DR. ARTIBANO MICALI

ALGEBRAS DE INTEGRIDADE E SEM TORÇÃO

Tese apresentada no concurso de Livre Docência à Cadeira de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO

1965

Dr. Artibano Micali

ÁLGEBRAS DE INTEGRIDADE E SEM TORÇÃO

Tese apresentada no concurso de Livre Docência à Cadeira de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO, 1965

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como finalidade a apresentação de resultados recentes, por nós obtidos, sôbre a teoria das álgebras e aplicações às álgebras universais.

O termo álgebra é, em todo êste trabalho, usado no sentido de álgebra associativa (não necessàriamente comutativa) e com elemento unidade. Todo anel é comutativo e unitário e um módulo sôbre um tal anel, unitário. Todo homomorfismo de álgebras ou anéis transforma elemento unidade em elemento unidade. Por homomorfismo de álgebras graduadas entendemos homomorfismos de grau zero.

No capítulo I obtemos resultados gerais mostrando que uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra seja de integridade ou sem torção é que ela o seja localmente.

No capítulo II aplicamos estes resultados às álgebras universais. O tema central é uma caracterização dos anéis locais regulares (cf. §2), caracterização essa já obtida em 12. Restava, porém, o problema de saber se isto caracterizava os pontos simples sôbre uma variedade algébrica. O problema é aqui resolvido e a resposta é afirmativa.

Problemas análogos são resolvidos para as álgebras tensoriais (cf. §3) e exteriores (cf. §4). No §5 estudamos com detalhes um exemplo que tem por finalidade esclarecer as questões que nos puzemos, nessa ordem de idéias.

Observa-se que, se A é um anel e M um A-módulo, o problema fundamental nessa direção é o de caracterizar tais objetos para os quais U(M) (onde U representa um qualquer dos funtores T, S, Λ) seja sem torção.

No caso da álgebra simétrica, por exemplo, sabe-se que S(M) é de integridade e regular, se e sòmente se, A é de integridade regular e M é um A-módulo projetivo de tipo finito (cf. [7]). Se abandonarmos, porém, a condição de regularidade, nada mais se pode dizer. Enfim, o problema da integridade da álgebra simétrica nos foi pôsto pela primeira vez, ao compararmos a álgebra simétrica de um ideal ao anel de Rees desse mesmo ideal (cf.[12]).

À parte o lema de Nakayama e o de globalização, os resultados não originais não são demonstrados. As técnicas habituais de álgebra comutativa são correntemente empregadas, algumas vezes mesmo sem alusão. Pareceu-nos um trabalho insano redigir tudo o que necessitávamos para explicar os resultados aqui expostos. Sob êste aspecto, nosso trabalho se endereça ao especialista.

Um resumo dos resultados que aqui aparecem, foi apresentado ao Seminário Dubreil-Pisot (Paris) em fevereiro dêste ano (cf.[13]).

Queremos deixar aqui consignados os nossos agradecimentos ao Professor P. Samuel e a D. Lazard pelas valiosas sugestões que muito contribuiram para melhorar o presente trabalho. Os primeiros resultados foram obtidos durante nossa permanência na Universidade de Montréal (Julho e Agôsto de 1964) e nessa ocasião as sugestões do Professor J.Dieudonné nos foram valiosas. A êle, nossos agradecimentos.

Nossos agradecimentos se estendem também ao Professor Benedito Castrucci que nos deu acesso à apresentação desta tese de Livre Docência em sua Cadeira e ao Dr. Luiz Henrique Jacy Monteiro por todo o trabalho de correção e revisão do presente texto sem o que seria impossível o bom têrmo do nosso objetivo.

Paris, março de 1965.

CAPÍTULO I

ÁLGEBRAS DE INTEGRIDADE E SEM TORÇÃO.

Sejam A um anel de integridade e X = Spec (A) seu espectro munido da topologia espectral (cf.[3]) e Ω o conjunto dos ideais maximais de A.

<u>Proposição</u>. <u>Se</u> B <u>é uma</u> A-<u>álgebra</u>, B <u>é sem torção se e sòmente se</u> $B_{\mathfrak{p}}$ <u>é uma</u> $A_{\mathfrak{p}}$ - <u>álgebra</u> (<u>ou uma A-álgebra</u>)<u>sem torção para todo</u> $\mathfrak{p}$ <u>em</u> X.

Com efeito, é claro que se B é sem torção, então $B_{\mathfrak{p}}$ é também sem torção para todo $\mathfrak{p}$ em X. Reciprocamente, se $B_{\mathfrak{p}}$ é sem torção para todo $\mathfrak{p}$ em X, então B é sem torção. De fato, como todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A está contido num ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, a fórmula $(B_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$ nos mostra que podemos nos limitar aos ideais maximais de A. O lema de globalização nos mostra então que B é sem torção.

Para terminar a demonstração, vamos dar o lema seguinte:

<u>Lema</u>. (<u>Lema de globalização</u>, cf.[3]). <u>Sejam</u> M <u>um</u> A-<u>módulo e para todo</u> $\mathfrak{m} \in \Omega$ <u>o homomorfismo canônico</u> $i: M \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}$. <u>Então</u>, <u>o homomorfismo</u> $M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \Omega} M_{\mathfrak{m}}$ <u>definido por</u> $x \longrightarrow (i_{\mathfrak{m}}(x))$ <u>é injetivo</u>.

Se $x \in M$ tem uma imagem nula em $\prod_{\mathfrak{m} \in \Omega} M_{\mathfrak{m}}$, então $i_{\mathfrak{m}}(x) = 0$ para todo $\mathfrak{m} \in \Omega$. Isto quer dizer que para todo $\mathfrak{m} \in \Omega$, existe um elemento $a_{\mathfrak{m}} \in A$, $a_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tal que $a_{\mathfrak{m}} x = 0$. Seja $\mathfrak{a}$ o ideal de A gerado pelos $a_{\mathfrak{m}}$. Como $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in \Omega$, pelo teorema de KRULL, $\mathfrak{a} = A$, isto é, a unidade de A, se exprime sob a forma $1 = \sum_{\mathfrak{m} \in \Omega} b_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}}$ (soma finita), onde os

b_m estão em A. Logo, $0 = \sum_{m \in \Omega} b_m (a_m x) = (\sum_{m \in \Omega} b_m a_m) x = x$, isto é, $x = 0$.

<u>Teorema</u>. <u>Seja</u> B <u>uma</u> <u>A-álgebra noetheriana comutativa</u>. <u>Então</u> B <u>é de integridade se e sòmente se</u>, $B_{\mathfrak{p}}$ <u>é de integridade para todo</u> $\mathfrak{p} \in X$.

Com efeito, se B é de integridade, $B_{\mathfrak{p}}$ é também de integridade para todo $\mathfrak{p} \in X$. Recìprocamente, se B é localmente de integridade, para mostrarmos que B é de integridade, é-nos suficiente mostrar que Spec (B) é um espaço topológico conexo. Isto equivale dizer que B não tem outros idempotentes diferentes de 0 e 1 (cf.[3]).

Seja então $e \in B$ um idempotente. Para todo $\mathfrak{p} \in X$ se tem $e_{\mathfrak{p}} = 0$ ou $e_{\mathfrak{p}} = 1$. Seja U_0 (resp.U_1) o conjunto dos $\mathfrak{p} \in X$ tais que $e_{\mathfrak{p}} = 0$ (resp. $e_{\mathfrak{p}} = 1$). É claro que $X = U_0 \cup U_1$ e que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Seja Sup (Ae) (resp. Sup(A(1-e))) o suporte (cf. 1) do A-módulo Ae (resp. A(1-e)). Como $U_0 = X - \mathrm{Sup}(Ae)$ e $U_1 = X - \mathrm{Sup}(A(1-e))$ e como o suporte de um A-módulo é um fechado de X, então U_0 e U_1 são abertos em X; X sendo conexo, coincide com U_0 ou U_1. O lema de globalização conclui, pois, a demonstração do teorema.

<u>Observações</u>

1) O teorema de KRULL afirma que todo ideal de A está contido num ideal maximal de A.

2) A proposição 1 é ainda verdadeira se B é um A-módulo.

3) É claro que o teorema 1 é ainda verdadeiro se a álgebra B não fôr comutativa. Neste caso diremos que B é sem divisores do zero, o têrmo de integridade sendo reservado para o caso comutativo.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO ÀS ÁLGEBRAS UNIVERSAIS

§ 1. Preliminares sôbre as álgebras universais.

Sejam M um A-módulo, $T_q(M)$ a potência tensorial q-ésima de M e $T(M)$ a soma direta dos $T_q(M)$ para $q \geq 0$, onde faremos as identificações $T_o(M) = A$ e $T_1(M) = M$. O produto tensorial confere a $T(M)$ um estrutura de A-álgebra graduada (de tipo $\mathbb{Z}$, nula em graus negativos) para a qual $T_q(M)$ é o sub-módulo dos elementos homogêneos de grau q e $T(M)$ se denominará a <u>álgebra tensorial</u> do A-módulo M.

Sejam I e J os ideais bilaterais de $T(M)$ gerados pelos elementos da forma $\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x)$ e $\alpha(x) \otimes \alpha(x)$ respectivamente, para $x, y \in M$, onde $\alpha : M \longrightarrow T(M)$ é a injeção canônica. Obtemos assim, por passagem ao quociente, duas outras álgebras, a saber, a <u>álgebra simétrica</u> $S(M) = T(M)/I$ e a <u>álgebra exterior</u> $\Lambda(M) = T(M)/J$ do A-módulo M. Os ideais I e J de $T(M)$ sendo homogêneos, obtemos sôbre $S(M)$ e $\Lambda(M)$ uma estrutura de A-álgebra graduada para as quais o submódulo $S_q(M)$ e $\Lambda_q(M)$ dos elementos homogêneos de grau q é a imagem pelo epimorfismo canônico $T(M) \longrightarrow S(M)$ e $T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ respectivamente, de $T_q(M)$, isto é, para todo $q \geq 0$ se tem $S_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap I$ e $\Lambda_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap J$.

As aplicações lineares compostas $M \longrightarrow T(M) \longrightarrow S(M)$ e $M \longrightarrow T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ são injetivas, uma vez que $\alpha(M) \cap I = 0$ e $\alpha(M) \cap J = 0$. Temos assim as identificações $S_1(M) = M$ e $\Lambda_1(M) = M$. Além disto, temos $S_o(M) = A$ e $\Lambda_o(M) = A$.

Se designarmos por $\mathfrak{M}$ a categoria dos A-módulos e por $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{A}_a$) a categoria das A-álgebras (resp. A-álgebras comutativas, A-álgebras anti-comutativas), obtemos os funtores covariantes $T: \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$, $S: \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}_c$ e $\Lambda: \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}_a$. Estes funtores são exatos à direita no sentido de que transformam sôbrejeções em sôbrejeções. Veremos, no decorrer dêste capítulo, que tais funtores não são exatos à esquerda, isto é, nem toda injeção é transformada numa injeção.

Seja $U: \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ um qualquer dos funtores T, S, Λ. Lembremos que se $\varphi: M \to M'$ é uma aplicação A-linear de M sôbre M', então o homomorfismo de A-álgebras $U(\varphi): U(M) \to U(M')$, extensão de φ, é ainda sôbrejetivo e $Ker(U(\varphi))$ (núcleo de $U(\varphi)$) é o ideal bilateral de $U(M)$ gerado, em $U(M)$, por $Ker(\varphi)$. Observemos que, como identificamos M a um sub-A-módulo de $U(M)$, então $Ker(\varphi)$ é ainda um sub-A-módulo de $U(M)$.

Lembramos ainda que se M é um A-módulo e se $\varphi: A \to B$ é um homomorfismo de anéis, podemos munir B de uma estrutura de A-módulo e a aplicação B-linear $M \otimes_A B \to U(M) \otimes_A B$ induz um homomorfismo de B-álgebras $U(M \otimes_A B) \to U(M) \otimes_A B$. Êste homomorfismo é òbviamente, um isomorfismo.

Queremos ainda observar que se L é um A-módulo livre, então $T(L)$ é a álgebra dos polinômios não-comutativos, $S(L)$ a dos polinômios comutativos (ou polinômios, simplesmente) e $\Lambda(L)$ a dos polinômios anti-comutativos, tôdas com coeficientes no anel A.

Finalmente queremos assinalar que o termo álgebra universal é aqui usado no sentido de solução de um certo problema universal. Não abordaremos, entretanto, tais questões e para tanto enviaremos o leitor à bibliografia (cf.[2]).

Como consequência do teorema do Capítulo I e do que acabamos de dizer acima, temos a seguinte proposição:

Proposição 1. Sejam A um anel de integridade e M um A-módulo. Então, U(M) é sem torção se e sòmente se, $U(M_{\mathfrak{p}})$ é sem torção para todo $\mathfrak{p} \in X$.

Teorema 1. Sejam A um anel de integridade e M um A-módulo tal que U(M) seja sem torção. Se M' é um sub-módulo de M, então U(M') é sem torção se e sòmente se $U(M'_{\mathfrak{p}})$ é sem torção para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que contenha o radical de M'.

Seja Rad(M') o radical de M' (relativamente a M), isto é, o ideal de A formado pelos elementos c de A tais que existe um inteiro (para cada c) $n \geqslant 1$ tal que $c^n M \subset M'$. Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de A que não contém Rad(M'), então $M_{\mathfrak{p}} = M'_{\mathfrak{p}}$ e $U(M'_{\mathfrak{p}}) = U(M)_{\mathfrak{p}}$ é sem torção. O teorema resulta então da proposição 1.

Corolário. Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de A. Então $U(\mathfrak{a})$ é sem torção se e sòmente se, $U(\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})$ é sem torção para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que contém $Rad(\mathfrak{a})$.

O corolário nos mostra que se $\mathfrak{q}$ é um ideal primo de A, então $U(\mathfrak{q})$ é sem torção se e sòmente se $U(\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}})$ é sem torção para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$. Em particular, se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de A, então $U(\mathfrak{m})$ é sem torção se e sòmente se $U(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}})$ é sem torção.

Teorema 2. Sejam A um anel e M um A-módulo.

(i) M é um A-módulo projetivo se e sòmente se U(M) é projetivo

(ii) M é um A-módulo plano se e sòmente se U(M) é plano.

Com efeito, si M é projetivo, isto equivale dizer que existe um módulo livre L e duas aplicações A-lineares $M \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\varphi'} M$ tais que $\varphi' \circ \varphi = 1_M$, onde $1_M : M \longrightarrow M$ é a aplicação linear definida por $1_M(x) = x$ para todo $x \in M$. Como U é um funtor covariante, segue-se

$U(M) \xrightarrow{U(\varphi)} U(L) \xrightarrow{U(\varphi')} U(M)$ com a relação $U(\varphi') \circ U(\varphi) = 1_{U(M)}$. Sendo U(L) um A-módulo livre, U(M) é projetivo. A recíproca é imediata uma vez que U(M) é projetivo se e sòmente se $U_q(M)$ é projetivo para todo $q \geq 0$. Em particular, $U_1(M) = M$ é um A-módulo projetivo. Isto demonstra (i).

Para demonstrar (ii), observemos que U(M) sendo plano e M sendo fator direto de U(M), então M é também plano. A recíproca decorre de [10] (corolário 2 do teorema 2).

O teorema 2 nos mostra que U(M) é projetivo se e sòmente se $U_q(M)$ é projetivo para todo $q \geq 0$. Suponhamos agora que exista um inteiro $q \geq 2$ tal que $U_q(M)$ seja projetivo. A questão é a de se saber se M é projetivo. Êste problema, aparentemente ingênuo, parece-nos, entretanto, extremamente difícil. Uma solução parcial foi dada em [12], capítulo IV, teorema 1. Questão análoga pode ser posta para os módulos planos.

§ 2. Integridade da álgebra simétrica

1. Posição do problema

Seja A um anel de integridade e K o corpo de frações de A.

Lema 1. *Se M é um A-módulo, S(M) é sem torção se e sòmente se S(M) é de integridade.*

Se t(S(M)) é o sub-A-módulo de torção de S(M), a sequência exata $0 \to A \to K \to K/A \to 0$ nos dá a sequência exata $0 \to t(S(M)) \to S(M) \to S(M) \otimes_A K \to S(M) \otimes_A (K/A) \to 0$. Se S(M) é sem torção, a álgebra S(M) pode ser imersa em $S(M) \otimes_A K = S(M \otimes_A K)$. Como $S(M \otimes_A K)$ é um anel de polinômios com coeficientes no corpo K, então S(M) é de integridade. A recíproca é trivial.

O problema de caracterizar as álgebras simétricas de integridade (ou sem torção, o que é equivalente pelo lema 1) é um problema aberto. O que se conhece sôbre a questão não são senão resultados parciais. Com efeito, já vimos que se M é um A-módulo plano, então S(M) é também plano, logo, sem torção, se A é de integridade.

Poder-se-ia perguntar se A de integridade e M plano caracterizam as álgebras simétricas de integridade. Isto porém não é verdade como se pode ver com o exemplo que se segue.

<u>Exemplo</u>. Sejam k um corpo, $A = k[t_1,\dots,t_n]_{(t_1,\dots,t_n)}$, $\mathfrak{m} = (t_1,\dots,t_n)A$ o ideal maximal de A e M um A-módulo de geradores $e_1,\dots,e_n$ ligados pela relação $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i = 0$. Como os t_i estão em $\mathfrak{m}$, segue-se que $e_1,\dots,e_n$ é um sistema minimal de geradores de M. Isto nos mostra que M não é livre (e nem projetivo, uma vez que A é local). Consideremos o anel de integridade $B = k[t_1,\dots,t_n;\ x_1,\dots,x_n]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0.$$

Como $S(M) = B_{\mathfrak{m}}$, então $S(M)$ é também de integridade. Se o módulo M fôsse plano, como êle é de tipo finito e A é noetheriano, então M seria projetivo. Logo, M não é plano.

2. <u>Uma caracterização dos anéis locais regulares.</u>

Sejam A um anel local noetheriano, $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de A e $k = A/\mathfrak{m}$ o corpo de restos de A. Indicaremos com dim(A) a dimensão de A no sentido de KRULL e com $h(\mathfrak{a})$ a altura de todo ideal $\mathfrak{a}$ de A. Sabemos que para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A, o quociente $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}.\mathfrak{m}$ é um k-espaço vetorial de dimensão finita, uma vez que A é noetheriano. Além disto, $[\mathfrak{a}/\mathfrak{a}.\mathfrak{m} : k]$ é o número mínimo de elementos de uma base de $\mathfrak{a}$. Logo, $[\mathfrak{a}/\mathfrak{a}.\mathfrak{m} : k] \geq h(\mathfrak{a})$ e, em particular, $\dim(A)=h(\mathfrak{m}) \leq [\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 : k]$. Se $\dim(A) = [\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 : k]$, diremos que A é um <u>anel local regular</u>. Um anel noetheriano A é <u>regular</u> se $A_{\mathfrak{p}}$ é local regular para todo ideal primo (ou maximal, o que é equivalente) $\mathfrak{p}$ de A. Isto posto, temos a seguinte caracterização dos anéis locais regulares (cf.[12]):

<u>Teorema 3. O anel</u> A <u>é local regular se e sòmente se</u> $S(\mathfrak{m})$ <u>é de integridade</u>.

Suponhamos agora que A seja um anel noetheriano (não necessàriamente local) e que $\mathfrak{p}$ seja um ideal primo de A. Se $S(\mathfrak{p})$ é de integridade, o mesmo acontece com $S(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = S(\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$ e isto equivale dizer que $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel local regular. A recíproca, porém, não é verdadeira, isto é, $A_{\mathfrak{p}}$ local regular não implica que $S(\mathfrak{p})$ seja de integridade.

<u>Exemplo</u>. Sejam k um corpo, $A = k[X_1,\ldots,X_n]$, $\mathfrak{p}$ um ideal homogêneo de A e $f_1,\ldots,f_n$ um sistema minimal de geradores homogêneos de $\mathfrak{p}$. Se $S(\mathfrak{p})$ é de integridade, então $f_1,\ldots,f_n$ são algèbricamente independentes sôbre k(cf.[12]). Logo, é suficiente tomar $m > n$ para se ter $S(\mathfrak{p})$ com torção. Macaulay demonstrou a existência de tais ideais (cf.[11]). De outro lado, $A_{\mathfrak{p}}$ é local regular, uma vez que A é regular.

A recíproca é entretanto, verdadeira, se $\mathfrak{p}$ é um ideal maximal. Mais precisamente, temos:

<u>Teorema 4. Seja</u> A <u>um anel noetheriano. Então</u> A <u>é regular se e sòmente se</u> $S(\mathfrak{m})$ <u>é de integridade para todo ideal maximal</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A.

Com efeito, é suficiente observar que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $S(\mathfrak{m})$ é de integridade se e sòmente se $S(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}})$ fôr de integridade (cf. corolário do teorema 1).

Dado um anel noetheriano A, é um problema aberto o de caracterizar os ideais primos $\mathfrak{p}$ de A para os quais $S(\mathfrak{p})$ é de integridade.

3. Interpretação geométrica dos resultados precedentes.

Sejam k um corpo, V uma k-variedade (variedades algébrica irredutível), $A = k[V]$ o anel de coordenadas de V e $k(V)$ o corpo de frações de $k[V]$, isto é, o corpo das funções racionais sôbre a variedade V. Seja $p \in V$ um ponto de V e seja $\mathfrak{p}$ o ideal primo dos elementos de $k[V]$ que se anulam em p; o conjunto das funções racionais $f/g \in k(V)$ tais que $g(p) \neq 0$ é um sub-anel de $k(V)$ que admite $k(V)$ como corpo de frações.

Êste anel não é senão o anel local $A_{\mathfrak{p}}$ e se denomina anel local do ponto p sôbre V. O ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ é o conjunto das frações racionais $f/g \in k(V)$ tais que $g(p) \neq 0$ e $f(p) = 0$, isto é, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Sabemos (cf. [17], página 71) que o ponto p é simples se e sòmente se $A_{\mathfrak{p}}$ é local regular. Tendo em vista que $\mathfrak{p}$ é um ideal maximal de A, então $A_{\mathfrak{p}}$ é local regular se e sòmente se $S(\mathfrak{p})$ é de integridade (cf. teorema 4). Isto nos mostra que as álgebras simétricas de integridade caracterizam os pontos simples sôbre uma variedade algébrica.

Exemplo. Consideremos a curva algébrica $x^2 = y^3$ tendo um ponto duplo na origem e sejam $A = k[x,y]$ seu anel de coordenadas, onde k é um corpo e $\mathfrak{p} = (x,y)A$ o ideal da origem. Então $S(\mathfrak{p})$ não é de integridade.

§ 3. Sôbre a álgebra tensorial.

Daremos, neste parágrafo, resultados análogos aos já dados para as álgebras simétricas.

Lema 2. Sejam A um anel de integridade e M um A-módulo. Então T(M) é sem torção se e sòmente se T(M) é sem divisores do zero.

Com efeito, se K é o corpo de frações de A, é suficiente ver que a sequência exata $0 \to A \to K \to K/A \to 0$ nos dá a sequência exata $0 \to t(T(M)) \to T(M) \to T(M)\otimes_A K \to$ $\to T(M)\otimes_A (K/A) \to 0$. Considerando que $T(M)\otimes_A K = T(M\otimes_A K)$ e como a álgebra tensorial de um espaço vetorial é sem divisores do zero, o lema está demonstrado.

<u>Lema 3. Sejam A um anel de integridade, $\mathfrak{a}$ um ideal de A e $\alpha : \mathfrak{a} \to T(\mathfrak{a})$ a injeção canônica.</u> Se $\alpha(x)\otimes\alpha(y) - \alpha(y)\otimes\alpha(x) \neq 0$, <u>onde x e y estão em $\mathfrak{a}$, então</u> $\alpha(x)\otimes\alpha(y) - \alpha(y)\otimes\alpha(x)$ <u>é um elemento de torção de</u> $T(\mathfrak{a})$.

Com efeito, como $0 = \alpha(xy - yx) = x\,\alpha(y) - y\,\alpha(x)$, isto é $x\,\alpha(y) = y\,\alpha(x)$ para todo x e y em $\mathfrak{a}$, então temos $x(\alpha(x)\otimes\alpha(y) - \alpha(y)\otimes\alpha(x)) = y(\alpha(x)\otimes\alpha(x) - \alpha(x)\otimes\alpha(x)) = 0$.

<u>Proposição 2. Sejam A um anel e M um A-módulo. O epimorfismo canônico $T(M) \to S(M)$ é bijetivo se e sòmente se M é localmente monógeno.</u>

Seja então A local, $\mathfrak{m}$ seu ideal maximal e $k=A/\mathfrak{m}$ o corpo de restos. Se M é monógeno, é claro que $T(M) = S(M)$. Suponhamos que $T(M) = S(M)$. A asserção é evidente se A é um corpo e M um espaço vetorial sôbre A. Senão se tem $T(M)\otimes_A k =$ $= S(M)\otimes_A k$ e portanto, $T(M/\mathfrak{m}M) = S(M/\mathfrak{m}M)$. Como $M/\mathfrak{m}M$ é um k-espaço vetorial, êle é de dimensão 1 sôbre k e portanto existe um elemento $e \in M$ tal que $M = M + Ae$. O lema de Nakayama nos dá $M = Ae$.

<u>Lema 4. (Lema de Nakayama).</u>

<u>Sejam A um anel, Rad(A) o radical da Jacobson de A, $\mathfrak{a}$ um ideal de A tal que $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Rad}(A)$ e M um A-módulo de tipo finito. Se $M = \mathfrak{a}M$, então $M = 0$.</u>

Com efeito seja $x_1,\dots,x_n$ um sistema (finito) de geradores de M; $\mathfrak{a}M$ é o conjunto das somas finitas $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ onde $a_i \in \mathfrak{a}$ para todo i. Como $x_i \in \mathfrak{a}M$, podemos escrever $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ $(i = 1,\dots,n)$ com os a_{ij} em $\mathfrak{m}$ e se $d = \det(\delta_{i,j} - a_{i,j})$, $\delta_{i,j}$ sendo o símbolo de KRONECKER, então $dx_i = 0$ $(i = 1,\dots,n)$. Como d é inversível em A, segue-se que $x_i = 0$ $(i = 1,\dots,n)$, isto é, $M = 0$.

Lema 5. Sejam A um anel local de integridade, K seu corpo de frações, $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de A e suponhamos que $A \neq K$. As condições seguintes são equivalentes:

(i) A é um anel principal;

(ii) o ideal é principal e $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$;

(iii) A é um anel noetheriano e $\mathfrak{m}$ é principal;

(iv) A é um anel de valorização noetheriano.

A demonstração dêste lema é clássica e para tanto, enviamos o leitor à bibliografia (cf. [18]).

Um anel que satisfaz a uma das condições equivalentes do lema 5, denomina-se anel de valorização discreta. Isto equivale dizer que se v é valorização cujo anel é A e se $K^* = K - \{0\}$, então $v(K^*) \approx \mathbb{Z}$ (isomorfismo de grupos).

Teorema 5. Seja A um anel local de ideal maximal $\mathfrak{m}$. O anel A é de valorização discreta se e sòmente se $T(\mathfrak{m})$ é sem torção.

Com efeito, se $T(\mathfrak{m})$ é sem torção, então $T(\mathfrak{m}) = S(\mathfrak{m})$ (cf. lema 3) e pela proposição 2, $\mathfrak{m}$ é principal. Logo, A é de valorização discreta. Recìprocamente, é claro que se A é de valorização discreta $\mathfrak{m}$ é principal e $T(\mathfrak{m})$ é um anel de polinômios em uma indeterminada com coeficientes em A. Logo, $T(\mathfrak{m})$ é de integridade, isto é, sem torção.

Seja agora A um anel noetheriano (não necessàriamente local) e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de A. Se $T(\mathfrak{p})$ é sem torção, o mesmo acontece com $T(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = T(\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$ e isto equivale dizer que

$A_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta. Entretanto, $A_{\mathfrak{p}}$ de valorização discreta não implica que $T(\mathfrak{p})$ seja sem torção.

Com efeito, sejam k um corpo, $A = k[[x,y]]$ com as relações $xy = y^2 = 0$ e $\mathfrak{p} = Ay$. Como $A/\mathfrak{p} = k[[x]]$ é de integridade, então $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de A. De outro lado, $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} = 0$ e como $A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ é o corpo de frações de $A/\mathfrak{p}$, então $A_{\mathfrak{p}} = k((x))$. Isto nos mostra que $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta ($A_{\mathfrak{p}}$ é um corpo). De outro lado, $T(\mathfrak{p})$ contém A no gráu zero, logo $T(\mathfrak{p})$ tem divisores do zero (não podemos falar aqui em torção, uma vez que A não é de integridade). Para um exemplo no caso em que A é de integridade, ver §5.

A recíproca é entretanto verdadeira, se $\mathfrak{p}$ é maximal. Mais precisamente, temos o resultado seguinte:

<u>Teorema</u> 6. <u>Seja</u> A <u>um anel noetheriano</u>. <u>Para todo ideal maximal</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A, $T(\mathfrak{m})$ <u>é sem torção se e sòmente se</u> $A_{\mathfrak{m}}$ <u>é de valorização discreta</u>.

Com efeito, é suficiente ver que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $T(\mathfrak{m})$ é sem torção se e sòmente se $T(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}})$ é sem torção e que isto equivale a $A_{\mathfrak{m}}$ de valorização discreta.

No caso dos ideais, é fácil dar exemplos de álgebras tensoriais com torção. Para isto, sejam k um corpo, $A = k[X_1,\ldots,X_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $X_1,\ldots,X_n$ com coeficientes em k e $\mathfrak{p}$ um ideal primo homogêneo de A tendo $f_1,\ldots,f_m$ como sistema minimal de geradores homogêneos. Se $T(\mathfrak{p})$ é sem torção, então $T(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p})$ é de integridade. É suficiente tomar $m > n$ para ter $T(\mathfrak{p})$ com torção.

Problemas análogos aos que colocamos para as álgebras simétricas, podem ser postos para as álgebras tensoriais.

§ 4. Sôbre a álgebra exterior.

Sejam A um anel e M um A-módulo. Se $\Lambda_q(M) = 0$, então $T_q(M) \subset J$ e por conseguinte $T_q(M) \cap I \subset I \cap J = 0$, logo $T_q(M) \cap I = 0$. Isto nos mostra que $S_q(M) = T_q(M)$. Logo, se $\Lambda_q(M) = 0$ para todo $q \geq 2$, então $T(M) = S(M)$ e isto equivale dizer que M é localmente monógeno.

Lema 6. Suponhamos que A seja um anel de integridade e seja $\mathfrak{n}$ um ideal de A. Então os A-módulos $\Lambda_q(\mathfrak{n})$ são de torção para todo $q \geq 2$.

Com efeito, seja $\alpha : \mathfrak{n} \longrightarrow \Lambda(\mathfrak{n})$ a injeção canônica. Para todo vetor da forma $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \neq 0$ com x e y em $\mathfrak{n}$, tem-se $x(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) = \alpha(x) \wedge (x\alpha(y)) = \alpha(x) \wedge (y\alpha(x)) =$ $= y(\alpha(x) \wedge \alpha(x)) = 0$, uma vez que $x\alpha(y) = y\alpha(x)$, quaisquer que sejam x e y em $\mathfrak{n}$. Isto nos mostra que $\Lambda_2(\mathfrak{n})$ é um A-módulo de torção. A mesma demonstração é válida para os gráus superiores.

Teorema 7. Seja A um anel local de integridade e $\mathfrak{m}$ seu ideal maximal. O anel A é de valorização discreta se e sòmente se $\Lambda(\mathfrak{m})$ é sem torção.

De fato, se A é de valorização discreta, $\mathfrak{m}$ é principal por conseguinte $\Lambda(\mathfrak{m})$ é sem torção. Se $\Lambda(\mathfrak{m})$ é sem torção, $\Lambda_q(\mathfrak{m}) = 0$ para todo $q \geq 2$ (cf. lema 6) e portanto $T(\mathfrak{m}) = S(\mathfrak{m})$. Isto nos mostra que $\mathfrak{m}$ é principal e A é de valorização discreta.

Seja agora A um anel noetheriano (não necessàriamente local), $\mathfrak{p}$ um ideal primo de A e suponhamos que $\Lambda(\mathfrak{p})$ seja um A-módulo sem torção. Então $\Lambda(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \Lambda(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ é também sem torção e isto equivale dizer que $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta. Mas, $A_{\mathfrak{p}}$ de valorização discreta não implica que $\Lambda(\mathfrak{p})$ seja sem torção (ver exemplo do § 5).

A recíproca é porém verdadeira, se $\mathfrak{p}$ é maximal. É o que nos mostra o resultado seguinte:

Teorema 8. Seja A um anel noetheriano de integridade. Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ é um anel de valorização discreta se e sòmente se $\Lambda(\mathfrak{m})$ é sem torção.

É suficiente observar que se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de A, então $\Lambda(\mathfrak{m})$ é sem torção se e sòmente se $\Lambda(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}})$ é sem torção.

Finalmente queremos observar que problemas análogos aos que colocamos para as álgebras simétricas podem ser postos para as álgebras exteriores.

§ 5. Estudo de um exemplo.

Vimos, nos §§ 3 e 4 que se A é um anel noetheriano de integridade e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de A, então $T(\mathfrak{p})$ ou $\Lambda(\mathfrak{p})$ sem torção implica que $A_{\mathfrak{p}}$ seja de valorização discreta.

Mostraremos neste exemplo, entre outras coisas, que $A_{\mathfrak{p}}$ de valorização discreta não implica necessàriamente $T(\mathfrak{p})$ ou $\Lambda(\mathfrak{p})$ sem torção. Para tanto, daremos alguns resultados preliminares.

1. Alguns resultados homológicos

Demonstraremos aqui essencialmente, alguns resultados bem conhecidos (cf.[4], exercício 19, página 126).

Lema 7. Seja A um anel e consideremos duas sequências exatas $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ e $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ de A-módulos, onde M e N são planos. Então, para todo $n \geq 2$ tem-se

$$\mathrm{Tor}_n^A(M'',N'') = \mathrm{Tor}_{n-2}^A(M', N').$$

Com efeito, como M é plano, $\mathrm{Tor}_n^A(M,N'') = 0$ para todo $n \geq 1$ (cf.[3], capítulo 1, § 4, proposição 1), e o produto tensorial da primeira sequência por N" nos dá a sequência exata de A-módulos $\ldots \to \mathrm{Tor}_2^A(M', N'') \to 0 \to \mathrm{Tor}_2^A(M'',N'') \to$ $\to \mathrm{Tor}_1^A(M', N'') \to 0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M'', N'') \to M' \otimes_A N'' \to M \otimes_A N'' \to$

$M'' \otimes_A N'' \longrightarrow 0$. Logo, $\mathrm{Tor}_n^A(M'',N'') = \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M',N'')$ para todo $n \geqslant 1$. Anàlogamente, se fizermos o produto tensorial da segunda sequência por M' e levando-se em conta que N sendo plano tem-se $\mathrm{Tor}_n^A(M',N) = 0$ para todo $n \geqslant 1$, então temos a sequência exata de A-módulos $\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^A(M',N') \longrightarrow 0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{Tor}_2^A(M',N'') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M',N') \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M',N'') \longrightarrow M' \otimes_A N' \longrightarrow$ $\longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'' \longrightarrow 0$. Resulta que $\mathrm{Tor}_n^A(M',N'') =$ $= \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M',N')$ para todo $n \geqslant 1$. Logo, $\mathrm{Tor}_n^A(M'',N'') =$ $= \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M',N'') = \mathrm{Tor}_{n-2}^A(M',N')$, para $n-1 \geqslant 1$, isto é, $\mathrm{Tor}_n^A(M'',N'') = \mathrm{Tor}_{n-2}^A(M',N')$ para todo $n \geqslant 2$.

Observemos que em [4] (teorema 1.5a, página 109), supõe-se que M e N sejam projetivos, forma sob a qual iremos usá-lo aqui.

<u>Proposição 3. Sejam A um anel, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ dois ideais de A. Então segue-se:</u>

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$$

$$\mathrm{Tor}_2^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{a}.\mathfrak{b})$$

<u>onde $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ designa a imagem de $\mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{b} \longrightarrow A$.</u>

De fato, basta aplicar o lema 7 às sequências exatas de A-módulos $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow$ $\longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{b}$ 0 e observar que A é A-módulo livre, logo plano.

2. <u>Sizígias e integridade.</u>

Seja A um anel e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito de elementos de A. Diremos que um elemento $(c_1, \ldots, c_n) \in A^n$ é uma

<u>sizígia</u> de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ se $\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0$. O conjuntos das sizígias de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ forma um sub-A-módulo de A^n.

Seja agora $\mathfrak{a} = (a_1,\ldots,a_n)A$ um ideal de A de tipo finito. Tôda sizígia do conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$ denomina-se uma <u>sizígia do ideal $\mathfrak{a}$</u>. Seja ainda M o módulo das sizígias do ideal $\mathfrak{a}$ e T o sub-A-módulo de M gerado pelas sizígias $(0,\ldots,0,a_j,0,\ldots,0,-a_i,0,\ldots,0)$ onde $i<j$, a_j ocupa o i-ésimo lugar e $-a_i$ o j-ésimo. Todo elemento de T denomina-se uma <u>sizígia trivial</u> e é fácil verificar que para que uma sizígia $(c_1,\ldots,c_n)\in T$ é necessário e suficiente que se possa escrever

$$c_i = \sum_{j=i+1}^{n} b_{i,j}\, a_j - \sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i}\, a_j$$

para $i=1,\ldots,n$ e onde os $b_{i,j}$ estão em A.

Seja $\varphi : A^n \longrightarrow \mathfrak{a}$ a aplicação A-linear definida por $\varphi(e_i) = a_i$ $(i=1,\ldots,n)$, onde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é a base canônica do A-módulo livre A^n. É imediato que $M\subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ e portanto $T\subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. De outro lado, se $x=(c_1,\ldots,c_n)\in T$, então $c_i\in\mathfrak{a}$ $(i=1,\ldots,n)$, isto é, $T\subset \mathfrak{a}A^n$. Isto significa que $T\subset \mathfrak{a}A^n\cap \mathrm{Ker}(\varphi)$. Se $T=\mathfrak{a}A^n\cap\mathrm{Ker}(\varphi)$ diremos que $\mathfrak{a}$ é um <u>ideal sizigético</u>. Temos assim o resultado seguinte (cf. [15] ou [16]):

<u>Lema</u> 8. <u>Seja $\mathfrak{a}$ um ideal sizigético e suponhamos que para tôda sizígia</u> $(c_1,\ldots,c_n)\in M$, <u>a condição</u> $c_1\in\mathfrak{a}$ <u>implica</u> $c_i\in\mathfrak{a}$ $(i=2,\ldots,n)$. <u>Então</u> $S(\mathfrak{a})$ <u>é de integridade</u>.

3. O exemplo

Sejam k um corpo, $A=k[x,y,z]$ o anel de coordenadas da quádrica $z^2=xy$ e $\mathfrak{p}=(x,z)A$ o ideal de A gerado por

x e z. Como $A/\mathfrak{p} = k[y]$ é de integridade então $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de A. É claro que $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta, seu ideal maximal sendo $zA_{\mathfrak{p}}$. Vamos mostrar que os A-módulos $T(\mathfrak{p})$ e $\Lambda(p)$ possuem torção.

Para mostrarmos que $T(\mathfrak{p})$ possue torção é suficiente provar que $x \otimes z - z \otimes x \neq 0$. Seja então I o ideal bilateral de $T(\mathfrak{p})$ gerado pelos elementos $u \otimes v - v \otimes u$, u e v em $\mathfrak{p}$. É claro que $I \cap T_2(\mathfrak{p})$ é o sub-A-módulo monógeno de $T_2(\mathfrak{p})$ gerado por $x \otimes z - z \otimes x$ e como $I \cap T_2(\mathfrak{p}) = \operatorname{Ker}(T_2(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{p}^2)$, é suficiente mostrar que $\operatorname{Ker}(T_2(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{p}^2) \neq 0$. Consideremos a aplicação A-linear $A \times A \to \mathfrak{p}$ definida por $(a,c) \mapsto ax + cz$. Esta aplicação é um epimorfismo e seu núcleo é ainda $\mathfrak{p}$. Temos assim a sequência exata de A-módulos $0 \to \mathfrak{p} \to A^2 \to \mathfrak{p} \to 0$ e para todo A-módulo M, a sequência exata de A-módulos $\ldots \to \operatorname{Tor}_2^A(\mathfrak{p},M) \to 0 \to \operatorname{Tor}_2^A(\mathfrak{p},M) \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p},M) \to 0 \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p},M) \to \mathfrak{p} \otimes_A M \to A^2 \otimes_A M \to \mathfrak{p} \otimes_A M \to 0$. Logo, para todo $n \geq 1$, tem-se $\operatorname{Tor}_n^A(\mathfrak{p},M) = \operatorname{Tor}_{n-1}^A(\mathfrak{p},M)$. De outro lado, a sequência exata de A-módulo $0 \to \mathfrak{p} \to A \to A/\mathfrak{p} \to 0$ nos dá, para todo A-módulo M, a sequência exata $\ldots \to \operatorname{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p},M) \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p},M) \to 0 \to \operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{p},M) \to \mathfrak{p} \otimes_A M \to M \to (A/\mathfrak{p}) \otimes_A M \to 0$. Assim, $\operatorname{Tor}_n^A(A/\mathfrak{p},M) = \operatorname{Tor}_{n-1}^A(\mathfrak{p},M)$ para todo $n \geq 1$. Reunindo as duas fórmulas assim obtidas, temos $\operatorname{Tor}_{n+1}^A(A/\mathfrak{p},M) = \operatorname{Tor}_n^A(A/\mathfrak{p},M)$ para todo $n \geq 1$. Logo, $\operatorname{Ker}(T_2(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{p}^2) = \operatorname{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p},A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{p},A/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \neq 0$. Temos assim $x \otimes z - z \otimes x \neq 0$, logo um elemento de torção de $T(\mathfrak{p})$.

Mostremos agora que $S(\mathfrak{p})$ é de integridade. Para tanto, basta verificar as condições do lema 8. Com efeito, tôda sizígia (a,c) de $\mathfrak{p}$ tal que a e c estão em $\mathfrak{p}$ se exprime sob a forma $a = z$, $b = -x$, isto é, é trivial. De outro lado, as condições $(a,c) \in A^2$, $ax + cz = 0$ e $a \in \mathfrak{p}$ implicam $c \in \mathfrak{p}$. Com efeito, $0 = (ax + cz)y = (az + cy)z$ e portanto, $az + cy = 0$, isto é, $cy \in \mathfrak{p}$. Como $y \notin \mathfrak{p}$, então $c \in \mathfrak{p}$. Isto nos mostra que $S(\mathfrak{p})$ é de integridade.

Finalmente, se k é um corpo de característica zero, tem-se $T_2(\mathfrak{p}) = S_2(\mathfrak{p}) \otimes \Lambda_2(\mathfrak{p})$. Logo, $\Lambda_2(\mathfrak{p})$ possue torção.

BIBLIOGRAFIA

(1) N.Bourbaki, Algèbre, chap.II (Algèbre Linéaire), 3ème édition, Hermann, Paris, 1962.

(2) N.Bourbaki, Algèbre, chap.III (Algèbre Multilinéaire), 3ème édition, Hermann, Paris (no prelo).

(3) N.Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. I et II, Hermann Paris, 1961.

(4) H.Cartan and S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.

(5) C.Chevalley, The construction and study of certain important algebras, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1955.

(6) C.Chevalley, Fundamental concepts of algebra, Academic Press Inc., New York, 1956.

(7) D.Ferrand, Anneaux gradués réguliers, Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences, Université de Paris, Paris, 1964.

(8) P.Freyd, Abelian Categories, Harper and Row Publishers, New York, 1964.

(9) J.L.Koszul, Álgebra Multilinear, Sociedade de Matemática de São Paulo, São Paulo, 1956.

(10) D.Lazard, Sur les modules plats, C.R.Ac.des Sciences, Paris, 258 (1964, 6313-6316.

(11) F.S.Macaulay, The algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts n.19,Cambridge University Press, 1916.

(12) A.Micali, Sur les algèbres universelles, Ann.Inst. Fourier, Grenoble, 14(1964) (Thèse de Doctorat d'Etat,

Faculté des Sciences, Université de Paris, Novembre 1963)

(13) A.Micali, Algèbres intègres et sans torsion, Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des Nombres) 18ème. année, 1964-64, n.12 (8.2.1965).

(14) D.G.Northcott, Ideal Theory, Cambridge University Press, 1953.

(15) P.Salmon, Sulle algebre simmetriche e di Rees di un ideale, Edizioni Scientifiche, Genova, 1964.

(16) P.Samuel, P.Salmon et A.Micali, Intégrité et factorialité des algèbres symétriques, Atas do 4º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas 1963, a ser publicada.

(17) P.Samuel, Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, Berlim, 1955.

(18) P.Samuel, Commutative Algebra (Notes by D.Hertzig), Cornell University, Spring term 1953.