Omar Catunda

SÔBRE OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS FUNCIONAIS ANALITICOS

Tese apresentada em concurso para a cadeira de Análise Matemática, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de S. Paulo.

— 1944 —

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por principal finalidade o estudo sistemático da parte fundamental da teoria dos funcionais analíticos. Este ramo da teoria dos funcionais, inaugurado pelo prof. Fantappiè, foi por este desenvolvido com bastante sucesso principalmente nas aplicações à teoria das funções de matrizes e de operadores, à resolução explícita de certos tipos de equações diferenciais, à fundamentação rigorosa do cálculo simbólico, etc. Todos esses resultados se obtêm por meio de raciocínios de grande generalidade e relativamente simples, a partir de conceitos que se apresentam naturalmente no estudo dos funcionais de funções analíticas. Em particular, o conceito de indicatriz de um funcional linear, assim como a fórmula fundamental do prof. Fantappiè, são ricos de consequências para as referidas aplicações.

As maiores dificuldades da teoria, porem, aparecem justamente nos fundamentos, o que não causará surpreza a quem já travou conhecimento com os diversos espaços funcionais no campo real, os quais apresentam às vezes complicações bastante grandes.

Na primeira parte, capítulos I e II, tentámos fazer um estudo quanto possível completo, do espaço funcional analítico, procurando aplicar a esse espaço os resultados da Análise Geral, iniciada por Fréchet e Hausdorff e desenvolvida pelos matemáticos da escola polonêsa, como Kuratowski, Sierpínski, Banach, e mais recentemente pelos matemáticos russos, Lusin, Alexandroff, Kolmogoroff, e americanos, como Whyburn, Wilder, Tukey e vários outros. Este problema porem apresenta grandes dificuldades, pois a esse espaço quasi não se aplicam as definições mais conhecidas introduzidas por Fréchet. O próprio prof. Fantappiè, em vista das dificuldades surgidas nos primeiros trabalhos, em que considerava como elementos do espaço funcional as funções analíticas no sentido de Weierstrass, como ainda aparece na sua obra fundamental "I funzionali analitici" resolveu posteriormente desistir dessa ideia e considerar como pontos desse espaço as funções analíticas localmente, definidas em regiões do plano complexo ampliado, admitindo mesmo nessa definição regiões não conexas. Esta alteração, porem, se por um lado simplificou os estudos sobre continuidade nas linhas e variedades analíticas, por outro lado introduziu uma complicação fundamental. Com efeito, emquanto que para as funções analíticas no sentido de Weierstrass, dado um elemento, está completamente individualizado tanto o campo natural de existência como o valor da função em todo esse campo, para as funções análíticas localmente é preciso considerar como ponto um complexo constituido pela função e pela região em que esta se supõe definida. Assim, uma mesma função analítica em sentido restrito, dá origem a uma infinidade de pontos, que se obtêm tomando todas as regiões possíveis contidas no seu campo natural de existência. Compreende-se assim que o espaço funcional se complica extraordinariamente, o que dificulta o seu estudo topológico. Procurando encarar essas dificuldades, resolvemos introduzir o conceito de ponto (f,R) (cap. II) com as noções de pontos distintos e essencialmente distintos, necessárias para o estudo de certas relações topológicas. Os pontos assim definidos, completados com o conceito de entorno (T,σ) formam um espaço com propriedades muito diferentes da maioria dos espaços funcionais já estudados. Nesse espaço os conjuntos mais importantes são os conjuntos abertos ou regiões, pois a noção de conjunto fechado apresenta uma aparente contradição assinalada no texto (cap. II, § 4). Os conceitos de base e de convergência foram estudados com cuidado, e encarados com a máxima generalidade.

Na parte que se refere à convergência, alguns dos teoremas que servem de fundamento à teoria são baseados no postulado de Zermelo. Muitas vezes é possível ou justificar esse principio ou evita-lo; por exemplo, quando se trata da escolha de um ponto em cada conjunto fechado contido num espaço numérico, é possível aplicar o critério de escolha de Severi; igualmente, quando se sabe de antemão que todo conjunto do sistema dado contem pontos de um mesmo conjunto enumerável H, pode-se fixar o critério de escolha, tomando em cada conjunto o ponto de H nele contido, ao qual corresponde o menor número de ordem; é o caso por exemplo dos conjuntos de um espaço numérico que têm pontos internos, para os quais se pode escolher H como o conjunto dos pontos com coordenadas racionais. Por outro la do, em certas questões de convergências é possível evitar o princípio de Zermelo, usando o conceito de função polidroma, isto é, estabelecendo que uma certa propriedade vale para todos os pontos de cada um dos conjuntos dados. Existem casos, porem, como o de certas demonstrações por absurdo, em que parece inevitável o uso desse princípio, como por exemplo na demonstração do teorema de Heine (Alexandroff (1), p, 58): "Condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$, definida em um espaço métrico, seja contínua em um ponto x, é que para toda succession $\{x_n\}$ convergente a x, se tenha $\lim f(x_n) = f(x)$. Por esta razão não nos demorámos na discussão das demonstrações, procurando sempre escolher a mais simples, evitando o emprego desse princípio quando seja possível, mas sem levar esse escrúpulo ao extremo.

Esse estudo do espaço funcional pode ser naturalmente desenvolvido em vários pontos, o que pretendo fazer posteriormente, mas penso que não se justifica uma exploração exagerada dessa parte geral, enquanto a necessidade desse estudo não se apresentar expontaneamente nas aplicações.

Na última parte desta tese, isto é, no capítulo III, introduzi o conceito de funcional contínuo, adaptando a definição de continuidade para successões, proposta pelo meu colega Cândido L. S. Dias, ao conceito geral de continuidade de um funcional definido em um espaço de entornos. Entre os funcionais contínuos definidos no espaço funcional analítico, se apresentam como os mais simples os lineares que satisfazem tambem à condição de homogeneidade em relação ao factor i, os quais podem ser definidos tambem pela condição de "aditividade complexa", segundo o sr. Cândido Dias. Para estes estabelecemos a fórmula fundamental de Fantappiè, modificada de modo a eliminar a restrição exigida na teoria deste, referente à regularidade de uma função no infinito. A demonstração é baseada na tese do prof. Candido Dias, substituindo porem a demonstração por sucessões pela demonstração por continuidade (com o que se evita o teorema de Heine acima citado, e portanto o postulado de Zermelo). Desta fórmula por sua vez, se deduz a propriedade que o prof. Fantappiè encarou como definindo os funcionais analíticos.

Procurámos ainda abordar o problema da mudança de variáveis nos funcionais analíticos, limitando-nos porem aos funcionais lineares, cujo estudo é facilitado pela fórmula fundamental. Pode-se dizer que esse estudo só é possível pela fórmula generalizada, pois a condição de nulidade imposta pelo prof. Fantappiè ás funções regulares no infinito não se conserva na grande maioria das transformações.

Neste estudo adotamos certas denominações e notações já correntes na teoria dos conjuntos, como as relações de pertinência, inclusão, diferença, reunião, produto, etc. ; para uniformidade da terminologia em português, restringimo-nos em geral à linguágem do professor Lelio Gama na sua obra recente "Introdução à teoria dos conjuntos".

As citações indicadas por números entre parêntesis ( ) contidas neste trabalho se referem à bibliografia incluida no fim, na ordem alfabética por autores.

CAPITULO I - PRELIMINARES

§ 1. ESFERA COMPLEXA.

Neste estudo adotaremos sistemáticamente a convenção de representar os números complexos $z = x + iy$ por pontos de uma esfera chamada esfera complexa ou esfera de Riemann. Esta representação se obtem do plano de Argand-Gauss, projectando os seus pontos sobre a esfera de raio unitário e centro na origem, tomando como centro de projeção a extremidade superior do diâmetro normal ao plano (projeção estereográfica); como é sabido, ao infinito, que entre os números complexos e no plano de Argand-Gauss é definido por abstração, pela consideração de qualquer sucessão de números cujo módulo cresce indefinidamente, ou mais simplesmente, pela definição de "entorno do infinito", corresponde na esfera um ponto bem determinado, chamado polo da esfera complexa, que é o centro de projeção; diametralmente oposto fica então o ponto que corresponde á origem. Continuaremos a designar os pontos da esfera pela mesma letra com que indicamos o número correspondente, designando o polo com o símbolo ∞. O entorno de um ponto a da esfera pode ser definido indiferentemente ou como o conjunto dos pontos internos a uma calota esférica com polo em a, ou da seguinte maneira: 1) se o ponto é finito, o entorno (ε) ($\varepsilon > 0$) desse ponto é por definição o conjunto dos números z que satisfazem á desigualdade

$$|z - a| < \varepsilon$$

2) se o ponto é o infinito, chamaremos entorno (K) do infinito ($K > 0$) o conjunto dos pontos z tais que se tenha $|z| < K$. Como se verifica facilmente, só nos casos do zero e do ∞ essas duas definições de entorno coincidem, pois em qualquer outro caso o entorno (ε) do ponto a é representado sobre a esfera por uma calota cujo polo está sempre abaixo do ponto a. Em qualquer caso os dois sistemas de entornos são evidentemente equivalentes sob o ponto de vista topológico, isto é, definem os mesmo pontos de acumulação de conjuntos sobre a esfera: isto se pode tambem exprimir dizendo que os dois espaços deduzidos da esfera pela introdução dos dois sistemas de entornos coincidem.

Note-se tambem que enquanto que o segundo sistema se deriva da noção de distância $|z-z'|$ de dois pontos z e z' quaisquer do plano combinada com a noção de entorno do infinito, o primeiro é simplesmente o sistema deduzido da noção de distância espacial dos dois pontos z e z' sobre a esfera, mesmo que um deles seja o polo. Esta distância δ pode ser calculada pela fórmula

$$\delta = \frac{2\,|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\cdot\sqrt{1+|z'|^2}}$$

que se deduz facilmente por considerações geométricas. Se um dos pontos, z' por exemplo, é o ∞, a distância se reduz a

$$\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Para certas considerações é conveniente introduzir o conceito de entorno fechado, constituido pela reunião de um entorno comum e do círculo que o limita.

§ 2. CONJUNTOS DE PONTOS DA ESFERA.

Dada a noção de entorno de um ponto z, podem-se dar todas as definições fundamentais para o estabelecimento de uma teoria dos conjuntos sobre a esfera. Vamos dar em seguida as definições principais, baseando-nos nas definições de Alexandroff (1) e Fréchet (1), com as traduções em português introduzidas pelo autor (1) e pelo prof. Lélio Gama (1), pois sobre algumas denominações não ha em geral uniformidade nos tratados:

1. Ponto de acumulação de um conjunto é um ponto em qualquer entorno do qual ha ao menos um ponto do conjunto distinto do ponto dado.

2. Um espaço se diz compacto, quando qualquer conjunto com infinitos pontos desse espaço, tem neste ao menos um ponto de acumulação. O teorema clássico de Bolzano, por alguns tambem chamado de Bolzano-Weierstrass, diz que todo conjunto infinito de pontos sobre a esfera tem aos menos um ponto de acumulação, isto é, que os pontos da esfera, associados á noção de entorno dada acima, constituem um espaço compacto, em contraposição com o plano, que não tem essa propriedade.

3. Conjunto derivado C' de um conjunto C é o conjunto dos pontos de acumulação de C. O conjunto derivado C" de C' é o segundo derivado de C, etc. Essas definições se aplicam sem excepção quando se introduz a noção de conjunto vazio, que é um conjunto que não contem nenhum elemento e que se admite que esteja contido em todo e qualquer conjunto.

4. A reunião de um conjunto com o seu derivado chama-se fecho do conjunto dado. Esse fecho pode ser definido como o conjunto dos pontos (chamados em geral pontos de contacto) tais que qualquer entorno de um desses pontos contem ao menos um ponto do conjunto dado.

5. Um conjunto se diz fechado quando contem o seu derivado, e portanto quando coincide com o próprio fecho; denso em si, quando é contido no mesmo; perfeito, quando coincide com o

seu derivado. É fácil vêr que o conjunto derivado de qualquer conjunto é sempre fechado.

Uma propriedade fundamental dos conjuntos fechados sobre a esfera complexa é dada pelo conhecido teorema de Borel-Lebesgue, segundo o qual, se um conjunto fechado C está coberto por uma família de entornos F (no sentido que todo ponto de C pertence ao menos a um elemento dessa família) existe um número finito de entornos da família dada que cobre o conjunto.

6. Chama-se ponto interno de um conjunto C um ponto z tal que existe um entorno de z todo contido em C; ponto esterno, um ponto que é interno ao complemento de C, que é o conjunto dos pontos da esfera não pertencentes a C; um ponto que não seja interno nem esterno, isto é, tal que qualquer seu entorno contenha ao menos um ponto de C e ao menos um ponto não pertencente a C, diz-se ponto de fronteira ou de contorno de C, e o conjunto desses pontos chama-se fronteira ou contorno de C.

7. Chamaremos região todo conjunto constituido sómente de pontos internos. Assim, os pontos internos e os pontos esternos de qualquer conjunto formam duas regiões (admitindo que o conjunto vazio seja tambem uma região). Facilmente se verifica que o contorno de qualquer conjunto é sempre um conjunto fechado; que um conjunto fechado é caracterizado por conter todo o contorno; que o complemento de um conjunto fechado é uma região, e vice-versa.

8. Chama-se domínio o conjunto derivado de uma região, isto é, constituido por uma região mais o seu contorno; um domínio é pois caracterizado por ser um conjunto fechado do qual todo ponto é ponto de acumulação de pontos internos. Lembramos aqui que os livros franceses em geral chamam "domaine" ou "ensemble ouvert" o que nós chamamos de região, e "domaine fermé" o que chamámos de domínio; alguns autores p. ex. Walsh (1) reservam o nome de região aos conjuntos que definiremos dentro em pouco com o nome de regiões conexas. Segundo a nossa definição, um entorno fechado de um ponto qualquer é sempre um domínio.

A reunião de dois conjuntos fechados, duas regiões ou dois domínios, é, respectivamente, um conjunto fechado, uma região ou um domínio. A interseção de dois conjuntos fechados ou duas regiões, é respectivamente, um conjunto fechado ou uma região. A reunião de um sistema qualquer de regiões é uma região, o produto de um sistema qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

9. Uma correspondência unívoca $w = f(z)$ entre os pontos z de um conjunto C de uma esfera complexa e pontos w da mesma ou de outra esfera, diz-se <u>contínua</u> em um ponto z_0 de C que seja de acumulação deste conjunto, se a cada entorno de $w_0 = f(z_0)$ se pode fazer corresponder um entorno conveniente de z_0 tal que a todo ponto z deste entorno que pertença a C corresponde um valor de w contido no entorno dado de w_0. Uma correspondência destas é contínua em um conjunto C quando ela é contínua em todos os pontos de acumulação de C. Pode-se demonstrar que em uma correspondência unívoca contínua, a um conjunto fechado corresponde sempre um conjunto fechado, e que se essa correspondência entre dois conjuntos fechados é biunívoca e contínua em um sentido ela é tambem contínua no sentido inverso. Uma correspondência biunívoca e bicontínua chama-se um <u>homeomorfismo</u>.

10. Chama-se <u>curva de Jordan aberta</u> ou <u>arco de Jordan</u> um conjunto que esteja em correspondência biunívoca e contínua com um segmento, isto é, a imágem homeomorfa de um segmento; <u>curva de Jordan fechada</u>, a imágem homeomorfa de uma circunferência. Um exemplo simples de arco de Jordan é uma linha poligonal sem ponto duplos que liga dois pontos distintos; os lados dessa poligonal são arcos de círculos sobre a esfera que se projetam no plano segundo segmentos (ou semirectas, no caso de um dos extremos ser o infinito), e que portanto, na própria esfera, fazem parte de círculos que passam pelo polo. Um polígono fechado sem pontos duplos é uma curva de Jordan fechada.

11. Chama-se <u>arco regular</u>, sobre a esfera um arco de Jordan que tenha tangente em cada ponto, inclusive os estremos sendo a direção dessa tangente variável com continuidade. Um arco regular que não passe pelo infinito pode sempre ser de-

finido por uma representação paramétrica $z= z(t) = x(t) + i\, y(t)$, em que o parâmetro real t varia em um intervalo $a \longleftrightarrow b$, sendo as funções $x(t)$ e $y(t)$ funções reais contínuas e com derivadas contínuas nesse intervalo.

12. Chamaremos caminho regular um arco de Jordan orientado, composto de um número finito de arcos regulares ligados pelos estremos; igualmente, chamaremos contorno regular uma curva de Jordan fechada, orientada, composta de um número finito de arcos regulares ligados pelos extremos.

13. Uma região se diz conexa, quando dados dois quaisquer dos seus pontos P e Q, existe sempre um arco de Jordan todo contido nessa região, e de extremos P e Q. Demonstra-se que é sempre possível substituir nessa definição o arco de Jordan por uma poligonal.

Dada uma região R, e tomado na mesma um ponto qualquer P, podemos considerar a totalidade dos pontos que se podem ligar a P por poligonais inteiramente contidas na região; o conjunto formado por esses pontos é evidentemente determinado por qualquer um deles, pois se se pode ligar P a Q por uma poligonal e o mesmo se pode fazer com Q e R, existe sempre uma poligonal ligando P a R. Essa parte de R que assim se obtem é evidentemente uma região conexa e se chama componente da região R determinada por P. Se se toma outro ponto de R não contido nessa componente, esse ponto determina do mesmo modo outra componente que não pode ter nenhum ponto comum com a primeira. Assim, toda região da esfera complexa se pode decompôr em componentes que são regiões conexas. O conjunto dessas regiões é sempre finito ou enumerável.

O teorema fundamental sobre as curvas de Jordan fechadas constitue uma das propriedades topológicas características da esfera, e pode ser enunciado da seguinte maneira: "A região complementar de uma curva de Jordan fechada sobre a esfera tem sempre exatamente duas componentes, cuja fronteira comum é a curva dada". Quando a curva é um contorno regular C, essas componentes se distinguem pela sua situação nas proximidades da curva: para a qual se supõe fixado um sentido de percurso: Chama-se região interna a C, a componente cujos pontos próximos a C ficam à esquerda dessa curva; a região que contem os pontos à direita de C é chamada região esterna a C. Se se muda o sentido de percurso de C, essas duas regiões trocam de nome. Note-se que dado o modo pelo qual foi feita a projeção estereográfica do plano sobre a esfera, as curvas e regiões sobre esta devem se supôr sempre vistas da parte interna.

14. Dada uma região R, a operação que consiste em excluir dessa região os pontos de um arco regular que liga dois pontos do seu contorno, chama-se talho, efetuado na região. Quando qualquer talho efetuado em uma região conexa rompe a conexão, diz-se que a região é simplesmente conexa. Pode-se demonstrar que a condição necessária e suficiente para isto é que o contorno dessa região não possa ser decomposto em duas partes separadas. Diz-se que uma região conexa é n vezes conexa, ou que a sua ordem de conexão é n, quando o máximo número de talhos sucessivos que se pode fazer sem romper a conexão é n-1.

Todos os conceitos enunciados acima são baseados na noção de entorno. Se tomarmos a noção de distância de dois pontos sobre a esfera, como sendo o comprimento da corda que os une, e nos basearmos no teorema de Weierstrass, que diz que toda função real contínua definida em um conjunto fechado de um número qualquer de dimensões tem nesse conjunto um ponto de máximo e um ponto de mínimo, poderemos dar as seguintes noções, com as propriedades mais importantes:

15. Chama-se diâmetro de um conjunto C da esfera, o extremo superior das distâncias de dois pontos qualquer de C; se este conjunto é fechado e tem mais de um ponto, ele contem pelo menos um par de pontos cuja distância é igual a esse diâmetro.

16. Dados dois conjuntos C e D sobre a esfera, chama-se distância entre eles o extremo inferior das distâncias de um ponto P de C a um ponto Q de D. Se os dois conjuntos são fechados e não têm pontos comuns, a distância é positiva e é igual à distância de dois pontos, um de cada conjunto.

17. Chama-se desvio ou afastamento de dois conjuntos C e D, o extremo superior das distâncias de um ponto de um qual-

quer dos conjuntos ao outro conjunto. Se os conjuntos são fechados, existe sempre um ponto de um dos conjuntos, cuja distância ao outro é igual ao desvio; segue-se que se o desvio de dois conjuntos fechados é nulo, os dois conjuntos coincidem. Como aplicação desta noção, temos que dada uma curva de Jordan, aberta ou fechada, e um número $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe sempre, respectivamente, uma poligonal ou um polígono, sem pontos duplos, tal que o desvio entre esta curva e a curva dada é menor que ε (").

18. A noção de desvio tambem serve para dar as noções de limite e de continuidade de um conjunto fechado. Suponhamos que a cada ponto λ de um conjunto M de um espaço de entornos S(§), corresponda um conjunto fechado $C(\lambda)$ na esfera complexa da variável z. Diremos que esse conjunto tem por limite o conjunto fechado C, quando λ tende a um ponto de acumulação λ_0 de M, se, dado $\varepsilon > 0$, existe um entorno de λ_0 tal que para todo ponto λ de M que esteja nesse entorno, o desvio entre C e $C(\lambda)$ é menor que ε. Exprime-se este facto pela notação usual $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} C(\lambda) = C$; vale aqui o teorema da unicidade do limite, pois facilmente se vê que se houvesse outro limite D (conjunto fechado), o desvio entre C e D deveria ser nulo, o que só se dá quando C e D coincidem. Se λ_0 pertence a M e temos $C = C(\lambda_0)$, dizemos que $C(\lambda)$ é um conjunto função contínua de λ em λ_0. Se M é denso em si e $C(\lambda)$ é contínuo em todos os pontos de M dizemos que $C(\lambda)$ varia com continuidade para λ em M. O limite e a continuidade de uma região $R(\lambda)$ função de um parâmetro λ se definem pelo limite e continuidade do conjunto complementar. Note-se que a definição direta não teria sentido, pois se perderia a unicidade do limite; com efeito, exemplos simples mostram que duas regiões podem ter desvio nulo sem coincidir.

(") Cf. Jordan - Cours d'Analyse, I.

(§) isto é, um sistema de entes chamados pontos, onde são definidos certos conjuntos chamados entornos, que satisfazem aos tres postulados de Hausdorff e a um postulado de separação (cf. Fréchet (1) e Alexandroff(1). No nosso estudo, o espaço

S é em geral um dos seguintes: a) o conjunto dos números reais, b) o conjunto dos números complexos, c) a esfera complexa, d) um espaço numérico, real ou complexo, euclideano ou projectivo, e) o espaço funcional analítico (v. Cap. II) ou uma das suas extensões.

§ 3. - FUNÇÕES MONÓGENAS. PROPRIEDADES MAIS IMPORTANTES.

Tomaremos como elemento variável fundamental da teoria dos funcionais analíticos as funções monógenas, no sentido no sentido de Cauchy, definidas em regiões da esfera complexa (deixamos portanto de lado as funções monógenas de Borel, que são funções deriváveis definidas em conjuntos densos sem pontos internos).

Uma função $f(z)$ é monógena em um ponto finito z_0, quando é definida, e monódroma em um entorno desse ponto e tem nele uma derivada, definida como o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} .$$

Se o ponto é o infinito, diremos que a função é monógena nesse ponto quando a função $f(1/z)$ fôr monógena no ponto zero; para isto pode-se dar uma definição direta, dizendo-se que a função é monógena no infinito quando fôr definida e monódroma em um entorno deste ponto e existir o limite

$$\lim_{z \to \infty} z \left\{ f(z) - f(\infty) \right\} .$$

Na teoria dos funcionais analíticos o professor Fantappiè estabeleceu a convenção de considerar uma função definida no infinito sómente quando é monógena nesse ponto segundo a definição anterior e alem disto o seu valor nesse ponto fôr zero. Neste trabalho deixamos de lado esta restrição, que sempre se nos afigurou forçada e inconveniente.

Uma função é monógena em uma região R da esfera complexa, quando ela é monógena em cada um dos pontos de R. Definindo-se, como no campo real, a integral de uma função f(z) estendida a um caminho finito γ unindo z_0 a z' como o limite (quando existe) da soma

$$\sum_r f(t_r)(z_r - z_{r-1})$$

em que $z_0, z_1, \dots z_n = z'$ são pontos de γ dispostos na ordem dos índices, t_r um ponto qualquer de γ pertencente ao arco parcial $\widehat{z_{r-1}\, z_r}$, e sendo o limite tomado quando a máxima corda (plana) $|z_r - z_{r-1}|$ tende a zero, pode-se então demonstrar o teorema fundamental de Cauchy: "<u>Se uma função f(z) é monógena em todos os pontos de uma região R limitada por um número finito de contornos regulares e se no contorno a função f(z) é contínua, a integral desta função estendida ao contorno existe e é nula</u>". As primeiras demonstrações desse teorema supunham a continuidade da derivada f'(z); é de Goursat (") a primeira demonstração em que se supõe simplesmente, como o fizemos, a existência da derivada f'(z) em cada ponto de R. Deste teorema fundamental se deduzem as seguintes propriedades das funções monógenas, que fazem desta teoria uma das mais elegantes e fecundas da Análise Matemática:

- Se uma função é monógena em uma região R, todas as suas derivadas sucessivas existem e são monógenas na mesma região.

- A integral de uma função monógena definida em uma região R, estendida a um caminho regular qualquer todo contido em R e de extremos z_0 e z, é uma função monógena de z, cuja derivada coincide com f(z).

- Nas hipóteses do teorema fundamental, o valor da função f(z) em qualquer ponto de R é dado por uma integral estendida ao contorno de R:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt$$

(") Transactions of the American Mathematical Society, vol. I, 1900, p. 14; cf. "Cours D'Analyse Mathem.", II, 5a. ed., pg. 68.

donde se deduz que uma função monógena em uma região está perfeitamente determinada pelos valores que toma no contorno. Desta fórmula seguem-se tambem as expressões das derivadas sucessivas

$$(2) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Da fórmula de Cauchy se deduz o teorema da média aritmética para funções harmônicas, donde se segue o teorema do máximo módulo, de grande aplicação: "O módulo $|f(z)|$ de uma função analítica que não seja constante, não pode ter um máximo em um ponto interno ao seu campo definição; quando esse máximo existe, ele é atingido em um ponto do contorno.

Emfim, dos teoremas fundamentais sobre sucessões e séries de funções, isto é, do teorema do limite de sucessões uniformemente convergentes e do teorema sobre a possibilidade de integrar termo a termo uma série uniformemente convergente no campo de integração, deduzem-se tambem os desenvolvimentos de Taylor e de Laurent; este último, válido como se sabe para toda função regular em uma corôa (no plano) de centro a, é o seguinte:

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

em que os coeficientes são dados pela fórmula geral

$$(4) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(t)(t-a)^{-n-1}dt$$

sendo a integral estendida ao círculo esterno para n positivo ou nulo, e ao círculo interno para n negativo. Evidentemente, se dentro do círculo interno a função é regular, os coeficientes com índices negativos se anulam e obtemos a série de Taylor.

Com a demonstração de possibilidade do desenvolvimento de Taylor, isto é, de que uma função regular em um círculo de centro a no plano pode sempre ser representada por uma série de potências de z-a, a qual por outro lado é sempre totalmente convergente em todo conjunto fechado interno ao seu círculo de convergência, chega-se á identidade entre os conceitos de função analítica localmente segundo Cauchy e segundo Weierstrass; assim, pode-se definir como função analítica em um ponto <u>a</u> toda função f(z) que em um entorno desse ponto seja representável por uma série de potências de z-a, de raio de convergência diferente de zero. Este modo de definir função analítica tem grandes vantágens pelo seu caráter mais elementar e algébrico; estende-se este conceito ao ponto do infinito, dizendo-se que uma função f(z) é analítica neste ponto quando é representável por uma série de potências de 1/z, convergente para algum valor finito de z.

§ 4. FÓRMULA DE CAUCHY MODIFICADA.

A fórmula fundamental de Cauchy é válida, nas condições enunciadas, para qualquer região plana. As suas aplicações são variadíssimas e se estendem de muitas maneiras quando se consideram regiões infinitas, e portanto quando se faz variar o caminho de integração, fazendo por exemplo uma parte tender para o infinito. A grande maioria dos exemplos de cálculo de integrais por meio de resíduos está cheia desses processos.

Mas querendo fazer o estudo sistemático das funções analíticas sobre a esfera, essa fórmula tem uma desvantagem: a não ser que a função f(z) se anule no infinito, não é indiferente que o contorno C envolva ou não este ponto. Para obviar este inconveniente, vamos fazer uma pequena modificação nessa fórmula; chamemos λ um parâmetro, para o qual mantemos sempre a convenção: o seu ponto representativo está fóra da curva C, isto é, na região que fica á direita desta curva. Neste caso, a função $1/(t-\lambda)$ é sempre regular na região envolvida por C; por um teorema do cálculo de resíduos, sabemos então que multiplicando a função integranda em (1), § 3º, por essa função, o resultado da integração fica tambem multiplicado por $1/(z-\lambda)$, isto é, temos

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,\frac{z-\lambda}{(t-\lambda)(t-z)}\,dt\ ;$$

esta fórmula vale nas mesmas condições que a fórmula de Cauchy, sendo de notar que o segundo membro é independente de λ desde que este ponto esteja fora de C, não importando agora a posição do infinito em relação a esta curva, uma vez que este seja um ponto regular para f(z). Com efeito, se nesta fórmula supomos finitos o ponto z e a curva C e fazemos $\lambda \to \infty$, como o factor $(z-\lambda)/(t-\lambda)$ tende uniformemente a 1, a fórmula se reduz á fórmula de Cauchy. Se λ e z são finitos e f(z) é regular no infinito, sendo a função integranda infinitésima de 2a. ordem para $t \to \infty$, o resíduo no infinito é zero, e o resultado é o mesmo, quer a curva C envolva o infinito ou não. Emfim, se a curva C envolve o infinito, vê-se, fazendo $z \to \infty$, que o segundo membro se reduz a

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - \lambda} dt$$

que é o resíduo de $-f(t)/t$ no infinito, igual a $f(\infty)$.

A fórmula escrita pode ainda ser posta sob a forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \left\{ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\lambda} \right\} dt$$

Desta fórmula se deduzem, derivando sucessivamente, as mesmas fórmulas de Cauchy para as derivadas (2). Nestas, com efeito, sendo o denominador infinito de ordem ≥ 2 para $n \geq 1$ no ponto do infinito, onde a função f(z) é suposta regular, é indiferente que a curva envolva ou não esse ponto, ou mesmo que passe por ele, pois a integral existirá certamente como integral imprópria.

§ 5º - PROLONGAMENTO DE UMA FUNÇÃO.

Um dos teoremas fundamentais sobre funções analíticas, que se deduz de uma propriedade elementar das séries de potências, é o seguinte: "<u>Se duas funções analíticas $f_1(z)$ e $f_2(z)$, definidas na mesma região R, coincidem em todos os pontos de um</u>

conjunto infinito e fechado contido nessa região, elas coincidem em todos os pontos de R. " Este teorema pode-se considerar como correspondente ao teorema de Cauchy já citado, pelo qual duas funções analíticas em uma região R e contínuas sobre o contorno de R (suposto regular) que coincidam sobre esse contorno, coincidem em todos os pontos de R.

O teorema enunciado acima é o ponto de partida para o conceito de prolongamento de uma função. Note-se que tomamos aqui o conceito de região do modo mais geral, podendo ser um conjunto não conexo e mesmo com uma infinidade de componentes. Diz-se que uma função $f_1(z)$, definida monódroma e analítica em uma região R_1, é prolongamento de uma função analítica $f(z)$, definida em uma região R, quando R_1 contem R sem coincidir com esta, e nos pontos de R, $f_1(z)$ coincide com $f(z)$.

Pelo teorema anterior, o prolongamento de $f(z)$ está univocamente definido, se existe, em todas as componentes de R_1 que contenham pontos de R. A noção de prolongamento de uma função traz em si porem complicações muito grandes, que derivam da possibilidade da região R_1 se recobrir em parte, de modo que nas partes recobertas, os valores da função $f_1(z)$ provindos de dois trechos distintos de R não coincidam. Este fenômeno dá origem á consideração de regiões de Riemann, que se obtêm de um prolongamento considerando como distintos os trechos de R_1 em que os valores da função não coincidam, ou só coincidam em pontos isolados, ou identificando-os, em cada ponto no entorno do qual esses valores coincidam completamente.

Deixemos de lado esses casos; salvo aviso em contrário, portanto, quando falarmos do prolongamento de uma função $f(z)$ suporemos sempre que tanto a região R como a região R_1 sejam regiões da esfera complexa nas quais só se consideram funções monódromas.

§ 6. FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS. VARIEDADE DE SEGRE.

Para representar geometricamente os pares de variáveis complexas (z_1,z_2), a primeira ideia que se apresenta é a representação por pares de pontos, cada um no plano de Argand-Gauss da variável correspondente ("). Chamar-se-á então entorno (r_1,r_2) de um ponto $(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$, sendo r_1 e r_2 números reais positivos, o conjunto dos pares (z_1,z_2), em que z_1 está no entorno (r_1) de $\bar{z}_1$ e z_2 no entorno (r_2) de $\bar{z}_2$; desta maneira se obtem um espaço de entornos que é topologicamente equivalente ao espaço ($\wp$) dos pares (z_1,z_2) em que a distância de dois pontos (z_1',z_2') e (z_1'',z_2'') é definida como $|z_1'-z_1''| + |z_2'-z_2''|$; este por sua vez é equivalente ao espaço numérico euclideano S_4, em que cada ponto é o grupo de quatro números reais (x_1,y_1,x_2,y_2) $(z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2)$, sendo a distância de dois pontos (x_1',y_1',x_2',y_2') e $(x_1'',y_1'',x_2'',y_2'')$ definida como a distância espacial

$$\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(y_1'-y_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+(y_2'-y_2'')^2}.$$

Neste espaço os entornos (r_1,r_2) definidos acima têm o nome de <u>bicilindros</u>. Para se obter desse espaço um espaço compacto (§2, def. 2) é preciso introduzir os elementos impróprios. Adotaremos aqui o ponto de vista de Severi, que introduz esses elementos pela consideração do grupo projectivo no plano complexo. Neste, como se sabe, define-se como ponto impróprio de uma recta qualquer de equação

$$(1) \qquad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 = 0$$

a sua direção, que é comum a todas as rectas paralelas, e que depende de um único parâmetro complexo $\lambda = \alpha_1/\alpha_2$, incluindo o valor $\lambda = \infty$; logo, o conjunto dos pontos impróprios do plano complexo pode ser considerado como uma recta, que se chama a recta imprópria desse plano. O conjunto dos pontos próprios e impróprios chama-se o plano <u>projectivo complexo</u>. Com uma projectividade, que é uma transformação invertível da forma

$$(2) \qquad z_1' = \frac{az_1+bz_2+c}{a''z_1+b''z_2+c''} \qquad z_2' = \frac{a'z_1+b'z_2+c'}{a''z_1+b''z_2+c''}$$

(") v. p. ex. Goursat, Cours d'Analyse, t.II, cap. XVII.

é sempre possível transformar qualquer ponto impróprio em um ponto próprio. Dada uma transformação particular, define-se então o entorno de um ponto impróprio como o conjunto dos pontos próprios ou impróprios que na transformação dada correspondem aos pontos de um bicilindro com centro no ponto transformado. Desta maneira se introduz no plano projectivo complexo um sistema de entornos que define um espaço compacto conexo, para o qual valem todas as definições de conjuntos,pontos internos, região, contorno, domínio, etc., dadas para a esfera. Demonstra-se tambem que é possível construir num espaço euclideano S_8 uma variedade limitada, de 4 dimensões, homeomorfa a esse espaço; essa variedade chama-se variedade de Segre do plano complexo, e é em geral designada pela notação VS_2, e as imagens dos bicilindros e seus transformados, definidos acima, definem o mesmo espaço topológico Π_2 que o que se obtem por meio da distância espacial no S_8, de dois pontos quaisquer sobre essa variedade.

Essas considerações se estendem ao espaço complexo dos sistemas de valores $(z_1, z_2, \dots z_n)$,,que suporemos sempre ampliado com os elementos impróprios de modo a formar o espaço projectivo complexo de n dimensões. Demonstra-se que esse espaço pode ser representado sobre uma conveniente variedade de Segre VS_n, de 2n dimensões reais, e a topologia sobre essa variedade é definida pela noção de distância espacial no espaço em que ela está imersa.

Uma função de duas variáveis definida em uma região R do espaço Π_2 é analítica em um ponto finito dessa região,quando existem as duas derivadas parciais $f'_{z_1}(z_1, z_2)$ e $f'_{z_2}(z_1, z_2)$; é analítica em um ponto impróprio, quando por uma transformação projectiva que transforme este ponto em um ponto próprio, se obtem uma função analítica neste último ponto; e é analítica em uma região R, quando é analítica em cada ponto de R. Demonstra-se que uma função analítica em uma região R é contínua nessa região (e não sómente contínua em relação a cada uma das variáveis) e que em cada ponto finito z_1, z_2 é representável pela fórmula de Cauchy generalizada

$$(3) \qquad f(z_1,z_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 \frac{f(t_1,t_2)}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}$$

em que C_1 e C_2 são curvas fechadas traçadas nos planos das duas variáveis, e envolvendo, respectivamente, os pontos z_1 e z_2. Desta fórmula se deduzem consequências análogas ás do caso de uma variável: existência das derivadas sucessivas e possibilidade do desenvolvimento em série dupla de potências no entorno de cada ponto z_{1o}, z_{2o}:

$$(4) \qquad f(z_1,z_2) = \sum_{o}^{\infty}{}_{mn}\, a_{mn}(z_1-z_{1o})^m(z_2-z_{2o})^n \,.$$

A fórmula (3) acima se pode considerar como uma integral de superfície estendida a uma superfície do S_4 produto topológico das suas projecções C_1 e C_2 sobre os planos das variáveis; essa fórmula admite uma generalização devida a Martinelli (1), que demonstrou que se pode substituir essa superfície por uma mais geral, homeomorfa à superfície de um toro, mas contida sempre no contorno Δ de uma quadricela (") convexa que envolve o ponto z_1, z_2, desde que essa superfície seja concatenada com as duas curvas fechadas situadas sobre Δ e sobre os planos paralelos aos planos coordenados x_1, y_1 e x_2, y_2 respectivamente, passando pelo ponto z_1, z_2.

(") Chama-se assim qualquer domínio do S_4 que seja homeomorfo ao conjunto de pontos internos e sobre a superfície de uma esfera desse espaço; por exemplo, um bicilindro fechado, isto é, ampliado com os pontos do contorno, é uma quadricela.

CAP. II - ESPAÇO FUNCIONAL ANALITICO

§ 1. PONTOS. PONTOS DISTINTOS E ESSENCIALMENTE DISTINTOS.

Estendemo-nos nas considerações sobre funções analíticas afim de definir exactamente o que entendemos por espaço funcional analítico. Segundo os trabalhos mais recentes do prof. Fantappiè, esse espaço é constituido pelas funções analíticas localmente em regiões da esfera complexa, considerando porem como regular no infinito, sómente as funções regulares e monodromas em um entorno desse ponto e que se anulam no mesmo. A definição desse espaço é completada com a definição de entorno de um ponto, para a qual, em uma nota publicada pela Academia dei Lincei (2) propuz uma modificação que foi aceita pelo mesmo professor.

Com a finalidade de pôr em relevo todos os elementos que entram em jogo em cada função, e tendo em vista uma condição que se impõe naturalmente para o valor de um funcional correspondente a uma função que seja prolongamento de outra, vamos propôr aqui mais uma pequena modificação nesse conceito de espaço funcional.

Chamaremos <u>ponto</u> do espaço funcional analítico, o conjunto das funções f(z) analíticas em uma região R da esfera e que coincidem em todos os pontos dessa região. Um ponto está assim perfeitamente determinado quando é dada a região R e uma função f(z) analítica em R; por estão razão designaremos esse ponto com o símbolo (f,R), em que a função f pode ser substituida por qualquer dos seus prolongamentos ou por qualquer função analítica em R, de que f(z) seja prolongamento. Quando houver perigo de ambiguidade, chamaremos um tal ponto de <u>ponto-função</u>.

Diremos que um ponto (f,R) está <u>contido</u> no ponto (g,S), quando toda função f é prolongamento de alguma das funções g; para isto é necessário, evidentemente, que a região R contenha a região S e que nesta última se tenha f(z) = g(z); diremos tambem, neste caso, que o ponto (g,S) <u>contem</u> o ponto (f,R). É claro que dados dois pontos, se cada um deles está contido no outro, esses pontos coincidem.

Dois pontos dos quais nenhum está contido no outro, dizem se distintos (para pontos que não coincidam, simplesmente, empregaremos sempre a locução - não coincidentes). Diremos ainda que dois pontos (f,R) e (g,S) são essencialmente distintos, quando as regiões R e S têm uma parte comum não vazia H, e os pontos de H em que as funções f e g coincidem, quando existem, são pontos isolados, o que equivale a dizer que essas funções não coincidem em nenhuma componente de H. Dois pontos essencialmente distintos não podem conter nem estar contidos em um mesmo ponto.

§ 2. ENTORNOS. POSTULADOS DE HAUSDORFF.

Chamaremos entorno linear (T), ou simplesmente entorno (T) de um ponto (f,R), em que T é um domínio não vazio contido em R, o conjunto dos pontos (g,S), em que S contem T. Em minha nota (2) introduzi essa definição para funções analíticas de n variáveis, e impondo apenas que T seja um conjunto fechado não vazio; os estudos posteriores, principalmente aqueles em que intervem a noção de convergência, mostraram a necessidade de exigir que esse conjunto tenha pontos internos, o que se consegue, sem sacrificar a generalidade, exigindo que seja um domínio.

Na mesma nota mostrei tambem que os entornos lineares satisfazem aos tres primeiros postulados de Hausdorff, que se podem enunciar como segue, pois as demonstrações dadas naquela nota se aplicam perfeitamente aos novos conceitos de ponto função e de entorno no espaço funcional analítico. :

A) Todo ponto (f,R) possue um entorno (T) que o contem.

B) A intersecção de dois entornos de um mesmo ponto contem um entorno desse ponto (no nosso caso a própria intersecção é um entorno desse ponto).

C) Se um ponto (f,R) pertence ao entorno (T) de um ponto (g,S), (T interno a R e a S) existe um entorno de (f,R) contido nesse entorno (T) (pois o próprio entorno (T) satisfaz a essa condição).

A consideração dos entornos lineares é essencial para a teoria dos funcionais analíticos lineares, mas não basta para o estabelecimento dos conceitos de continuidade e de convergência no espaço funcional. Para isto é preciso ainda introduzir o entorno restrito (T,σ) (σ real e >0) de um ponto (f,R). Chama-se assim o conjunto dos pontos (g,S) contidos no entorno linear (T) de (f,R), que nos pontos do domínio T satisfazem á desigualdade

$$|g - f| < \sigma;$$

em virtude do teorema do máximo módulo, a desigualdade anterior está satisfeita em todo o domínio T desde que esteja satisfeita no contorno. É evidente que a condição necessária e suficiente para que o entorno (T',σ') de um ponto (f,R) esteja contido no entorno (T,σ) do mesmo ponto é que se tenha

$$T' \geqq T \qquad \text{e} \qquad \sigma' \leq \sigma.$$

Estes entornos assim definidos satisfazem tambem aos tres postulados de Hausdorff, enunciados atrás; com efeito, o primeiro desses postulados é evidente, pois qualquer região contem um domínio; para o segundo, notemos que, dados os entornos (T,σ) e (T', σ') do mesmo ponto (f,R), chamando $\bar{\sigma}$ o menor dos dois números σ e σ' e $\bar{T}$ a reunião dos dois domínios T e T', o entorno $(\bar{T},\bar{\sigma})$ de (f,R) está contido em cada um dos entornos anteriores, pois uma função $h(z)$ desse entorno é regular em cada um dos domínios T e T' e satisfaz em cada um deles á condição $|h - f| < \bar{\sigma} \leq \sigma$ ou σ'; finalmente, se (f,R) pertence ao entorno (T,σ) de (g,S), chamando τ o máximo ($< \sigma$) de $|f - g|$ em T, o entorno $(T,\sigma-\tau)$ de (f,R) está todo contido no entorno (T,σ) de (g,S), pois das desigualdades

$$|h - f| < \sigma - \tau \qquad \text{e} \qquad |f - g| \leq \tau$$

satisfeitas em todo o domínio T, segue-se a desigualdade

$$|h - g| < \sigma$$

no mesmo domínio.

Uma das maiores vantagens desta definição de entornos, comparada com a definição primitiva do prof. Fantappiè é a propriedade simétrica: se um ponto (f,R) está no entorno (T, σ) de um ponto (g,S), este está tambem no entorno (T,σ) do primeiro.

§ 3. POSTULADOS DE SEPARAÇÃO.

O prof. Fantappiè (3) demonstrou, para as funções analíticas localmente, que o espaço por elas constituido, segundo a noção de entorno (T,σ) satisfaz ao postulado de separação de Kolmogoroff (chamado "Postulado T_0" por Alexandroff u. Hopf): Dados dois pontos (não coincidentes), ao menos um deles possue um entorno no qual o outro não está contido. A sua demonstração se adapta facilmente aos novos conceitos de ponto e entorno: com efeito, sejam (f,R) e (g,S) os dois pontos; se as regiões R e S não coincidem, e se R, por exemplo, tem um ponto P não contido em S, qualquer domínio T que contenha P e esteja contido em R define um entorno linear (T) de (f,R) que não contem o segundo ponto; este, portanto, com maior razão, não poderá estar contido em nenhum entorno (T,σ) do primeiro; se as regiões R e S coincidem, para que os pontos não coincidam é necessário que haja um ponto z dessa região no qual se tenha $f(z) \neq g(z)$, e neste caso, sendo σ o módulo da diferença f - g nesse ponto, e T um domínio contido em R e que contenha z, o entorno (T,σ) de cada um dos pontos dados não contem o outro ponto.

Dessa demonstração tambem se conclue que para cada par de pontos "distintos" se pode enunciar o postulado de separação de Fréchet (postulado T_1, segundo Alexandroff): dados dois pontos distintos, cada um deles tem um entorno que não contem o outro ponto. Emfim, se os pontos são "essencialmente distintos", vale para esses pontos o postulado de separação de Hausdorff (postulado T_2): Dois pontos essencialmente distintos têm entornos separados. Basta, com efeito, tomar um domínio T contido na parte comum ás duas regiões e considerar o entorno (T,σ) de (f,R) e o entorno (T,σ) de (g,S), em que 2σ é o máximo (postitivo) de $2|f - g|$ em T. Se uma função h(z) estivesse contida nesses dois entornos ao mesmo tempo, teríamos em todos os pontos de T,

$$|f - h| < \sigma \quad e \quad |g - h| < \sigma$$

donde se deduziria $|f - g| < 2\sigma$, contra a hipótese.

§ 4. PONTO INTERNO. REGIÃO FUNCIONAL E CONJUNTO FECHADO.

Chama-se ponto interno de um cojuhto M do espaço funcional analítico, um ponto (f,R) de M, do qual existe um entorno todo contido em M. Um conjunto constituido de pontos internos chama-se uma <u>região funcional</u>. Um exemplo de região funcional é um entorno qualquer, seja linear, seja retrito, de um ponto (f,R), pois como já vimos, esses entornos satisfazem ao postulado C. de Hausdorff. É evidente que o espaço funcional analitico é uma região funcional; admite-se tambem que o conjunto vazio é uma região funciional. Se um ponto-função (f,R) pertence a uma região funcional, todos os pontos nele contidos estão na mesma região.

Uma região funcional R se diz conexa, quando dados dois pontos (f,R) e (g,S) de R pode-se achar um número finito de pontos de R, $(f_0,R_0) = (f,R)$, (f_1,R_1), ... $(f_n,R_n) = (g,S)$ tais que cada ponto (f_i,R_i) $(i=1,...n)$ esteja em um entorno do ponto precedente (f_{i-1},R_{i-1}) todo contido em R. É evidente que o entorno linear ou o entorno restrito de um ponto qualquer são regiões funcionais conexas. Pode-se verificar tambem que o espaço funcional é conexo.

Chama-se <u>região funcional linear</u> um conjunto $\mathcal{H}$ que satisfaz ás duas seguintes condições: 1) dados dois quaisquer dos seus pontos (f,R) e (g,S). a intersecção RS não é vazia e o ponto (f+g,RS) pertence a $\mathcal{H}$ 2) dado um ponto (f,R) de $\mathcal{H}$, existe um entorno linear (T) de (f,R) todo contido nesse conjunto. Em nossa nota (2) demonstrámos (aliás para o caso geral de funções de n variáveis), que sob essas condições, uma região funcional linear pode sempre ser definida como a totalidade dos pontos (f,R) em que R é qualquer região que contenha um certo conjunto fechado não vazio A, chamado <u>conjunto característico</u>

da região.

Chama-se conjunto funcional fechado o complemento de uma região funcional, isto é, um conjunto tal que se um ponto (f,R) não pertence a ele, existe um entorno desse ponto que não contem nenhum ponto do conjunto. Segue-se que se qualquer entorno de um ponto (f,R) contem ao menos um ponto de um conjunto fechado M, esse ponto (f,R) pertence a M. Um conjunto fechado contem com cada ponto todos os pontos em que ele está contido; mas um ponto pode estar contido em um ponto de um conjunto fechado, sem pertencer a este conjunto. Em virtude desta circunstância, aparentemente contraditória, evitaremos sempre o emprego do conceito de conjunto fechado.

§ 5. PONTO DE ACUMULAÇÃO.

A noção de ponto de acumulação já traz maiores dificuldades. Diremos que um ponto (g,S) é de acumulação de um conjunto funcional M, quando qualquer entorno de (g,S) contem ao menos um ponto de M não coincidente com (g,S). Se deixarmos de lado esta última restrição, obtemos a definição de <u>ponto de contacto</u> de um conjunto; o conjunto dos pontos de contacto de um conjunto M chama-se <u>fecho</u> desse conjunto, e é constituido pela reunião do conjunto e de seus pontos de acumulação.

Vejamos algumas consequências dessas definições: se o conjunto é constituido por um único ponto (f,R), qualquer ponto (g,S) que contenha este (§ 1) é ponto de acumulação do conjunto, pois o ponto (f,R) está contido em todo entorno (T, σ) de (g,S). Vê-se assim que não vale aqui a propriedade dos pontos de acumulação dos espaços de Hausdorff, em que qualquer entorno de um ponto de acumulação de um conjunto contem uma infinidade de pontos do conjunto dado; no espaço funcional qualquer conjunto não vazio, mesmo que seja finito, tem pontos de acumulação; sob esse ponto de vista o espaço funcional é compacto, segundo a definição dada no § 2,2, do cap. I. O fecho de um ponto nesse espaço é constituido por este ponto e todos os pontos que o contêm. Vale aqui o seguinte teorema, que é aliás equivalente ao postulado de Kolmogoroff:

"<u>Dois pontos não coincidentes têm fechos não coincidentes</u>".
(V. Alexandroff (I) p. 59)

O conceito dado acima de ponto de acumulação tem o inconveniente de se afastar consideralvemente da intuição, e mesmo da própria significação da palavra "acumulação". Por esta razão, chamaremos <u>ponto de acumulação próprio</u> de um conjunto M, todo ponto (f,R) tal que em um entorno qualquer desse ponto existe ao menos um ponto de M distinto (v. § 1) de (f,R). Os pontos de acumulação que não satisfizerem a esta condição serão chamados pontos de acumulação <u>impróprios</u>. Da definição dada segue-se que em todo entorno (T,σ) de um ponto de acumulação próprio (f,R) de um conjunto M existem infinitos pontos de M; basta para prova-lo, mostrar que dado um ponto (f_1,R_1) contido nesse entorno e distinto de (f,R), existe um outro entorno de (f,R) contido no entorno anterior e que não contem (f_1,R_1); com efeito, da hipótese dos pontos serem distintos segue-se que ou R_1 não contem R e portanto existe um ponto z_0 de R que não pertence a R_1, ou R_1 contem R e em um ponto z_0 de R temos $|f - f_1| = \tau > 0$; em qualquer dos casos existe um domínio U contido em R e que contem o ponto z_0; se no primeiro caso considerarmos o entorno $(T \smile U, \sigma)$ de (f,R) e no segundo caso o entorno $(T \smile U, \tau')$ do mesmo ponto, em que τ' é o menor dos números σ e τ, obtemos sempre um entorno de (f,R) contido no entorno anterior (T,σ) e que não contem o ponto (f_1,R_1). Neste novo entorno haverá por hipótese um ponto (f_2,R_2) de M distinto de (f,R). Aplicando o mesmo raciocínio sucessivamente, vemos que, se no entorno (T,σ) houvesse apenas um número finito de pontos (f_i,R_i) de M distintos de (f,R) chegaríamos a construir um entorno deste ponto que não conteria nenhum ponto de M, contra a hipótese feita.

§ 6. BASE DO ESPAÇO FUNCIONAL.

Vamos mostrar agora uma propriedade importantíssima do espaço funcional, baseando-nos para isso no teorema de Runge (1) sobre aproximação por funções racionais (v. p. ex. Walsh (1). Essa propriedade é dada pelo seguinte teorema: "Existe um conjunto enumerável de regiões R_i tais que os pontos (φ, R_i), em que φ é uma função racional regular em R_i, formam um conjunto denso em todo o espaço funcional". Em outras palavras, todo o ponto (f,R) do espaço funcional é ponto de acumulação de pontos (φ, R_i); o que tambem se pode exprimir dizendo que em qualquer entorno (T, σ) de (f,R) existe ao menos um ponto (φ, R_i) do sistema dado; aliás da nossa demonstração se verá que se trata de ponto de acumulação próprio e que sempre se pode supôr a região R_i contida em R.

Antes de tudo, vamos definir um conjunto enumerável de domínios sobre a esfera complexa, da seguinte maneira:

Fixemos sobre a esfera o equador e ($|z| = 1$) e o meridiano m, imagem do eixo real sobre a esfera; os pontos de interseção desses dois círculos máximos são os pontos 1 e -1. Dividamos tanto o equador como o meridiano em 4n partes iguais (n inteiro), a partir desses dois pontos. Tracemos pelos pontos de divisão de m os círculos paralelos, e sejam c e c' os paralelos mais próximos dos polos (que são a origem e o infinito) cujo raio esférico é $\pi/2n$; tracemos depois pelos pontos de divisão do equador e os arcos de meridianos, limitados pelos círculos c e c'. Desta maneira fica a superfície da esfera decomposta em dois círculos e $8n(n-1)$ figuras esféricas trapezoidais, e o máximo diâmetro de todas essas figuras é sempre, como se vê facilmente, o diâmetro dos círculos, que é menor que π/n. A cada valor de n corresponde assim uma rede de meridianos e paralelos, que designaremos com ρ_n, chamando malhas dessa rede os trapezoides e círculos acima referidos. É claro que para cada valor de n, o número de domínios que se podem obter com a combinação das malhas da rede ρ_n é sempre finito, e portanto, variando n, obtemos um conjunto enumerável de domínios.

Seja agora (f,R) um ponto qualquer do espaço funcional analítico, e (T, σ) um entorno desse ponto, Seja δ a distância (positiva) entre os contornos de T e R. Se tomarmos a rede ρ_n, com $n > \pi/\delta$ e considerarmos o domínio D formado por todas as as malhas dessa rede que têm pontos comuns com T, esse domínio D é certamente interno a R; seu contorno C é regular (Cap.I,§ 2, def.12) e não tem pontos comuns com T. Logo, o valor de f(z) em T é dado pela fórmula de Cauchy modificada (Cap.I,§ 4)

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z-\lambda)\, f(t)}{(t-\lambda)(t-z)}\, dt$$

em que λ é um ponto qualquer esterno a C. Essa integral é, como integral de Riemann, o limite da fração racional

$$(2) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{(z-\lambda)f(t_r)}{(t_r-\lambda)(t_r-z)} \quad (t_r-t_{r-1})$$

em que os t_r são pontos ordenados do contorno C, e o limite é calculado para a máxima corda $|t_r-t_{r-1}|$ tendendo a zero (");
note-se que pela construção da rede $\mathcal{C}_n$ a curva C não pode passar pelo ponto do infinito, e que portanto essa corda pode ser sempre medida no plano. Ora, na função integranda em (1), assim como em cada parcela da soma (2) existe um factor que se pode decompôr como segue:

$$\frac{z-\lambda}{(t-\lambda)(t-z)} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\lambda} \qquad \frac{z-\lambda}{(t_r-\lambda)(t_r-z)} = \frac{1}{t_r-z} - \frac{1}{t_r-\lambda};$$

alem disto temos

$$t_r - t_{r-1} = \int_{t_{r-1}}^{t_r} dt$$

(") Se a curva C se compõe de mais da um contorno, a integral é o limite da soma de um número finito de somatórias análogas a (2), e o raciocínio que se segue não sofre alteração. Se esse contorno tem um ponto duplo, como na figura ao lado, em que está hachuriada a área interna a C, consideraremos sempre o contorno percorrido como o indicam as setas.

onde a integral se pode sempre supôr estendida ao arco da curva C de extremos t_{r-1} e t_r, e como a integral (1) se pode decompôr na soma de integrais estendidas aos mesmos arcos, obtemos, fazendo a diferença,

$$(3) \quad f(z) - \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_r \int_{t_{r-1}}^{t_r} \left\{ \left[\frac{f(t)}{t-z} - \frac{f(t_r)}{t_r - z} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{f(t)}{t-\lambda} - \frac{f(t_r)}{t_r - \lambda} \right] \right\} dt$$

Recordemos que λ é sempre um ponto esterno á curva C, aliás arbitrário, e que podemos portanto supô-lo fóra da região R; em particular, se esta região não contem o infinito, podemos supôr $\lambda = \infty$, com o que se anula a segunda diferença no segundo membro de (3). Suponhamos primeiramente que seja este o caso e que portanto o domínio T, contido em R, seja finito. Então, a função $f(t)/(t-z)$ será uma função contínua de t e de z, para t em C e z em T, e sendo fechado esse seu campo de definição, ela é uniformemente contínua; logo, chamando $2\pi L$ o comprimento de C, ao número $\sigma > 0$ podemos fazer corresponder um número $\mu > 0$ tal que se a máxima corda $|t_r - t_{r-1}|$ fôr menor que μ, temos, qualquer que seja z em T, (")

$$\left| \frac{f(t)}{t-z} - \frac{f(t_r)}{t_r - z} \right| < \frac{\sigma}{L}$$

para todo ponto t do arco $\widehat{t_{r-1}\, t_r}$; da fórmula (3) se deduz então, sempre para $\lambda = \infty$,

$$|f(z) - \varphi(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi L \cdot \frac{\sigma}{L} = \sigma.$$

Se λ é finito, o mesmo raciocínio mostra que se pode obter uma igualdade semelhante para a segunda diferença no 2º membro de (3). e obtem-se o mesmo resultado substituindo σ por $\sigma/2$; Emfim, se T contem o infinito, podemos primeiramente separar um domínio T' contido em T e que contenha esse ponto.

(") é claro que se tomarmos μ menor que a distancia de dois vértices quaisquer da rede ρ_n, para qualquer ponto t do arco $\widehat{t_{r-1}t_r}$ temos $|t - t_r| < \mu$.

Esse domínio pode ser tal que para qualquer dos seus pontos z e qualquer valor de t em C se tenha

$$\left|\frac{f(t)}{t-z}\right| = \left|\frac{1}{z}\cdot\frac{f(t)}{\frac{t}{z}-1}\right| < \frac{\sigma}{4L},$$

pois o segundo factor no 2º membro é limitado. Segue-se daqui, para todo ponto z de T',

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_r \int_{t_{r-1}}^{t_r}\left\{\frac{f(t)}{t-z} - \frac{f(t_r)}{t_r - z}\right\} dt\right| < \frac{\sigma}{2};$$

para z no domínio finito T", fecho do conjunto T-T', podemos raciocinar como acima, e levando em conta a 2a. diferença em (3), obtemos em qualquer caso uma função racional $\varphi(z)$ regular na região R' interna à curva C, pois todos os seus polos estão sobre esta curva, e tal que em todo o domínio T, que é interno a esta região, temos

$$(4) \qquad |\varphi(z) - f(z)| < \sigma$$

o que prova que $\varphi(z)$ está no entorno (T,σ) de ponto (f,R).

Deste teorema se deduz a consequência importante de ser o espaço funcional analítico um espaço separável, isto é, fecho de um conjunto enumerável de pontos do mesmo espaço. Basta notar, em proseguimento à demonstração anterior, que para z em T a função $\varphi(z)$ é uniformente contínua em relação a λ, $t_1, \ldots t_n$, $f(t_1), \ldots f(t_n)$, cada uma destas quantidades variando em um entorno fechado de um ponto em que a função correspondente satisfaça á desigualdade (4); é possível portanto substituir todos esses parâmetros por números racionais, e por conseguinte a fracção $\varphi(z)$ por uma fração racional de coeficientes inteiros

$$\psi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

de tal modo que ainda seja satisfeita em T a desigualdade

$$|\psi(z) - f(z)| < \sigma.$$

Ora, essas frações com coeficientes inteiros formam certamente um conjunto enumerável, logo é tambem enumerável o conjunto dos pontos (ψ, R_i), em que R_i são regiões tiradas das redes ρ_n.

§ 7. CONVERGENCIA NO ESPAÇO FUNCIONAL.

Vamos definir dois tipos de convergência no espaço funcional: a convergência em sentido lato e a convergência em sentido restrito. A distinção, como se verá, é mais de carácter teórico, pois nas aplicações ambos os tipos conduzem aos mesmos resultados. A existência desses dois tipos depende essencialmente da existência de pontos contidos em outros, e da impossibilidade de separar esses pontos por meio de entornos.

A convergência em sentido lato é a convergência comum definida por entornos: dada uma sucessão de pontos

(1) $\qquad (f_1, R_1), (f_2, R_2), \ldots (f_n, R_n), \ldots$

do espaço funcional analítico, diremos que ela converge em sentido lato para o ponto (f, R), que é chamado ponto limite da sucessão, quando, dado o entorno arbitrário (T, σ) desse ponto, os pontos da sucessão, a partir de um certo índice n_o pertencem a esse entorno. Isto equivale a dizer que dado qualquer domínio T contido em R, existe um índice p tal que a sucessão de funções $f_p(z)$, $f_{p+1}(z), \ldots$ é uniformemente convergente em T, e tem por limite a função $f(z)$. Desta maneira,porem, não se obtem a unicidade do limite, pois pela mesma definição a sucessão dada converge tambem a qualquer ponto (f, S) que contenha o ponto (f, R), isto é, no qual seja $S \subset R$. Diremos então que a sucessão (1) converge em sentido restrito ao ponto (f, R), quando ela converge a esse ponto em sentido lato, mas de tal maneira que qualquer outro ponto para o qual esse mesma sucessão seja convergente, contenha o ponto (f, R). É claro que de toda sucessão (1) convergente em sentido lato a um ponto (f, R) se pode deduzir uma sucessão convergente em sentido restrito ao mesmo ponto, substituindo cada região R_n pela sua interseção com R.

Dada uma sucessão (1) convergente no sentido lato a um dado ponto (f, R), pode-se, sob uma hipótese suplementar que daremos adiante, afirmar a existência de um ponto (g, S), conti do no anterior, para o qual a sucessão (1) converge em sentido restrito.

Primeiro que tudo, vamos definir o <u>limite</u> <u>interior</u> da sucessão de regiões R_n; consideremos os conjuntos

$$K_1 = R_1R_2R_3\ldots \quad K_2 = R_2R_3\ldots \quad \ldots \quad K_n = R_nR_{n+1}\ldots \quad \ldots$$

e chamemos $\overline{K}_n$ a região formada pelos pontos internos ao conjunto K_n. Chamaremos <u>limite</u> <u>interior</u> (") da sucessão de regiões R_n, a reunião dessas regiões $\overline{K}_n$:

$$\overline{R} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \ldots$$

que é tambem uma região. Cada ponto P de $\overline{R}$ é interno ao conjunto K_P dos pontos comuns ás regiões R_n, para n maior que um certo índice n_P, e portanto existe um entorno de P contido em K_P, isto é, em todas essas regiões. Dado então um conjunto fechado qualquer H contido em $\overline{R}$, segue-se do teorema de Borel-Lebesgue que existe um número finito de entornos com centros em pontos $P_1, P_2, \ldots P_h$ de H, que cobrem H e tais que cada um desses entornos está contido em todas as regiões R_n, a partir de um certo índice. Tomando o maior, N, desses índices, vê-se que o conjunto H é interno ao conjunto K_N. Quando se conhece uma região R' tal que que o desvio entre os complementos de R_n e R' tende a zero para $n \to \infty$, é facil ver que temos $\overline{R} = R'$.

Dado um ponto P qualquer da região R e um entorno fechado de P contido em R, pela hipótese primitiva da convergência da sucessão (1) ao ponto (f,R) existe um número n'_P tal que todas as regiões R_n com $n > n'_P$ contêm esse entorno fechado donde se deduz que P é interno a $\overline{R}$, logo, esta região contem toda a região R.

A hipótese que nos faltava era a seguinte: suponhamos que para todo domínio U contido em $\overline{R}$, as funções f_n que são regulares em U sejam limitadas no seu conjunto, isto é, que exista um número positivo M_U tal que em todos os pontos de U e para todas as funções f_n regulares em U, se tenha

(") não se deve confundir este conjunto com o limite inferior, definido por de La Vallée Poussin (1),p.8 (plus petite limite).

$$|f_n(z)| < M_U.$$

Sejam agora $\bar{R}'$, $\bar{R}''$ ... as cómponentes de $\bar{R}$. Podemos considerar o comportamento da sucessão $f_1, f_2, \ldots$ em cada uma dessas componentes, $\bar{R}^{(q)}$, e obtemos então sómente duas alternativas: A) existe um conjunto C, contido em $\bar{R}^{(q)}$, que contem um seu ponto de acumulação Q nessa região, tal que a sucessão $f_n, f_{n+1}, \ldots$ obtida excluindo de (1) um número finito conveniente de termos, é convergente em todos os pontos do conjunto C. Neste caso, dado qualquer domínio T contido na região $\bar{R}^{(q)}$, podemos ligar esse domínio ao ponto Q e construir um outro domínio T' conexo, contendo T e ao qual Q é interno; esse domínio T' está, pelo que vimos acima, contido em todas as regiões R_n, para n maior que um certo índice n'. Aplicando então o teorema de Vitali (") deduzimos que essa sucessão converge uniformemente no domínio T', e por conseguinte no domínio T, que é arbitrário dentro da região $\bar{R}^{(q)}$; daqui se deduz a segunda alternativa: B) a sucessão (1) não converge em nenhum domínio contido em $\bar{R}^{(q)}$, e para isso é preciso que os pontos dessa região em que eventualmente converge essa sucessão sejam pontos isolados, isto é, formem um conjunto discreto.

Em particular, em todas as componentes de $\bar{R}$ que contêm pontos da região R, só se pode apresentar a primeira alternativa A). Chamemos S a soma de todas as componentes de $\bar{R}$ em que se apresente esta alternativa, e g(z) a função analítica em cada ponto de S, limite da sucessão $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$ ou de qualquer sucessão que desta se obtem suprimindo alguns termos iniciais. Do que precede se conclue que a sucessão (1) converge ao ponto (g,S), e que se ela converge tambem a um outro ponto (f,R), a região R está forçosamente contida em S e nos pontos de R, pela unicidade do limite, as funções f e g coincidem; isto porem equivale a dizer que o ponto (g,S) está contido no ponto (f,R), donde se deduz, conforme tínhamos anunciado, que a sucessão (1) converge ao ponto (g,S) em sentido restrito. Esta conclusão se estende, pela aplicação das teorias de Montel, a toda sucessão (1) em que as funções $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$ fazem

(") Cf. Montel, (1), p. 30.

parte de uma familia normal ou quasi normal de funções analíticas na região S. Deixo de insistir nesta parte, por não ter tido tempo de examinar com cuidado as aplicações dessa teoria, ao estudo do espaço funcional que acredito sejam bastante interessantes.

Podemos tambem definir o conceito de convergência de entornos de um ponto para esse ponto, conceito que é de grande utilidade em todos os espaços que não são distanciados.

Seja (f,R) um ponto de espaço funcional analítico, e chamemos I o complemento de R na esfera complexa. Dado um entorno (T,σ) desse ponto, podemos considerar o desvio $\delta (>0)$ entre os contornos de T e de R. Sendo esses contornos fechados, esse desvio é a distância de um ponto de contorno de T a um ponto do contorno de R ou de I (pois esses conjuntos, sendo complementares, têm o mesmo contorno); todo ponto da região R que esteja a uma distância maior que δ do conjunto I, pertence a T.

Dizemos que uma sucessão de entornos de (f,R),

$$(T_1,\sigma_1),\ (T_2,\sigma_2),\ \dots\ (T_n,\sigma_n),\ \dots$$

tende ou converge a esse ponto, quando, chamando δ_n o desvio entre os contornos de T_n e R, tivermos $\lim \delta_n = \lim \sigma_n = 0$, para $n \to \infty$. Neste caso, se em cada entorno (T_n,σ_n) fôr conhecido um ponto (f_n,R_n), a sucessão desses pontos converge evidentemente (em sentido lato) a (f,R). A convergência será em sentido restrito se substituirmos cada região R_n pela sua interseção com R.

§ 8. LINHAS E VARIEDADES ANALÍTICAS.

Entre os conjuntos particulares do espaço funcional, analítico, estes que vamos definir agora têm uma importância excepcional pelas suas aplicações.

Suponhamos que a cada valor α de um parâmetro variável em uma região Ω de uma esfera complexa, corresponda um ponto $(f(z,\alpha),R(\alpha))$ de tal maneira que: 1) a região $R(\alpha)$ varie com continuidade em relação a α (cf. pg. 11); 2) sendo α_0 um ponto qualquer de Ω, para cada ponto z de $R(\alpha_0)$, $f(z,\alpha)$ seja uma função analítica de α em um entorno de α_0. Esta última condição pode ser imposta porque, devido á continuidade de $R(\alpha)$, é possível achar um entorno E de α_0, contido em Ω tal que para todo α de E, a região $R(\alpha)$ correspondente ainda contenha o ponto z ("). Em particular, dadas duas funções f(z) e g(z) regulares respectivamente em duas regiões R e S com uma intersecção não vazia U, em que essas funções não sejam idênticas, a expressão

$$f(z) + \alpha\{g(z) - f(z)\}$$

que é definida para todo α finito, define uma linha analítica dos pontos $(f+\alpha(g-f),U)$, que se chama <u>recta analítica</u>, a qual passa pelos pontos (f,U), para $\alpha = 0$ e (g,U), para $\alpha = 1$; numa recta analítica, a região de definição é sempre constante.

Mais geralmente, suponhamos que a cada ponto $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$ de uma região Ω do espaço projectivo complexo Π_n, que supomos sempre representado sobre a sua correspondente variedade de Segre VS_n, corresponda um ponto $(f(z,\alpha_1,\dots\alpha_n),R(\alpha_1,\dots\alpha_n))$ do espaço funcional analítico, tal que a região $R(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ da esfera complexa da variável z varie com continuidade em relação ao ponto $(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ e $f(z,\alpha_1,\dots\alpha_n)$ seja função analítica de $(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ no entorno de cada ponto da região Ω. O conjunto dos pontos assim obtidos chama-se uma <u>variedade analítica</u> de n dimensões do espaço funcional analítico, desde que os parâmetros sejam essenciais, isto é, desde que não se possa obter o mesmo conjunto de pontos com um número menor de parâmetros. Em particular, dadas as funções f(z), $f_1(z)$, ... $f_n(z)$ definidas e regulares em uma mesma região R, o conjunto dos pontos

$$(f(z)+\alpha_1 f_1(z)+ \dots +\alpha_n f_n(z),R)$$

define uma variedade analítica que se chama espaço linear analítico n-dimensional, contanto que não seja possível reduzir o número de parâmetros.

(") notemos que a condição que $f(z,\alpha)$ seja função analítica de z na região $R(\alpha)$ já está contida implícitamente na definição do ponto (f,R).

Os pontos de uma linha ou variedade analítica variam com continuidade em relação ao parâmetro α ou ao grupo de parâmetros $(\alpha_1,..\alpha_n)$. Isto quer dizer, na linguagem de entornos, que, dado qualquer entorno (T,σ) de um ponto $(f(z,\bar{\alpha}),R(\bar{\alpha}))$, em que $\bar{\alpha}$ é um ponto da região Ω, existe sempre um entorno E de $\bar{\alpha}$, cujos pontos correspondentes estão no entorno (T,σ) dado. Basta-nos limitar a demonstração ao caso de uma linha analítica e de um ponto $\bar{\alpha}$ finito. Chamemos Δ a distância entre T e o complemento de $R(\bar{\alpha})$; podemos então achar um entorno E_1 de $\bar{\alpha}$ tal que para qualquer dos seus pontos α o desvio entre os complementos de $R(\alpha)$ e $R(\bar{\alpha})$ seja menor que Δ, e nestas condições a região $R(\alpha)$ contem T. Fazendo α variar em um entorno fechado E_2 de $\bar{\alpha}$ contido em E_1, e z no domínio T, obtemos um conjunto fechado de pares (z,α) e nesse conjunto a função $f(z,\alpha)$, sendo analítica nas duas variáveis, é uniformemente contínua; existe pois um número $\tau>0$ tal que se z' e z" são pontos de T e α' e α'' pontos de E_2, e se tivermos . . . .
$|z'-z''| + |\alpha'-\alpha''|<\tau$, teremos tambem

$$|f(z',\alpha') - f(z'',\alpha'')|<\sigma;$$

em particular, vale essa desigualdade para $z'=z''=z$ qualquer no domínio T, $\alpha''=\bar{\alpha}$ e $\alpha'=\alpha$ no entorno (τ) de $\bar{\alpha}$, o que demonstra a nossa afirmação. Deduz-se desta propriedade que se uma linha ou variedade analitica tem pontos numa região funcional, o conjunto dos pontos α ou $(\alpha_1,..\alpha_n)$ correspondentes a esses pontos-funções é uma região.

Na linguagem de convergência, temos que qualquer que seja a sucessão convergente de pontos $\alpha_1,\alpha_2,...$ de Ω, cujo limite $\bar{\alpha}$ pertence a esta região, os pontos correspondentes $(f(z,\alpha_n),R(\alpha_n))$ convergem ao ponto $(f(z,\bar{\alpha}),R(\bar{\alpha}))$ em sentido restrito, o que é fácil verificar.

Tanto no caso das linhas analíticas como no das variedades analíticas, chamaremos <u>trecho regular</u> dessa linha ou dessa variedade, o conjunto dos pontos que se obtêm, limitando a variação de α ou de $(\alpha_1,..\alpha_n)$ a um domínio ω contido em Ω, homeomorfo respectivamente a um entorno circular fechado ou a um n-cilindro fechado. É fácil verificar que todo ponto de acu mulação de pontos de um trecho regular de linha ou variedade analítica contem ao menos um ponto desse trecho. Basta considerar o caso de um trecho regular $\mathcal{L}$ de linha analítica $(f(z,\alpha),R(\alpha))$; para um ponto de acumulação impróprio, isto é evidente. Seja pois (g,S) um ponto de acumulação próprio de $\mathcal{L}$, isto é, tal que em qualquer entorno (T,σ) deste ponto exista ao menos um ponto $(f(z,\alpha), R(\alpha))$ desse trecho, distinto de (g,S); neste caso existirão infinitos desses pontos, correspondentes a um conjunto infinito de pontos α de ω. Este conjunto tem um ponto de acumulação $\bar{\alpha}$ em ω, pois este é fechado, e se considerarmos uma sucessão de pontos $\alpha_1,\alpha_2, \dots$ de ω, tendendo a $\bar{\alpha}$, vemos que o ponto $(f(z,\bar{\alpha}),R(\bar{\alpha}))$, limite em sentido restrito da sucessão dos pontos correspondentes a esses valores de α, está contido em todo e qualquer entorno (T,σ) de (g,S), e portanto está contido neste ponto; em outras palavras, $R(\bar{\alpha})$ contem S e nos pontos desta região, $f(z,\bar{\alpha}) = g(z)$.

§ 9. ESTENSÕES DO ESPAÇO FUNCIONAL ANALÍTICO.

O espaço funcional analítico estudado nos parágrafos anteriores, é o que se apresenta naturalmente para o estudo mais geral dos funcionais definidos para funções analíticas de uma variável; a necessidade de limitar rigorosamente a região de definição de cada função analítica nos levou à definição de ponto (f,R) e das tres espécies de relações entre dois pontos não coincidentes: ponto contido em outro, pontos distintos e pontos essencialmente distintos.

Por um processo comum em topologia, chamado relativização, podem-se aplicar os mesmos conceitos topológicos de entorno e de limite de sucessão a certos conjuntos parciais importantes, que ficam assim definidos como outros tantos espaços topológicos. Dentre estes, os mais importantes são as regiões funcionais, e particularmente as regiões funcionais lineares (§ 4), que podem ser definidas como os conjuntos de pontos (f,R), em que R contem um conjunto fechado A. Como esta é a única exigência que se faz para os pontos de uma tal região funcional, e como nas aplicações só interessam os valores de $f(z)$ no conjunto A e nas suas visinhanças imediatas, vemos que a região

R se pode sempre restringir arbitráriamente, e que se pode definir uma região funcional linear simplesmente como o conjunto das funções analíticas regulares no conjunto característico A. Se este conjunto é um domínio, ou mais geralmente, se A tem pontos internos, chamando S a região constituida por esses pontos, vemos que a região funcional linear dada está incluida em outro conjunto importante, que é o das funções regulares na região S. Em geral é este o conjunto estudado por vários autores, inclusive Montel, no seu livro sobre as familias normais.

Esses dois sub-espaços têm uma grande importância pelo facto de serem espaços topológicos vetoriais, com multiplicadores do campo complexo; isto quer dizer que dados dois pontos quaisquer f e g de um desses espaços e um número complexo α, estão no mesmo espaço a soma $f+g$ e o produto αf, essas duas operações satisfazendo ás propriedades elementares da álgebra. No caso das regiões funcionais lineares, quando o conjunto caraterístico A é um domínio, ou mais geralmente um conjunto fechado sem pontos isolados (e portanto perfeito), pode-se ainda introduzir o conceito de distância de dois pontos f e g, como sendo o máximo de $|f-g|$ em A. Essa distância permite definir a convergência de sucessões, e é facil ver que quando uma sucessão $f_1, f_2, \ldots$ de pontos desse espaço têm um limite que pertence ao mesmo, esse limite é único, no sentido de que dois pontos quaisquer para os quais a sucessão seja convergente (em sentido lato) estão contidos em outro ponto do mesmo espaço, que goza da mesma propriedade.

A consideração de sucessões de pontos no espaço funcional pode conduzir a uma estensão desse espaço, incluindo-se por exemplo todas as funções contínuas em conjuntos lineares, ou mesmo as funções de todas as classes de Baire. Basta lembrar que segundo o célebre teorema de Weierstrass, toda função contínua em um intervalo real $a \vdash\!\dashv b$ pode ser arbitrariamente aproximada por polinômios, e portanto é o limite de uma sucessão de funções da região funcional linear cujo conjunto característico é o segmento $a \vdash\!\dashv b$ sobre o eixo real. A convergência é uniforme sobre esse conjunto caracteristico, mas quando se trata de uma função contínua não analítica, essa convergência não pode ser uniforme em nenhum domínio contendo esse conjunto internamente; aliás, pelo teorema de Vitali se vê que os termos dessa sucessão tambem não podem ser igualmente limitados em nenhum desses domínios.

As funções reais definidas em um intervalo $a \vdash\!\dashv b$, que não sendo contínuas são limites de sucessões de funções contínuas, formam a primeira classe de funções de Baire. Os limites de sucessões de funções de 1a. classe, que não pertencem a esta classe formam a 2a. classe, e assim por diante, Vemos que todas essas funções são atingíveis por processos de limites, a partir de pontos do espaço funcional analítico. Podemos introduzir a noção de ponto $(f, a \vdash\!\dashv b)$ para as funções definidas no intervalo real $a \vdash\!\dashv b$, e que estejam em uma dessas classes. Tais pontos estão por assim dizer intercalados no espaço funcional analítico, e a sua introdução se pode comparar com a dos números irracionais, que se intercalam no campo dos números racionais.

Quando se consideram funções de duas ou mais variáveis, os conceitos de ponto, ponto distinto e ponto essencialmente distinto são os mesmos que demos atrás, definindo-se porem as regiões R sobre a variedade de Segre correspondente. Estendem-se tambem ao espaço funcional analítico das funções de um número qualquer de variáveis os conceitos de entorno e região, com as mesmas propriedades expostas atrás. Em particular, para regiões funcionais lineares, a demonstração contida em nossa nota (2) de que uma tal região é sempre o conjunto das funções regulares em um conjunto fechado A se refere justamente a esse caso geral. Mas neste caso, ao contrário do que acontece para as funções de uma variável, nem todos os conjuntos fechados podem ser escolhidos como conjuntos característicos de regiões funcionais lineares; por exemplo, demonstra-se que uma função holomorfa no conjunto dos pontos infinitos é necessáriamente constante, pois o conjunto dos pontos singulares de uma função não constante não pode ser limitado. Esta circunstância dificulta tambem o estabelecimento de uma base desse espaço funcional, pois as funções racionais

$$\frac{f(t_{1r}, t_{2r})}{(t_{1r}-z_1)(t_{2r}-z_2)}$$

que se obteriam pelo processo do § 6, têm polos em todos os pontos dos planos característicos imagens das retas complexas

$$z_1 = t_{1r} \qquad \text{e} \qquad z_2 = t_{2r}$$

e portanto nem sempre é possível estabelecer uma estensão do teorema de Runge. Assim, as regiões funcionais lineares consideradas pelo prof. Fantappiè, e mesmo pelo autor no trabalho (3) sobre equações de variações totais têm sempre conjuntos característicos finitos ou satisfazendo alguma outra hipotése simplificativa.

Outros espaços funcionais que é preciso considerar na teoria dos funcionais analíticos são os que se obtêm como produtos topológicos dos espaços já estudados ou desses com espaços projectivos comuns. Por exemplo, no estudo dos funcionais mixtos se considera como espaço a totalidade dos pares $\{f(z),t\}$ obtidos pela associação de um ponto (f,R) do espaço funcional analítico com um ponto t sobre a esfera complexa; define-se então o entorno de um ponto $\{f_0(z),t_0\}$ como a totalidade dos pares $\{f(z),t\}$ em que $f(z)$ pertence a um entorno do ponto $f_0(z)$ e t a um entorno de t_0. Partindo dessa noção de entorno definem-se todos os conceitos topológicos desse novo espaço. Vê-se facilmente que dada nesse espaço uma região funcional $\mathfrak{R}$ e sendo $\{f_0,t_0\}$ um ponto dessa região, o conjunto de todos os pontos-funções (f,R) que associados a t_0 formam pontos de $\mathfrak{R}$ é uma região funcional $\mathcal{J}(t_0)$; da mesma forma se vê que os pontos t tais que $\{f_0(z),t\}$ é ponto de $\mathfrak{R}$, formam sobre a esfera uma região $R(f_0)$.

De maneira análoga se podem considerar os espaços dos pares $\{f(z),g(z)\}$, ou os dos grupos mais complicados, como $\{f(z_1,..z_n),g(z_1,..z_m), \ldots ;t_1,t_2,\ldots \}$.

CAPÍTULO III - FUNCIONAIS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL.

§ 1. FUNCIONAL DEFINIDO NO ESPAÇO FUNCIONAL ANALÍTICO.

Para simplificar, indicaremos um ponto (f,R) do espaço funcional analítico com o mesmo símbolo da função correspondente, $f(z)$ ou f, subentendendo a região que completa a definição do ponto, a qual será quasi sempre designada com a notação R_f.

Seja dado um conjunto K de pontos do espaço funcional analítico; supomos sempre que esse conjunto contem com cada ponto todos os pontos contidos no mesmo, isto é, constituidos por funções que são prolongamentos de alguma função do primeiro ponto. Se a cada ponto de K corresponde um valor para uma grandeza w, diremos que w é um funcional do ponto ou da função f, definido em K; todos os funcionais que considerarmos gozarão da seguinte propriedade: um funcional definido em um ponto (f,R), é tambem definido e tem o mesmo valor para todos os pontos contidos em (f,R). A mesma condição imporemos para os funcionais que dependem de maior número de funções.

Chama-se <u>funcional mixto</u> de uma função f e de um parâmetro s uma quantidade que depende do ponto (f,R) e de um parâmetro s, sendo esse par variável em um certo conjunto do espaço dos pares $\{f(z),s\}$; se para cada $f(z)$ os valores de s que compõem pares desse conjunto formam uma região $R(f)$ e se o valor do funcional, fixado $f(z)$, é uma função analítica de s em $R(f)$, o funcional mixto se pode considerar como estabelecendo uma correspondência entre pontos do espaço funcional analítico; essa correspondência se pode escrever

$$g(s) = X\, f(z)$$

e diz-se que $g(s)$ se obtem $f(z)$ pela aplicação de um operador que é designado com o símbolo X. Nos casos mais comuns e mais geralmente estudados, a região R_f é fixa e coincide com $R(f)$, de modo que o estudo do funcional fica reduzido ao estudo de uma correspondência entre funções definidas em uma mesma região; esse é o caso que se apresenta em geral no Cálculo dos operadores.

Essas noções de funcional e funcional mixto se estendem aos espaços de pares, de grupos de funções, e em geral a qualquer espaço mixto, onde estão definidos os funcionais gerais

$$F\left[f_1(z_1,\ldots z_{n_1}),\ldots f_r(z_1,\ldots z_{n_r});s_1,\ldots s_p\right].$$

§ 2. CONTINUIDADE.

Vamos introduzir a noção de continuidade de um funcional pela definição clássica, baseada na noção de entorno:

Um funcional

$$w = F\left[f(z)\right],$$

definido em um conjunto K de pontos do espaço funcional analítico é contínuo em um ponto de acumulação próprio (g,S) de K pertencente a este campo, se para todo número $\varepsilon > 0$ se pode achar um entorno (T,σ) de (g,S) tal que para qualquer ponto (f,R_f) desse entorno e pertencente a K, se tenha

$$\left|F\left[f(z)\right] - F\left[g(z)\right]\right| < \varepsilon .$$

Nesta definição, o ponto g(z) pode ser substituido por qualquer ponto que o contenha, desde que esteja em K, pois o valor do funcional será sempre o mesmo.

Esta mesma definição se estende a todos os outros espaços funcionais, devendo-se porem notar, como no caso das funções ordinárias, que, por exemplo, a continuidade de um funcional mixto $F\left[f(z),t\right]$ é uma condição mais exigente que simplesmente a continuidade, separadamente, em relação a f(z) e a t.

Como consequência da definição dada, podemos afirmar que para um funcional contínuo, dada uma sucessão $f_1(z), f_2(z),\ldots$ de pontos de K, convergente a um ponto f(z) de K, temos sempre

$$\lim_{n\to\infty} F\left[f_n(z)\right] = F\left[f(z)\right]$$

e este resultado vale seja para a convergência em sentido lato, seja para a convergência em sentido restrito.

Um funcional se diz contínuo no seu campo de definição, quando é contínuo para cada ponto de acumulação desse campo que faça parte do mesmo. Os funcionais contínuos em um mesmo campo K formam um conjunto que com cada dois dos seus elementos, contem a soma, a diferença e o produto; isto se exprime na linguagem da álgebra, dizendo que tais funcionais são elementos de um anel, o qual é evidentemente comutativo.

A propriedade de continuidade é transitiva, como no caso de função de função. Vê-se, por exemplo, que:

– Uma função continua $\phi(w)$ de um funcional contínuo $F[f(z)]$, é um funcional contínuo de $f(z)$.

– O valor de um funcional contínuo $F[f(z)]$ nos pontos de uma linha analítica $f(z,\alpha)$ é função contínua de α; esta propriedade se estende ás variedades analíticas.

Suponhamos que o funcional mixto $F[f(z),t]$ seja definido e contínuo em uma região do espaço de pares $\{f(z),t\}$ satisfazendo às seguintes condições: 1) a região $R(f)$ dos valores de t que estão associados ao ponto-função $f(z)$, varia com continuidade em relação a este ponto; 2) o valor do funcional $F[f(z),t]$ é função analítica de t em $R(f)$: $F[f(z),t] = g(t)$. Podemos então dizer que o ponto-função $(g(t),R(f))$ varia continuamente com o ponto $f(z)$, e temos, como se verifica facilmente:

– Uma função $\phi(w) = \phi(g(t))$ definida e contínua para os valores de $g(t)$ é um funcional mixto contínuo de $f(z)$ e t.

– Um funcional contínuo de $g(t)$ é funcional contínuo de $f(z)$.

§ 3. FUNCIONAIS CONTINUOS LINEARES.

A observação do desenvolvimento da Análise Matemática e principalmente das suas aplicações, sugere uma conclusão que é resumida na fórmula de Taylor: esta fórmula mostra, efetivamente, que na sua grande maioria, as funções que se apresentam na ciência gozam de certas propriedades que de maneira intuitiva se podem enunciar como segue:

1) Quando uma função é observada na vizinhança imediata de um ponto genérico do seu campo de definição, essa função

pode, para efeito de certos cálculos grosseiros em que não seja exigida grande precisão, considerar-se constante.

2) Para uma precisão maior, podemo-nos restringir ao estudo da variação da função, e esta se apresenta como uma nova função da variação Δx do argumento x, ou, no caso de mais de uma variável independente $x_1, x_2, .. x_n$, como função das n variáveis $\Delta x_1, \Delta x_2, .. \Delta x_n$. Em primeira aproximação, esta função apresenta a seguinte propriedade fundamental: se $\Delta\phi$ é a variação correspondente ás variações $\Delta x_1, \Delta x_2, .. \Delta x_n$ e $\Delta'\phi$ é a variação correspondente a $\Delta' x_1, \Delta' x_2, .. \Delta' x_n$, a variação correspondente a $\Delta x_1 + \Delta' x_1, \Delta x_2 + \Delta' x_2, .. \Delta x_n + \Delta' x_n$ é $\Delta\phi + \Delta'\phi$.

3) Aumentando a necessidade de precisão, é preciso acrescentar à quantidade $\Delta\phi$ outros termos complementares $\Delta^2\phi$, $\Delta^3\phi$, etc., que, como funções das mesmas variações $\Delta x_1, \Delta x_2, ..$ Δx_n, apresentam tambem propriedades características, cada vez mais complicadas.

A aproximação referida em (1), significa apenas que se trata de uma função contínua, isto é, que, restringindo suficientemente a variação da ou das variáveis independentes, a variação da função pode-se considerar como praticamente nula. Fóra disto, esta propriedade, considerada sob o ponto de vista local, não apresenta interesse próprio para a análise, cujo c campo de estudos é essencialmente o das quantidades variáveis.

Para o estudo da primeira aproximação, como dissemos acima, é conveniente considerar a variação aproximada $\Delta\phi$, que se chama a <u>primeira</u> <u>variação</u>, como uma função das variações Δx_1, $\Delta x_2, .. \Delta x_n$. A propriedade fundamental desta variação é a linearidade, que se exprime pela igualdade (em que substituimos Δx por x e $\Delta\phi$ por ϕ):

$$\phi(x_1+y_1, ... x_n+y_n) = \phi(x_1, ... x_n) + \phi(y_1, ... y_n).$$

No caso de uma variável real, esta é uma equação funcional

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

cuja solução - admitindo a continuidade da função ϕ - é $\phi(x) = kx$, sendo k uma constante real arbitrária, isto é, a primeira variação da função é proporcional à variação do argumento.

Para o caso de um número qualquer n de variáveis independentes, a solução geral é $\phi(x_1,\ldots x_n) = k_1x_1+\ldots+k_nx_n$, isto é, um polinômio linear homogêneo, ou uma forma linear. Este resultado que nas ciências naturais é muitas vezes obtido por meio de observação e experiência, é estudado na matemática pura, quando se dá a definição e as propriedades fundamentais da diferencial. Todo o estudo das formas e equações lineares, das substituições lineares, cuja interpretação geométrica é o estudo das transformações afins e projetivas, a álgebra tensorial, etc. está pois ligado íntimamente ao estudo da primeira variação das funções.

Do mesmo modo, o estudo das formas quadráticas, com a consequente aplicação geométrica no estudo das involuções, das cônicas e das quádricas de um espaço de um número qualquer de dimensões, está todo intimamente ligado ao estudo da segunda variação, isto é, das diferenciais segundas, e assim por diante.

Passando ao estudo das funções definidas em um espaço topológico qualquer, é de esperar, pois, que se apresentem naturalmente em primeiro lugar as funções que gozam das duas propriedades - continuidade e linearidade - pois a esse caso seremos conduzidos sempre que nos pudermos contentar com a primeira aproximação de funções que apresentem certas condições de regularidade.

No caso especial dos funcionais definidos em pontos do espaço funcional analíticos, suporemos sempre que o campo de definição é uma região funcional $\mathcal{H}$; o funcional será linear, se satisfizer à condição

$$F[f_1+f_2] = F[f_1] + F[f_2]$$

sejam quais forem as duas funções f_1 e f_2 de $\mathcal{H}$; esta igualdade, que se estende imediatamente a um número finito qualquer de parcelas, exige, como se verifica facilmente, que a soma de duas funções de $\mathcal{H}$ esteja nesta região, e portanto que a interseção de suas regiões de definição não seja vazia, e tambem que com cada ponto essa região funcional H contenha todo um entorno linear desse ponto; ora, estas são justamente as condições para que $\mathcal{H}$ seja uma região funcional linear. Seja A o seu conjunto característico.

Da linearidade do funcional F se deduzem facilmente as seguintes propriedades:

$$F[-f] = -F[f] \qquad \text{e} \qquad F[kf] = k\,F[f] ,$$

para qualquer número racional relativo k (em particular, temos sempre, para todo funcional linear, $F[0] = 0$). Da continuidade se deduz tambem a ultima propriedade para qualquer número k real. Para o caso dos fatores complexos, precisamos admitir ainda a permutabilidade do funcional com ofactor i:

$$F[if(z)] = i\,F[f(z)]$$

donde se deduz, combinando com as propriedades acima, para a e b reais quaisquer,

$$F[(a+bi)f] = F[af] + F[bif] = (a+bi)F[f] ,$$

isto é, sob as hipóteses feitas, o funcional é permutável com qualquer factor complexo ("). Temos então, quaisquer que sejam os números complexos $k_1,\ldots k_n$ e as funções $f_1,\ldots f_n$ regulares em A,

$$F[k_1f_1+\ldots+k_nf_n] = k_1F[f_1] + \ldots + k_nF[f_n].$$

Seguindo a denominação proposta por Candido Dias, chamaremos funcional <u>linear regular</u> todo funcional que satisfaça às tres condições de continuidade, linearidade e permutabilidade com o factor i.

Se $f_1, f_2, \ldots$ são termos de uma série uniformente convergente em uma região R que contenha o conjunto A, é evidente que as reduzidas $\varphi_n(z)$ dessa série serão regulares em A, e a sucessão dos pontos (φ_n, R) converge, no sentido restrito, ao ponto (φ, R), em que chamámos $\varphi = \varphi(z)$ a soma da série, a qual pela hipótese resulta tambem regular em R.

(") As duas condições de linearidade e permutabilidade com o factor i são equivalentes á única condição de aditividade complexa introduzida por Candido L.S. Dias, (1), que é $F[f+ig] = F[f] + iF[g]$.

Teremos então, combinando a propriedade distributiva dos funcionais lineares com a propriedade relativa a sucessões, dos funcionais contínuos,

$$F[\varphi(z)] = F[\lim \varphi_n(z)] = \lim F[\varphi_n(z)] = \sum_1^\infty {}_n F[f_n(z)]$$

o que se exprime dizendo que o valor de um funcional contínuo e linear aplicado à soma de uma série uniformemente convergente em uma região que contenha o conjunto A, pode-se obter aplicando esse funcional termo a termo e somando os resultados.

§ 4. FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA OS FUNCIONAIS LINEARES REGULARES.

Vamos deduzir da condição de regularidade, isto é., das tres condições de continuidade, linearidade e permutabilidade com o fator i, para um funcional F definido em uma região funcional linear $\mathcal{H}$, uma fórmula fundamental que tem como caso particular a fórmula do prof. Fantappiè, mas que se aplica sem a restrição relativa á regularidade no infinito. A marcha da demonstração é baseada no conceito de continuidade e no de integral de Riemann.

O nosso ponto de partida é a fórmula de Cauchy modificada

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)(z-\lambda)}{(t-\lambda)(t-z)}\,dt$$

em que C é um contorno regular que envolve uma região em que f(z) é analítica, e sobre o qual f(z) é contínua, z é um ponto interno a essa região e λ um ponto esterno. Podemos então fixar λ fora do conjunto A e escolher a curva C contida na região R_f, envolvendo o conjunto A e deixando λ da parte esterna. Seja δ a distância (espacial) do conjunto A à curva C; tomemos, numa rede ρ_n(Cap.II,§6), com $n > \pi/\delta$, a totalidade das malhas que contêm pontos de A; obtemos assim um domínio T, envolvido por C e cujos pontos internos formam uma região S que contem A. Podemos então restringir a região R_f e considerar o ponto (f,S), que está ainda na região $\mathcal{H}$ de definição do funcional F e que dá a este funcional o mesmo valor que o ponto (f,R_f).

Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe por hipótese um entorno (U,σ) de (f,S) tal que para qualquer função $g(z)$ desse entorno, isto é, regular em U e satisfazendo neste domínio à condição

$$(2) \qquad |g(z) - f(z)| < \sigma,$$

se tenha

$$(3) \qquad |F[g(z)] - F[f(z)]| < \varepsilon.$$

Mas ao número σ pode-se tambem fazer corresponder um número $\mu > 0$ tal que para toda divisão $t_0, t_1, \dots t_n$ do caminho de integração C, com máxima corda $|t_r - t_{r-1}|$ menor que μ, a soma

$$(4) \qquad (z) = \sum_r f(t_r) \frac{z - \lambda}{(t_r - \lambda)(t_r - z)} (t_r - t_{r-1})$$

que é uma função racional de z, com polos em C e portanto regular em S, difira de $f(z)$ de menos de σ em toda essa região; como conseguência, sendo U qualquer domínio contido em S, o ponto (φ, S) estará contido no entorno (U,σ) de (f,S), donde se deduz que para esta função $\psi(z)$ está satisfeita a condição (3). Ora, pela linearidade do funcional, temos

$$(5) \qquad F[\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^n{}_r f(t_r)\, F\left[\frac{(z-\lambda)}{(t_r - \lambda)(t_r - z)}\right] (t_r - t_{r-1}).$$

Ponhamos

$$(6) \qquad u_\lambda(\alpha) = F\left[\frac{(z-\lambda)}{(\alpha - \lambda)(\alpha - z)}\right];$$

como a função argumento está sempre no campo de definição do funcional, desde que $\alpha \neq \lambda$ não pertença a A, esta função definida por (6) é contínua para α em C, e portanto o produto dessa função por $f(\alpha)$ é integrável, isto é o limite de (5) para $\mu \to 0$, se obtem por uma integral de Riemann

$$(7) \qquad F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)\, u_\lambda(t)\, dt;$$

esta é a fórmula fundamental da teoria dos funcionais analíticos lineares.

Da fórmula obtida (7) se deduz uma consequência importantíssima: se o ponto f(z) descreve uma linha analítica $(f(z,\alpha),R(\alpha))$ contida na região funcional $\mathcal{R}$, o valor correspondente do funcional é uma função analítica de α em toda a região Ω em que varia este parâmetro; isto se demonstra notando que em um entorno conveniente de qualquer ponto α de Ω pode-se supôr a curva C fixa e derivar sob o sinal a função integranda em (7), pois $f(z,\alpha)$ tem uma derivada uniformemente contínua para α no entorno acima referido e z em C, e $u_\lambda(t)$ é contínua e portanto limitada. Em particular, a própria função que aparece como argumento do funcional em (6), considerada como função de α, é regular, qualquer que seja z em A, para $\alpha \neq \lambda$ na região B, complemento de A sobre a esfera, donde se deduz a analiticidade de $u_\lambda(\alpha)$ em relação a α em toda esta região, exceptuado o ponto λ; neste ponto aliás é fácil vêr que essa função tem um polo simples, com resíduo $-F[1]$ em que designámos com 1 a função definida em qualquer região que contenha o conjunto A e que tenha nessa região o valor constante 1. Com efeito, decompondo a fração que aparece como argumento do funcional, temos

$$(8) \quad u_\lambda(\alpha) = F\frac{z-\lambda}{(\alpha-\lambda)(\alpha-z)} = F\left[\frac{1}{\alpha-z}\right] - F\left[\frac{1}{\alpha-\lambda}\right] = F\left[\frac{1}{\alpha-z}\right] - \frac{1}{\alpha-\lambda}F[1]$$

Se a região B contem o infinito, fazendo $\lambda=\infty$, obtemos exatamente a indicatriz de Fantappiè

$$(9) \qquad u(\alpha) = u_\infty(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha-z}\right]$$

Se λ é finito, a função $u_\lambda(\alpha)$ tem no infinito um zero de 2a. ordem, pois temos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 u_\lambda(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} F\left[\frac{z-\lambda}{(1-\frac{\lambda}{\alpha})(1-\frac{z}{\alpha})}\right] = F[z-\lambda]$$

que é finito. Ve-se então que se f(z) tambem é regular no infinito, mesmo que não se anule nesse ponto, é indiferente que esse ponto seja interno ou esterno é curva C, pois o resíduo da função integranda em (7) no infinito é nulo.

Suponhamos agora que o conjunto A contenha o infinito; λ deve ser forçosamente finito e C deve envolver o infinito positivamente. Aplicando a fórmula fundamental (7), com a decomposição de $u_\lambda(\alpha)$, temos

$$(10) \qquad F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\, F\left[\frac{1}{t-z}\right] dt - \frac{F[1]}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-\lambda}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\, u(t)\, dt + F[1]\, f(\infty);$$

se a função f é nula no infinito, esta fórmula se reduz á fórmula fundamental de Fantappiè.

Em resumo, em todos os casos que se enquadram na teoria do prof. Fantappiè, a sua fórmula se obtem como caso particular da fórmula (7). Por esta razão, conservaremos o nome de indicatriz do funcional dado, para a função $u_\lambda(\alpha)$.

Suponhamos agora dada uma função qualquer $u_\lambda(\alpha)$, regular em todos os pontos de uma região B da esfera complexa, exceptuado um ponto λ em que tem um polo simples, com resíduo b; se essa região B contem o infinito, suporemos ainda que a função $u_\lambda(\alpha)$ tenha neste ponto um zero duplo. Dada então qualquer função f(z) regular no conjunto fechado A, complemento de B sobre a esfera, podemos determinar uma curva regular C que envolva esse conjunto e deixe esternamente o ponto λ e todos os pontos em que f(z) não está definida. Com esta hipótese, evidentemente, a integral

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\, u_\lambda(t)\, dt = F[f(z)]$$

é um funcional da função f(z), definido na região funcional linear $\mathcal{H}$, de conjunto característico A; nesta região, esse funcional é evidentemente contínuo, linear e homogêneo para qualquer fator complexo (basta que o seja em relação ao fator i: $F[if(z)] = i\,F[f(z)]$. Em particular, para a função 1 dessa região funcional, temos

$$(12) \qquad F[1] = \frac{1}{2\pi i}\int_C u_\lambda(t)\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-C} u_\lambda(t)\,dt\,;$$

ora, a curva $-C$ só envolve pontos da região B, entre os quais só ha um polo λ, em que o resíduo é conhecido; da hipótese relativa ao infinito se deduz que mesmo que este ponto esteja em B, a sua contribuição para a integral é nula, e temos

$$F[1] = -b$$

Tomemos agora a função $f(z) = 1/(\alpha - z)$, que para α em B pertence á região funcional $\mathcal{H}$. Temos então, para qualquer curva C que envolva A e deixe esternamente α e λ,

$$F\left[\frac{1}{\alpha - z}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_\lambda(t)}{\alpha - t}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C} \frac{u_\lambda(t)}{t - \alpha}\,dt;$$

como o resíduo no infinito (no caso deste ponto ser envolvido por $-C$) é sempre nulo, o cálculo da última integral dá a soma dos resíduos da função integranda nos polos α e λ, e temos

$$F\left[\frac{1}{\alpha - z}\right] = u_\lambda(\alpha) + \frac{b}{\lambda - \alpha} = u_\lambda(\alpha) + \frac{F[1]}{\alpha - \lambda}$$

donde se deduz, para $\alpha \neq \lambda$,

$$u_\lambda(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha - z}\right] - F\left[\frac{1}{\alpha - \lambda}\right] = F\left[\frac{z - \lambda}{(\alpha - \lambda)(\alpha - z)}\right];$$

para $\alpha = \lambda$, o valor do funcional $F[1/(\alpha - z)]$ é o termo constante do desenvolvimento de $u_\lambda(\alpha)$ em série de Laurent, no entorno desse polo. Vemos assim que nas condições acima, a função $u_\lambda(\alpha)$ sempre se pode considerar como a indicatriz de um funcional linear.

Se puzermos

$$u_\lambda(\alpha) = \frac{b}{\alpha - \lambda} + \varphi(\alpha),$$

vemos que a função $\varphi(\alpha) = F[1/(\alpha - z)]$, parte regular de $u_\lambda(\alpha)$ no polo λ, não é mais que a indicatriz de Fantappiè, do funcional definido em (11). Fixada essa função φ, mesmo que se faça variar λ em B, o funcional $F[f(z)]$ não se altera. Pela condição imposta para $u_\lambda(\alpha)$ no infinito, segue-se que nesse ponto $\varphi(\alpha)$ deve ser nula e ter resíduo b; com efeito, temos

$$-\alpha\varphi(\alpha) = -F\left[\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}\right] \to -F[1] = b, \quad \text{para } \alpha\to\infty.$$

§ 5. FUNCIONAIS BILINEARES E QUADRATICOS.

Um funcional que depende de duas funções f(z) e g(z) e que é linear, separadamente, em relação a cada uma delas, chama-se um funcional bilinear. Mais precisamente: se no espaço dos pares de pontos $\{f(z),g(z)\}$ do espaço funcional analítico, supuzermos que a cada par de uma certa região $\mathcal{R}$ corresponde um valor para uma certa quantidade variável w, diremos que w é um funcional de f(z) e g(z):

(1) $$w = F[f,g];$$

esse funcional se diz linear se satisfizer à condição

(2) $$F[f_1+f_2,g_1+g_2] = F[f_1,g_1] + F[f_1,g_2] + F[f_2,g_1] + F[f_2,g_2]$$

quaisquer que sejam os pares $\{f_1,g_1\}$, $\{f_1g_2\}$, etc. da região $\mathcal{R}$. Esta região aliás deve ser tal que a cada função f estão associadas todas as funções g de uma região funcional linear $\mathcal{K}(f)$, e a cada função g, todas as funções f de uma região funcional linear $\mathcal{H}(g)$. Sejam, respectivamente, B(f) e A(g) os conjuntos característicos dessas regiões, e suponhamos que eles variem com continuidade em relação ao ponto-função de que dependem. Suponhamos alem disto que o funcional (1) seja contínuo em relação ao par (f,g) e permutável, para cada uma dessas funções, com o factor i; em outras palavras, que esse funcional seja linear e regular. Neste caso, fixada uma função f(z) que faça parte de um ponto (f,g) de $\mathcal{R}$, obtemos um funcional de f, cuja indicatriz é um funcional mixto de g e do parâmetro α:

$$u_\lambda[\alpha;g(z)] = F\left[\frac{z-\lambda}{(\alpha-\lambda)(\alpha-z)}, g(z)\right].$$

α e λ são aqui pontos esternos ao conjunto A(g), característico da região $\mathcal{H}(g)$. Para cada valor de α, esta expressão é funcional linear regular de g(z), definido tambem em uma região funcional linear, e a sua indicatriz é

$$(3) \qquad u_{\lambda\mu}(\alpha,\beta) = F\left[\frac{z-\lambda}{(\alpha-\lambda)(\alpha-z)}, \frac{z-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-z)}\right];$$

evidentemente, à mesma função chegaríamos se primeiramente fixássemos f(z) e considerássemos a indicatriz $u_\mu[f(z),\beta]$ do funcional de g(z) obtido. A função $u_{\lambda\mu}(\alpha,\beta)$ é chamada a indicatriz do funcional bilinear. Se os conjuntos A(g) e B(f) forem sempre finitos, podemos pôr $\lambda=\mu=\infty$, e obtemos a indicatriz de Fantappiè

$$(4) \qquad u(\alpha,\beta) = F\left[\frac{1}{\alpha-z}, \frac{1}{\mu-z}\right].$$

Conhecida a indicatriz, obtem-se o valor do funcional pela fórmula

$$(5) \qquad F[f(z),g(z)] = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C f(z)dz \int_{C'} g(t)\, u_{\lambda\mu}(z,t)dt,$$

isto é, uma integral de superfície na variedade de Segre VS_2. Note-se que a curva C' depende em geral do valor de z, e a superfície de integração é obtida pelo deslocamento da curva que tem por projeção C', sobre o plano variável $z=\alpha$. Quando a curva C' é independente de z, como por exemplo no caso em que B(f) é um conjunto constante, a ordem das integrações é indiferente.

Suponhamos agora que para todo ponto f de uma certa região funcional linear $\mathcal{H}$, a região funcional correspondente $\mathcal{K}(f)$ contenha esse mesmo ponto. Podemos então considerar o novo funcional

$$(6) \qquad F_1[f(z)] = F[f(z),f(z)]$$

definido para um ponto f(z) variável sobre a região funcional linear $\mathcal{H}$, de conjunto característico A. Por analogia com o caso das formas bilineares de um número finito de variáveis, chamaremos o funcional obtido de funcional quadrático. Esse funcional quadrático goza da propriedade de homogeneidade em relação a qualquer factor complexo k:

$$F[kf(z)] = k^2 F[f(z)]$$

De maneira análoga se podem definir em geral funcionais polinomiais homogêneos de grau n, partindo de um funcional n-linear regular

$$F[f_1(z), \dots f_n(z)]$$

e pondo (admitidas as hipóteses necessárias relativas aos campos de definição),

$$F_1[f(z)] = F[f(z), \dots f(z)].$$

§ 5. MUDANÇA DE VARIAVEIS NOS FUNCIONAIS LINEARES REGULARES.

Podem-se considerar dois problemas de mudança de variáveis nos funcionais analíticos; vamos considerar aqui sómente o que chamaremos <u>problema elementar</u>, que é a generalização do problema da mudança de variável do tipo $z = \varphi(t)$ nas integrais simples

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt,$$

em que Γ e Γ' são caminhos que se correspondem na transformação.

No caso dos funcionais, o problema consiste em estudar a as propriedades e os métodos de cálculo do funcional

$$G[g(t)] \doteq F[f(z)] \tag{1}$$

considerado como funcional da função $g(t) = f(\varphi(t))$, supondo certas condições de regularidade para a função $\varphi(t)$ (").

(") O problema geral de mudança de variáveis consiste em estudar a transformação na própria função f(z), que se supõe expressa como funcional mixto de outra função: $f(z) = G[g(t), z]$. É a esse problema que se chega quando se considera o funcional como caso limite de uma função de n variáveis, quando esse número de variáveis se torna infinito.

Vamos estudar o caso particular de um funcional linear regular $F[f(z)]$, definido na região funcional $\mathcal{H}$, de conjunto característico A. Suponhamos que se tenha uma transformação biunívoca analítica

$$(2) \qquad z = \varphi(t), \qquad t = \psi(z)$$

entre os pontos de uma região R que contem A e os de uma região S. Uma das condições necessárias para isto é que $\varphi'(t)$ não se anule na região S e $\psi'(z)$ não se anule em R. Ao conjunto A corresponderá então um conjunto fechado B contido em S.

Se fizermos a transformação (2) na fórmula fundamental

$$F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, u_\lambda(z)\, dz,$$

em que escolhemos, como é sempre possível, o ponto λ e a curva C em R, chamando C' a curva correspondente a C, a qual envolverá o conjunto B, temos

$$(3) \quad G[g(t)] = F[g(\psi(z))] = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\psi(z))\, u_\lambda(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} g(t)\, u_\lambda(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt .$$

Por outro lado, se chamarmos $v_\mu(t)$ a indicatriz do funcional $G[g(t)]$, a qual é analítica na região complementar de B, com excepção do polo simples no ponto μ que é um ponto externo a C', temos tambem

$$(4) \qquad G[g(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} g(t)\, v_\mu(t)\, dt.$$

A comparação das duas fórmulas (3) e (4) conduz a uma conclusão importante: para qualquer função g(t) regular sobre a curva C' e na sua parte interna, temos

$$(5) \qquad \int_{C'} g(t)\left\{u_\lambda(\varphi(t))\, \varphi'(t) - v_\mu(t)\right\} dt = 0.$$

Ora, suponhamos que a curva C' se componha sómente de tre chos externos uns aos outros, o que é possível sempre que o conjunto B (e portanto tambem o conjunto A) não decomponha a esfera em mais de uma região conexa. Neste caso, é evidente que a igualdade anterior (5) deve ser satisfeita para cada componente dessa curva C'; basta notar que podemos escolher uma função g(t) particular que seja identicamente nula em todas as componentes de C' menos em uma, onde ela é uma função analítica arbitrária. Chamemos ainda C' uma dessas componentes, e vamos demonstrar que a diferença

$$(6) \qquad u_\lambda(\varphi(t))\,\varphi'(t) - v_\lambda(t)$$

é forçosamente uma função regular na parte interna dessa curva. Em outras palavras, vamos demonstrar o seguinte teorema:

<u>Se uma função $\vartheta(t)$ regular e monódroma em todos os pontos de um contorno regular simples C é tal que para qualquer função g(t) analítica nesse contorno e na parte interna R, temos</u>

$$(7) \qquad \int_C g(t)\,\vartheta(t)\,dt = 0,$$

<u>a função $\vartheta(t)$ pode ser prolongada por uma função monógena em toda a região R.</u>

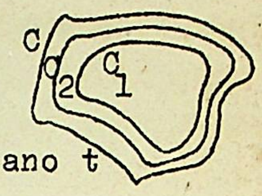
Para a demonstração desse teorema vamo-nos basear no teorema de Riemann que diz que é possível fazer a representação conforme da região R no interior do círculo unitário $|s| = 1$ ("). Chamemos K esse círculo, e seja

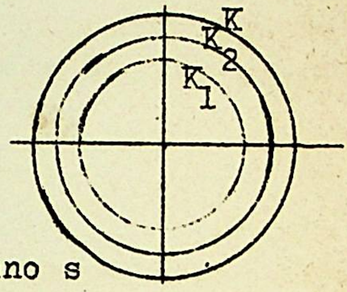
$$t = \tau(s)$$

a equação da transformação. Sendo a função $\vartheta(t)$ regular em C, é regular em uma região que contem C internamente; como aos círculos concêntricos a K, de raio < 1, correspondem curvas

(") V. por ex. Titchmarsh, The Theory of Functions, 2a. ed. p. 207; para mais ampla discussão, consultar Bieberbach, Funktionentheorie, II, ou Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3a. parte.

internas a C, cujo desvio de C tende a zero quando esse raio tende a 1, é claro que se podem achar duas dessas curvas, C_1 e C_2 (C_1 interna a C_2), contidas na região R. A função $\vartheta(t)$ será então holomorfa em toda a faixa compreendida entre essas curvas; chamando K_1 e K_2, respectivamente, os círculos correspondentes a C_1 e C_2, a função $\vartheta(\tau(s))$ será holomorfa na corôa circular limitada por esses círculos, e portanto nessa corôa é desenvolvível em série de Laurent uniformemente convergente





$$\vartheta(\tau(s)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n s^n \,. \tag{8}$$

Ora, pelo teorema de Cauchy, a integral (7) pode ser substituida pela integral da mesma função integranda, estendida á curva C_2. Por outro lado, qualquer função $g(t)$ monógena em R se transforma em uma função $g(\tau(s))$ monógena no interior de K, e recíprocamente. A condição imposta no teorema se refere às funções $g(t)$ que são monógenas em R e sobre o contorno C desta região; mas dessa condição segue-se tambem que qualquer que seja a função $h(t)$ regular em todos os pontos do domínio limitado pela curva C_2, a integral

$$\int_{C_2} \vartheta(t)\, h(t)\, dt \tag{9}$$

é nula. Com efeito, essa função $h(t)$ pode ser aproximada arbitráriamente por funções que satisfazem à condição anterior, por exemplo por funções racionais com polos esternos a C ("). Seja então L o comprimento de C_2, M o máximo de $\vartheta(t)$ sobre essa curva, e $\phi(t)$ uma função racional com polos fora de C, tal que em todos os pontos de C_2 se tenha

$$|h(t) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{ML},$$

(") v. p. ex. Walsh (1), p. 14 e seguintes.

condição a que é possível satisfazer qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Teremos então,

$$\left| \int_{C_2} \vartheta(t) \{ h(t) - \phi(t) \} dt \right| < \varepsilon,$$

e como pela hipótese temos

$$\int_{C_2} \vartheta(t)\, \phi(t)\, dt = \int_C \vartheta(t)\, \phi(t)\, dt = 0,$$

temos tambem

$$\left| \int_{C_2} \vartheta(t)\, h(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

e sendo ε arbitrário, deduz-se, como queríamos demonstrar, que a integral (9) é nula.

Ora, tomemos em particular a função $h(t)$ cuja transformada é

$$h(\tau(s)) = \frac{s^m}{\tau'(s)} \qquad (m \text{ inteiro } \geq 0)$$

que satisfaz à condição de ser regular em todos os pontos da curva C_2 e da sua parte interna, já que a derivada $\tau'(s)$ é analítica e diferente de zero no domínio correspondente. A integral (9) estendida à curva C_2, cuja transformada é K_2, será então igual a

$$\int_{K_2} \vartheta(\tau(s)) h(\tau(s)) \tau'(s) ds = \int_{K_2} \vartheta(\tau(s))\, s^m ds = \int_{K_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, s^{m+n}\, ds.$$

Integrando a última série termo a termo, o que é lícito em virtude da convergência uniforme, obtemos no último membro dessa igualdade sómente o coeficiente de s^{-1} multiplicado por $2\pi i$, donde se conclue

$$a_{-1-m} = 0 .$$

Valendo este resultado para $m = 0,1,2,\ldots$, deduz-se então que são nulos no desenvolvimento de Laurent (8) todos os coeficientes com indices negativos, logo, na corôa limitada por K_1 e K_2, isto é, nas vizinhanças do círculo K a função $\vartheta(\tau(s))$ é igual á função definida pela série de potências

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n\, a_n\, s^n = \chi(s);$$

mas essa função é regular em toda a região interna a K, e portanto constitue o prolongamento da função anterior $\vartheta(\tau(s))$, e a transformada dessa função, que é uma função monógena em toda a região R, é tambem o prolongamento de $\vartheta(t)$, como queríamos demonstrar.

O raciocínio feito acima relativamente à função h(t), mostra que, em virtude da possibilidade de aproximação por funções racionais, e em particular por polinômios, no caso de uma região finita, pode-se simplificar a condição imposta no teorema, e enuncia-lo da seguinte maneira:

"<u>Se uma função $\vartheta(t)$, analítica e monódroma em todos os pontos de um contorno simples e regular C, satisfaz às condições</u>

$$\int_C \vartheta(t)\, t^m dt = 0$$

<u>para m = 0,1,2,... , a função $\vartheta(t)$ pode ser prolongada por uma função monógena em toda a região finita limitada por C</u>."

Voltando ao estudo dos funcionais, concluimos do teorema precedente, que a indicatriz do novo funcional $G[g(t)]$ é dada por

$$(10) \qquad v_\mu(\beta) = u_\lambda(\varphi(\beta))\, \varphi'(\beta) + \vartheta(\beta)$$

em que $\vartheta(\beta)$ é uma função monógena em toda a região S, exceptuados o ponto μ e o transformado de λ; note-se com efeito, que o raciocínio anterior é válido para toda curva C' que satisfaça às duas condições seguintes: envolver o conjunto fechado B, deixar esternamente μ e $\psi(\lambda)$ e estar contida na região S, onde a função $\psi(s)$ é analítica e invertível ($\psi'(s) \neq 0$).

A nova indicatriz, $v_\mu(\beta)$ pode tambem ser calculada como uma integral, usando a fórmula fundamental para o funcional F:

$$(11)\quad v_\mu(\beta) = G\left[\frac{t-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-t)}\right] = F\left[\frac{\psi(z)-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-\psi(z))}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(z)-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-\psi(z))}\, u_\lambda(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{t-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-t)}\cdot u_\lambda(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt,$$

em que C' é uma curva que envolve o conjunto B, deixando esternamente β,μ e o ponto $\psi(\lambda)$, imagem de λ no plano da variável t. Esta fórmula permite em alguns casos calcular essa indicatriz por meio de resíduos, uma vez conhecida a função $u_\lambda(z)$.

Tomemos por exemplo o caso da transformação homográfica

$$(12)\qquad z = \varphi(t) = \frac{pt+q}{rt+s}, \qquad t = \psi(z) = \frac{-sz+q}{rz-p}$$

em que supomos

$$\Delta = ps - rq \neq 0.$$

Neste caso temos $\varphi'(t) = \Delta/(rt+s)^2$, donde, aplicando a fórmula (11), obtemos

$$(13)\qquad v_\mu(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{t-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-t)}\, u_\lambda\!\left(\frac{pt+q}{rt+s}\right)\frac{\Delta\, dt}{(rt+s)^2}.$$

Tratando-se de uma transformação biunívoca sobre toda a esfera, à região $\bar{A}$, complementar de A, na qual $u_\lambda(z)$ é monógena a menos do polo simples λ, corresponde na esfera t a região $\bar{B}$, complementar do conjunto B, e nesta região a função integranda em (13) só tem singularidades polares, que estão nos polos $t=\beta$, $t=\psi(\lambda)$ e eventualmente $t=-s/r$, o que permite calcular a integral por meio de resíduos; para isto precisamos considerar a região envolvida pela curva C' percorrida em sentido inverso, isto é, pela curva -C', e calcular os resíduos nos polos mencionados e no infinito, se este estiver dentro desse contorno:

1) o resíduo da função integranda em (13) no ponto $t=\beta$ (finito e $\neq -s/r$) é evidentemente

$$- u_\lambda\left(\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\right)\frac{\Delta}{(r\beta+s)^2}$$

logo, a contribuição desse ponto á integral é

$$u_\lambda(\varphi(\beta))\,\varphi'(\beta).$$

2) para o ponto $t = \psi(\lambda)$, supondo λ finito, podemos recorrer à primeira forma da integral (11), substituindo a curva C por uma curva que envolva λ em sentido inverso; lembrando que o resíduo de $u_\lambda(\alpha)$ para $\alpha=\lambda$ é $-F[1] = b$, obtemos para a contribuição no ponto em questão,

$$-\frac{\psi(\lambda)-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-\psi(\lambda))}.b.$$

Para $t = -s/r$, recordando que $u_\lambda(z)$ é infinitésima de 2a. ordem no ponto infinito, o que destroe a aparente singularidade devida ao último fator em (13), vemos que o resíduo nesse ponto é nulo; para $t = \infty$, sendo esse mesmo fator infinitésimo de 2a. ordem e os outros fatores finitos, o resíduo tambem é nulo. Em resumo, a integral (13) se reduz aos resíduos considerados em 1) e 2), isto é, temos

$$(14)\qquad v_\mu(\beta) = u_\lambda(\varphi(\beta))\,\varphi'(\beta) - \frac{\psi(\lambda)-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-\psi(\lambda))}.b$$

fórmula que permite calcular a indicatriz $v_\mu(\beta)$ e que confirma neste caso particular o teorema demonstrado acima, pois os polos μ e $\psi(\lambda)$ da ultima fração estão fóra de B.

Se escolhermos, o que é sempre permitido, $\mu=\psi(\lambda)$, obtemos

$$v_\mu(\beta) = u_\lambda(\varphi(\beta))\,\varphi'(\beta).$$

Suponhamos conhecida a indicatriz de Fantappiè

$$u_\infty(\alpha) = \phi(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha-z}\right]$$

cujo residuo no infinito é, como sabemos, $b = -F[1]$. Teremos então,

$$(15)\qquad u_\lambda(\alpha) = \frac{b}{\alpha-\lambda} + \phi(\alpha)\ ;$$

por outro lado, podemos transformar o coeficiente de b em (14), pondo-o sob a forma

$$\frac{\psi(\lambda)-\mu}{(\beta-\mu)(\beta-\psi(\lambda))} = \frac{\Delta}{\left(\frac{p\beta+q}{r\beta+s}-\lambda\right)(r\beta+s)^2} - \frac{1}{\beta-\mu}\cdot\frac{r\mu+s}{r\beta+s} \; ;$$

substituindo em (14) e pondo $\alpha = \varphi(\beta)$, temos

$$v_\mu(\beta) = \left\{\frac{b}{\alpha-\lambda} + \phi(\alpha)\right\}\frac{\Delta}{(r\beta+s)^2} - \frac{b\,\Delta}{(\alpha-\lambda)(r\beta-s)^2} + \frac{b}{\beta-\mu}\cdot\frac{r\mu+s}{r\beta+s}$$

ou

$$(16) \qquad v_\mu(\beta) = \frac{b}{\beta-\mu}\cdot\frac{r\mu+s}{r\beta+s} + \phi(\alpha)\,\frac{\Delta}{(r\beta+s)^2} =$$

$$= \frac{b}{\beta-\mu} + \phi\left(\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\right)\cdot\frac{\Delta}{(r\beta+s)^2} - \frac{br}{r\beta+s}$$

que é independente de λ, como era de esperar.

CONCLUSÃO

Ao terminar este trabalho, julgamos ser de grande interesse apresentar alguns problemas gerais que pretendíamos abordar, mas que fomos forçados a deixar de lado, ou por falta de tempo ou por outra razão qualquer.

Em primeiro lugar, seria interessante procurar uma estensão da fórmula de Cauchy modificada (Cap. I, §4) ao caso das funções de mais de uma variável, que fosse, como a fórmula demonstrada no texto, invariante para transformações homográficas. Notemos, com efeito, que o problema de transformações de variáveis (Cap. III, §6) só pôde ser abordado em virtude da fórmula referida, e que para os funcionais de funções de n variáveis o único problema desse tipo estudado pelo prof. Fantappiè foi o da transformação projectiva, e para isso foi preciso empregar um artifício que não admite generalização para qualquer outro tipo de transformação (v. Fantappiè (4), p.86 e seguintes)

A indicatriz geral $u_\lambda(\alpha)$ introduzida neste trabalho tem naturalmente grande aplicação para o estudo da derivada funcional, sempre que se trate de funções regulares no infinito, no sentido clássico. Sabe-se com efeito, que essa derivada funcional não é mais que a indicatriz do funcional linear que exprime a primeira variação de um funcional geral, tomando-se como argumento a variação da função variável independente.

A introdução dos funcionais quadráticos e polinomiais do modo exposto no texto de modo muito resumido, é devida a uma sugestão do meu colega Dr. Mario Schenberg; seria interessante verificar em geral se os funcionais polinomiais - somas de funcionais polinomiais homogêneos - coincidem com os de mesmo nome introduzido por Fantappiè, que podem ser definidos como aqueles cuja série de Volterra tem um número finito de termos.

Outra questão não chegámos a examinar por falta de tempo é a aplicação da teoria dos funcionais analíticos, por processos de passagem ao limite, ao estudo dos funcionais definidos para funções reais contínuas ou de alguma classe de Baire (cf. Cap. II,§9) definidas em um intervalo real $a \vdash b$.

Deixámos tambem de lado, por pretendermos estudar mais estensamente, as aplicações do estudo feito no §6 do cap.III sobre o problema da mudança de variáveis nos funcionais analíticos, a outros tipos de transformações, e bem assim a consideração do problema geral da mudança de variáveis, assinalado em nota á pag. 55. De passagem, chamamos a atenção para o teorema sobre funções anlíticas demonstrado no citado paragrafo 6, teorema que julgamos de grande interesse em si mesmo, e que, ao que nos conste, ainda não era conhecido.

BIBLIOGRAFIA

Alexandroff (1) - Alexandroff u. Hopf, TOPOLOGIE I. Berlin,1935.

Catunda, O. (1) - CURSO DE ANÁLISE MATEMÁTICA, segundo notas de aulas do prof. L. Fantappiè. S. Paulo.

Catunda, O. (2) - Un teorema sugl'insiemi, che si riconnette alla teoria dei funzionali analitici. Rend.Lincei,vol.XXIX, s.VI,1939, p. 15.

Catunda, O. (3) - Sobre os sistemas de equações de variações totais, em mais de um funcional incógnito. Anais da Ac. Bras. de Ciências, t. XIV,n.2, 1942,p.109.

Dias, Cândido L.S. (1) - Sobre a regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas. Tese de doutoramento na cadeira de Análise Matemática, 1942.

Fantappiè, L. (1) - I funzionali analitici. Mem.Acad.Lincei, v.III, s. VI, 1930.

Fantappiè, L. (2) - Überblick über die Theorie der analitischer Funktionalen und ihre Anwendungen. J. der D. Math. Verein. 43.Bd., 1933.

Fantappiè, L. (3) - Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico T_0. Rend. di matematica, R. Un. di Roma,1940.

Fantappiè, L. (4) - I funzionali delle funzioni di due variabili Mem. della R. Acc. d'Italia, v.II, 1931

Fréchet, M. (1) - LES ESPACES ABSTRAITS. Paris, 1928

Gama, Lélio (1) - INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS, RIO, 1941

Martinelli, E. (1) - La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse. Rend. Lincei, vol. XXV, s. VI, 1937, p.33.

Montel, P. (1) - LEÇONS SUR LES FAMILLES NORMALES. PARIS, 1927.

Runge, K. (1) - Zur Theorie der eindeutigen analitische Funktionen, Acta Mathematica, v. 6, p. 229 (1885).

Walsh, J.L. (1) - INTERPOLATION AND APPROXIMATION. AM.M.SOC. COLL., vol. XX, 1935.

INDICE

E R R A T A.

Pg.II, linha 4, onde está as ler às.

Pg.II, linha 6, onde está provem ler provém.

Pg.III, " 2, " " sôbre " sob.

" " " -7, " " figura " figuram.

" " " -2, " " prevemente ler brevemente.

Notações: linha 8, onde está intersecção dos conjuntos da família ler intersecção da família de conjuntos.

Pg.3, linhas 11 e 12, onde está grupo abeliano ler espaço vectorial.

Pg.4, linha 3, substituir $\in V \; S$ por $V \in S$.

" 5, " -3, " vizinhanças por vizinhanças da orígem.

" ", " -1, " a última linha por

$T(V,A) = \{u \mid u(A) \subset V\}$, onde $A \in \Phi$ e V é uma vizinhança da orígem em E.

Pg.8, linha -12, onde está $|\langle \tilde{x},x\rangle| \leqslant 1$ ler $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$.

Pg,9, linha 16, " " não contém ler contém.

" ", " -16, " " " " " ".

Pg.10, " 1, " " $x' \in H'$ " $x' \in E'$.

" " , " -8 , " " λ_p " $\lambda .p$.

" 11, " -11, " " a contém " o contém.

" 12, " 15, " " $\langle x,x'\rangle = \langle y,y'\rangle$ ler $\langle x,x'\rangle = \langle y,x'\rangle$

" " , " -15, " " dual frac E de E ler dual fraco E" de E.

" 13, " 10, " " V^o ler W^o.

" " , " -7, " " para $x' \in A^o$ ler para algum $x' \in A^o$.

" 14, " -12, " " $\bar{A}=E$ ler $\bar{V}=E$ onde V é o sub-espaço gerado por A.

" ", " -2, " " vector a ler vector -a.

" 15, " -15, " " x,x' ler $\langle x,x'\rangle$.

" 16, " 16, " " propriedade 3, ler propriedade 2.

" 17, " -14, acrescentar τ no fim da linha.

" 18, " 5, onde está circular arbitrária ler circular fechada arbitrária.

" ", " 11, " " $\sigma(E,E')$-vizinhança ler $\tau(E,E')$-vizinhança.

" 19, " 1, " " E ler E^*.

" 20, " -4, " " $x \in V$ ler $x \in A$.

" 21, " -2, " " L " B.

" 22, " 3, " " $U^o_{E''E'}$ " $U^{oo}_{E''E'}$.

Pg. 22, linha -5, onde está fechadas ler compactas.
" 25, " -1, " " $F'_W \subset F_W$ " $F'_W \supset F_W$.
" 26, " 1, " " êle contém um oportuno conjunto F_{W_1}. Vê-se assim que F_W é também uma base do filtro dado ler os conjuntos F'_W formam a base de um filtro de Cauchy menos fino que o filtro Φ.

Pg. 26, suprimir as linhas -4, -5, -6, e -7 e substituir por: tendo-se presente a definição de $F_{\tilde{V}(i)}$ segue-se que todos os seus elementos são da forma

$$x = x_o + \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k, \quad x_k \in \tfrac{1}{2}W_k^{(k)} \quad \text{para } k < i, \quad x_i \in \tfrac{1}{2}W^{(i)},$$

$$\text{com} \quad \sum_{k=1}^{i} |\alpha_k| \leqslant 1.$$

Pg.27, linha 2, onde está $x_o + {}_i x_i + {}_i x'_i$ ler $x_o + \alpha_i x_i + \alpha'_i x'_i$.
" " , " 9, " " filtro , ler filtro Φ.
" 30, " 9, suprimir a palavra linear.
" 31, " 2, suprimir todo o período.
" 40, " 9, onde está proposição 8 ler proposição 9.
" 40, " 16, " " no interior de F_n ler quando $x_m(z)$ converge uniformemente para $x(z)$ no interior de F_n.
Pg.44, linha 9, onde está vizinhanças ler vizinhanças convexas.
" 45, " 13, " " Seja a " Seja δ a.
" 50, " -10, " " do dual forte, ler forte do dual.
" 52, " 5, " " partes compactas, ler partes relativamente compactas.
" 55, " -3, " " $a_t \notin B$ ler $a_t \in B$.
" " , " -2, " " dêste capítulo ler do §1 dêste capítulo.
" 62, " -12, introduzir a noção de comparação de topologias, T.G.I., pg.9.

Na bibliografia acrescentar:

Nachbin, L - II. Sobre el axioma de las sucesiones no convergentes en algunos espacios topologicos lineales - Revista de la Union Matematica Argentina, vol.XII, pg.147.