nesta tese.

1.3. Para ilustrar essa pergunta, apresentaremos inicialmente um modelo muito simples sugerido pelo artigo [7] . Imaginemos um Processo de Exclusão Simples Simétrico restrito ao conjunto $\{x \in Z : |x| \leq N\}$, sendo N um número inteiro positivo fixado. Suponhamos que nas extremidades do intervalo possa haver destruição de partículas em instantes aleatórios. Mais precisamente suponhamos que haja um Processo Pontual de Poisson homogêneo, marcando instantes de tempo, independentemente da evolução do Processo de Exclusão. Em cada um desses instantes, se houver uma partícula situada no ponto N ela será destruída. Simetricamente um outro processo pontual de Poisson comandará, independentemente do primeiro, a destruição de partículas no ponto -N.

Suponhamos agora que, no instante inicial, todos os pontos estejam ocupados por partículas. É claro que o sistema convergirá finalmente, quando o tempo for para infinito, para a configuração vazia. Mas além disso, uma mudança de escala adequada no espaço e no tempo mostrará que o sistema percorrerá sucessivamente toda a família de estados invariantes do processo, começando pela medida de Bernoulli ν_1, descendo pela família ν_p, com $1>p>0$, até

chegar a ν_0.

Esse tipo de descrição tem sido chamado de estudo do Comportamento Hidrodinâmico do Processo de Exclusão Simples. Nos últimos três anos essa linha de pesquisa tem-se desenvolvido bastante sob a influência das idéias de R.L.Dobrushin, J.Lebowitz, E.Presutti e H.Spohn. Ela tem como motivação direta a Mecânica Estatística de sistemas não em equilíbrio. (Assinalo, de passagem, a excelente resenha [3] , texto de referência básico para todos que se interessam por esta linha de pesquisa).

1.4. Façamos agora a mesma análise para o Processo de Contacto unidimensional, com o parâmetro $\lambda>\lambda_*$, porém restrito ao conjunto $\{x \in Z : |x|\leqslant N\}$, com N bastante grande. Suponhamos que no instante inicial todas as posições estejam ocupadas por partículas. Neste caso também o sistema convergirá assintoticamente para a configuração vazia. Porém a sua maneira de atingir esse equilíbrio derradeiro é radicalmente diversa daquela do Processo de Exclusão. Aqui, em vez de decrescimento contínuo para o vazio, o que veremos é um salto brusco ao cabo de um tempo muito longo e inteiramente imprevisível.

No começo, muito rapidamente, o interior do sistema se estabilizará no estado de equilíbrio μ, exatamente como, se em vez de estar num conjunto finito, ele estivesse em Z. Cada partícula se sente em equilíbrio, a densidade local se mantém pela criação constante de novas partículas. No entanto, essa tendência para a expansão é barrada nas fronteiras que são fixas e fora das quais não se pode criar novas partículas. De tempos a outros uma flutuação um pouco maior para baixo ameaça o sistema de extinção. No en

tanto, por pouco que sobrem partículas, a tendência à expansão volta a predominar e o interior do sistema volta a estabilizar-se em torno de sua falsa situação de equilíbrio. O desaparecimento de todas as partículas é um evento pouquíssimo provável. Assim, ele acontecerá somente ao cabo de um tempo muito longo, como o tempo necessário para sair cara pela primeira vez, numa moeda muito viciada em favor da coroa. É esse fenômeno que nós estudaremos nesta tese. Ele apresenta duas facetas: estabilidade estatística em torno de um falso estado invariante e finalmente salto brusco e totalmente imprevisível, isto é, da lei exponencial, para atingir o equilíbrio final.

1.5. Para terminar esta introdução, convém situar esta análise no quadro atual da pesquisa em Processos Estocásticos e em Mecânica Estatística. O fenômeno que descrevemos na secção anterior pertence sem dúvida à problemática geral de Teoria dos Grandes Desvios desenvolvida por Freidlin e Wentzell [6] . Isso muito embora a maneira de formular os problemas não seja a mesma e as técnicas utilizadas serem totalmente diferentes. Na verdade, a teoria de Freidlin e Wentzell sintetizada em [6] tratou até agora basicamente de sistemas dinâmicos em dimensão finita, perturbados por um ruído aleatório, o único estudo de sistema em dimensão infinita sendo o artigo [5] . Assim, nosso estudo de um processo estocástico com uma estrutura espacial complexa, como é o caso do Processo de Contacto, é sem dúvida um avanço na teoria. No entanto, a teoria nos fornece ao menos uma pergunta que nossa técnica atual é incapaz de resolver, a saber, uma descrição detalhada da última flutuação do processo.

Devo mencionar também a relação com a problemática da Metaestabilidade de sistemas não em equilíbrio. No artigo [2] , M. Cassandro, E.Olivieri, M.E.Vares e eu sugerimos que comportamentos do tipo descrito na secção anterior podem ser pertinentes na compreensão do fenômeno físico da Metaestabilidade. Trata-se de uma proposta em plena discussão e seu futuro dependerá, sem dúvida, da análise de processos mais complicados do que a Dinâmica de Curie-Weiss, o Processo de Contacto, ou Sistemas Dinâmicos Perturbados. Aqui o verdadeiro desafio é o Modelo Estocástico de Ising em duas dimensões, o qual, por sua complexidade ainda está possivelmente fora do alcance atual da pesquisa

Não poderia, neste texto, deixar de reconhecer minha dívida científica em relação a Marzio Cassandro, Enzo Olivieri, Errico Presutti, Roberto Schonmann, Herbert Spohn, Hermann Rost e Maria Eulália Vares. Se eu tenho alguma compreensão dos fenômenos estudados aqui e das técnicas para tratá-los, foi na discussão permamente e calorosa e na colaboração com eles que a adquiri. A cantiga de capoeira pergunta: Menino, quem foi teu Mestre? E eu respondo: com meus amigos eu aprendi, a meus amigos eu ensinei.

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES BÁSICAS DO PROCESSO DE CONTACTO

Parece-nos conveniente separar claramente nesta tese nossos resultados originais que serão apresentados nos capítulos 3 e 4, dos resultados já conhecidos referentes ao Processo de Contacto. Assim, este capítulo será dedicado inteiramente a uma recapitulação da definição e das propriedades básicas do Processo de Contacto, de maneira a preparar o que vem depois. Tratando-se de resultados já quase "clássicos", eles serão simplesmente enunciados. Maiores detalhes podem ser encontrados na literatura consagrada a este assunto nos últimos anos, a começar pelos artigos fundamentais de T.E.Harris "Contact interactions on a lattice" (Ann. Probability 2, 1974, p.969-988) e "Additive set valued Markov Processes and graphical methods" (Ann. Probability 6, 1978, p.355-378). O artigo de D.Griffeath "The basic Contact Processes" (Stochastic Processes and their applications 11, 1981, p.151-185) contém a melhor resenha do assunto disponível.

O Processo de Contacto é um exemplo de Sistema Markoviano com uma Infinidade de Componentes aditivo. O problema básico da construção de Processos Aditivos em geral é tratado num artigo que Françoise Bertein e eu escrevemos em 1977: "Une classe de systèmes

de particules stable par association" (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw, Geb. 41, 1978, p.73-85). Uma apresentação geral dos Processos Aditivos pode ser encontrada no curso de D. Griffeath: "Additive and Cancellative interacting particle systems" (Lecture Notes in Mathematics, 724, Springer).

2.1. O Processo de Contacto básico unidimensional é um Processo de Markov a tempo contínuo assumindo valores no conjunto $P(Z)$ dos subconjuntos de Z.

A maneira mais simples de apresentá-lo é através de um gráfico aleatório definido no conjunto "espaço × tempo" $Z \times \mathbb{R}_+$ da seguinte maneira. Para cada x em Z, sejam $(\vec{S}_n^x,\ n=1,2,\ldots)$, $(\overleftarrow{S}_n^x,\ n=1,2,\ldots)$ e $(\overset{+}{S}_n^x, n=1,2,\ldots)$ três Processos Pontuais de Poisson em R_+, independentes entre si e de parâmetros respectivamente λ, λ e 1 (isto é, as variáveis aleatórias $\vec{S}_1^x$, $\vec{S}_2^x - \vec{S}_1^x$, ..., são independentes entre si, identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$, etc ...). Vamos supor também que os diversos processos obtidos variando-se x em Z sejam todos independentes entre si.

Seja (Ω, A, P) o espaço de probabilidades sobre o qual estão definidos todos esses processos pontuais de Poisson. Basta eliminar previamente um evento de probabilidade nula, para podermos supor que qualquer que seja $\omega \in \Omega$, $\overset{\cdot}{S}_n^x(\omega) \neq \overset{*}{S}_m^y(\omega)$, quaisquer que sejam x e y em Z, $n \geq 1$ e $m \geq 1$ e $\cdot$ e $*$ escolhidos entre os símbolos $\rightarrow$, $\leftarrow$ e $+$, desde que $(\cdot, x, n) \neq (*, y, m)$.

Nessas condições, podemos sem ambiguidade para cada $\omega \in \Omega$ definir um gráfico em $Z \times \mathbb{R}_+$ da seguinte maneira: para cada $x \in Z$, para cada $n \geq 1$, desenhamos uma flecha orientada de $(x, \vec{S}_n^x(\omega))$ a

$(x+1,\vec{S}^{x}_{n}(\omega))$, uma flecha orientada de $(x,\vec{S}^{x}_{n}(\omega))$ a $(x-1,\vec{S}^{x}_{n}(\omega))$, e uma cruz no ponto $(x,\overset{+}{S}{}^{x}_{n}(\omega))$ (veja figura 2.1).

Esse gráfico desenhado, dados x e y em Z e s e t em $\mathbb{R}_+$, com s<t, diremos que na realização ω há um caminho indo de (x,s) a (y,t) se no gráfico correspondendo a ω for possível partir de (x,s) e chegar a (y,t) percorrendo apenas segmentos verticais de baixo para cima (isto é, a abcissa da posição só cresce durante todo o percurso) e flechas horizontais, sem nunca contrariar o sentido das flechas e sem nunca atravessar verticalmente uma cruz (veja figura 2.2).

Usaremos a notação $(x,s) \overset{\omega}{\to} (y,t)$ para indicar que, na realização ω, há um caminho de (x,s) a (y,t).

Observo de passagem que $\overset{\omega}{\to}$ define uma relação de ordem parcial em $Z \times \mathbb{R}_+$ que pode ser estendida naturalmente a uma relação em $P(Z) \times \mathbb{R}_+$.

Dados, então, $\omega \in \Omega$, $x \in Z$ e s e t em $\mathbb{R}_+$, definimos o conjunto ${}_sX^x_t(\omega) \subset Z$ da seguinte maneira:

$$ {}_sX^x(t,\omega) = \{y \in Z = (x,s) \overset{\omega}{\to} (y,s+t)\} $$

e naturalmente ${}_sX^x(0,\omega) = \{x\}$.

Convém observar que para ω fixado, s fixado e x fixado, o conjunto ${}_sX^x(t,\omega)$ não está bem definido num conjunto enumerável de valores de t, a saber, para os valores de t, tais que, $s+t = \dot{S}^{y}_{n}$ para algum $n \geq 1$, para algum valor de $\cdot$ escolhido dentre os símbolos $\to$, $\leftarrow$ e $+$ e para algum $y \in {}_sX^x(t-,\omega)$. Eliminamos a ambiguidade, definindo ${}_sX^x(t,\omega)$ nesses pontos como $\lim_{\substack{u\to 0 \\ u>0}} {}_sX^x(t+u,\omega)$.

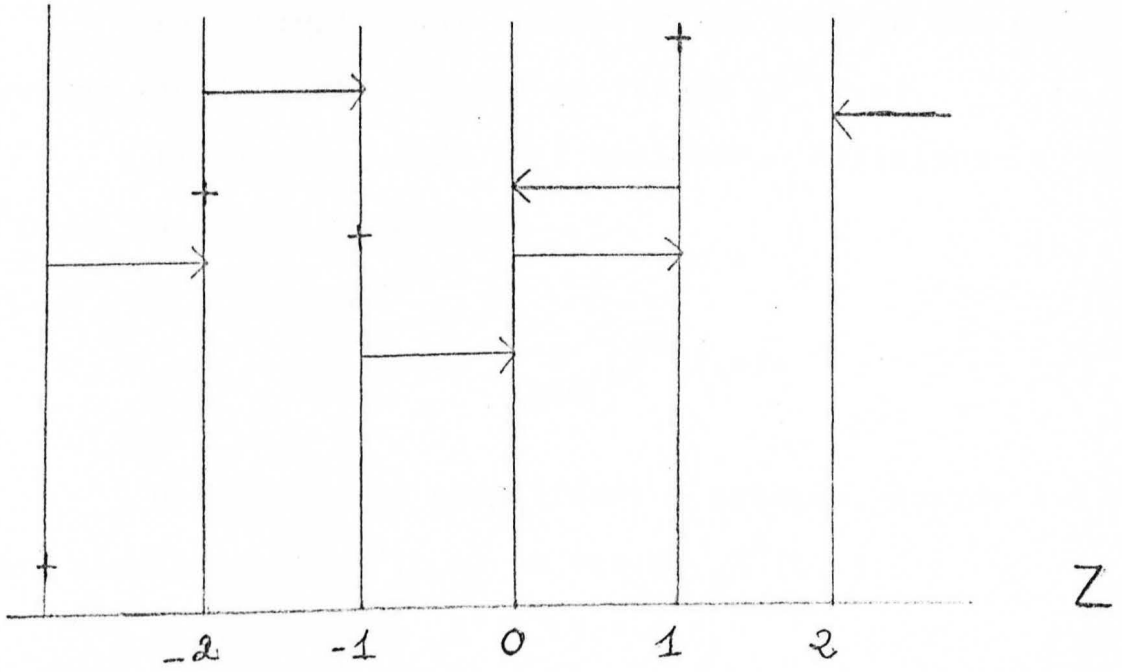

Figura 2.1

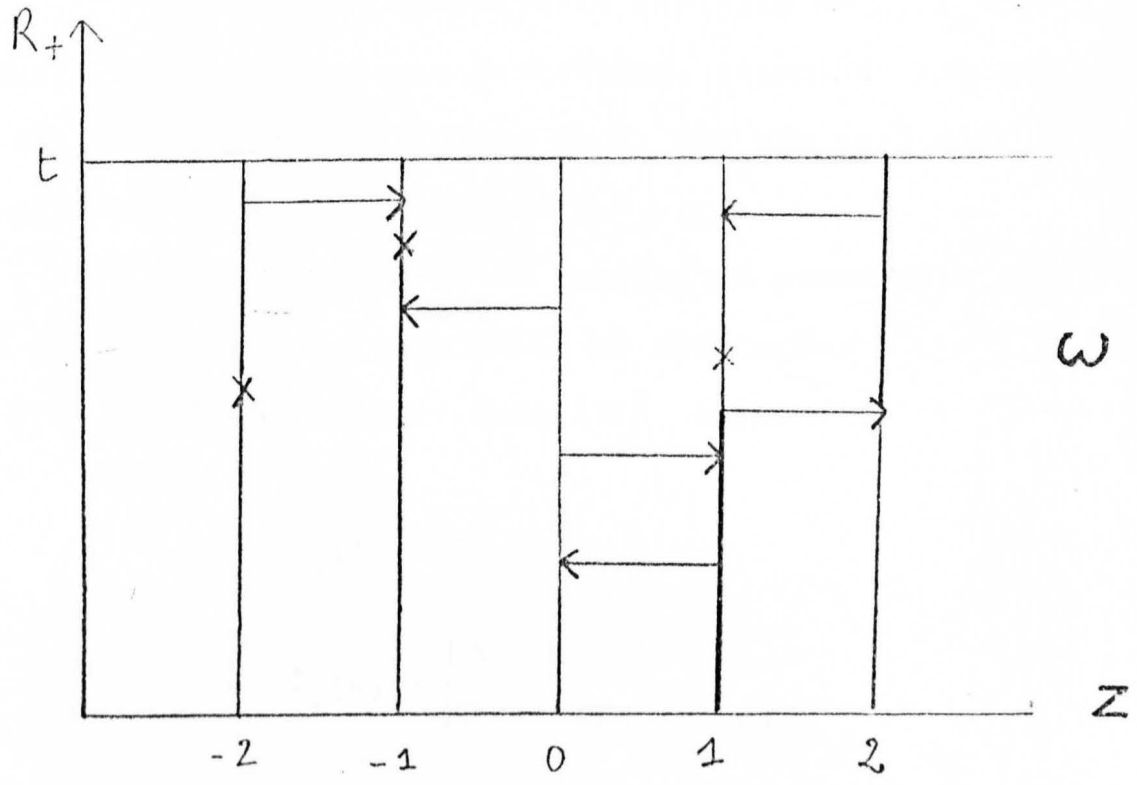

Figura 2.2

Neste gráfico $(1,0) \overset{\rightarrow}{\omega} (2,t)$, porém não há nenhum caminho indo de $(1,0)$ a $(-1,t)$.

Para simplificar a notação, no caso em que s=0 nós escrevemos simplesmente $X^x(t,\omega)$ em vez de ${}_0X^x(t,\omega)$.

Finalmente, dado $A \subset Z$ qualquer, definimos o conjunto ${}_sX^A(t,\omega)$ da seguinte maneira:

$$ {}_sX^A(t,\omega) = \bigcup_{x\in A} {}_sX^x(t,\omega). $$

De novo, para simplificar a notação, quando s=0 escreveremos simplesmente $X^A(t,\omega)$ em vez de ${}_0X^A(t,\omega)$.

Evidentemente ${}_sX^{\phi}(t,\omega) = \phi$.

É fácil ver que se A for finito, então $({}_sX^A(t))_{t\geq 0}$ é um Processo Markoviano de Saltos assumindo valores no conjunto dos subconjuntos finitos de Z.

Se A for um subconjunto infinito de Z, $({}_sX^A(t))_{t\geq 0}$ continuará sendo um Processo Markoviano, assumindo valores no conjunto dos subconjuntos infinitos de Z, mas não será mais um processo de saltos.

Para descrevê-lo de maneira um pouco mais analítica, vamos introduzir, para cada $x \in Z$, as aplicações $\overset{+}{\pi}{}^x$, $\overset{\rightarrow}{\pi}{}^x$, $\overset{\leftarrow}{\pi}{}^x$, de $P(Z)$ em $P(Z)$, assim definidas: dado $A \subset Z$, então

$$ \overset{+}{\pi}_x(A) = A \setminus \{x\} $$

$$ \overset{\rightarrow}{\pi}_x(A) = \begin{cases} A, & \text{se } x \notin A \\ A \cup \{x+1\}, & \text{se } x \in A \end{cases} $$

$$ \overset{\leftarrow}{\pi}_x(A) = \begin{cases} A, & \text{se } x \notin A \\ A \cup \{x-1\}, & \text{se } x \in A \end{cases} $$

Vamos notar como $(\dot{N}^x(t), t\geqslant 0)$ a função de contagem do Processo Pontual de Poisson $(\dot{S}^x_n, n\geqslant 1)$ isto é, $\dot{N}^x(t) = n$, se $\dot{S}^x_n \leqslant t < \dot{S}^x_{n+1}$, qualquer que seja $t\geqslant 0$.

Nessas condições, o Processo de Contacto $X^A(t)$, $t\geqslant 0$, é bem caracterizado pelo seu valor incial A e por satisfazer a equação:

$$f(X^A(t,\omega)) = \sum_{x\in Z} \sum_{\cdot = \rightarrow,\leftarrow,+} \int_0^t \dot{L}_x f(X^A(s-,\omega))\, d\dot{N}^x(s,\omega),$$

onde $\dot{L}_x f = c(\cdot)\,[f \circ \dot{\pi}_x - f]$,

$c(\rightarrow) = c(\leftarrow) = \lambda$ e $c(+) = 1$,

quaisquer que sejam $t>0$, $\omega \in \Omega$ e qualquer que seja a função cilíndrica $f : P(Z) \to P(Z)$. (Diremos que f é cilíndrica se existir um subconjunto <u>finito</u> $M \subset Z$, tal que, $f(A) = f(A \cap M)$, qualquer que seja $A \subset Z$).

A partir daí segue-se imediatamente que, para toda função f cilíndrica, o processo

$$f(X^A(t)) - \sum_{x\in Z} \sum_{\cdot = \rightarrow,\leftarrow,+} \int_0^t \dot{L}_x f(X^A(s))\, ds, \quad t\geqslant 0$$

é um Martingal com respeito à filtração natural, ou, se preferirmos, que $\sum_{x\in Z} \sum_{\cdot = \rightarrow,\leftarrow,+} \dot{L}_x$ é o gerador infinitesimal do Processo de Contacto.

Da mesma maneira como contruímos o Processo de Contacto assumindo valores em $P(Z)$, poderíamos tê-lo construído assumindo valores em $P(C)$, o conjunto das partes de um subconjunto C fixado de Z. Nesta tese nós estudaremos o caso em que

$$C = \{x \in Z : |x| \leqslant N\},$$

sendo N um inteiro positivo. Também deveremos considerar o caso em que $C = \{x \in Z : x \leq N\}$.

Fixado um número inteiro positivo N, o Processo de Contacto assumindo valores no conjunto $P(\{x \in Z : |x| \leq N\})$ é construído utilizando-se apenas Processos Pontuais de Poisson indexados por $x = -N, -N+1, \ldots, N-1, N$. Para $x = -N$ só utilizamos $(\vec{S}_n^{-N})$ e $(\overset{+}{S}_n^{-N})$ (isto é, uma partícula situada no ponto -N só pode desaparecer ou criar uma nova partícula no vizinho -N+1. Não há possibilidade de criação de partículas na posição -N-1.). Simetricamente, para $x=N$, utilizaremos apenas os Processos Pontuais de Poisson $(\overleftarrow{S}_n^{N})$ e $(\overset{+}{S}_n^{N})$.

Finalmente partículas situadas nos pontos internos do interno poderão criar novas partículas nas duas posições vizinhas, além de morrer, isto é, nós utilizaremos os Processos Pontuais de Poisson $(\dot{S}_n^{x})$, com $|x| \leq N-1$ e $\cdot = \rightarrow, \leftarrow, +$. Os processos assim construídos serão indicados pela notação ${}_sX_N^A(t,\omega)$ e $X_N^A(t,\omega)$, se $s = 0$.

Convém notar que o processo $\dot{X}_N(t)$, $t \geq 0$, é um Processo Markoviano de Saltos assumindo valores no conjunto finito $P(\{x \in Z : |x| \leq N\})$. Ele evolui da seguinte maneira: em cada configuração B, isto é, em cada elemento $B \subset \{x \in Z : |x| \leq N\}$, com $B \neq \phi$, ele permanecerá um tempo exponencial de parâmetro

$$q(B) = |B| + \lambda \sum_{x=-N}^{N} \left[1 - 1_B(x)\right] \left[1_B(x+1) + 1_B(x-1)\right] .$$

Convém notar que na somatória os termos correspondendo a $x = \pm N$, podem valer apenas 0 ou 1.

Em seguida, quando salta, passa de B a uma nova configuração C, com probabilidade Q(B,C) assim definida:

$$Q(B,C)=\begin{cases}\dfrac{1}{q(B)}\ , \text{ se } C=B\setminus\{x\}, \text{ para algum } x\in B\\[2ex]\dfrac{\lambda\left[1_B(x+1)+1_B(x-1)\right]}{q(B)}\ , \text{ se } C=B\cup\{x\}, \text{ para algum } x\notin B,\\[2ex]0, \text{ em caso contrário.}\end{cases}$$

A descrição da lei do processo estará completa se observarmos que a configuração ϕ é um ponto absorvente.

Quanto ao Processo do Contacto restrito ao conjunto $P(\{x\in Z : x\leq N\})$, ele é construído utilizando-se apenas os Processos Pontuais de Poisson $(\dot{S}_n^x)$, com $x<N$, $\cdot=\rightarrow,\leftarrow,+$, (S_n^{+N}) e $(S_n^{\leftarrow N})$. Para designá-lo utilizaremos a notação ${}_sY_N^A(t)$ e $Y_N^A(t)$, se $s=0$.

Finalmente teremos a ocasião de utilizar o Processo de Contacto em $P(Z)$ com contágio apenas para um lado. Chamaremos de $\overrightarrow{X}^A(t)$ o processo construído utilizando-se apenas os Processos Pontuais de Poisson $(S_n^{\rightarrow x})$ e (S_n^{+x}), $x\in Z$. Simetricamente, chamaremos de $\overleftarrow{X}^A(t)$ o processo construído com a ajuda apenas de $(S_n^{\leftarrow x})$ e (S_n^{+x}).

Concluiremos esta seção estabelecendo duas conversões referentes à notação empregada:

dado $A\subset Z$ escreveremos $X_N^A(t)$ e $Y_N^A(t)$

para designar $X_N^{A\cap[-N,N]}(t)$ e $Y_N^{A\cap(-\infty,N]}(t)$, respectivamente. Finalmente nós deixaremos de indicar a configuração inicial (isto é, o símbolo superior da notação), quando esta for o conjunto completo, isto é, escreveremos $X(t)$ em vez de $X^Z(t)$, $X_N(t)$ em vez de $X_N^{\{-N,\ldots,N\}}(t)$, etc.

Essas duas convenções se estenderão aos diversos tempos de parada definidos pelos processos.

2.2. Pela própria construção, há algumas relações que são verificadas, para cada $\omega \in \Omega$, pelas diversas famílias de processos que acabamos de introduzir. A começar pela propriedade que justifica o adjetivo aditivo que é utilizado para designar o Processo de Contacto e seus congêneres: quaisquer que sejam A e B, qualquer que seja $\omega \in \Omega$: $X^{A \cup B}(t,\omega) = X^{A}(t,\omega) \cup X^{B}(t,\omega)$, o mesmo valendo para os demais tipos de processos definidos em 2.1.

É fácil ver também que $\vec{X}^{A}(t,\omega) \subset X^{A}(t,\omega)$ e que

$$X_N^A(t,\omega) \subset Y_N^A(t,\omega) \subset X^A(t,\omega).$$

Mais precisamente, como estamos em uma dimensão espacial e como cada partícula só pode produzir descendentes nos dois pontos vizinhos imediatos, as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$X_N^A(t,\omega) = Y_N^A(t,\omega) \cap \left[\min X_N^A(t,\omega),\ \max X_N^A(t,\omega)\right] =$$

$$= X^A(t,\omega) \cap \left[\min X_N^A(t,\omega),\ \max X_N^A(t,\omega)\right],$$

desde que $X_N^A(t,\omega) \neq \phi$.

A demonstração dessas igualdades faz-se nos mesmos moldes que o lema 3.2, onde, aliás, o leitor encontrará uma lista de resultados correlatos intervindo nas demonstrações dos Teoremas 1 e 2.

2.3. A medida de probabilidade dando massa à configuração ϕ é naturalmente invariante com respeito a qualquer um dos processos definidos em 2.2. A questão básica que se coloca em seguida é a de saber se esses processos admitem alguma outra probabilidade invariante. Uma idéia natural seria partir da configuração na qual todos os pontos estejam ocupados por partículas, e ver se, assintoticamente no tempo, há uma estabilização do sistema em torno de um estado no qual haja coexistência entre posições vazias e posições ocupadas por partículas.

Demonstrar que há convergência é fácil. Basta repararmos na forma particular que a propriedade de Markov assume no caso dos processos definidos em 2.2. Com efeito, quaisquer que sejam A, ω, s e t, temos que:

$$X^A(t+s,\omega) = {}_sX^{X^A(s,\omega)}(t,\omega).$$

Em particular se A = Z:

$$X(t+s,\omega) = {}_sX^{X(s,\omega)}(t,\omega) \subset {}_sX(t,\omega)$$

(seguindo a convenção estabelecida no final da secção anterior, omitimos o índice superior Z).

Assim, se $f:P(Z)\to\mathbb{R}_+$ for uma função cilíndrica crescente (isto é, se $A\subset B$, então $f(A)\leq f(B)$), teremos que

$$E\left[f(X(t+s))\right] \leq E\left[f({}_sX(t))\right] = E\left[f(X(t))\right],$$

(a última igualdade decorrendo da igualdade em lei entre ${}_sX(t)$ e $X(t)$). Demonstramos assim a existência do $\lim_{t\to\infty} E[f(X(t))]$, qualquer que seja f cilíndrica, monótona, positiva. Seja μ a medida de probabilidade invariante caracterizada por esses limites.

A dificuldade real consiste em demonstrar que existe um valor λ_*, com $0<\lambda_*<\infty$, tal que, se $\lambda>\lambda_*$, então a medida μ correspondente é diferente de δ_ϕ. Isso foi feito inicialmente por Harris em [9].

Naturalmente o mesmo pode ser feito para os processos $\vec{X}(t)$ e $Y_N(t)$. Chamaremos de $\vec{\lambda}_*$ o parâmetro crítico, tal que, se $\lambda>\vec{\lambda}_*$, então $\lim_{t\to\infty} \vec{X}(t) = \vec{\mu} \neq \delta_\phi$ (cf. [9]). Finalmente, se $\lambda>\lambda_*$ (onde λ_* é o parâmetro crítico de $X(t)$), $\lim_{t\to\infty} Y_N(t) = \nu_N \neq \delta_\phi$ (cf. [4]). O leitor já terá imaginado que

$$\nu_N(A\subset Z\cap(-\infty,N] : A\cap[N-k,N-\ell] = \phi) =$$

$$= \nu_o(A\cap Z\cap(-\infty,0] : A\cap[-k,-\ell] = \phi)$$

quaisquer que sejam k, ℓ inteiros positivos com $\ell<k$.

O conjunto das probabilidades invariantes <u>extremais</u> de $X(t)$ (respectivamente, $\vec{X}(t)$ e $Y_N(t)$), quando $\lambda>\lambda_*$ (respectivamente, $\lambda>\vec{\lambda}_*$ e $\lambda>\lambda_*$) coincide com $\{\mu,\delta_\phi\}$ (respectivamente $\{\vec{\mu},\delta_\phi\}$ e $\{\nu_N,\delta_\phi\}$). Em particular, qualquer que seja $\varepsilon>0$, existe $n(\varepsilon)$, tal que $\mu(A\subset Z : A\cap[1,n] = \phi) < \varepsilon$, qualquer que seja $n \geq n(\varepsilon)$, o mesmo podendo ser dito em relação às medidas dos outros processos. Esse fato será usado repetidas vezes nas demonstrações dos teoremas 1 e 2.

As medidas μ e $\vec{\mu}$ são invariantes por translação em Z. Pode-se demonstrar também que elas são ergódicas, com respeito ao grupo das translações em Z. Assim sendo, qualquer que seja $\varepsilon>0$, existe $b(\varepsilon)$ inteiro positivo, tal que

$$\mu(E_b) \geq 1-\varepsilon \quad \text{e} \quad \vec{\mu}(E_b) \geq 1-\varepsilon, \text{ se } b \geq b(\varepsilon),$$

onde $E_b = \left\{ A \subset Z : \frac{|A \cap [-b,1]|}{b} \geq \frac{\rho}{2}, \frac{|A \cap [1,b]|}{b} \geq \frac{\rho}{2} \right\}$ e

$\rho = \vec{\mu}(A \subset Z : 0 \in A)$, isto é, ρ é a densidade de $\vec{\mu}$.

Quanto aos processos $X_N^{\cdot}(t)$, $t \geq 0$ eles admitem como única probabilidade invariante δ_ϕ, qualquer que seja $\lambda>0$. Isso por argumentos elementares de Cadeias de Markov: $X_N^{\cdot}(t)$ assume valores num conjunto finito, a saber $P(\{-N,-N+1,\ldots,N\})$, podendo sempre passar de uma configuração a qualquer outra num número finito de etapas, exceto evidentemente se a configuração na qual ele se encontrar for o conjunto vazio que é absorvente.

Um dos nossos objetivos neste trabalho é mostrar que, se λ for suficientemente grande, apesar de $X_N(t)$ convergir, quando $t \to \infty$, para δ_ϕ, antes disso, num tempo intermediário, ele se apresentará estatisticamente como se fosse $X(t)$, o processo em $P(Z)$, em equilíbrio em torno de μ.

2.4. Para isso, usaremos o seguinte Teorema Ergódico Pontual demonstrado por Harris e Griffeath (cf. [9] e [11]):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s,\omega))ds = \int f d\mu,$$

para quase todo ω.

2.5. Finalmente no enunciado e na demonstração dos Teoremas 1 e 2, intervirão de maneira essencial os seguintes tempos de parada:

$$T_N^A(\omega) = \inf(t>0 : X^A(t,\omega) = \phi),$$

$$T^A(\omega) = \inf(t>0 : X^A(t,\omega) = \phi),$$

$$\vec{T}^A(\omega) = \inf(t>0 : \vec{X}^A(t,\omega) = \phi),$$

(com a convenção habitual $\inf \phi = +\infty$.)

Se A for a configuração com todos os pontos ocupados, nós omitiremos o índice superior; assim escreveremos T_N em vez de $T_N^{Z\cap[-N,N]}$. Se $A = \{x\}$, escreveremos simplesmente T^x em vez de $T^{\{x\}}$.

Terminamos esta recapitulação, dizendo duas palavras sobre a relação entre esses tempos e as probabilidades invariantes dos processos.

Dados $y \in Z$, $\omega \in \Omega$ e $t>0$, definimos o conjunto $C^y(t,\omega) \subset Z$ da seguinte maneira:

$$C^y(t,\omega) = \{x \in Z : (x,0) \overset{\omega}{\to} (y,t)\} =$$
$$= \{x \in Z : y \in X^x(t,\omega)\}.$$

Em seguida, dado $B \subset Z$, definimos

$$C^B(t,\omega) = \bigcup_{y \in B} C^y(t,\omega).$$

Ou seja: $X^A(t,\omega) \cap B = \phi \iff A \cap C^B(t,\omega) = \phi$.

Em particular: $X(t,\omega) \cap B = \phi \iff C^B(t,\omega) \cap Z = \phi \iff C^B(t,\omega) = \phi$.

O processo $C(t)$, $t \geq 0$, é o chamado dual de $X(t)$, $t \geq 0$.

Note-se que para todo $t > 0$ fixado, a variável aleatória $C^B(t)$ tem a mesma lei que a variável $X^B(t)$.

Isso nos permite estabelecer a seguinte igualdade:

$$\mu(A : A \cap B = \phi) = \lim_{t \to \infty} P(X(t) \cap B = \phi) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} P(C^B(t) = \phi) = \lim_{t \to \infty} P(X^B(t) = \phi) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} P(T^B < t) = P(T^B < \infty).$$

Relações idênticas a essa podem ser estabelecidas para os demais processos definidos em 2.1. Teremos a ocasião de utilizá-las na demonstração do Teorema 1.

CAPÍTULO 3

A DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE MORTE DO PROCESSO.

Neste capítulo demonstraremos que o tempo de vida do Processo de Contacto supercrítico unidimensional finito, convenientemente reescalado, converge em lei para uma variável aleatória exponencial, desde que se parta de uma configuração inicial conveniente.

Mais precisamente nós demonstraremos o teorema seguinte (em seu enunciado usamos a notação introduzida no capítulo 2):

Teorema 1 - Se $\lambda > \vec{\lambda}_*$, então a seqüência $\frac{T_N}{ET_N}$ converge em distribuição, quando $N \to \infty$, para uma variável aleatória exponencial de média 1.

A demonstração do teorema será feita através dos lemas seguintes:

Lema 3.1 - Qualquer que seja $A \subset Z$, qualquer que seja $N = 1,2,\ldots$, vale a igualdade

$$\max X_N^A(t) = \max Y_N^A(t),$$

qualquer que seja $t < T_N^A$.

Demonstração - Por construção $X_N^A(t) \subset Y_N^A(t)$, qualquer que seja $t \geq 0$ e, portanto, $\max X_N^A(t) \geq \max Y_N^A(t)$.

Para demonstrar a desigualdade no outro sentido, suponhamos, por absurdo, que exista um ponto y pertencente a $Y_N^A(t)$ e tal que $y > \max X_N^A(t)$.

Por construção, se y pertence a $Y_N^A(t)$, então existe ao menos um caminho ativo chegando em (y,t) e partindo de (x,0), onde x pertence a $A \cap (-\infty, N]$. Se este ponto x estivesse contido em $A \cap [-N,N]$, então y pertenceria também a $X_N^A(t)$, contrariando a hipótese de que $y > \max X_N^A(t)$.

Resta-nos, então, o caso em que $x < -N$. Seja $v = \max X_N^A(t)$. Por construção, existe ao menos um caminho ativo chegando em (v,t) e partindo de algum ponto (u,o), com u pertencente a $A \cap [-N,N]$. Se $u<y$ e $x < -N < u$, os caminhos indo de (u,0) a (v,t) e de (x,0) a (y,t) devem se encontrar e coincidir em ao menos um segmento vertical (ver figura 3.1). Seja (z,s) um ponto deste segmento comum (evidentemente z pertence a $[-N,N]$ e $0 \leqslant s \leqslant t$). Como (z,s) está ligado a (u,0) por um caminho ativo, z pertence a $X_N^A(s)$ e, conseqüentemente, y pertencerá a $X_N^A(t)$, já que há um caminho ativo ligando (u,0) a (y,t) passando por (z,s), contrariando nossa hipótese de absurdo.

Lema 3.2 - Para toda seqüência monótona crescente de números reais positivos t_N, N=1,2,3,... , convergindo para $+\infty$, para todo conjunto A contido em Z, para todo $\varepsilon>0$, existem inteiros positivos b e $N(\varepsilon)$ tais que, para todo $N \geqslant N(\varepsilon)$:

$$P(X_N^A(t_N) \not\in E_b,\ T_N^A > t) \leqslant \varepsilon.$$

Demonstração: Dado $\varepsilon>0$, seja b tal que $\mu(E_{b_1}) \geqslant 1-\frac{\varepsilon}{6}$. Fixado b, fazemos a seguinte majoração:

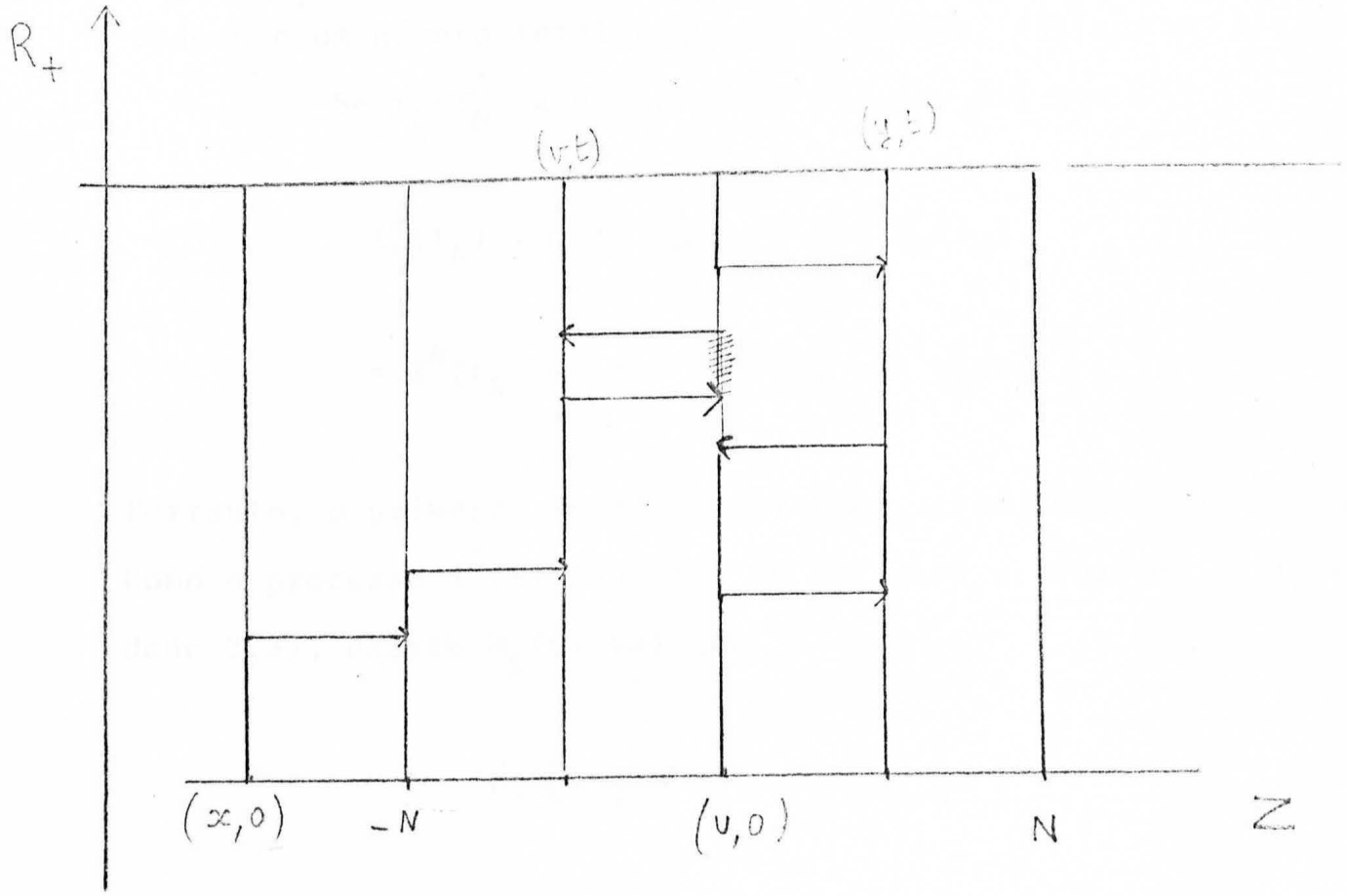

Figura 3.1

$$P(X_N^A(t_N) \notin E_b,\ T_N^A > t_N) \leq$$

$$\leq P(X_N^A(t_N) \notin E_b,\ T_N^A > t_N,\ \min X_N^A(t_N) < -N+L,\ \max X_N^A(t_N) > N-L) +$$

$$+ P(\min X_N^A(t_N) \geq N-L,\ T_N^A > t_N) + P(\max X_N^A(t_N) \leq N-L,\ T_N^A > t_N),$$

onde L é um número inteiro qualquer fixado, tal que $N > N-L > b$.

Se $t_N < T_N^A$, a propriedade 2.2 nos diz que

$$X_N^A(t_N) \cap \left[\min X_N^A(t_N),\ \max X_N^A(t_N)\right] =$$

$$= X^A(t_N) \cap \left[\min X_N^A(t_N),\ \max X_N^A(t_N)\right].$$

Portanto, o primeiro termo da soma pode ser majorado por $P(X^A(t_N) \notin E_b)$. Como o processo $X^A(t)$ converge em lei para μ, quando $t \to \infty$ (propriedade 2.3), existe $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$P(X_N^A(t_N) \notin b) \leq \mu(E_b^c) + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

qualquer que seja $N \geq N(\varepsilon)$.

Os outros dois termos da soma são majorados da mesma maneira, com a ajuda do lema 3.1. Com efeito, ele garante que:

$$P(\max X_N^A(t_N) < N-L,\ T_N^A > t_N) \leq P(\max Y_N^A(t_N) < N-L).$$

Tomamos agora $L = L(\varepsilon)$ tal que

$$\nu_N(A \subset Z \cap (-\infty, N] :\ A \cap [N-L, N] = \phi) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Como $Y_N^A(t)$ converge fracamente para ν_N, quando $t\to\infty$, existe um índice $N_2(\varepsilon)$ tal que $P(\max Y_N^A(t_N) < N-L) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ se $N \geq N_2(\varepsilon)$.

Tomamos, então, $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, encerrando a demonstração do lema.

Antes de enunciar o próximo lema, devemos definir duas novas famílias de tempos de parada.

Dados $N = 1,2,3,\ldots$, $x \in \{-N,-N+1,\ldots,N\}$, $B \subset \{-N,-N+1,\ldots,N\}$, definimos

$$U_N^x = \inf \{t>0 : -N \in X^x(t) \text{ ou } N \in X^x(t)\}$$

$$\overrightarrow{U}_N^B = \inf \{t>0 : N \in \overrightarrow{X}^B(t)\},$$

$$\overleftarrow{U}_N^B = \inf \{t>0 : -N \in \overleftarrow{X}^B(t)\},$$

com a convenção de que o tempo de parada assume o valor $+\infty$, no caso em que o conjunto, cujo ínfimo o define for vazio.

Lema 3.3 - As seguintes afirmações são verdadeiras quaisquer que sejam $\omega \in \Omega$, $N = 1,2,3,\ldots$, $t>0$, $x \in \{-N,-N+1,\ldots,N\}$, $A \subset Z$, $B \subset \{-N, -N+1,\ldots,n\}$ e $C \subset \{n+1,n+2,\ldots,N\}$, sendo $-N < k < N$:

i) $X_N^x(t,\omega) \subset X_N^A(t,\omega)$ e $T_N^x(\omega) \leq T_N^A(\omega)$, se $x \in A$,

ii) $X_N^x(t,\omega) = X^x(t,\omega)$, se $t \leq U_N^x(\omega)$,

iii) $U_N^x(\omega) < T_N^x(\omega)$, se $U_N^x(\omega) < \infty$,

iv) $\overrightarrow{U}_N^B(\omega) < T_N^B(\omega) \leq T^B(\omega)$, se $\overrightarrow{U}_N^B(\omega) < \infty$,

v) $\overrightarrow{X}^B(t,\omega) = \overrightarrow{X}_N^B(t,\omega) \subset X_N^B(t,\omega)$, se $t \leq \overrightarrow{U}_N^B(\omega)$,

vi) $\max \overrightarrow{X}_N^B(t,\omega) = \max X_N^B(t,\omega)$, se $t \leq \overrightarrow{U}_N^B(\omega)$,

ção.

Nesta demonstração, para simplificar a datilografia nós omitimos a indicação do ω, mas o leitor deve subentendê-lo.

Lema 3.4 - Qualquer que seja $\varepsilon>0$, existe um número inteiro b tal que

$$\max_{B \in E_b} P(T_N \neq T_N^B) < \varepsilon ,$$

para todo $N>b(\varepsilon)$.

Demonstração - Dado $\varepsilon>0$, seja $n(\varepsilon)$ um número inteiro positivo tal que: $\vec{\mu}(A \subset Z : A \cap [1,n] \neq \phi) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, qualquer que seja $n \geq n(\varepsilon)$.

Escolhemos em seguida b de tal forma que $\frac{\rho}{2} b \geq n(\varepsilon)$. Nessas condições se $B \in E_b$, então a probabilidade de que existe ao menos um ponto x em $B \cap [0,b]$ tal que $\vec{T}^x = \infty$ é maior ou igual a $1-\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\vec{T}^B \geq \vec{T}^{B \cap [-b,b]} = \max_{x \in B \cap [-b,b]} \vec{T}^x \quad e,$$

por outro lado,

$$P(\vec{T}^{B \cap [0,b]} = \infty) \geq P(\vec{T}^{[1,|B \cap [0,b]|]} = \infty) \geq$$

$$\geq P(T^{[1,n(\varepsilon)]} = \infty) = \vec{\mu}(A \subset Z : A \cap [1,n(\varepsilon)] \neq \phi) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} .$$

O mesmo argumento pode, simetricamente, ser repetido para o processo de contacto com flechas só para a esquerda.

Dado $\omega \in \{\vec{T}^{B \cap [0,b]} = \infty, \vec{T}^{B \cap [-b,0]} = \infty\}$ definimos então

$$I(\omega) = \min \{x \in B \cap [0,b] = \vec{T}^x(\omega) = +\infty\}$$

vii) $X_N^B(t,\omega) = X_N^{BUC}(t,\omega)$, se $\vec{U}_N^B(\omega) < \infty$ e $t > \vec{U}_N^B(\omega)$.

Demonstração - Todas essas afirmações são conseqüências imediatas da própria construção dos processos feitos em 2.1 e da utilização repetida dos argumentos intervindo em 2.2 e no lema 3.1. Com o modelo demonstraremos a última afirmação.

Inicialmente observamos que a propriedade 2.2 garante que:

$$X_N^B(t) = X_N^B(t) \cap \left[\min X_N^B(t),\ \max X_N^B(t)\right] =$$

$$X_N^{BUC}(t) \cap \left[\min X_N^B(t),\ \max X_N^B(t)\right],$$

já que obviamente $X_N^B(t) \subset X_N^{BUC}(t)$.

Em particular essa igualdade continua verdadeira se $t = \vec{U}_N^B(t)$. Nesse momento $N = \max \vec{X}_N^B(\vec{U}_N^B) = \max X_N^B(\vec{U}_N^B)$ (a segunda igualdade é a propriedade (vi)).

Como por outro lado $\min B = \min BUC$ e portanto $\min X_N^B(t) = \min X_N^{BUC}(t)$, para todo $t < T_N^B$ e inclusive para $t = \vec{U}_N^B(\omega)$, já que estamos supondo este último finito.

Ou seja:

$$X_N^B(\vec{U}_N^B) = X_N^{BUC}(\vec{U}_N^B) \cap \left[\min X_N^B(\vec{U}_N^B),\ \max X_N^B(\vec{U}_N^B)\right] =$$

$$= X_N^{BUC}(\vec{U}_N^B) \cap \left[\min X_N^{BUC}(\vec{U}_N^B),\ N\right] =$$

$$= X_N^{BUC}(\vec{U}_N^B).$$

Daí para frente, isto é, para $t > \vec{U}_N^B$, a igualdade entre os dois processos se mantêm evidentemente, o que encerra a demonstra

$$J(\omega) = \max \{x \in B \cap [-b,0] : \overleftarrow{T}^{x}(\omega) = +\infty\}.$$

Para que I e J sejam duas variáveis aleatórias bem definidas, podemos fazê-las iguais a 0 fora do conjunto

$$\left\{ \overrightarrow{T}^{B \cap [-b,b]} = \infty, \ \overleftarrow{T}^{B \cap [-b,b]} = \infty \right\}.$$

Feito isto o lema anterior nos garante que:

$$T_N(\omega) \geq T_N^B(\omega) \geq \max \left\{ \overrightarrow{U}_N^{I(\omega)}(\omega), \ \overleftarrow{U}_N^{J(\omega)}(\omega) \right\},$$

desde que este máximo seja finito.

Garante-nos também que

$$\max X_N^B(t) = \max X_N(t), \text{ se } t \geq \overrightarrow{U}_N^{I(\omega)}(\omega)$$

e

$$\min X_N^B(t) = \min X_N(t), \text{ se } t \geq \overleftarrow{U}_N^{I(\omega)}(\omega).$$

Ou seja, pela propriedade 2.2, $X_N(t) = X_N^B(t)$, qualquer que seja $t \geq \max \left\{ \overrightarrow{U}_N^{I(\omega)}(\omega), \ \overrightarrow{U}_N^{J(\omega)}(\omega) \right\}$, desde que este máximo seja finito.

Para concluir a demonstração, observamos que, qualquer que seja $x \in Z$, um argumento básico de Cadeias de Markov nos diz que $\lim_{t \to \infty} |\overrightarrow{X}_N^{x}(t)| = \infty$ com probabilidade 1 no conjunto $\{\overrightarrow{T}^{x} = \infty\}$.

Portanto:

$$P\left\{ \overrightarrow{T}^{x} = \infty \text{ e } \overrightarrow{U}_N^{x} < \infty, \text{ para algum } x \in [-b,0] \cap B \text{ e} \right.$$

$$\left. \overrightarrow{T}^{y} = \infty \text{ e } \overleftarrow{U}_N^{y} < \infty, \text{ para algum } y \in [0,b] \cap B \right\} =$$

$$= P\left\{ T^{\rightarrow B \cap [-b,0]} = \infty,\ T^{\leftarrow B \cap [0,b]} = \infty \right\} \geqslant 1-\varepsilon .$$

Lema 3.5 - Seja β_N, $N = 1,2,\ldots$ uma seqüência monótona crescente de números reais positivos, com $\beta_N \to +\infty$, quando $N \to +\infty$. Então quaisquer que sejam $t>0$, $s>0$, vale:

$$\lim_{N\to\infty} P(T_N > \beta_N(t+s)) - P(T_N > \beta_N t)P(T_N > \beta_N s) = 0.$$

Demonstração - Usando a Propriedade Forte de Markov obtemos a seguinte majoração:

$$|P(T_N > \beta_N(t+s)) - P(T_N > \beta_N t).P(T_N > \beta_N s)| \leqslant$$

$$\leqslant 2P(T_N > \beta_N t,\ X_N(\beta_N t) \notin E_b) +$$

$$+ \sum_{B \in E_b} P(T_N > \beta_N t,\ X_N(\beta_N t) = B)\left[P(T_N > \beta_N s) - P(T_N^B > \beta_N s) \right].$$

O lema 3.2 nos garante que, dado $\varepsilon>0$, existem b_1 e $N_1(\varepsilon)$ tais que

$$P(T_N > \beta_N t,\ X_N(\beta_N t) \notin E_{b_1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $N \geqslant N_1(\varepsilon, b_1)$.

Para controlar o segundo termo dessa majoração observamos que

$$P(T_N > \beta_N s) - P(T_N^B > \beta_N s) \leqslant$$

$$\leqslant \int \left[1_{\left(T_N^{(\omega)} > \beta_N s\right)} - 1_{\left(T_N^{B(\omega)} > \beta_N s\right)} \right] P(d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{ T_N \neq T_N^B \right\}.$$

Podemos portanto aplicar o lema 3.4 que nos diz que, para todo $\varepsilon>0$, existem b_2 e $N_2(\varepsilon,b_2)$ tais que:

$$\max_{B \in E_{b_2}} P\left\{ T_N \neq T_N^B \right\} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

O leitor é agora convidado a reler as demonstrações dos lemas 3.2 e 3.4 e verificar que tanto b_1 quanto b_2 podem ser tomados tão grandes quanto se queira. Vamos então utilizar em ambos os lemas do mesmo valor $b = \max(b_1,b_2)$. Fixado b, podemos agora determinar $N_1(\varepsilon,b)$ e $N_2(\varepsilon,b)$ e garantir que a soma dos dois termos da majoração é menor que ε, se $N = \max(N_1(\varepsilon,b),\ N_2(\varepsilon,b))$.

Lema 3.6 - Para todo $N = 1,2,\ldots$, seja β_N o único número real positivo, tal que $P(T_N > \beta_N) = e^{-1}$. Então a seqüência de variáveis aleatórias $\frac{T_N}{\beta_N}$ converge em distribuição, quando $N\to+\infty$, para uma variável aleatória exponencial de média 1.

Demonstração - É evidente pela construção que fizemos dos processos que, para todo $\omega : T_1(\omega) < T_2(\omega) < \ldots$ e que $T_N(\omega) \geqslant \max(\tau_1^{+x}(\omega) : -N \leqslant x \leqslant N)$, onde as variáveis aleatórias τ_1^{+x}, introduzidas em 2.1, são independentes entre si, identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro 1.

Assim sendo a seqüência β_N, definida no enunciado deste lema, é claramente monótona, crescente e $\lim_{N\to\infty} \beta_N = +\infty$.

Podemos, então, utilizar o lema anterior e concluir que

$$\lim_{N\to\infty} P(\frac{T_N}{\beta_N} > q) = e^{-q},$$

para todo q racional.

Com efeito, pela maneira como definimos β_N, temos que:

$$P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > 2\right) - e^{-2} = P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > 2\right) - P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > 1\right)^2 \to 0,$$

quando $N \to \infty$. Isto observado, o resto segue simplesmente por indução.

Finalmente dado t real qualquer, dado $\varepsilon > 0$, existem dois racionais q e $\bar{q}$ tais que

$$q < t < \bar{q} \quad \text{e} \quad e^{-q} - e^{-\bar{q}} < \varepsilon$$

e portanto

$$\left| \lim_{N\to\infty} P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right) - e^{-t} \right| < \varepsilon$$

já que,

$$P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > q\right) \geq P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right) \geq P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > \bar{q}\right),$$

qualquer que seja N.

Lema 3.7 - Seja β_N, $N = 1,2,\ldots$ a seqüência definida no enunciado do lema anterior. Então $\lim_{N\to\infty} \frac{E(T_N)}{\beta_N} = 1$.

Demonstração - Utilizando lema do Fubini e uma mudança de variáveis, observamos que:

$$\frac{E(T_N)}{\beta_N} = \frac{1}{\beta_N} \int_0^\infty P(T_N > t)dt = \int_0^\infty P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right)dt.$$

A demonstração estará concluída se pudermos usar o Teorema da Convergência Dominada e passar o limite, quando $N \to \infty$, para dentro desta última integral. O que nos autoriza a fazê-lo é a majoração seguinte: qualquer que seja $n = 1,2,\ldots$:

$$P\left(\frac{T_N}{N} > n\right) \leqslant e^{-n}.$$

Com efeito, pela propriedade forte de Markov:

$$P\left(\frac{T_N}{N} > 2\right) = \sum_{\substack{B\neq\phi \\ B\subset\{-N,-N+1,\ldots,N\}}} P\left(T_N > \beta_N,\ X_N(\beta_N) = B\right).P\left(T_N^B > \beta_N\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{B\neq\phi \\ B\subset\{-N,-N+1,\ldots,N\}}} P\left(T_N > \beta_N,\ X_N(\beta_N) = B\right).P\left(T_N > \beta_N\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(T_N > \beta_N\right).P\left(T_N > \beta_N\right) \leqslant e^{-2}.$$

Em seguida a extensão para n inteiro positivo qualquer é imediata.

Portanto:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(T_N)}{\beta_N} = \int_0^\infty \lim_{N\to\infty} P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right)dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

CAPÍTULO 4

ESTABILIDADE DAS MÉDIAS TEMPORAIS

Antes do grande desvio provocando a morte de todas as partículas, o processo $(X_N(t))$ se comporta como se estivesse em volume infinito. Em outras palavras, um estatístico que examinasse o registro, durante um longo intervalo de tempo, de uma trajetória típica do processo, vista através de uma função teste, seria provavelmente induzido em erro: não só não veria a flutuação destruindo o processo, como também constataria que as médias temporais ao longo da trajetória se estabilizavam em torno de uma "falsa" medida invariante. É esse o conteúdo do Teorema 2.

Teorema 2 - Se $\lambda > \vec{\lambda}_*$, existe uma seqüência crescente de números reais positivos R_N, $N = 1,2,\ldots$, tal que:

i) $R_N/ET_N \to 0$, quando $N \to \infty$,

ii) qualquer que seja $\varepsilon > 0$, qualquer que seja a função cilíndrica $f : P(Z) \to P(Z)$:

$$P\left\{ \sup_{t<T_N-R_N} \left| \frac{1}{R_N} \int_t^{t+R_N} f(X_N(s))ds - \int f d\mu \right| > \varepsilon \right\} \to 0,$$

quando $N \to +\infty$.

Demonstração - Seja $K_N = \max \{\ell \in \mathbb{N} : \ell R_N \leq T_N\}$. Como T_N é quase certamente finito, K_N é uma variável aleatória bem definida. Além disso, se $R_N/ET_N \to 0$, quando $N\to\infty$, então, o teorema 1 nos assegura que $P(K_N=0) \to 0$, quando $N\to\infty$.

Dito isso, começaremos por demonstrar uma versão discretizada do Teorema 2, a saber que existe uma seqüência R_N satisfazendo (i) e tal que

$$P\left\{ \max_{\ell < K_N} \left| \frac{1}{R_N} \int_{\ell R_N}^{(\ell+1)R_N} f(X_N(s)ds - \int f d\mu \right| > \varepsilon \right\} \to 0,$$

quando $N\to\infty$, quaisquer que sejam $\varepsilon>0$ e f cilíndrica.

Para simplificar a datilografia, chamemos de $B_N(k)$ o evento $\left\{ \left| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(X_N(s)ds - \int f d\mu \right| > \varepsilon \right\}$.

Podemos agora começar a calcular:

$$P\left\{ \bigcap_{1\leq k<K_N} B_N(k)^c \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\left\{ \bigcap_{1\leq k<j} B_N(k)^c,\ K_N = j \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left[P(K_N=j) - P\left\{ \bigcup_{1\leq k<j} B_N(k),\ K_N=j \right\} \right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \left[P(K_N=j) - \sum_{1\leq k<j} P(B_N(k),\ K_N=j) \right] \geq$$

$$\geq P(1 \leq K_N < m) - \sum_{j=1}^{m} j \max_{1\leq k<j} P(B_N(k),\ K_N=j)$$

O número m que aparece nos dois últimos minorantes é arbitrário. Vamos mostrar que podemos tomá-lo variando com N de tal maneira que

$$P(1 \leq K_N < m_N) \to 1 \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{m_N} j \max_{1 \leq k < j} P(B_N(k),\ K_N = j) \to 0,$$

quando $N \to +\infty$.

Para começar:

$$P(B_N(k),\ K_N > k) \leq$$

$$P\left(\frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} \left| f(X_N(s)) - f(X(s)) \right| ds > \frac{\varepsilon}{2},\ K_N > k\right) +$$

$$+ P\left(\left|\frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(X(s))ds - \int f d\mu\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

O controle destes dois termos utiliza de maneira fundamental a propriedade de monotonia ao longo da trajetória do Processo de Contacto, mencionada na secção 2.3. Para melhor destacá-las, formularemos dois lemas:

Lema 4.1 - Seja $\alpha(k,R) = P\left\{\left|\frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} f(X(s))ds - \int f d\mu\right| > \varepsilon\right\}$ e $\alpha(R) = \max_{k \geq 1} \alpha(k,R)$. Então, se f for monótona crescente, $\alpha(R)$ é uma função monótona decrescente, convergindo para 0, quando $R \to +\infty$.

Demonstração - Nosso argumento ficará talvez mais claro se nós modificarmos ligeiramente a construção inicial de maneira a tornar mais legível a independência entre passado e futuro característica do Processo Pontual de Poisson.

Consideremos então duas réplicas (Ω_1, A_1, P_1) e (Ω_2, A_2, P_2) do nosso espaço de probabilidades original, sobre o qual estão de

finidos os processos de contacto ${}^1X(t)$ e ${}^2X(t)$ respectivamente, processos esses construídos exatamente como foi feito em 2.1. Vamos agora definir o processo $X(t)$ no espaço produto $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $A = A_1 \times A_2$, $P = P_1 \times P_2$ da seguinte maneira: dado $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$X(t,\omega) = \begin{cases} {}^1X(t,\omega_1), & \text{se } t<R \\ {}^2X^{{}^1X(R,\omega_1)}(t-R,\omega_2), & \text{se } t\geq R, \end{cases}$$

onde $R>0$ é um número fixado.

Evidentemente o processo que acabamos de definir tem a mesma lei que o Processo de Contacto construído em 2.1 e tem também todas as propriedades de monotonia ao longo da trajetória mencionadas em 2.3. Elas nos valerão agora.

Seja f uma função cilíndrica monótona crescente qualquer. Nessas condições, quaisquer que sejam $R>0$ e $\omega_2 \in \Omega_2$, a função $A \longmapsto F(A,R,\omega_2)$ onde

$$F(A,R,\omega_2) = \frac{1}{R}\int_0^R f({}^2X(s,\omega_2)ds$$

também é monótona crescente (com R e ω_2 fixados).

Ou seja $F(Z,R,\omega_2) \geq F({}^1X(R,\omega_1),R,\omega_2)$, qualquer que seja ω_1. Em particular:

$$F(Z,R,\omega_2) \geq \int_{\Omega_1} F({}^1X(R,\omega_1),R,\omega_2)P_1(d\omega_1).$$

Além disso, fixado $\omega_2 \in \Omega$, o termo da direita da desigualdade de-

cresce monotonamente, quando $R\to\infty$, convergindo para $\int F(A,R,\omega_2)\mu(dA)$, como já foi dito na secção 2.3.

Obtivemos assim o enquadramento

$$F(Z,R,\omega_2) \geq \int_{\Omega_1} F({}^1X(R,\omega_1),R,\omega_2)P_1(d\omega_1) \geq \int_{P(Z)} F(A,R,\omega_2)\ (dA),$$

que vale qualquer que seja $R>0$.

A conclusão será agora obtida pela conhecida técnica do sanduíche. Para isso observemos que o Teorema Ergódico Pontual de Harris e Griffeath diz que $F(Z,R,\omega^2) \to \int f d\mu$, quando $R\to\infty$, para quase todo (com respeito a P_2) ω_2. Por outro lado, o célebre Teorema Ergódico de Birkhoff garante que $\int_{P(Z)} F(A,R,\omega_2)\ \mu(dA) \to \int f d$, quando $R\to\infty$, para quase todo ω_2.

Antes de concluírmos, façamos algumas traduções:

$$F({}^1X(R,\omega_1),R,\omega_2) = \frac{1}{R}\int_0^R f({}^2X^{{}^1X(R,\omega_1)}(s,\omega_2))ds = \frac{1}{R}\int_R^{2R} f(X(s,\omega))ds,$$

onde $\quad = (\omega_1,\omega_2)$; $F(Z,R,\omega_2) = \frac{1}{R}\int_0^R f({}^2X^Z(s,\omega_2))ds$ cuja lei é a mesma de $\frac{1}{R}\int_0^R f(X^Z(s,\omega))ds$.

Ou seja, dado $\varepsilon>0$, dado $\delta>0$, existe $R(\delta)>0$, tal que: para todo $R>R(\delta)$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{R}\int_R^{2R} f(X(s))ds - \int f d\mu\right| < \varepsilon\right\} \geq$$

$$\geq P\left\{\left|\frac{1}{R}\int_0^R f(X(s))ds - \int f d\mu\right| < \varepsilon \text{ e } \left|\int \mu(dA)\frac{1}{R}\int_0^R f(X^A(s))ds - \int f d\mu\right| < \varepsilon\right\} \geq$$

$$\geq 1-\delta.$$

Isso encerra a demonstração, já que o mesmo enquadramento e consequente minoração poderia ter sido feito para o intervalo $[kR,(k+1)R]$ em vez de $[R,2R]$.

Lema 4.2 - Qualquer que seja f cilíndrica, quaisquer que sejam $R\geq 1$, $N\geq 1$, $\varepsilon>0$, sejam:

$$\tilde{\alpha}(k,N,R) = P\left\{\frac{1}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}\left|f(X_N(s)) - f(X(s))\right|ds > \varepsilon,\ K_N>k\right\} \text{ e}$$

$$\tilde{\alpha}(R) = \max_{N\geq 1}\left[\max_{k\geq 1}\tilde{\alpha}(k,N,R)\right].$$

Então $\tilde{\alpha}(R)$ é uma função monótona decrescente de R, convergindo para 0, quando $R\to+\infty$.

Demonstração - Como foi observado na secção 2.2:

$$X_N(s) = X(s) \cap [\min X_N(s),\ \max X_N(s)],$$

desde que $T_N>s$.

Como f é cilíndrica, existe um conjunto $C\subset Z$, finito, tal que $f(A) = f(A\cap C)$, qualquer que seja $A\subset Z$. Portanto, se $C\subset [\min X_N(s),\ \max X_N(s)]$, então

$$f(X_N(s)) = f(X(s)).$$

Uma condição mais grosseira será mais facilmente controlada: suponhamos que $0<L<N$ sejam tais que: $C\subset [-N+L,N-L]$. Então, uma condição suficiente para que $f(X_N(s)) = f(X(s))$ é: $-N < \min X_N(s) < -N+L$ e $N-L < \max X_N(s) < N$.

Assim, podemos fazer as seguintes majorações:

$$P\left\{\frac{1}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}\left|f(X_N(s)-f(X(s))\right|ds>\varepsilon,\ K_N>k\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\|f\|_\infty}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{X_N(s)\neq X(s)\}}ds>\varepsilon,\ K_N>k\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\|f\|_\infty}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{-N+L<\min X_N(s)\ \text{ou}\ \max X_N(s)<N-L\}}ds>\varepsilon,\ K_N>k\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2P\left\{\frac{\|f\|_\infty}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{\max X_N(s)<N-L\}}ds>\varepsilon,\ K_N>k\right\}.$$

Utilizamos agora a observação feita no lema 3.2, pela qual $\max X_N(s)=\max Y_N(s)$, se $T_N>s$. Portanto, no conjunto $\{K_N>k\}$ vale a igualdade:

$$\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{\max X_N(s)<N-L\}}ds=\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{\max Y_N(s)<N-L\}}ds.$$

Fazemos então a substituição de X_N por Y_N na última majoração e, em seguida, majoramos ainda mais eliminando a condição $K_N>k$, obtendo finalmente o majorante:

$$2P\left\{\frac{\|f\|_\infty}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{\max Y_N<N-L\}}ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}=$$

$$=2P\left\{\frac{\|f\|_\infty}{R}\int_{kR}^{(k+1)R}1_{\{\max Y_0<-L\}}ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Seja então $h_L(A)=1_{\{\max A<-L\}}$. Trata-se evidentemente de uma função cilíndrica monótona decrescente. Refazemos agora exatamente o mesmo argumento do lema 4.1, com uma função decrescente

em vez de uma crescente e com o processo $Y_o(t)$ em vez de $X(t)$.

Obtemos assim que para todo $\varepsilon'>0$, para todo $\delta>0$, existe $R(\delta,L)>0$ tal que:

$$P\left\{\left|\frac{1}{R}\int_{kR}^{(k+1)R} h_L(Y_o(s))ds - \int h_L d\nu_o\right| < \varepsilon'\right\} \geq$$

$$\geq P\left\{\left|\frac{1}{R}\int_0^R h_L(Y_o(s)ds - \int h_L d\nu_o\right| < \varepsilon' \text{ e } \left|\int \nu(dA)\frac{1}{R}\int_0^R h_L(Y_o^A(s))ds - \int h_L d\nu_o\right| < \varepsilon'\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \delta,$$

desde que $R>R(\delta,L)$.

Basta-nos agora escolher ε' de tal maneira que $2\varepsilon' \|f\|_\infty < \varepsilon$ e L de tal maneira que

$$\int h_L d\nu_o = \nu_o(A : A \cap [-L,0] = \phi) < \varepsilon'$$

para concluir a demonstração.

Podemos agora retomar a demonstração da versão discreta do teorema, no pé em que a deixamos antes de enunciar o lema 4.1.

Tínhamos que encontrar duas seqüências monótonas crescentes de número positivos (m_N) e (R_N) tais que:

$$R_N / E(T_N) \to 0,$$

$$P(1 \leq K_N < m_N) \to 1 \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{m_N} j \cdot \max_{1\leq k<j} P(B_N(k)),\ K_N=j) \to 0,$$

quando $N \to \infty$.

Vamos reescrever a segunda condição, utilizando T_N em vez de K_N : $P(T_N \leq m_N R_N) \to 1$.

Em seguida, majoramos brutalmente a seqüência aparecendo na terceira condição, obtendo:

$$m_N^2 \cdot \max_{N' \geq 1} \max_{k \geq 1} P(B_{N'}(k), K_N > k) =$$

$$= M_N^2 (\alpha(R_N) + \tilde{\alpha}(R_N)).$$

Lema 4.3 - Existem duas seqüências monótonas crescentes de números reais positivos (m_N), (R_N) tais que:

$$\text{i)} \quad R_N / ET_N \to 0,$$

$$\text{ii)} \quad P(T_N \leq m_N \cdot R_N) \to 1 \text{ e}$$

$$\text{iii)} \quad m_N^2 (\alpha(R_N) + \tilde{\alpha}(R_N)) \to 0,$$

quando $N \to \infty$.

Demonstração - Vamos supor inicialmente que a função f que aparece no enunciado do teorema seja monótona. Neste caso, os lemas 4.1 e 4.2 nos dizem que $\alpha(R)$ e $\tilde{\alpha}(R)$ são funções monótonas decrescentes convergindo para 0, quando $R \to \infty$.

Sejam agora u_N e v_N duas seqüências monótonas crescentes quaisquer de números reais positivos e tais que $u_N \to +\infty$ e $v_N \to +\infty$, quando $N \to +\infty$. A partir delas, tentamos definir R_N e m_N da seguinte maneira:

$$R_N = E(T_N) / u_N \quad \text{e} \quad m_N = u_N \cdot v_N.$$

Com essa definição é claro que a condição (i) está satisfeita, assim como a condição (ii):

$$P(T_N \leq m_N \cdot R_N) = P(T_N \leq E(T_N) \cdot v_N) \to 0,$$

já que, pelo Teorema 1, $T_N / E(T_N)$ converge em lei e que $v_N \to +\infty$, quando $N \to +\infty$.

Para satisfazer (iii) bastaria que

$$\text{iv)}\quad u_N^2 \left[\alpha\left(\frac{E(T_N)}{u_N}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{E(T_N)}{u_N}\right)\right] \to 0.$$

Se assim fosse bastaria que $v_N^2 \to +\infty$ mais lentamente do que $\left\{u_N^2 \left[\alpha\left(\frac{E(T_N)}{u_N}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{ET_N}{u_N}\right)\right]\right\}^{-1}$.

Nosso problema reduziu-se assim à determinação de uma única seqüência (u_N) satisfazendo a condição (iv).

Suponhamos que a primeira seqüência (u_N) que escolhemos não satisfaça a condição (iv), já que, em caso contrário, o problema estaria resolvido. Nós sempre podemos escolher uma segunda seqüência monótona crescente $(\hat{u_N})$ tal que:

$$\hat{u_N} \to +\infty \quad \text{e} \quad \hat{u_N}^2 \cdot \left[\alpha\left(\frac{E(T_N)}{u_N}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{E(T_N)}{u_N}\right)\right] \to 0,$$

quando $N \to +\infty$. Como α e $\tilde{\alpha}$ são funções decrescentes, então, necessariamente

$$\hat{u}_N^2 \left[\alpha\left(\frac{E(T_N)}{\hat{u_N}}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{E(T_N)}{\hat{u_N}}\right)\right] \to 0.$$

Basta-nos, portanto, tomar $R_N = \dfrac{E(T_N)}{\hat{u_N}}$ e $m_N = \hat{u_N} \cdot v_N$, com a seqüência v_N tal que:

$$v_N^2 \cdot u_N^2 \left[\alpha\left(\frac{ET_N}{u_N}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{ET_N}{u_N}\right) \right] \to 0.$$

Isso conclui a demonstração no caso em que a função cilíndrica f é monótona crescente. O mesmo argumento evidentemente também funciona no lema 2.1 no caso em que a função é decrescente. Mas daí decorre o resultado no caso geral, já que toda função cilíndrica é uma combinação linear finita de funções cilíndricas monótonas.

Isso completa a demonstração da versão discreta do teorema:

$$P\left\{ \max_{k<K_N} \left| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(X_N(s)ds - \int f d\mu \right| > \varepsilon \right\} \to 0,$$

quando $N \to +\infty$.

A sua extensão para a versão contínua, enunciada no começo deste capítulo, com " $\sup_{s<T_N-R_N}$ " no lugar de "$\max_{k<K_N}$ ", não apresenta dificuldades.

Com efeito, seja $(r_N, N=1,2,\ldots)$ uma seqüência de números positivos, tal que $r_N \to +\infty$ e $r_N \cdot R_N / ET_N \to 0$, quando $N \to +\infty$. A partir dela definimos uma seqüência de intervalos de medida, múltipla da anterior: $R'_N = r_N \cdot R_N$.

Nessas condições, qualquer que seja f cilíndrica e qualquer que seja s, temos que:

$$\frac{1}{R'_N} \int_s^{s+R'_N} f(X_N(t))dt = \frac{1}{R'_N} \int_s^{\left(\left[\frac{s}{R_N}\right]+1\right)R_N} f(X_N(t))dt + \frac{1}{R'_N} \int_{\left[\frac{s+R'_N}{R_N}\right]R_N}^{s+R'_N} f(X_N(t))dt +$$

$$+ \frac{R_N}{R'_N} \left[\sum_{k=\left[\frac{s}{R_N}\right]+1}^{\left[\frac{s+R'_N}{R_N}\right]-1} \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(X_N(t))dt \right] .$$

Os dois primeiros termos dessa soma, são majorados em valor absoluto por $\frac{2\|f\|_\infty R_N}{R'_N} \to 0$, quando $N \to \infty$.

Quanto aos termos da forma $\frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(X_N(t))dt$, sabemos pela versão discreta do teorema , que, num conjunto de probabilidade tão grande quanto se queira, eles estão todos numa vizinhança ε de $\int f d\mu$, desde que N seja suficientemente grande. Como o fator $\frac{R_N}{R'_N}$ é o inverso (assintoticamente) do número de termos da somatória, o resultado fica demonstrado para a seqüência R'_N.

B I B L I O G R A F I A

[1] BERTEIN, F. & GALVES, A. Une classe de systemes de particules stable par association. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 41(1):73-85, 1977.

[2] CASSANDRO, M. et al. *Metastable behavior of stochastic dynamics: a pathwise approach*. Rio de Janeiro, IMPA, 1983. 51p. (Informes de Matemática. Série B-013/83).

[3] DEMASI, A. et al. A survey of the hydrodynamical behavior of many particle systems. In: LEBOWITZ, J.L. & MONTROLL, E.W. eds. *Non equilibrium processes*. Amsterdam, North-Holland, 1984. 372p. (Studies in Statistical Mechanics, 11).

[4] DURRETT, R. & GRIFFEATH, D. Supercritical contact processes on ZZ^d. *Ann. Probability*, 11(1):1-15, 1983.

[5] FARIS, W. & JONA-LASINIO, G. Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise. *J. Physics. Series A*, 15: 3025-3055, 1982.

[6] FREIDLIN, M.I. & WENTZELL, A.D. *Randon perturbations of dynamical systems*. Berlin, Springer, 1983. 48p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 260)

[7] GALVES, A. et al. Non equilibrium measures which exhibit a temperature gradient: study of a model. *Comm. Math. Physics*, 81(1):127-147, 1981.

[8] GRIFFEATH, D. *Additive and cancellative in teracting particle systems*. Berlin, Springer, 1979. 108p. (Lecture Notes in Mathematics, 724)

[9] GRIFFEATH, D. The basic contact processes. *Stochastic Process. Appl.*, 11(2):151-185, 1981.

[10] HARRIS, T.E. Contact interactions on a lattice. *Ann. Prob.* 2(6):969-988, 1974.

[11] HARRIS, T.E. Additive set valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Prob.*, 6(3):355-378, 1978.

[12] LIGGETT, T.M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles: In: ECOLE D'ETE DE PROBABILITES DE SAINT-FLOUR, 6º, 1976. *Exposes*. Berlin, Springer, 1977. p.187-248. (Lecture Notes in Mathematics, 598)

[13] SPITZER, F. Interaction of Markov processes. *Adv. in Math.*, 5(2):246-290, 1970.

Esta tese foi datilografada por Lourdes Vaz da Silva.