Domingos Pisanelli

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS OPERADORES ANALÍTICOS

Tese Apresentada à Congregação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para o Concurso de Docência Livre na Cadeira de "Análise Matemática".

SÃO PAULO - 1961

Domingos Pisanelli

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS OPERADORES ANALÍTICOS

Tese Apresentada à Congregação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para o Concurso de Docência Livre na Cadeira de "Análise Matemática".

SÃO PAULO - 1961

À MEMÓRIA DE MINHA MÃE

ÍNDICE

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

*

INTRODUÇÃO

Êste trabalho tem por objetivo a resolução do seguinte problema: caracterizar mediante as indicatrizes os operadores analíticos de Fantappiè, definidos numa vizinhança da origem do espaço |F| - introduzido por C. L. da Silva Dias (1951), A. Grothendieck (1953) e G. Köthe (1953) - e com valores num espaço localmente convexo completo e separado.

Êste problema - quando o operador está definido numa vizinhança da origem do espaço (F), e tem valores em C (funcionais analíticos) - foi formulado por Fantappiè em 1928 ([11,a], pg. 633)(*). O mesmo problema - quando o operador está definido numa vizinhança do espaço |F| e tem valores noutro espaço |F'| - foi reformulado por J. Sebastião e Silva em 1953 ([8,b], pg. 32) tendo o mesmo obtido uma condição suficiente.

A importância que tal estudo pode ter, tem paralelo na teoria das funções analíticas, quando se procura definir uma tal função por meio de uma série de potências.

Para esta resolução faltava: em primeiro lugar demonstrar a continuidade dêstes operadores. Isto foi conseguido por J. Sebastião e Silva há pouco tempo (1950) ([8,a]), utilizando um resultado de

(*) - Os números entre colchetes referem-se à bibliografia.

Zorn sôbre a continuidade dos operadores G-analíticos, definidos num aberto de um espaço de Banach com valores noutro espaço de Banach e cuja primeira variação é contínua. Em segundo lugar, uma fórmula de majoração para as indicatrizes de um operador analítico numa vizinhança de zero em [F]. Isto o conseguimos adaptando aos espaços [F] uma fórmula não utilizada de G. Haefeli e F. Pellegrino (1949).

Mediante esta fórmula pudemos estabelecer condições necessárias e suficientes, para que um desenvolvimento de Fantappiè defina um operador analítico numa vizinhança da origem em [F] (proposição 3).

Extendemos essa mesma fórmula a qualquer espaço vectorial topológico localmente convexo completo e separado (proposição 1). Isso nos permitiu dar a caracterização de um operador analítico definido numa vizinhança da origem do espaço $\mathcal{E}N^{\cdot}$ [9], mediante seu desenvolvimento de Taylor (proposição 2) e em termos de hipóteses nos espaços componentes.

No fim do capítulo IV damos exemplos de desenvolvimentos de Fantappiè convergentes numa vizinhança da origem de vários espaços [F] e com valores em C ou no próprio [F].

No apêndice caracterizamos os operadores G-analíticos permutáveis com um operador linear e contínuo e damos alguns exemplos.

No capítulo I damos os fundamentos da teoria dos espaços vectoriais topológicos segundo N. Bourbaki.

No capítulo II esboçamos a teoria da integração de funções de várias variáveis complexas, com valores num espaço vectorial topológico localmente convexo, segundo a orientação de N. Bourbaki. Adaptamos aos espaços localmente convexos a teoria das funções analíticas de E. Hille e outros [4].

A parte fundamental dêste trabalho, principia no capítulo III após uma digressão sôbre os operadores G-analíticos segundo o tratado de E. Hille [4], alguns resultados de J. Sebastião e Silva sôbre a continuidade dos operadores analíticos segundo Fantappiè, e prossegue no capítulo IV.

Consignamos os agradecimentos aos profs. Omar Catunda,

Cândido Lima da Silva Dias, Edison Farah, Benedito Castrucci e Fernando Furquim de Almeida, do Departamento de Matemática, nossos mestres, pela oportunidade que nos deram de nos candidatar ao título de Livre-docente.

Acreditamos, desta forma, ter contribuído para o estudo da fecunda teoria dos operadores analíticos, ao qual nos temos dedicado desde nossa estada em Roma (1954), e nos permitimos apresentar êste trabalho à douta Congregação desta Faculdade.

O Autor

CAPÍTULO I

§1 - Subconjuntos absolutamente convexos de um espaço vectorial

Seja X um espaço vectorial sôbre o corpo complexo C [14].

DEFINIÇÃO 1 - Um subconjunto A de X é chamado absolutamente convexo se $\alpha x + \beta y \in A$ quando $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ $(\forall x, y \in A;\ \alpha, \beta \in C)$. Isto é, $\alpha x + \beta A \subset A$ $(\forall |\alpha| + |\beta| \leq 1)$.

Um subconjunto absolutamente convexo é *circular*, isto é, $e^{i\theta} A = A$ $(\forall\ \theta \in R)$.

É imediato que a intersecção de um número finito de subconjuntos absolutamente convexos é absolutamente convexa.

Se A é absolutamente convexo segue-se que

$$\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta) A \quad (\forall \alpha, \beta \in C).$$

DEFINIÇÃO 2 - Chama-se *envoltória absolutamente convexa* de uma família de subconjuntos $(A_j)_{j \in J}$ o menor subconjunto absolutamente convexo que contém $\bigcup_{j \in J} A_j$. Indiquemos êste conjunto por $\Gamma_{j \in J} A_j$. $\Gamma_{j \in J} A_j$ será formado pelas combinações lineares $\sum_{j \in I} \lambda_j a_j$ onde $\sum_{j \in I} |\lambda_j| \leq 1$ $(I = \text{subconjunto finito qualquer de } J \text{ e } a_j \in A_j)$, pois, o conjunto destas somas é absolutamente convexo e contém $\bigcup_{j \in J} A_j$ e, além disto, está contido em qualquer subconjunto absolutamente convexo que contém $\bigcup_{j\in J} A_j$ ([2]. pg. 6).

DEFINIÇÃO 3 - Diz-se que um subconjunto A de X é *estrelado* se $\alpha x \in A$ quando $x \in A$ e $|\alpha| \leq 1$. Isto é, $\alpha A \subset A$ $(\forall |\alpha| \leq 1)$.

É fácil ver que a soma e a reunião qualquer de subconjuntos estrelados são estreladas. Também o produto de um subconjunto estrelado por uma constante é estrelado.

Um subconjunto absolutamente convexo é estrelado.

DEFINIÇÃO 4 - Diz-se que um subconjunto A de X é *simétrico*, se $-x \in A$ quando $x \in A$. Isto é, $-A \subset A$ donde $-A = A$.

Um subconjunto estrelado é simétrico.

DEFINIÇÃO 5 - Um subconjunto A é chamado *absorvente* se dado qualquer $x_0 \in X$ existe $\lambda_0 \neq 0$ em C tal que $x_0 \in \lambda_0 A$.

§2 - Espaço vectorial topológico

DEFINIÇÃO 6 - Um *espaço vectorial topológico* é um espaço vectorial onde é dada uma estrutura topológica compatível com a estrutura vectorial, isto é, tal que as aplicações $(x,y) \in X \times X \rightarrow x+y \in X$ e $(\alpha,x) \in C \times X \rightarrow \alpha x \in X$ sejam contínuas nas estruturas topológicas produto. Supõe-se C munido da estrutura topológica habitual. C munido desta estrutura será designado ainda por C.

As aplicações do tipo $x \rightarrow a+x$ (translações) e $x \rightarrow \alpha x$ ($\alpha \neq 0$ homotetias) são contínuas e biunívocas, e homeomorfismos.

Em virtude desta observação, as vizinhanças de um ponto x_0 serão dadas pelos subconjuntos $x_0 + V(0)$ $(V(0) =$ vizinhança da origem).

Um espaço vectorial topológico será simbolizado por E.V.T.

Chama-se *subespaço* de um E.V.T. um subespaço vectorial com a estrutura topológica induzida. Evidentemente ainda teremos um E.V.T. sôbre C.

Chama-se forma linear contínua sôbre um E.V.T. uma aplicação linear e contínua sôbre X com valores em C.

Estrutura uniforme de um espaço vectorial topológico

Num espaço vectorial topológico define-se de maneira natural uma estrutura uniforme, considerando-se a base de filtro β sôbre $X \times X$ formada pelas partes:

$$W = \{(x,y) \in X \times X \mid x - y \in V(0)\}$$

onde $V(0)$ percorre as vizinhanças de zero.

A estrutura topológica associada a esta estrutura uniforme é exatamente aquela das vizinhanças dadas.

Quando não fôr mencionada explicitamente uma estrutura uniforme num espaço vectorial topológico, suporemos que seja aquela definida acima.

Como em todo espaço uniforme, as vizinhanças de um ponto admitem um sistema fundamental de vizinhanças fechadas (|15| pg. 142).

Em consequência X será separado quando e sòmente quando a origem fôr um subconjunto fechado.

Caracterização da estrutura vectorial topológica

Considerando-se para cada vizinhança V da origem, o maior subconjunto estrelado $V' \subset V$, obteremos uma base de filtro de vizinhanças β que goza das propriedades:

1) O homotético de cada elemento de β está em β.
2) Os elementos de β são estrelados.
3) Os elementos de β são absorventes.
4) Dado $V' \in \beta$ existe $W' \in \beta$ tal que $W' + W' \subset V'$.

Recìprocamente, consideremos em X uma base de filtro β com as propriedades 1), 2), 3) e 4). Definamos vizinhança da origem como um subconjunto V que contém $V' \in \beta$, e vizinhança de x_0 como $x_0 + V$. Obteremos uma estrutura de espaço vectorial topológico em E (|1,a| pg. 2).

A aderência de um subconjunto absolutamente convexo A é absolutamente convexa. Seja $\alpha A + \beta A \subset A$ $(|\alpha| + |\beta| \leq 1)$. Como a aplicação $(x,y) \to \alpha x + \beta y$ é contínxa em $X \times X$, teremos:

$$\alpha\bar{A}+\beta\bar{A}\subset(\overline{\alpha A+\beta A})\subset\bar{A}.$$

DEFINIÇÃO 7 - A aderência da envoltória absolutamente convexa de A chama-se *envoltória convexa e fechada* de A. Pela observação anterior a envoltória convexa e fechada de A é o menor subconjunto absolutamente convexo e fechado que contém A.

§3 - Subconjuntos limitados de um espaço vectorial topológico

DEFINIÇÃO 8 - Diz-se que um subconjunto A de X é *limitado*, quando dada uma vizinhança da origem $V(0)$, existir $0\neq\lambda\in C$ tal que $A\subset\lambda V$.

Evidentemente um subconjunto de A também será limitado.

A reunião de um número finito de limitados é limitada, como se verifica pela definição.

A aderência de um limitado A também é limitada, pois dada uma vizinhança fechada V da origem, existe $0\neq\lambda\in C$ tal que $A\subset\lambda V$. Segue-se que $\bar{A}\subset\lambda V$, isto é, $\bar{A}$ é limitada.

Todo subconjunto A compacto é limitado. Com efeito, seja uma vizinhança V da origem. Seja W uma vizinhança estrelada da origem tal que $W+W\subset V$. Teremos para $x_1,\dots,x_n$ convenientes:

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{n}(x_j+W)=B+W\qquad(B=\bigcup_{j=1}^{n}\{x_j\})$$

Como B é limitado, existirá $\lambda\neq 0$ tal que $B\subset\lambda W$. Seja μ tal que $|\mu|\geqq 1$ e $|\mu|\geqq|\lambda|$. Será $A\subset\mu W+\mu W\subset\mu V$.

§4 - Espaço vectorial topológico localmente convexo

DEFINIÇÃO 9 - Diz-se que um espaço vectorial topológico é *localmente convexo* se existir um sistema fundamental de vizinhanças da origem absolutamente convexas. Para designá-lo utilizaremos o símbolo E.L.C.

Num E.L.C. existe um sistema fundamental de vizinhanças β que satisfaz às propriedades:

I) β é uma base de filtro.

II) Todo elemento de β é absolutamente convexo.

III) Os elementos de β são absorventes.

IV) Os homotéticos dos elementos de β estão em β.

Recìprocamente dado um conjunto de partes de um espaço vectorial com as prppriedades I), II), III) e IV), obteremos uma estrutura de E.L.C. definindo-se vizinhança da origem como todo subconjunto que contém um elemento β.

A envoltória ΓA de um subconjunto limitado A de um E.L.C. é limitada. Com efeito, dada a vizinhança de zero V absolutamente convexa, λV também é absolutamente convexa e $A \subset \lambda V \Rightarrow \Gamma A \subset \lambda V$.

DEFINIÇÃO 10 - Uma aplicação de um espaço vectorial topológico X em R é chamada *seminorma* quando satisfaz às propriedades:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

De 1) e 2) segue-se que $p(x) \geq 0$ $(\forall x \in X)$.

O subconjunto $A = \{x \mid p(x) < 1\}$ é absolutamente convexo.

Recìprocamente um subconjunto absolutamente convexo A define o subespaço vectorial C.A dos produtos ax $(a \in C, x \in A)$ e a seminorma em C.A:

$$p(x) = \inf\{\, |\lambda| \mid x \in \lambda A \}.$$

DEFINIÇÃO 11 - Chama-se norma sôbre X uma seminorma que satisfaz à propriedade $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Uma norma será designada pelo símbolo $\|x\|$.

TEOREMA 1 - *A seminorma associada a um subconjunto absolutamente convexo e limitado* A *de um* E.V.T. *separado é também uma norma.*

Com efeito, seja $p(x)$ a seminorma associada a A e $p(x) = 0$. Existirá uma sucessão $(\lambda_n)_{n \in N}$ onde $\lambda_n \to 0$ tal que $x \in \lambda_n A$. Como A é limitado, dada uma vizinhança de zero $V(0)$ estrelada, existe $\lambda \in C$ tal que $x \in (\lambda_n \lambda) V$. Para n conveniente teremos $|\lambda_n \lambda| < 1$; logo, $(\lambda_n \lambda) V \subset V$ e $x \in V(0)$ $(\forall V(0))$. Como X é separado será $x = 0$. Esta norma será designada $\| \ \|_A$.

Seja A absolutamente convexo e $p(x)$ a seminorma associada a A. É fácil ver que dado $\beta > 0$:

$$\{x \in X \mid p(x) < \beta\} = \bigcup_{|\alpha| < \beta} \alpha A \subset \beta A \subset \{x \in X \mid p(x) \leq \beta\}$$

Se A fôr também uma vizinhança de zero, $\{x \in X \mid p(x) < \beta\}$ será outra vizinhança de zero (*). Segue-se que $p(x)$ é uma função contínua em X, pois

$$\{x \in X \mid |p(x) - p(x_0)| \leq \varepsilon\} \supset \{x \mid p(x - x_0) \leq \varepsilon\} \supset x_0 + \varepsilon A.$$

Se A fôr também aberto, $\{x \in X \mid p(x) < 1\} = A$. Com efeito, seja $x \in A$. Como a aplicação $f: t \to tx$ é contínua em R e em particular para $t = 1$, teremos que $f^{-1}(A) \supset [1, 1 + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$ conveniente) donde $(1+\varepsilon)x \in A$ e $x \in \frac{1}{1+\varepsilon} A$. Segue-se que $p(x) < 1$.

Se A é absolutamente convexo e fechado, teremos $A = \{x \mid p(x) \leq 1\}$. Seja $p(x) \leq 1$ e $\alpha > 1$. Então $x \in \alpha A$ e $\frac{1}{\alpha} x \in A$ $(\forall \alpha > 1)$. Segue-se que $x \in A$ porque A é fechado.

Dado um E.L.C., associando-se a cada vizinhança absolutamente convexa, a seminorma que acabamos de definir, teremos uma família de seminormas $\{p_j(x)\}_{j \in J}$. Reciprocamente dada uma família $\{p_j(x)\}_{j \in J}$ de seminormas num espaço vectorial X, considerando-se os subconjuntos absolutamente convexos $\{x \in X \mid p_j(x) < \varepsilon, \ \varepsilon > 0, j \in J\}$ e depois as intersecções finitas dêstes, teremos um conjunto de partes de X que satisfaz a I), II), III) e IV) e, portanto, define um E.L.C.

Em têrmos de seminormas podemos dar a definição de sucessão de Cauchy ou mais geralmente de filtro de Cauchy, de conjunto limitado e de espaço separado.

Um filtro $\mathcal{F}$ será de Cauchy, quando e sòmente quando, dado $\varepsilon > 0$ e a seminorma $p_j(x)$, existir $A \in \mathcal{F}$ tal que:

$$(x, y) \in A \times A \Rightarrow p_j(x - y) \leq \varepsilon.$$

Um subconjunto L será limitado, quando e sòmente quando $\sup_{x \in L} p_j(x) < \infty \quad (\forall j \in J)$.

Um espaço será separado, quando e sòmente quando, dado $x \neq 0$, existir $j \in J$ tal que $p_j(x) \neq 0$.

(*) - Quando A é uma vizinhança de zero absolutamente convexa ou mais geralmente um subconjunto absolutamente convexo e absorvente, $C.A = X$.

§5 - Teorema de Hahn Banach e topologia fraca

TEOREMA 2 - (Hahn - Banach) - *Seja* X *um espaço vectorial topológico e* M *um subespaço. Seja* $p(x)$ *uma seminorma sôbre* X *e* f *uma forma linear e contínua sôbre* M *tal que* $|f(x)| \leq p(x)$ *em qualquer ponto de* M. *Existe então uma forma linear e contínua* f_1 *definida em* X, *que prolonga* f *e tal que* $|f_1(x)| \leq p(x)$ *em qualquer ponto de* X. ([16], cap. II, pg. 110).

COROLÁRIO - *Seja* X *um* E.L.C., x_0 *um ponto de* X *e* p *uma seminorma contínua em* X; *existe então uma forma linear contínua* f *definida em* X, *tal que* $f(x_0) = p(x_0)$ *e* $|f(x)| \leq p(x)$ *em* X. ([16], cap. II, pg. 102).

Topologia fraca

Seja X um espaço localmente convexo separado e $\mathfrak{C}$ sua topologia. Seja X′ o espaço vectorial sôbre C das formas lineares contínuas sôbre X. X′ será chamado dual topológico ou simplesmente dual de X.

Consideremos em X a topologia de espaço vectorial topológico localmente convexo definido pelo conjunto das vizinhanças fundamentais da origem, do tipo:

$$V(0) = \{x \in X \mid |\langle x, x_j' \rangle| \leq \varepsilon,\ x_j' \in X',\ 1 \leq j \leq n,\ \varepsilon > 0\}.$$

Esta topologia será denominada *topologia fraca* e indicada por $\sigma(X, X')$. É imediato verificar que $\mathfrak{C}$ é mais fina que $\sigma(X, X')$.

Para mostrarmos que uma aplicação $f(t)$, definida num espaço vectorial topológico F e com valores num espaço vectorial topológico e separado X é contínua quando X é munido de $\sigma(X, X')$, é suficiente demonstrar que $\langle f(t), x' \rangle$ é contínua qualquer que seja $x' \in X'$.

Um subconjunto L de um E.L.C. separado X, munido de $\sigma(X, X')$ será limitado, quando e sòmente quando, $x'(L)$ fôr limitado em C $(\forall x' \in X')$.

Seja $F = (X')^*$ o dual algébrico de X′. Em F podemos introduzir uma estrutura de E.L.C. considerando as vizinhanças do tipo:

$$W(0) = \{y \in F \mid |\langle x'_j, y \rangle| \leq \varepsilon,\ x'_j \in X', 1 \leq j \leq n,\ \varepsilon > 0\}$$

Seja $\sigma(F,X')$ esta estrutura. Consideremos a aplicação biunívoca e linear de X em F definida por $x \to \tilde{x}$, onde $\tilde{x}$ é a aplicação linear de X′ em C dada por $x' \to \langle x, x' \rangle$ ([16], cap. IV. pg. 48). X munido de $\sigma(X,X')$ será então isomorfo algébrica e topològicamente a um subespaço vectorial topológico localmente convexo de F munido de $\sigma(F,X')$.

Usaremos os advérbios *fracamente* ou *fortemente* para nos referirmos a uma propriedade da topologia fraca ou da topologia inicial respectivamente.

TEOREMA 3 - *Seja* X *um* E.L.C. *separado e* x_0 *um ponto de* X *tal que* $x'(x_0) = 0$ *qualquer que seja* $x' \in X'$. *Resulta então* $x_0 = 0$.

Com efeito suponhamos que seja $x_0 \neq 0$. Como X é separado, existe uma seminorma p tal que $p(x_0) \neq 0$. Pelo corolário do teorema de Hahn-Banach existirá uma forma $f(x)$ linear e contínua em X tal que $f(x_0) = p(x_0)$, o que é contra a hipótese.

TEOREMA 4 - *Seja* X *um* E.L.C. *separado. Todo conjunto fracamente limitado em* X *é fortemente limitado* ([16], cap. IV, pg. 70).

A recíproca dêste teorema é imediata.

§6 - Espaços especiais

DEFINIÇÃO 12 - Chama-se espaço vectorial *normado* um espaço vectorial topológico cuja topologia é dada por uma norma.

Seja $p(x)$ uma semi-norma sôbre um espaço vectorial X. Seja o subespaço vectorial $H_p = \{x \mid p(x) = 0\}$ e o espaço vectorial E/H_p. $\|\dot{x}\| = p(x)$ é uma norma em X/H_q $(\dot{x} = x + H_p)$. A aplicação canônica de X sôbre X/H_p é linear e contínua.

DEFINIÇÃO 13 - Chama-se *espaço de Banach* um espaço normado e completo.

O espaço completado de um espaço normado G é um espaço de Banach que designamos por $\hat{G}$. A aplicação canônica de G em $\hat{G}$ é linear e contínua.

TEOREMA 5 - *Seja L um subconjunto fechado, absolutamente convexo e limitado de um E.V.T. X separado e completo. Então o espaço C.L. munido da norma associada a L é um espaço de Banach.*

Já tivemos oportunidade de demonstrar que a seminorma associada a um subconjunto absolutamente convexo e limitado L é uma norma em C.L (teorema 1). Mostremos que C.L é completo. Como C.L é metrizável, é suficiente demonstrar que tôda seqüência de Cauchy é convergente.

Seja V(0) uma vizinhança de zero em X. Existirá $\lambda \neq 0$ tal que $L \subset \lambda V$ ou $\frac{1}{\lambda} L \subset V$. Como $\frac{1}{\lambda} L$ é vizinhança de zero em C.L, X induz sôbre C.L uma topologia menos fina que a topologia de espaço normado.

Seja $(x_n)_{n \in N}$ uma sucessão de Cauchy em C.L (normado). Seja uma vizinhança αL em C.L. Teremos

$$x_n - x_m \in \alpha L \Leftarrow n, m \geq n_0$$

Pela observação anterior, $(x_n)_{n \in N}$ será uma seqüência de Cauchy também em X. Seja x seu limite. Por ser L fechado, teremos:

$$x_n - x \in \alpha L \Leftarrow n \geq n_0$$

Isto é, $(x_n)_{n \in N}$ converge para x pela topologia de C.L.

DEFINIÇÃO 14 - Chama-se *espaço de Frechet* um E.L.C metrizável e completo. Um espaço de Frechet será designado pelo símbolo $(\mathcal{F})$.

Chama-se *espaço de Montel* um espaço vectorial topológico separado onde todo subconjunto limitado é relativamente compacto.

DEFINIÇÃO 15 - Seja X um espaço vectorial e $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de subespaços vectoriais topológicos localmente convexos tais que $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Seja u_α a aplicação linear canônica de X_α em X, e $\mathcal{T}_\alpha$ a topologia de X_α.

X munido da mais fina das topologias do espaço vectorial topológico localmente convexo que tornam contínuas as aplicações $u_\alpha (\alpha \in A)$, chama-se limite indutivo dos espaços localmente convexos $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Seja $\mathfrak{C}$ esta topologia. $\mathfrak{C}$ será também chamada *topologia envoltória* e o espaço X será simbolizado $\underset{\alpha\in A}{\Gamma} X_\alpha$.

Um sistema fundamental de vizinhanças de origem em $\mathfrak{C}$ é dado pelos subconjuntos $\underset{\alpha\in A}{\Gamma} V_\alpha$ onde V_α é uma vizinhança de zero em X_α ([16], cap. II, pg. 62).

TEOREMA 6 - *Para que uma aplicação linear de um espaço limite indutivo* $\underset{\alpha\in A}{\Gamma} X_\alpha$ *num* E.L.C. *seja contínua é necessário e suficiente que a sua restrição a cada* X_α *(com a topologia* $\mathfrak{C}_\alpha$*) seja contínua* ([16], cap. II, pg. 60).

Seja agora X limite indutivo de uma família enumerável de espaços normados $(X_n)_{n\geq 1}$ tais que $X_n \subset X_{n+1}$ $(n \geq 1)$.

Se a bola fechada de centro zero e raio um de X_n fôr relativamente compacta em X_{n+1}, $(n \geq 1)$ teremos o espaço introduzido por J. S. Silva ([9], pg. 388) generalizando resultados de C. L. da Silva Dias ([2], pg. 38), G. Köthe ([6], pg. 30) e A. Grothendieck ([1,b], pg. 35).

Êste espaço será designado por $\mathfrak{L}N^*$.

TEOREMA 7 - *Um subconjunto* L *de* $\mathfrak{L}N^*$ *é limitado quando e sòmente quando fôr limitado num espaço conveniente* X_n $(n \geq 1)$, ([9], pg. 400).

COROLÁRIO - *Um espaço* $\mathfrak{L}N^*$ *é um espaço de Montel.*

TEORENA 8 - *Um subconjunto* A *de* $\mathfrak{L}N^*$ *é fechado quando e sòmente quando* $A \cap X_n$ *fôr fechado em cada* X_n. ([9], pg. 399).

COROLÁRIO - *Um espaço* $\mathfrak{L}N^*$ *é separado.* ([9], pg. 400).

TEOREMA 8' - *Um espaço* $\mathfrak{L}N^*$ *é completo.*

TEOREMA 8" - *Uma aplicação* f(t) *definida num aberto* Ω *de* $\mathfrak{L}N^*$ *e com valores num espaço topológico* Y, *é contínua quando e sòmente quando fôr contínua em cada* $\Omega \cap X_n$ *(munida da topologia induzida pela de* X_n*)* ([9], pg. 400, corol. 1).

CAPÍTULO II

§1 - Integração das funções de variáveis complexas com valores vectoriais

DEFINIÇÃO 16 - Seja $f(z_1, \dots, z_n)$ uma função de n variáveis complexas definida num produto de n contornos (*) $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n \subset C^n$ e com valores num E.L.C. X. f será chamada *fracamente integrável* sôbre $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$, se $\langle f, x \rangle$ fôr integrável para qualquer $x' \in X'$. A aplicação de X' em C definida por

$$\varphi(x') = \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} \langle f, x' \rangle \, dz_1 \dots dz_n$$

será um elemento de $(X')^*$ e será chamada *integral de* f *sôbre* $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$ e indicada ([17], pg. 79):

$$\int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} f \, dz_1 \dots dz_n$$

As propriedades lineares da integral são imediatas.

Seja X subespaço vectorial de X_1, ambos munidos de estruturas de E.L.C tais que, a aplicação canônica Ψ de X em X_1 seja contínua. f com valores em X, fracamente integrável em X, será fracamente integrável em X_1.

(*) - Contorno = conjunto de um número finito de curvas de Jordan fechadas retificáveis e disjuntas.

Com efeito, basta lembrar que $x'_1 \circ \Psi \in X'$ $(\forall x'_1 \in X'_1)$ e que $x'_1 \circ \Psi \circ f = x'_1 \circ f$.

Pela aplicação do teorema do bidual ([7], pg. 64), teremos o

TEOREMA 9 - (Darboux) - *Seja* f *fracamente integrável,* B *a envoltória fracamente fechada em* $(X')^*$ *dos valores assumidos por* f *em* $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ *e* γ_j *o comprimento de* Γ_j $(1 \leq j \leq n)$; *então teremos que*:

$$\int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} f\, dz_1 \ldots dz_n \in \gamma_1 \ldots \gamma_n B$$

A mesma relação vale quando no lugar de B tivermos um subconjunto L absolutamente convexo e fechado que contém $f(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n)$.

TEOREMA 10 - *Seja* X *um espaço localmente convexo separado e completo. Então a envoltória convexa e fechada em* $(X')^*$ *dos valores assumidos por uma função contínua em* $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ *e com valores em* X *e a integral desta pertencem a* X ([17], pg. 81 e 82).

Segue-se que

$$\left\langle \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} f\, dz_1 \ldots dz_n, x' \right\rangle = \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} \langle f, x' \rangle\, dz_1 \ldots dz_n$$

Se Y é outro espaço localmente convexo completo e separado e Ψ uma aplicação linear e contínua de X em Y, então

$$\Psi \circ \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} f\, dz_1 \ldots dz_n = \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} \Psi \circ f\, dz_1 \ldots dz_n$$

para tôda função f contínua sôbre $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ e com valores em X.

Com efeito:

$$y' \circ \Psi \circ \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} f\, dz_1 \ldots dz_n = \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} y' \circ \Psi \circ f\, dz_1 \ldots dz_n = y'\left(\int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} \Psi \circ f\, dz_1 \ldots dz_n \right)$$

para todo $y' \in Y'$.

De agora em diante, suporemos que os espaços em consideração sejam E.L.C. separados e completos.

§2 - Funções holomorfas de uma variável complexa (|4], pg. 52).

DEFINIÇÃO 17 - Seja f(z) uma aplicação definida num aberto Ω do plano complexo e com valores num E.L.C. separado e completo X. f(z) será chamada fracamente holomorfa em Ω se $\langle f(z), x' \rangle$ fôr holomorfa em Ω. f(z) será chamada *fortemente holomorfa* ou *analítica* se existir:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_0 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(z_0 + \alpha) - f(z_0)}{\alpha} \qquad \forall z_0 \in \Omega$$

Tanto num caso quanto no outro, estende-se a definição quando a função f considerada estiver definida numa vizinhança do ∞ da esfera complexa. Basta considerar $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ definida numa vizinhança da origem $(\varphi(0) = f(\infty))$ e usar a definição anterior.

TEOREMA 11 - *Tôda função* f(z) *fracamente holomorfa num aberto* $\Omega \subset C^n$ *é fortemente holomorfa.*

Seja $\varphi(z) = \langle f(z), x' \rangle$ e $V(z_0)$ circular fechada e contida em Ω.

Teremos:

1) $$\left| \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{\alpha} [\varphi(z_0 + \alpha) - \varphi(z_0)] - \frac{1}{\beta} [f(z_0 + \beta - \varphi(z_0)] \right\} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{F(V)} \frac{\varphi(t)}{(t - z_0)(t - z_0 - \alpha)(t - z_0 - \beta)} dt \right| \leq M$$

onde $\alpha, \beta \in \frac{1}{2} [V(z_0) - z_0]$ $\alpha \neq \beta$, M é conveniente e F(V) é a fronteira de V.

Segue-se que

2) $$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{\alpha} [f(z_0 + \alpha) - f(z_0)] - \frac{1}{\beta} [f(z_0 + \beta) - f(z_0)] \right\} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

é fracamente limitada quando $\alpha, \beta \in \frac{1}{2} [V(z_0) - z_0]$. Pelo teorema 4. 2) será também fortemente limitada, donde:

$$\left\| \frac{1}{\alpha} [f(z_0 + \alpha) - f(z_0)] - \frac{1}{\beta} [f(z_0 + \beta) - f(z_0)] \right\| \leq |\alpha - \beta|$$

onde $\| \ \|$ é a norma associada à envoltória convexa e fechada B dos valores assumidos por $\Phi(\alpha, \beta)$ em $\left\{ \frac{1}{2} [V(z_0) - z_0] \right\}^2$.

Como o espaço C.B é de Banach (teorema 5), $\frac{f(z_0+\alpha)-f(z_0)}{\alpha}$ tem limite em C.B quando $\alpha \to 0$ e, portanto, também em X. Evidentemente segue-se a continuidade de f(z) em cada ponto de Ω.

§3 - Teorema de Cauchy e fórmulas de Cauchy

Seja f(z) holomorfa num aberto Ω do plano complexo. Teremos então:

$$3)\quad \int_\Gamma f(t)\,dt = 0, \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t-z_0} f(t)\,dt$$

onde Γ é uma curva de Jordan retificável que limita um domínio (*) contido em Ω e que contém z_0 interiormente e orientada de modo a deixar z_0 à esquerda (segunda fórmula).

Com efeito, temos

$$\langle \int_\Gamma f(z)\,dz, x' \rangle = \int_\Gamma \langle f(z), x' \rangle\, dz = 0$$

$$\langle f(z_0), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\langle f(t), x' \rangle}{t-z_0}\,dt = \langle \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t-z_0} f(t)\,dt, x' \rangle$$

As fórmulas 3) são então consequência do teorema 3.

Levando em conta que uma função fracamente holomorfa é também fortemente holomorfa, podemos demonstrar que $f^{(n)}(z)$ (**) existe em Ω e que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(t-z_0)^{n+1}} f(t)\,dt,$$

onde Γ continua tendo o mesmo significado que na segunda fórmula 3).

§4 - Desigualdade de Cauchy para funções holomorfas de uma variável

Seja f(z) holomorfa num aberto Ω do plano complexo e r

(*) - domínio = aderência de um aberto não vazio.

(**) - Os símbolos $f^{(n)}(z)$ e $\frac{d^n f}{dz^n}$ continuam tendo o significado correspondente ao do caso clássico.

o raio de um círculo fechado D_r° contido em Ω e de centro z_0. Da desigualdade de Darboux e da fórmula acima segue que:

$$f^{(n)}(z_0) \in B_r^\circ n! \frac{1}{r^n}$$

onde B_r° é a envoltória convexa e fechada do subconjunto compacto $f(D_r^\circ)$.

§5 - Desenvolvimento em série de Taylor das funções de uma variável complexa

Seja $f(z)$ holomorfa num aberto Ω do plano complexo e $z_0 \in \Omega$.

Então:

$$4) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

para todo z pertencente a um círculo aberto de centro z_0 e contido em Ω.

Com efeito, (notações da D_r° desigualdade anterior), a série 4) converge em qualquer círculo fechado contido em Ω, segundo a topologia do espaço de Banach $C.B_r^\circ$ e, portanto, segundo a topologia do espaço X dos valores. Teremos pela fórmula clássica de Taylor:

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \langle f(z_0), x' \rangle (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \frac{d^n f(z_0)}{dz^n}, x' \rangle (z - z_0)^n =$$

$$= \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dz^n} (z - z_0)^n, x' \rangle . \quad (\forall x' \in X')$$

A fórmula 4) é então consequência do teorema 3.

§6 - Função holomorfa de várias variáveis complexas

DEFINIÇÃO 18 - Seja $f(z_1, \dots, z_n)$ uma função definida num aberto $\Omega \subset C^n$ e com valores num E.L.C. X completo e separado. Diremos que esta função é *parcialmente holomorfa em relação a* z_j $(\forall\, 1 \leq j \leq n)$ no ponto $(z_{1_0}, \dots, z_{n_0})$ se a função da variável z_j $f(z_{1_0}, \dots, z_j, \dots z_{n_0})$ fôr holomorfa no ponto z_{j_0}. Quando f fôr parcialmente holomorfa em relação a z_j $(\forall 1 \leq j \leq n)$ em todo ponto $(z_{1_0}, \ldots, z_{n_0}) \in \Omega$, diremos que f é *holomorfa em* Ω.

TEOREMA 12 - *Tôda função* $f(z_1, \ldots, z_n)$ *holomorfa num aberto* $\Omega \subset C^n$ *é contínua.*

Seja $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_0 = (z_{1_0}, \ldots, z_{n_0}) \in \Omega$ e $\langle f(z), x' \rangle$. Do teorema clássico de Hartogs (*) segue-se que existe $\rho > 0$ e M (dependente de x') tal que:

$$\|z - z_0\| \leq \rho \Rightarrow | \langle f(z), x' \rangle - \langle f(z_0), x' \rangle | \leq M \|z - z_0\| \text{ (**)}$$

Como todo subconjunto fracamente limitado é fortemente limitado, segue-se que existe $B \subset X$ convexo fechado e limitado tal que

$$\|z - z_0\| \leq \rho \Rightarrow f(z) - f(z_0) \in B \|z - z_0\|,$$

o que dará a continuidade de $f(z)$ no ponto z_0 relativamente à topologia de $C.B$ e, portanto, relativamente à topologia de X.

É fácil verificar, utilizando-se a holomorfia de $\langle f, x' \rangle$ $(\forall x' \in X')$, que existem tôdas as derivadas parciais e que a ordem de derivação é indiferente.

§7 - Fórmulas de Cauchy para funções holomorfas de n variáveis

Seja $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorfa num aberto $\Omega \subset C^n$. Com os mesmos argumentos usados para as funções de uma variável complexa demonstra-se que:

$$f(z_{1_0}, \ldots, z_{n_0}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{(t_1 - z_{1_0}) \ldots (t_n - z_{n_0})} dt_1 \ldots dt_n$$

onde Γ_j $(1 \leq j \leq n)$ é uma curva de Jordan fechada, retificável, orientada positivamente e limita um domínio D_j tal que

$$D_1 \times \ldots \times D_n \subset \Omega \quad \text{e} \quad (z_{1_0}, \ldots, z_{n_0}) \in \mathring{D}_1 \times \ldots \times \mathring{D}_n .$$

Do mesmo modo podemos demonstrar que: (***)

$$\frac{\partial^m f(z_{1_0}, \ldots, z_{n_0})}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} =$$

(*) - ([18], pg. 32, pg. 140).

(**) - $\|x\|$ = norma em C^n.

(***) - Os símbolos adotados são os mesmos utilizados quando o espaço dos valores é C,

$$= \frac{m_1! \dots m_n!}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} \frac{f(t_1, \dots, t_n)}{(t_1 - z_{1_0})^{m_1+1} \dots (t_n - z_{n_0})^{m_n+1}} dt_1 \dots dt_n$$

onde $m_1 + \dots + m_n = m$ e Γ_j $(1 \leq j \leq n)$ tem o mesmo significado que na fórmula anterior.

§8 - Desigualdade de Cauchy e série de Taylor para funções de n variáveis complexas

Seja B a envoltória convexa e fechada dos valores assumidos por f em $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$ (Γ_j = círculo de raio r_j e centro z_{j_0} $(1 \leq j \leq n)$, $(z_{1_0}, \dots, z_{n_0}) \in \Omega$). Da desigualdade de Darboux e da última fórmula segue-se que:

$$\frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^m f(z_{1_0}, \dots, z_{n_0})}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \in \frac{1}{r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n}} B$$

Como consequência a série múltipla:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^m f(z_{10}, \dots, z_{n0})}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} (z_1 - z_{10})^{m_1} \dots (z_n - z_{n0})^{m_n}$$

será convergente em C.B e, portanto, em X quando

$$|z_j - z_{j_0}| < r_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Segue-se, como no caso das funções de uma variável, que:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^m f(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \times$$
$$\times (z_1 - z_{10})^{m_1} \dots (z_n - z_{n0})^{m_n}$$

sendo $|z_j - z_{j_0}| < r_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

TEOREMA 13 - *Seja* $\{P_n(z_1, z_2)\}_{n \geq 0}$ *uma sucessão de polinômios homogêneos:*

$$P_n(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} z_1^j z_2^{n-j} \quad (a_{nj} \in X; \ 0 \leq j \leq n)$$

com valores num E.L.C. X *completo e separado. Seja* D *um aberto do espaço* C^2. *Então as proposições seguintes são equivalentes:*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ é convergente em D.

2) Os têrmos P_n são uniformemente limitados em cada vizinhança limitada D_0 tal que $\overline{D}_0 \subset D$.

3) Cada ponto de D tem uma vizinhança $D_1 \subset D$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{D_1} \| P_n \|_B < \infty$$

onde B é fechado absolutamente convexo, limitado e conveniente em X.

Mostremos que 2) $\Rightarrow$ 3). Com efeito, seja $D_0 \subset \overline{D}_0 \subset D$ uma vizinhança de (z_{10}, z_{20}). Para $\alpha > 1$ e conveniente, $\alpha \overline{D}_0 \subset D$ é vizinhança de (z_{10}, z_{20}). Então $P_n(\alpha z_1, \alpha z_2) \in B$ (B convexo fechado e limitado conveniente) quando $(z_1, z_2) \in D_0$ e $P_n(z_1, z_2) \in \frac{1}{\alpha^n} B$, donde a convergência de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{D_0} \| P_n \|_B .$$

A implicação 3) $\Rightarrow$ 1) é imediata.

Mostremos que 1) $\Rightarrow$ 2). Utilizaremos a implicação 1) $\Rightarrow$ 2) no caso numérico ([4], pg. 64):

$$x'\Big(\sum_{n=0}^{\infty} P_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} x'(P_n)$$

Os têrmos P_n serão uniformemente fracamente limitados em cada vizinhança limitada D_0 tal que $\overline{D}_0 \subset D$. Pelo teorema 4, os têrmos serão uniformemente fortemente limitados nas mesmas vizinhanças.

CAPÍTULO III

§1 - Operadores polinomiais

DEFINIÇÃO 19 - Sejam X e Y dois espaços vectoriais sôbre C.

Uma aplicação P de X em Y é chamada *operador polinomial de grau* n se:

$$P(x+\alpha h)=\sum_{j=1}^{n} P_j(x,h)\,\alpha^j \qquad x,h\in X \qquad \alpha\in C$$

$P_j(x,h)$ $(1\leq j\leq n)$ são aplicações convenientes de $X\times X$ em Y que podem ser obtidas em têrmos da própria P.

Quando $P_n(x,h)\neq 0$, diremos que o operador é *estritamente de grau* n.

Se o operador polinomial de grau n satisfizer à condição $P(\alpha x)=\alpha^n P(x)$, será chamado *operador polinomial homogêneo de grau* n.

Evidentemente, se $P(x_1,\dots,x_n)$ fôr um operador multilinear, $P(x)=P(x,\dots,x)$ será um operador polinomial homogêneo de grau n.

Se $P(x_1,\dots,x_n)$ fôr simétrico, poderemos obtê-lo em têrmos de $P(x)$. Com efeito temos:

$$P(\alpha_1 h_1+\dots+\alpha_n h_n)=\sum\dots\sum\Delta_{h_1}^{j_1}\dots\Delta_{h_n}^{j_n}P(0)\binom{\alpha_1}{j_1}\dots\binom{\alpha_n}{j_n}$$

onde $\Delta_{h_p}^{j_p}$ é a diferença finita de ordem j_p relativa ao acréscimo h_p e os índices j_p de soma variam de 0 a n e $\alpha_p \in C$ $(1 \leq p \leq n)$. ([4], pg. 67).

Podemos restringir a soma anterior aos índices $j_1 + \dots + j_n \leq n$ porque $P(x)$ tem grau n ([4], pg. 67).

Podemos escrever uma fórmula semelhante à de Leibnitz:

$$P(\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = n} \frac{n!}{j_1! \dots j_n!} \times$$

$$\times P(\underbrace{h_1, \dots, h_1}_{j_1}, \dots, \underbrace{h_n, \dots, h_n}_{j_n}) \alpha_1^{j_1} \dots \alpha_n^{j_n}.$$

Igualando os coeficientes do monômio $\alpha_1 \dots \alpha_n$, obteremos

$$5) \qquad P(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_n} P(0).$$

Por conveniência os elementos de Y serão chamados *operadores polinomiais homogêneos de grau zero*, definidos em X e com valores em Y ou operadores 0-*lineares definidos em* X^0 *com valores em* Y.

§2 - Operadores G-analíticos - ([4], pg. 71)

Sejam X e Y dois E.L.C. completos e separados e $f(x)$ uma aplicação definida num aberto $\Omega \subset X$ e com valores em Y. $f(x)$ será chamada *G-diferenciável* ou operador *G-analítico* ou *operador analítico segundo Gateau* se em cada ponto $x \in \Omega$ existir:

$$\delta f(x,h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} = \left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = 0} \qquad \forall h \in X$$

Êste limite será chamado *diferencial de* f no ponto x e relativo ao acréscimo h e será indicado também $\delta_x^h f$.

TEOREMA - $f(x)$ *é diferenciável em* Ω *quando e sòmente quando* $f(x + \alpha h)$ *fôr uma função holomorfa de* α *no subconjunto aberto.*

$$D(x,h) = \{\varepsilon \in C \mid x + \varepsilon h \in \Omega\} \quad (\forall x \in \Omega, \ h \in X).$$

Pela continuidade das operações fundamentais de soma de vectores e produto por um escalar, é evidente que $D(x,h)$ é aberto.

Seja $\varepsilon_0 \in D(x,h)$. Teremos:

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(x+\varepsilon h)-f(x+\varepsilon_0 h)}{\varepsilon-\varepsilon_0} = \lim_{\beta \to 0} \frac{f(x+\varepsilon_0 h+\beta h)-f(x+\varepsilon_0 h)}{\beta}$$

$$= \delta f(x+\varepsilon_0 h, h).$$

COROLÁRIO - $f(x)$ *é diferenciável em* Ω *quando e sòmente quando* $f(x+\varepsilon_1 h_1+\ldots+\varepsilon_n h_n)$ $(\forall h_1,\ldots,h_n \in X;\ x\in\Omega)$ *fôr holomorfa relativamente a* $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ *no subconjunto aberto:*

$$D(x;h_1,\ldots,h_n) = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in C^n \mid x+\varepsilon_1 h_1+\ldots+\varepsilon_n h_n \in \Omega\}$$

TEOREMA 15 - *Fixado* $h_1 \in X$, $\delta_x^{h_1} f = \delta f(x,h_1)$ *é função G-diferenciável de* x *em* Ω.

Basta observar que:

$$\delta_x^{h_2}\delta_x^{h_1} f = \delta_x^{h_2}\left\{\frac{d}{d\varepsilon_1} f(x+\varepsilon_1 h_1)\right\}_{\varepsilon_1=0} =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} f(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)\right\}_{\varepsilon_1=0}\right\}_{\varepsilon_2=0} =$$

$$= \left\{\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon_2\partial\varepsilon_1} f(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)\right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

DEFINIÇÃO 20 - Definiremos por indução a *diferencial de ordem* $n>1$ de $f(x)$ relativamente aos acréscimos $h_1,\ldots,h_n$:

$$\delta^1 f(x,h_1) = \delta f(x,h_1)$$

$$\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) = \delta_x^{h_n}\delta^{n-1} f(x;h_1,\ldots,h_{n-1})$$

Definiremos também

$$\delta^n f(x,h) = \delta^n f(x;h,\ldots,h) \quad e \quad \delta^0 f(x,h) = f(x)$$

TEOREMA 16:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1} f(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)\right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \delta f(x,h)$$

$$\left\{\frac{\delta^n}{\partial\varepsilon_1\ldots\partial\varepsilon_n} f(x+\varepsilon_1 h_1+\ldots+\varepsilon_n h_n)\right\}_{\varepsilon_1=\ldots\varepsilon_n=0} = \delta^n f(x,h_1,\ldots,h_n)$$

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1\ldots\partial\varepsilon_n} f(x+\varepsilon_1 h+\ldots+\varepsilon_n h)\right\}_{\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=0} =$$

$$= \left\{\frac{d^n}{d\varepsilon_n} f(x+\varepsilon h)\right\}_{\varepsilon=0}$$

§3 - Desenvolvimento em série de um operador G-analítico

Se $x \in \Omega$, h pertence a uma vizinhança estrelada $V(0)$ e $V(x) = x + V(0) \subset \Omega$, temos o seguinte desenvolvimento:

$$6) \qquad f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta^n f(x,h)$$

Com efeito, pelo teorema 14, $f(x+\varepsilon h)$ é holomorfa no subconjunto aberto $D(x,h)$. Como $V(0)$ é estrelada $x + \rho e^{i\theta} h \in V(x)$ $(\forall \theta \in R,\ 0 \leq \rho \leq 1)$. Segue-se que o círculo fechado de centro 0 e raio 1 está contido em $D(x,h)$. Teremos então o desenvolvimento convergente num círculo de raio um pouco maior que 1:

$$f(x+\varepsilon h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\, \delta^n f(x,h).$$

Como $\varepsilon = 1 \in D$, teremos 6).

Pela fórmula de Cauchy, teremos:

$$6') \qquad \delta^n f(x,h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x+\varepsilon h)}{\varepsilon^{n+1}}\, d\varepsilon$$

onde Γ é uma circunferência de centro 0 e raio 1.

Pela desigualdade de Cauchy, podemos afirmar que:

$$7) \qquad \delta^n f(x,h) \in n!\, K$$

onde K é a envoltória convexa e fechada da imagem de Γ pela função de ε $f(x+\varepsilon h)$.

Podemos demonstrar que $\delta^n f(x,h)$ é homogêneo de grau n.

Com efeito,

$$\delta^n f(x,\alpha h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x+\varepsilon\alpha h)}{\varepsilon^{n+1}}\, d\varepsilon =$$

$$= \alpha^n \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x+\varepsilon\alpha h)}{(\varepsilon\alpha)^{n+1}}\, \alpha\, d\varepsilon =$$

$$= \alpha^n \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(x+\beta h)}{\beta^{n+1}}\, d\beta = \alpha^n \delta^n f(x,h).$$

onde Γ é tal que $\Gamma' = \alpha\Gamma \subset D(x,h)$.

§4 - Linearidade de $\delta f(x,h)$ em h

Do corolário do teorema 14 segue-se que a função $f(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2)$ é holomorfa em ε_1 e ε_2. O mesmo teremos com relação a $\varphi(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2) = \langle f(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2), x' \rangle$ $(\forall x' \in Y')$.

Da teoria das funções analíticas complexas de duas variáveis complexas segue-se que:

$$\varphi(x+\varepsilon_1 h_1+\varepsilon_2 h_2) - \varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0 \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0 \varepsilon_2 + 0(\|(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|)\ (^*)$$

onde $\|(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\| = \max(|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|)$.

Fazendo-se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, temos:

$$\varphi(x+\varepsilon(h_1+h_2)) - \varphi(x) = \varepsilon[\delta\varphi(x,h_1)+\delta\varphi(x_1 h_2)] + 0(|\varepsilon|)$$

donde

$$\delta\varphi(x,h_1+h_2) = \delta\varphi(x,h_1)+\delta\varphi(x,h_2)$$

e

$$\delta f(x,h_1+h_2) = \delta f(x,h_1)+\delta f(x,h_2)$$

A homogeneidade de $\delta f(x,h)$ relativamente a h foi demonstrada no §3.

§5 - Multilinearidade e simetria de $\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n)$

A simetria de $\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n)$ segue da fórmula:

$$\left\{\frac{\partial^n}{\delta\varepsilon_1\dots\delta\varepsilon_n} f(x+\varepsilon_1 h_1+\dots+\varepsilon_n h_n)\right\}_{\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_n=0}$$

e do teorema 16.

A multilinearidade segue-se de $\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n) =$
$= \delta_x^{h_n}\delta^{n-1} f(x;h_1,\dots,h_{n-1})$ e da linearidade de $\delta_x^{h_n}$ (§4).

Observação - No caso em que $X = C^m$ a G-analiticidade de $f(x) = f(x_1,\dots,x_m)$ se confunde com a analiticidade parcial.

Com efeito a G-analiticidade de $f(x)$ num aberto Ω de C^m significa analiticidade de $f(x_0+\alpha h)$ em $D(x_0,h)$ para cada $x_0 \in \Omega$ e $h \in C^m$. Tomando-se $h_1 = (0,\dots,\frac{1}{j},\dots,0)$ $(1 \leq j \leq n)$ temos a analiticidade parcial.

(*) - $0(t)$ = infinitésimo de ordem superior a t.

Reciprocamente, seguindo-se a mesma linha de demonstração do teorema 12, temos que f(x) é G-analítico e que

$$\delta^n f(x_0, K) = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x_0} K_j, \quad \text{com} \quad K = (K_1, \dots, K_m) \in C^m.$$

§6 - Séries de operadores polinomiais homogêneos

TEOREMA 17 - *Seja* $P_n(x)$ *uma sequência de operadores polinomiais* homogêneos de grau $n \geqq 0$ definidos em X e com valores em Y; suponhamos que $\mathcal{E}$ seja o campo de convergência de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ e $\mathring{\mathcal{E}} \neq \phi$; teremos:

$\mathring{\mathcal{E}}$ *é estrelado,* f(x) *é G-analítico em* $\mathring{\mathcal{E}}$ *e* $\delta^n f(0,h) = n!P_n(h)$.

a) $\mathring{\mathcal{E}}$ é estrelado.

Seja $x \in \mathring{\mathcal{E}}$. Existirá $|\lambda_1| > 1$ tal que $\lambda_1 x \in \mathring{\mathcal{E}}$. Dada uma seminorma p do E.L.C. Y teremos:

$$p[P_n(\lambda_1 x)] \leqq M_p{}^{(*)} \quad \forall\, n \geqq 0 \quad \text{e:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p[P_n(\lambda x)] = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n p[P_n(x)) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{|\lambda_1|^n} M_p.$$

Segue-se então a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ quando $|\lambda| < |\lambda_1|$ e $\lambda \mathring{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$ $(|\lambda| \leqq 1)$, donde $\lambda \mathring{\mathcal{E}} \subset \mathring{\mathcal{E}}$.

b) Seja $x \in \mathring{\mathcal{E}}$ e $h \in X$. Teremos:

$$\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in C^2 \mid \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 h \in \mathring{\mathcal{E}}\} \supset \{1\} \times D(x,h).$$

Pelo teorema 13 (3), teremos a convergência uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x + \alpha h)$ numa vizinhança conveniente de cada ponto de D(x,h). Seguir-se-á a holomorfia fraca e consequentemente a holomorfia forte de $f(x + \alpha h)$ em D(x,h) (teorema 11). f(x) é então G-analítico em $\mathring{\mathcal{E}}$ (teorema 14).

Em virtude da convergência uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x + \alpha h)$

(*) - M_p = número positivo conveniente.

em cada compacto de $D(x,h)$, poderemos derivar a série têrmo a têrmo. Em particular $\delta^n f(0,h) = \left\{ \frac{d^n f(\alpha h)}{d\alpha^n} \right\}_{\alpha=0} = n! P_n(h)$.

§7 - Desigualdade fundamental

Vamos agora estabelecer uma desigualdade fundamental para tudo o que segue:

PROPOSIÇÃO 1 - *Seja* $f(x)$ *G-analítico num aberto* $\Omega \subset X$ *e com valores em* Y. *Seja* $x_0 \in \Omega$ *e* $x_0 + A \subset \Omega$, *sendo* A *absolutamente convexo. Seja* H *a envoltória convexa e fechada dos valores assumidos por* $f(x)$ *em* $x_0 + A$. *Teremos então a seguinte desigualdade fundamental.*

$$\delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) \in n^n H \qquad (h_j \in A \quad 1 \leq j \leq n)$$

Com efeito, seja D o círculo fechado de raio $\frac{1}{n}$ e com centro na origem. Seja Γ a sua circunferência. Pela convexidade de A temos $D^n \subset D(x_0; h_1, \dots, h_n)$; por conseguinte (teorema 16):

$$\delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} \frac{f(x_0 + \varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_n h_n)}{\varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_n^2} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n,$$

donde em virtude da desigualdade de Cauchy:

$$\delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) \in \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^n} H = n^n H \qquad (n \geq 1).$$

Convencionando-se que $n^n = 1$ se $n = 0$, teremos também:

$$\delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) \in n^n H \qquad (n \geq 0).$$

TEOREMA 18 - *As diferenciais de um operador G-analítico e contínuo num aberto* $\Omega \subset X$ *são contínuas.*

Seja $f(x)$ um operador G-analítico e contínuo num aberto $\Omega \subset X$. A proposição 1 dará:

$$h_j \in W(0) \quad (\forall 1 \leq j \leq n) \Rightarrow \delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) \in n^n V(0) \qquad (x_0 \in \Omega)$$

onde $V(0) \subset Y$ é uma vizinhança de zero arbitrária, fechada e absolutamente convexa e $W(0)$ uma vizinhança de zero em X tal que $x \in x_0 + W(0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \in V(0)$. Teremos a continuidade de $\delta^n f(x_0, h_1, \dots, h_n)$ em $h_1 = 0, \dots, h_n = 0$, donde a continuidade em qualquer outro ponto de X^n ([16], cap. I, pág. 8).

§8 - F-Analiticidade

Definição 21 - Diremos que um operador $f(x)$ definido num aberto Ω de um E.L.C. completo e separado é *F-analítico* ou analítico segundo Fantappiè, se $f[g(\alpha)]$ é uma função analítica qualquer que seja a função analítica de variável complexa $g(\alpha)$ com valores em Ω.

Teorema 19 - *Seja* $f(x)$ *definido num aberto* Ω *de um* E.L.C. *completo e separado* X *e com valores noutro* E.L.C. *completo e separado* Y. *Se* $f(x)$ *é G-analítico e limitado sôbre* $x_0+B\subset\Omega$ *onde* $x_0\in\Omega$ *e* B *é absolutamente convexo fechado e limitado, existe* $H\subset Y$ *absolutamente convexo fechado e limitado tal que:*

$$f(x)-f(x_0)=\delta f(x_0,x-x_0)+\varepsilon \quad \text{onde} \quad \frac{\|\varepsilon\|_H}{\|x-x_0\|_B}\to 0$$

sendo $\|\ \|_H$ *e* $\|\ \|_B$ *as normas associadas aos espaços* C.H *e* C.B $x,x_0\in\Omega$ *e* $x-x_0\in C.B$.

Seja H a envoltória absolutamente convexa e fechada de $f(x_0+B)$. Em virtude da desigualdade 7) teremos, se $h\in B$:

$$\delta^n f(x_0,h)\in n!H \qquad \text{ou}$$

$$\|\delta^n f(x_0,h)\|_H\leq n! \qquad \text{e}$$

8) $$\|\delta^n f(x_0,x-x_0)\|_H\leq n!(\|x-x_0\|_B)^n \quad \forall x-x_0\in C.B \quad n\geq 0.$$

O desenvolvimento de Taylor nos dará:

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n f(x_0,x-x_0)$$

Em virtude de 8) virá:

$$\|f(x)-f(x_0)-\delta f(x_0,x-x_0)\|_H\leq\sum_{n=2}^{\infty}(\|x-x_0\|_B)^n=\frac{\|x-x_0\|_B^2}{1-\|x-x_0\|_B}$$

quando $\|x-x_0\|_B<1$. Escolhendo $0<r<1$ e $\|x-x_0\|_B<r$, teremos imediatamente:

$$f(x)-f(x_0)=\delta f(x_0,x-x_0)+\varepsilon$$

com $$\frac{\|\varepsilon\|_H}{\|x-x_0\|_B}\to 0 \quad \text{quando} \quad \|x-x_0\|_B\to 0.$$

Corolário - *Se* $f(x)$ *é G-analítico e limitado no aberto*

$\Omega \subset X$, *então* $f(x)$ *é G-analítico em* Ω *com valores em* $C.H$, *sendo* H *a envoltória absolutamente convexa e fechada de* $f(\Omega)$.

Com efeito sejam $x_0 \in \Omega$, $h \in X$ e $B = V.h = \{\alpha h \in X \mid \alpha \in V\}$ com V compacto e absolutamente convexo em C, tais que $x_0 + B \subset \Omega$.

Teremos:

$$f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) = \delta f(x_0, \alpha h) + \varepsilon$$

onde $\dfrac{\|\varepsilon\|_H}{\|\alpha h\|_B} \to 0$ quando $\|\alpha h\|_B \to 0$.

Segue-se que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \delta f(x_0, h)$ segundo a topologia de $C.H$.

TEOREMA 20 - (J. Sebastião e Silva).

Seja $f(x)$ *um operador definido num aberto de um espaço* $\mathcal{E}N^*$ *e com valores num* E.L.C. *completo e separado* Y. *Então* $f(x)$ *é F-analítico quando e sòmente quando fôr contínuo e G-analítico.*

A condição é necessária:

Seja f F-analítico no aberto $\Omega \subset \mathcal{E}N^*$. Seja $g(\alpha)$ uma função analítica da variável complexa α e com valores em $\Omega \cap E_m$ $(\mathcal{E}N^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m)$. A aplicação canônica de E_m em $\mathcal{E}N^*$ é linear e contínua. Segue-se que $g(\alpha)$ é analítica segundo a topologia de $\mathcal{E}N^*$. Como consequência $f(g(\alpha))$ é analítica.

Seja p uma das seminormas que definem a estrutura de Y. $H_p = \{y \in Y \mid p(y) = 0\}$ será um sub-espaço vectorial de Y. Seja o espaço normado F/H_p e o espaço de Banach $F\hat{/}H_p$. As aplicações canônicas φ e Ψ de F em F/H_p e de F/H_p em $F\hat{/}H_p$ respectivamente são lineares e contínuas.

Como consequência dos últimos dois parágrafos temos que $\Psi \circ \varphi \circ f$ é F-analítico em $\Omega \cap E_m$ $(m \geq 1)$.

Um teorema de J. Sebastião e Silva ([8,b], pág. 25) afirma que $\Psi \circ \varphi \circ f$ é contínuo. Segue-se que f é contínuo em $\Omega \cap E_m$ $(\forall m \geq 1)$. Pelo teorema 8") f será contínuo em Ω segundo a topologia de $\mathcal{E}N^*$.

A G-analiticidade de f está contida na definição de F-analiticidade (teorema 14).

A condição é suficiente:

Seja $f(x)$ contínuo e G-analítico em Ω aberto de $\mathcal{E}N^*$ e $x = g(\alpha)$ analítica num aberto O da esfera complexa S e com valores em Ω. Teremos pelo teorema 19 e em virtude da continuidade de $g(\alpha)$: dado $\alpha_0 \in O$, $(\alpha_0 \neq \infty)$ existe $V(\alpha_0)$ vizinhança compacta de α_0 e B absolutamente convexo e compacto em $\mathcal{E}N^*$ tal que $g(x) \in g(\alpha_0) + B \subset \Omega$, quando $\alpha \in V(\alpha_0)$ e:

$$9) \qquad g(\alpha) - g(\alpha_0) = g'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \mu$$

$$\text{com} \quad \frac{\|\mu\|_B}{|\alpha - \alpha_0|} \to 0 \quad \text{quando} \quad \alpha \to \alpha_0.$$

Seja $x_0 = g(\alpha_0) \in \Omega$. Existirá, pelo teorema 19, H compacto e absolutamente convexo em Y, de modo que:

$$10) \qquad f(x) - f(x_0) = \delta f(x_0, x - x_0) + \varepsilon$$

$$\text{onde} \quad \frac{\|\varepsilon\|_H}{\|x - x_0\|_B} \to 0 \quad \text{quando} \quad \|x - x_0\| \to 0.$$

Consideremos $f(g(\alpha))$. Teremos por 9)

$$11) \qquad f(g(\alpha)) - f(g(\alpha_0)) = \delta f(x_0, g'(\alpha_0))(\alpha - \alpha_0) + \delta f(x_0, \mu) + \varepsilon$$

Em virtude de 8) e 9) teremos:

$$\frac{\|\delta f(x_0, \mu)\|_H}{|\alpha - \alpha_0|} \leq \frac{\|\mu\|_B}{|\alpha - \alpha_0|} \to 0 \quad \text{quando} \quad \alpha \to \alpha_0.$$

Por 9) e 10) teremos também:

$$\frac{\|\varepsilon\|_H}{|\alpha - \alpha_0|} = \frac{\|\varepsilon\|_H}{\|x - x_0\|_B} \quad \frac{\|x - x_0\|_B}{|\alpha - \alpha_0|} \to 0.$$

quando $\alpha \to \alpha_0$.

Segue-se de 11) que $f(g(\alpha))$ é analítica em qualquer $\alpha_0 \in O$ $(\alpha_0 \neq \infty)$, qualquer que seja $g(\alpha)$ analítica num aberto qualquer $O \subset S$ e com valores em Ω. O caso em que $\alpha_0 = \infty$ se reduz ao anterior considerando-se $\varphi(\beta) = g\left(\frac{1}{\beta}\right)$.

TEOREMA 21 - *Seja* $f(x)$ *F-analítico numa vizinhança da origem* $V(0) \subset \mathcal{E}N^*$, *aberta e estrelada, e com valores em* Y. *Então* $f(x)$ *tem o desenvolvimento:*

$$12) \qquad f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(h) \qquad h \in V(0)$$

'e $P_n(h)$ $(n \geq 0)$ *são polinômios homogêneos de grau* n *contínuos*

em $\mathfrak{C}N^*$. *Recìprocamente se* $P_n(h)$ $(n \geq 0)$ *são polinômios homogêneos de grau* n, *contínuos em* $\mathfrak{C}N^*$, *a série 12) é F-analítica em* $\mathring{\mathfrak{S}}$ *onde* $\mathfrak{S}$ *é o campo de convergência da mesma, se* $\mathring{\mathfrak{S}} \neq \phi$.

Seja f(x) F-analítico numa vizinhança da origem, aberta e estrelada V(0). Como vimos no §3, temos que:

$$f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(0,h) \qquad h \in V(0).$$

$P_n(h) = \delta^n f(0,h)$ é um polinômio homogêneo de grau n $(n \geq 0)$. Os teoremas 18 e 20 nos garantem a continuidade de $P_n(h)$ em $\mathfrak{C}N^*$ $(n \geq 0)$.

Recìprocamente sejam $P_n(h)$ $(h \geq 0)$ polinômios homogêneos de grau n, contínuos em $\mathfrak{C}N^*$.

Formemos o operador 12). Seja X_m um dos espaços componentes de $\mathfrak{C}N^*$. Os polinômios $P_n(h)$ $(n \geq 0)$ são contínuos em X_m. Se p é uma das seminormas que definem a estrutura de Y, considerando os espaços Y/H_p e $Y\hat{/}H_p$ e as aplicações lineares e contínuas φ e Ψ vistas anteriormente, teremos uma sucessão $\Psi \circ \varphi \circ P_n(h)$ de operadores homogêneos de grau n $(n \geq 0)$ contínuos em X_m. Por um teorema de Hille ([4], pág. 87, th. 4.7;4) o operador

$$\Psi \circ \varphi \circ f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Psi \circ \varphi \circ P_n(h),$$

definido no aberto $\mathring{\mathfrak{S}} \cap X_m$ do espaço de Banach X_m e com valores no espaço de Banach $Y\hat{/}H_p$, é contínuo. Segue-se a continuidade de 12) definido em $\mathring{\mathfrak{S}} \cap X_m$ $(m \geq 1)$ e com valores em Y. Pelo teorema 8") segue-se a continuidade de f(h) em $\mathring{\mathfrak{S}}$. A G-analiticidade de 12) é consequência do teorema 17). A F-analiticidade é então consequência do teorema 20.

PROPOSIÇÃO 2 - *Se* f(x) *é F-analítico numa vizinhança da origem, aberta e estrelada em* $\mathfrak{C}N^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ *e com valores em* Y, *então:*

a) $f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(h, \ldots, h)$ *e* $P_n(h_1, \ldots, h_n)$ $(n \geq 0)$

é uma sucessão de aplicações multilineares simétricas em $(\mathfrak{C}N^*)^n$ *com valores em* Y;

existe uma bola fechada V_m *de centro zero e raio* σ_m *em cada espaço* X_m $(m \geq 1)$;

existe uma sucessão de limitados $H_p \subset Y$ $(p \geq 1)$;

existe uma sucessão numérica $(a_n)_{n \geq 0}$ *com* $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} < \infty$

tais que:

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \in a_n H_p \Leftarrow h_1, \dots, h_n \in \bigcup_{j=1}^{p} V_j, \quad p \geq 1, \quad n \geq 0 \ (^*)$$

e reciprocamente. Além disto $\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n) = P_n(h_1, \dots, h_n)$.

Seja $f(x)$ F-analítico na vizinhança aberta de zero $V(0)$. $V(0)$ contém uma vizinhança de zero do tipo $\overline{\Gamma_{m=1}^{\infty} V_m}$. Como $\Gamma_{m=1}^{p} V_m$ é relativamente compacta em $\mathcal{C}N^*$ $(\forall p \geq 1)$ e f é contínuo, a desigualdade fundamental dará:

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \equiv \delta^n f(0, h_1, \dots, h_n) \in n^n H_p \Leftarrow h_1, \dots, h_n \in \Gamma_{m=1}^{p} V_m, \quad p \geq 1 \quad n > 0$$

onde $H_p = \overline{\Gamma f\left(\Gamma_{m=1}^{p} V_m\right)}$ $(p \geq 1)$ é limitado porque $f\left(\Gamma_{m=1}^{p} V_m\right)$ é relativamente compacta.

Tomando-se $\bigcup_{m=1}^{p} V_m$ no lugar de $\Gamma_{m=1}^{p} V_m$ a desigualdade anterior continuará a valer. Seja o espaço $C.H_p$ com a norma $\| \ \|_{H_p}$. Teremos:

$$a_n = \sup_{p \geq 1} \sup_{\bigcup_{m=1}^{p} V_m} \| P_n(h_1, \dots, h_n) \|_{H_p} \leq n^n.$$

Quando $n = 0$ $P_0 = f(0) \in H_p$ $(\forall p \geq 1)$. Tomaremos $a_0 = 1$.

Como $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} < \infty$ a proposição direta fica demonstrada.

Recìprocamente suponhamos satisfeitas as condições a). Observemos que se

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \in a_n H_p \Leftarrow h_1, \dots, h_n \in \bigcup_{m=1}^{p} V_m$$

então

13) $$P_n(h_1, \dots, h_n) \in a_n \Gamma H_p \Leftarrow h_1, \dots, h_n \in \Gamma_{m=1}^{p} V_m$$

em virtude da multilinearidade de P_n.

(*) - Quando $n = 0$ entenderemos que $P_0 \in a_0 H_p$ $(\forall p \geq 1)$.

Seja $K_p = \overline{\Gamma H_p}$. Mostremos a convergência da série

$$14) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(h, \dots, h)$$

quando $h \in a \Gamma_{m=1}^{\infty} V_m$, onde a é um número positivo inferior ao raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Com efeito seja $h \in a \Gamma_{m=1}^{\infty} V_m$. Teremos $\frac{1}{a} h \in \Gamma_{m=1}^{p} V_m$ com p conveniente e por 13):

$$P_n\left(\frac{1}{a}h, \dots, \frac{1}{a}h\right) \in a_n K_p$$

$$P_n(h, \dots, h) \in a_n a^n K_p$$

$$\| P_n(h, \dots, h) \|_{K_p} \leq | a_n | a^n$$

Como consequência

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n (h, \dots, h)$$

converge no espaço $C.K_p$. A aplicação canônica de $C.K_p$ em Y é linear e contínua, donde a convergência de 14) segundo a topologia de Y, para cada $h \in a \Gamma_{m=1}^{\infty} V_m$. A série 14) converge então em $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}$ que não é vazio ($\mathfrak{S}$ campo de convergência). Como

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \in a_n H_p \quad \Leftarrow \quad h_1, \dots, h_n \in V_p(0), \quad p \geq 1, \quad n \geq 1$$

teremos a continuidade de $P_n(h_1, \dots, h_n)$ definida em $(X_p)^n$ e com valores no espaço de Banach $C.K_p$ $(K_p = \overline{\Gamma H_p})$, ([16], cap. I, pág. 8) donde a continuidade de $P_n(h_1, \dots, h_n)$ definido em $(X_p)^n$ e com valores em Y $(\forall p \geq 1)$ e a continuidade de $P_n(h, \dots, h)$ definido em $\mathfrak{L}N^*$ e com valores em Y. Pelo teorema 21 segue-se a F-analiticidade de f(h) em $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}$.

Pelo teorema 17 $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}$ é estrelada e $\delta^n f(0,h) = P_n(h, \dots, h)$. Pela fórmula 5) do §1 temos $\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n) = P_n(h_1, \dots, h_n)$.

CAPÍTULO IV

§1 - Espaço de Fantappiè de funções holomorfas

Seja Ω um domínio (*) da esfera complexa S $(\Omega \neq S)$ e (Ω) o conjunto das funções contínuas em Ω, holomorfas em $\overset{\circ}{\Omega}$ e eventualmente nulas no ∞ (se $\infty \in \Omega$). Define-se uma estrutura de espaço de Banach como segue:

15) A estrutura vectorial sôbre C será aquela habitual.

16) A aplicação $y \in (\Omega) \to \|y\| = \max\limits_{z \in \Omega} |y(z)|$ é uma norma.

17) O teorema de Weierstrass sôbre sucessões uniformemente convergentes de funções holomorfas nos garante que tôda sucessão de Cauchy em (Ω) é convergente.

O conjunto (Ω) munido desta estrutura será um espaço de Banach que designaremos por $|\Omega|$ ([2], pg. 38).

Seja F um conjunto fechado da esfera complexa S (F diferente de S e do ϕ). Consideremos o conjunto (F) das funções $(x(t), D)$ contínuas em domínios D e holomorfas em $\overset{\circ}{D}$, de modo que $\overset{\circ}{D} \supset F$. Introduzamos em (F) a relação de equivalência R (J. Sebastião e Silva) que consiste em identificar funções que coincidem num aberto conveniente que contém F. Seja (F)/R. Podemos introduzir em (F)/R uma estrutura vectorial sôbre C:

(*) - Domínio = aderência de um aberto não vazio.

$$\dot{x}(t), \dot{y}(t) \in (F)/R \rightarrow \dot{x}(t) + \dot{y}(t) = [x(t) \dotplus y(t)]$$

$$\alpha \in C, x(t) \in (F)/R \rightarrow \alpha \dot{x}(t) = [\alpha \dot{x}(t)]$$

onde $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ são as classes de equivalência de dois elementos $x(t)$ e $y(t)$ de (F). $x(t) + y(t)$ é a soma das funções $x(t)$ e $y(t)$ num domínio conveniente que contém F interiormente e que é comum aos campos de definição de cada uma destas. $\alpha x(t)$ é o produto de α por $x(t)$ (t no campo de definição desta). Pode-se mostrar que a soma e o produto por um escalar não dependem dos particulares representantes de cada classe.

Seja uma sucessão de domínios $(F_n)_{n\in N}$ com as propriedades ([2], pg. 37):

18) $\overset{\circ}{F}_n \supset F_{n+1}$, $\overset{\circ}{F}_n \supset F$ $(\forall\, n\in N)$. Dado um aberto $\Omega \supset F$ existe $F_n \subset \Omega$.

19) A fronteira de F_n é um contorno.

20) Cada componente conexa de F_n contém pontos de F.

As aplicações canônicas h_{nn+1} (*) dos espaços de Banach $|F_n|$ nos espaços de Banach $|F_{n+1}|$ são lineares e contínuas $(\forall\, n\in N)$.

Pelo teorema de Montel, a imagem de uma bola fechada de centro na origem de $|F_n|$ é relativamente compacta em $|F_{n+1}|$.

A aplicação canônica de $|F_n|$ em $(F)/R$ é um isomorfismo algébrico em virtude da hipótese 20). $|\dot{F}_n|$ imagem de $|F_n|$ por esta aplicação terá estrutura de espaço de Banach. Em virtude da hipótese 18), teremos $|\dot{F}_n| \subset |\dot{F}_{n+1}|$ e $(F)/R = \bigcup_{n\in N} |\dot{F}_n|$. Poderemos introduzir em $(F)/R$ uma estrutura de espaço $\mathcal{L}N^*$. Êste espaço será designado por $|F|$ e chamado *espaço de Fantappiè*.

Qualquer outra sucessão de dominios $(G_n)_{n\in N}$ satisfazendo as condições 18) 19) e 20) define em $|F|$ a mesma topologia ([2], pg. 49, observação 2).

(*) - h_{nn+1} é uma aplicação restrição de $y \in [F_n]$ a F_{n+1}.

§2 - Operadores lineares e contínuos em $[F]$ - Operadores multilineares e contínuos em $[F]^n$ - Operadores analíticos num aberto de $[F]$

I) Os operadores lineares e contínuos $f(x)$ de $[F]$, com valores num espaço localmente convexo completo e separado Y, tomam a forma de Fantappiè:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u(\alpha)x(\alpha)d\alpha$$

onde $u(\alpha) = f\left(\frac{i}{\alpha - t}\right)$ é uma função chamada *indicatriz*, analítica em $\complement F$ e nula no ∞ e com valores em Y; $x(\alpha)$ é um representante de x num domínio conveniente Ω e Γ um contorno que envolve positivamente F, contido em Ω. A fórmula acima é também chamada *produto hemissimétrico entre* $u(\alpha)$ *e* $x \in [F]$.

Recìprocamente tôda função $u(\alpha)$ analítica em $\complement F$, eventualmente nula no ∞, gera um operador linear e contínuo definido pela fórmula acima e sua indicatriz é $u(\alpha)$ (*).

II) Os operadores multilineares e contínuos $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $[F]^n$ em Y tem a forma de Fantappiè:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)x_1(\alpha_1)\ldots x_n(\alpha_n)d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

onde $u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f\left(\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{i}{\alpha_n - t_n}\right)$ é uma função analítica em $(\complement F)^n$ e com valores em Y, chamada *indicatriz* do operador multilinear e contínuo, nula nos eventuais pontos no ∞. $x_j(\alpha)$ é um representante de x_j num domínio conveniente Ω_j e Γ_j um contorno orientado de modo a deixar F à esquerda, contido em Ω_j, $(1 \leq j \leq n)$. (*)

A fórmula acima é também chamada *produto hemissimétrico* entre $u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $x_1, \ldots, x_n \in [F]$.

Recìprocamente tôda função $u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ analítica em $(\complement F)^n$ eventualmente nula nos pontos no ∞, com valores em Y, gera

(*) - ([2], pg. 35), ([11, a], pg. 501), ([12, b], pg. 48).

um operador multilinear e contínuo definido pela fórmula acima e sua indicatriz é $u(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ([11,a], pg. 512) ([11,b], pg. 69), ([3,a], pg. 37).

III) Como vimos, os operadores f G-analíticos num aberto Ω do espaço X tem o desenvolvimento:

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x,h) \qquad (x+h \in V(x) \subset \Omega)\ (^*)$$

Quando $X = [F]$ os operadores analíticos são contínuos (teorema 20) e tem diferenciais contínuas (teorema 18).

Teremos então o *desenvolvimento de Fantappiè:*

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

onde

$$u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \delta^n f(x, \frac{i}{\alpha_1 - t_1}, \dots, \frac{i}{\alpha_n - t_n}) =$$

$$= \left\{ \frac{\partial_p}{\partial \varepsilon_1, \dots, \partial \varepsilon_n} f(x + \varepsilon_1 \frac{i}{\alpha_1 - t_1} + \dots + \varepsilon_n \frac{i}{\alpha_n - t_n} \right\}_{\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 0}$$

As funções $u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ simétricas e holomorfas em $(\complement F)^n$ e nulas nos pontos no ∞ serão chamadas *indicatrizes* do operador analítico f $(n \geq 1)$, ([11,a], pg. 632), ([11,b], pg. 86).

Convencionaremos que o elemento $u_0 = f(x) \in Y$ é *função holomorfa e simétrica em* $(\complement F)^0$.

§3

Proposição 3 - *Existe correspondência biuívoca entre os operadores analíticos definidos em alguma vizinhança de zero aberta e estrelada em* $[F]$, *com valores em* Y, *e as sequências de funções* $u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *holomorfas e simétricas em* $(\complement F)^n$ $(n \geq 0)$ *com valores em* Y, *nulas nos pontos no* ∞ *e satisfazendo as condições:*

existe uma sucessão de números $(b_m)_{m \geq 1}$;

existe uma sucessão de limitados $K_p \subset Y$ $(p \geq 1)$;

existe uma sucessão numérica $(a_n)_{n \geq 0}$ *com* $\lim \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} < \infty$

tais que:

(*) - $V(x) = x + V(0)$; $V(0)$ vizinhança de zero estrelada.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\in\complement\overline{F}_{m_1},\dots,\alpha_n\in\complement\overline{F}_{m_n}\\ p\geq 1;\ n\geq 0\ \ 1\leq m_1,\dots,m_n\leq p\end{array}\right\}\Rightarrow u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in a_n b_{m_1}\dots b_{m_n}K_p\ (^*)$$

Usaremos as notações da proposição 2. Seja $\alpha\in\complement\overline{F}_m$. Indiquemos por ρ_m a distância entre $\complement\overline{F}_m$ e F_{m+1}, medida no plano complexo. Teremos para $t\in F_{m+1}$,

$$\left|\frac{\rho_m}{\alpha-t}\right|\leq 1 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\rho_m\,\sigma_{m+1}}{\alpha-t}\right|\leq\sigma_{m+1}$$

Segue-se que se $b_m=\dfrac{1}{\rho_m\,\sigma_{m+1}}$, teremos:

$$\alpha\in\complement\overline{F}_m\ \Rightarrow\ \frac{\dot{1}}{\alpha-t}\,\frac{1}{b_m}\in V_{m+1}.$$

Seja $u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\equiv\delta^n f\left(0,\dfrac{\dot{1}}{\alpha_1-t},\dots,\dfrac{\dot{1}}{\alpha_1-t}\right)$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\complement F) \quad \text{e} \quad u_0=f(0).$$

Como $u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\dfrac{1}{b_{m_1}}\dots\dfrac{1}{b_{m_n}}=$

$$=\delta^n f\left(0,\frac{\dot{1}}{\alpha_1-t}\,\frac{1}{b_{m_1}},\dots,\frac{\dot{1}}{\alpha_n-t}\,\frac{1}{b_{m_n}}\right),$$

a proposição 2, mais o que vimos no parágrafo anterior darão:

b) $$f(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma^n}u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)h(\alpha_1)\dots h(\alpha_n)d\alpha_1\dots d\alpha_n$$

onde $u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ é analítica e simétrica em $(\complement F)^n$ $(n\geq 0)$, nula nos pontos no ∞ e com valores em Y,

existe uma sucessão de números b_m $(m\geq 1)$;

existe uma sucessão de limitados $K_p\subset Y$ $(p\geq 1)$ $(K_p=H_{p+1})$

existe uma sucessão numérica $(a_n)_{n\geq 0}$ com $\overline{\lim}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n!}}<\infty$,

tais que:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\in\complement\overline{F}_{m_1},\dots,\alpha_n\in\complement\overline{F}_{m_n}\\ p\geq 1,\ n\geq 0,\ 1\leq m_1,\dots,m_n\leq p\end{array}\right\}\Rightarrow u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in a_n b_{m_1}\dots b_{m_n}K_p$$

Recìprocamente a série que comparece em b), com as condições restantes, define um operador F-analítico. Com efeito, seja α produto hemissimétrico entre $u_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ e $h_1,\dots,h_n\in[F]$:

(*) - Quando $n=0$, entendemos que $u_0=f(0)\in a_0K_p$ $(\forall p\geq 1)$.

$$P_n(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h_1(\alpha_1) \dots h_n(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n .$$

Teremos se $h_j \in [F_{m_j}]$ $(1 \leq j \leq n)$:

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \in \frac{1}{(2\pi i)^n} a_n b_{m_1} \dots b_{m_n} \| h_1 \|_{m_1} \dots \| h_1 \|_{m_n} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_n} K_p$$

onde $\| h_j \|_{m_j}$ é a norma em $[F_{m_j}]$ e γ_{m_j} o comprimento da fronteira de F_{m_j} $(1 \leq j \leq n)$.

Como consequência, indicando por W_j a bola fechada de centro zero e raio $\frac{2\pi}{b_j \gamma_j}$ em $[F_j]$ $(1 \leq j \leq n)$, teremos:

$$P_n(h_1, \dots, h_n) \in a_n K_p \Leftarrow h_1, \dots, h_n \in \bigcup_{j=1}^{p} W_j, \quad n \geq 0, \quad p \geq 1.$$

Pela proposição 2, a série que comparece em b) define um operador F-analítico em $\mathring{\mathfrak{S}}$, que contém a origem ($\mathfrak{S}$ = campo de convergência da série).

Em virtude do teorema de Cauchy (§7), e da proposição 2, teremos para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \complement F$:

$$\delta^n f\left(0, \frac{i}{\alpha_1 - t_1}, \dots, \frac{i}{\alpha_n - t_n}\right) = P_n\left(\frac{i}{\alpha_1 - t_1}, \dots, \frac{i}{\alpha_n - t_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u_n(t_1, \dots, t_n) \frac{1}{\alpha_1 - t_1} \dots \frac{1}{\alpha_n - t_n} dt_1 \dots dt_n = u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

§4 - Exemplos

EXEMPLO 1 - Sejam $F = \{\infty\}$ e $Q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $(n \geq 0)$ polinômios simétricos de grau r (independente de n) em cada variável.

Seja a série com valores em $Y = C$:

21) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} Q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

onde $h \in [F]$ e Γ é uma circunferência de centro na origem, contida no campo de definição do representante $h(\alpha)$, orientada de modo a deixar zero à direita.

Indiquemos por M_n o máximo dos módulos dos coeficientes de $Q_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

A série 21) converge numa vizinhança de zero de $[F]$ *se* $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{u_n}{n!}} < \infty$.

Tomemos $F_m = \complement C_m$ onde C_m é o círculo de aberto de centro zero e raio inteiro m em C. Seja $b_m = m^r$ $(m \geq 1)$.

Teremos

$$|Q_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \leq M_n (r+1)^n b_{m_1} \ldots b_{m_n}$$

quando $|\alpha_1| \leq m_1, \ldots, |\alpha_n| \leq m_n$.

Quando $\alpha_1 \in \overline{\complement F}_{m_1}, \ldots, \alpha_n \in \complement F_{m_n}$, $1 \leq m_1, \ldots, m_n \leq p$, $n \geq 0$, $p \geq 1$, teremos

$$Q_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in a_n^1 b_{m_n} \overline{C_1} \quad (a_n^1 = M_n (r+1)^n).$$

A série 21) será campo de convergência $\mathfrak{S}$ e será F-analítico em $\mathring{\mathfrak{S}}$, em virtude da proposição 3.

Exemplo 2 - Sejam $v_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ $(n \geq 1)$ funções analíticas simétricas e limitadas em $[V_r(\infty)]^n$, nulas nos pontos no ∞, sendo $V_r(\infty) = \{\alpha \in C \mid |\alpha| > r > 0\} \cup \{\infty\}$. Seja c_n o extremo superior de $|v_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)|$ em $[V_r(\infty)]^n$ e $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{c_n}{n!}} < \infty$.

Consideremos $F = \{\infty\}$ e a sucessão de círculos abertos C_m de centros zero e raios mr e $F_m = \complement C_m$ $(m \geq 1)$. Seja $x \in F_{p+1}$ e $\alpha \in \overline{CF}_m$ $(p \geq m)$, isto é, $|x| \geq (p+1)r$ e $|\alpha| \leq mr$ quando x é finito.

Teremos:

$$r \leq (p+1-m)r \leq |x| - |\alpha| \leq |x - \alpha| \qquad \text{e}$$

$$|v_n(\alpha_1 - x, \ldots, \alpha_n - x)| \leq c_n.$$

Quando $x = \infty$ a limitação anterior é evidente, $u_n(\alpha_1 - x, \ldots, \alpha_n - n)$ é função analítica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \complement F_m$, uniformemente quando $x \in F_{p+1}$, portanto, segundo a topologia de $[F]$. $\dot{v}_n(\alpha_1 - x, \ldots, \alpha_n - n)$ será analítica em $(\complement F)^n$ com valores em $[F]$ e

$$\dot{v}_n(\alpha_1 - x, \ldots, \alpha_n - x) \in c_n b_{m_1} \ldots b_{m_n} H_p$$

quando $\alpha_1 \in \overline{\complement F}_{m_1}, \ldots, \alpha_n \in \overline{\complement F}_{m_n}$, $1 \leq m_1, \ldots, m_n \leq p$, $n \geq 0$, $p \geq 1$, sendo $H_p = \{\dot{y} \in [F] \mid |y(x)| \leq 1, \quad \forall |x| \geq (p+1)r\}$ e $b_m = 1$ $(m \geq 1)$.

A série de produtos hemissimétricos:

$$22)\quad f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} \dot{v}_n(\alpha_1 - x, \dots, \alpha_n - x) h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

tem campo de convergência $\mathfrak{S} \subset [\{\infty\}]$ e é F-analítico em $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}$, em virtude da proposição 3.

Exemplo 3 - Sejam $v_n(\beta_1, \dots, \beta_n)$ $(n \geq 0)$ funções analíticas, com volores complexos simétricas e limitadas em $[V_r(0)]^n$ onde $V_r(0)$ é uma vizinhança aberta de centro zero e raio r em C e u_0 uma constante. Seja M_n o extremo superior de $|v_n(\beta_1, \dots, \beta_n)|$ quando

$|\beta_1|, \dots, |\beta_n| < r$ e $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} < \infty$.

Seja $F = \{0\}$ e a sucessão de círculos fechados F_m de centro zero e raio $\frac{1}{m} \frac{1}{r}$ $(m \geq 1)$.

Quando $|\alpha| > \frac{1}{m} \frac{1}{r}$, $|x| \leq \frac{1}{p}$ e $m \leqslant p$, teremos $\left|\frac{x}{a}\right| < r$.

Quando $\alpha_1 \in \overline{\complement F}_{m_1}, \dots, \alpha_n \in \overline{\complement F}_{m_n}$, $|x| \leq \frac{1}{p}$, $1 \leq m_1, \dots, m_n \leq p$, $p \geq 1$, $n \geq 0$, virá então:

$$\left| \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} v_n\left(\frac{x}{\alpha_1}, \dots, \frac{x}{\alpha_n}\right) \right| \leq M_n m_1 \dots m_n r^n; \quad |u_0| = M_0$$

A função acima será analítica em $\alpha_1 \in \complement F_{m_1}, \dots, \alpha_n \in \complement F_{m_n}$ uniformemente quando $|x| \leq \frac{1}{p}$, portanto, segundo a topologia de $[F]$. $\frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \dot{v}_n\left(\frac{x}{\alpha_1}, \dots, \frac{x}{\alpha_n}\right)$ será analítica e simétrica em $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \complement F$, nula nos pontos no ∞ e com valores em $[F]$. Além disto, quando $\alpha_1 \in \overline{\complement F}_{m_1}, \dots, \alpha_n \in \overline{\complement F}_{m_n}$, $1 \leq m_1, \dots, m_n \leq p$, $n \geq 1$ e $p \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \dot{v}_n\left(\frac{x}{\alpha_1}, \dots, \frac{x}{\alpha_n}\right) \in M_n b_{m_1} \dots b_{m_n} H_p.$$

onde $b_m = mr$ e $H_p = \left\{y \in [F] \mid |y(x)| \leq 1 \quad \forall x \leq \frac{1}{p}\right\}$.

A série de produtos hemissimétricos:

$$23)\quad f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \dot{v}_n\left(\frac{x}{\alpha_1}, \dots, \frac{x}{\alpha_n}\right) \times$$

$$\times h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

tem campo de convergência $\mathfrak{S}$ e é F-analítica em $\overset{\circ}{\mathfrak{S}}$, em virtude da proposição 3.

APÊNDICE

Operadores G-analíticos permutáveis com um operador linear e contínuo.

Um operador f *G-analítico na vizinhança de zero* $\mathfrak{S}$, *aberta e estrelada em* X E.L.C. *completo e separado e com valores em* X *é permutável com* S, *aplicação linear e contínua de* X *em* X, *isto é:*

$$f(S(h)) = S(f(h)) \quad \Leftarrow \quad h \in \mathfrak{S} \cap S^{-1}(\mathfrak{S})$$

quando e sòmente quando:

$$S(\delta^n f(0,h)) = \delta^n f(0,S(h)) \quad \Leftarrow \quad h \in X$$

A condição é necessária:

$$S(\delta^n f(0,h)) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\alpha S(h))}{\alpha^{n+1}} \quad \delta^n f(0,S(h)) \quad \Leftarrow \quad h \in X$$

pela fórmula 6') do §3 do cap. III, e pela permutabilidade entre as aplicações lineares contínuas com a integral (Cap. II).

A condição é suficiente, pois:

$$f(S(h)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta^n f(0,S(h)) = S\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta^n f(0,h)\Big) \quad \Leftarrow \quad h \in \mathfrak{S} \cap S^{-1}(\mathfrak{S})$$

As aplicações

$$T_a : u \in [\{\infty\}] \to (u(a+\dot{t}), M-a) \in [\{\infty\}], \quad a \in C$$

e $$S_a : u \in [\{0\}] \to (u(a\dot{t}), \frac{1}{a} M) \in [\{0\}], \quad a \neq 0$$

são lineares e contínuas.

Pode-se mostrar que a forma geral do desenvolvimento de um operador F-analítico permutável com T_a ($\forall a \in C$), isto é, do *ciclo fechado* ([11,a], pág. 662), é a 22).

Mostraremos que *a forma geral de um operador F-analítico permutável com* S_a ($\forall a \neq 0$) é a 23), onde $v_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é analítica numa vizinhança da origem em C^n ($n \geq 0$).

Com efeito, pela hipótese, temos para $n \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$ e os εs numa vizinhança de zero e $a \neq 0$:

$$f\left(\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\alpha_1 - at} + \ldots + \frac{\dot{\varepsilon}_n}{\alpha_n - at}\right) = S_a f\left(\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\alpha_1 - t} + \ldots + \frac{\dot{\varepsilon}_n}{\alpha_n - t}\right).$$

Derivando relativamente aos εs no ponto $(0,\ldots,0)\in C^n$, teremos:

$$24)\quad \frac{1}{a^n} u_n\left(\frac{\alpha_1}{a},\ldots,\frac{\alpha_n}{a}\right) = S_a\, u_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Como $u_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ é analítica fora dos eixos e nula nos pontos no ∞, teremos o "desenvolvimento múltiplo de Laurent":

$$u_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum b_{j_1 \ldots j_n} \frac{1}{\alpha_1^{j_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_n^{j_n}},$$

onde a segunda soma é estendida a todos os números inteiros não negativos $j_1,\ldots,j_n$ com soma m.

Utilizando a relação 24) teremos:

$$S_a = b_{j_n,\ldots,j_n} a^{j_1+\ldots+j_n}$$

Considerando um representante de $b_{j_1} \ldots b_{j_n}$ virá:

$$b_{j_1 \ldots j_n}(ax) = b_{j_1 \ldots j_n}(x) a^{j_1+\ldots+j_n} \qquad (\forall a \neq 0) \qquad \text{e}$$

$$b_{j_1 \ldots j_n} = c_{j_1 \ldots j_n} \dot{x}^{j_1 \ldots j_n} \qquad \text{com} \qquad c_{j_1 \ldots j_n} \in C \text{ (*)}.$$

Finalmente:

$$25)\quad u_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum c_{j_1 \ldots j_n} \left(\frac{\dot{x}}{\alpha_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\dot{x}}{\alpha_n}\right)^{t_n} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \dot{v}_n\left(\frac{x}{\alpha_1},\ldots,\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

onde $v_n(\beta_1,\ldots,\beta_n) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum c_{j_1 \ldots j_n} \beta_1^{j_1} \ldots \beta_n^{j_n}$ é analítica numa vizinhança da origem em C^n.

Para $n=0$ teremos

$$26)\quad f(0) = S_a(f(0)),$$

isto é:

$$27)\quad u_0 = \text{constante}.$$

Reciprocamente se $v_n(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ é analítica numa vizinhança da origem em C^n $(n \geq 1)$, $\dot{v}_n\left(\frac{x}{\alpha_1},\ldots,\frac{x}{\alpha_n}\right)$ é analítica quando

(*) - O espaço vectorial [F] com F compacto qualquer em S, se torna uma álgebra sôbre C, com a multiplicação: $uv = (u(t)v(t)^{\boldsymbol{\cdot}}, M \cap N)$ onde $u = (u(t)^{\boldsymbol{\cdot}}, M)$ e $v = (v(t)^{\boldsymbol{\cdot}}, N)$.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$, (ver exemplo 3). Então 25) e 27) têm como consequência 24) e 26).

Um operador f F-analítico numa vizinhança de zero aberta e estrelada em $[\{0\}]$, com valores em $[\{0\}]$, cujas indicatrizes satisfazem 24) e 25) é permutável com S_a $(\forall a \neq 0)$, pois

$$\delta^n f(0, S_a(h)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) h(a\alpha_1) \ldots h(a\alpha_n) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

onde Γ é uma circunferência de centro zero, contida no campo de definição de um representante de $S_a(h)$, orientada positivamente.

Pondo $a\alpha_j = \beta_j$ $(1 \leq j \leq n)$, teremos:

$$\delta^n(0, S_a(h)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{(a\Gamma)^n} \frac{1}{a^n} u_n\left(\frac{\beta_1}{a}, \ldots, \frac{\beta_n}{a}\right) h(\beta_1) \ldots h(\beta_n) d\beta_1 \ldots d\beta_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{(a\Gamma)^n} S_a(u_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)) h(\beta_1) \ldots h(\beta_n) \beta_1 \ldots d\beta_n$$

$$= S_a\left(\frac{1}{2\pi i}\right) \int_{(a\Gamma)^n} u_n(\beta_1, \ldots, \beta_n) h(\beta_1) \ldots h(\beta_n) d\beta_1 \ldots d\beta_n\Big)$$

$$= S_a(\delta^n f(0,h))$$

e $S_a(f(0)) = u_0 = f(0)$.

CONCLUSÕES

Os resultados dêste trabalho podem ser aproveitados em diversas direções.

I) O essencial na demonstração da proposição 2 é o fato que o espaço $\mathcal{E}N'$ é um limite indutivo de uma família de sub-espaços de Banach X_j $(j \in J)$, que $\Omega \subset \mathcal{E}N'$ é aberto quando e sòmente quando $\Omega \cap X_j$ é aberto em X_j $(\forall j \in J)$ e que $\mathcal{E}N'$ é um espaço de Montel. Existe uma categoria de E.L.C. introduzida por J. Sebastião e Silva (*), a dos espaços super-indutivos e de Montel que satisfaz a estas condições. Poderíamos estender a proposição 2 ao caso presente. O espaço $[0]$ das funções analíticas num aberto $0 \subset S$, munido da estrutura da convergência uniforme sôbre os compactos é um caso particular de tal situação ([2], pág. 43).

(*) - Conceitos de função diferenciável em espaços localmente convexos - Publicação do Centro de Estudos Matemáticos de Lisbôa, 1957.

É conhecida a fórmula das aplicações lineares e contínuas de [0] em C (L. Nachbin [23], pág. 52). Procuraremos generalizar esta fórmula para as aplicações multilineares contínuas de $[0]^n$ em E (E E.L.C. conveniente), utilizando a teoria dos produtos tensoriais topológicos de espaços localmente convexos. Poderemos então obter o desenvolvimento de um operador F-analítico numa vizinhança de zero do espaço [0] e procurar generalizar a proposição 3.

Outro exemplo que poderíamos examinar é o espaço das distribuições do tipo $T(\varphi) = (-1)^n \int_a^b f(t)\varphi^{(n)}(t)\,dt$ onde f é contínua no intervalo [a,b], n é um número natural e φ função infinitamente derivável em [a,b] com derivadas nulas nos extremos. Êste espaço pode ser munido de uma estrutura de espaço $\mathcal{L}N^*$ ([9], pág. 398).

II) Num trabalho, que publicaremos pròximamente, extenderemos a proposição 3 aos funcionais analíticos definidos em abertos do espaço das funções analíticas munido da topologia de Tillimann ([19] e [3,6]).

III) Quanto aos operadores especiais $f(\dot{h}(t))$ do apêndice, procuraremos estender seu estudo aos operadores F-analíticos num aberto do espaço [F] com F compacto qualquer, permutáveis com os operadores lineares num subespaço, do tipo $S_a : u \to \dot{u}(g_a(t))$, onde $g_a(t)$ é um grupo contínuo de transformações a um ou mais parâmetros.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GROTHENDIECK - (a) Espaces Vectoriels Topologiques. Publicação do I.M.P.A. e do Dep. de Mat. da F.F.C.L. da U.S.P, 1954.
(b) Journal für die Reine und A. Math., 1953. Vol. 192.

[2] C.L. DA SILVA DIAS - Espaços Vectoriais Topológicos e sua Aplicação aos Espaços Funcionais Analíticos. Tese de concurso (1951). Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, 1952.

[3] D. PISANELLI - (a) Alguns Funcionais Analíticos e seus Campos de Definição. Boletim da Sociedade da Matemática de São Paulo (1957). Tese de doutoramento (1956).
(b) Sulla definizione di Funzionale Analitico. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. Vol. 15 (1960).

[4] E. HILLE - Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society Publications. Vol. XXXI (1948).

[5] G. HAEFELI e F. PELLEGRINO - Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen Nicht Linearen Functionale. Vol. 23, fasc. 2 (1949).

[6] G. KÖTHE - Dualitat in der Functionentheorie. Journal für die Reine und. a. Math. Vol. 191 (1953).

[7] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ - La Dualité dans les Espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$. Annales de l'Institut Fourier. Tome I (1949).

[8] J. SEBASTIÃO E SILVA - (a) Funções Analíticas e Análise Funcional. Portugaliae Mathematica. Vol. 9 (1950).
(b) Sui Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici. Portugaliae Mathematica. Vol. 12 (1953).

[9] J. SEBASTIÃO E SILVA - Su Certe Classi di Spazi Localmente Convessi Importanti per le Applicazioni. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, Vol. XIV, Fasc. 3 (1955).

[10] J. SEBASTIÃO E SILVA - Le Calcul Differentiel et Integral dans les Espaces Localement Convexes, Reels ou Complexes. Mem. Acc. dei Lincei, Vol. XX, Fasc. 6; Vol. XXI, Fasc. 1-2; (1956).

[11] L. FANTAPPIÈ - (a) I Funzionali Analitici. Memoria Acc. dei Lincei. Vol. III - S. 6 - fasc. 11 (1930).
(b) Teoria de los Funcionales Analiticos y sus Aplicaciones. Conferencias redigidas por R. Vidal. Barcelona (1943).

[12] O. CATUNDA - Sôbre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos. Tese de concurso para a cadeira de Análise Matemática (1944).

[13] N. BOURBAKI - Livre I - Théorie des Ensembles - Fascicule des Resultats - n.º 846 - Hermann e Cie. - Éditeurs.

[14] N. BOURBAKI - Livre II - Chap. II, Algebre Lineaire, n.º 1032 - Hermann e Cie., Éditeurs.

[15] N. BOURBAKI - Livre III - Chap. I - Sctructùres Topologiques - Chap. II - Structures Uniformes - n.º 1142 - Hermann e Cie., Éditeurs.

[16] N. BOURBAKI - Livre V - Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. I, II - Ensembles Convexes et Espaces Localement Convexes. Chap. IV - La Dualité dans les Espaces Vectoriels Topologiques n.º 1142 Hermann e Cie., Éditeurs.

[17] N. BOURBAKI - Livre VI - Chap. III - Mesures sur les Espaces Localement Compacts, n.º 1175 - Hermann e Cie, Éditeurs.

[18] S. BOCHNER and W. T. MARTIN - Several Complex Variables - Princeton University Press - 1948.

[19] H. GÜNTHER TILLIMANN - Die Fortsetzung analytisher Funktionale-Abhandlungem aus dem Mathematishen Seminar der Universität Hamburg - August 1957.

A. OSHIRO - PUBLICAÇÕES
Editôra - Gráfica